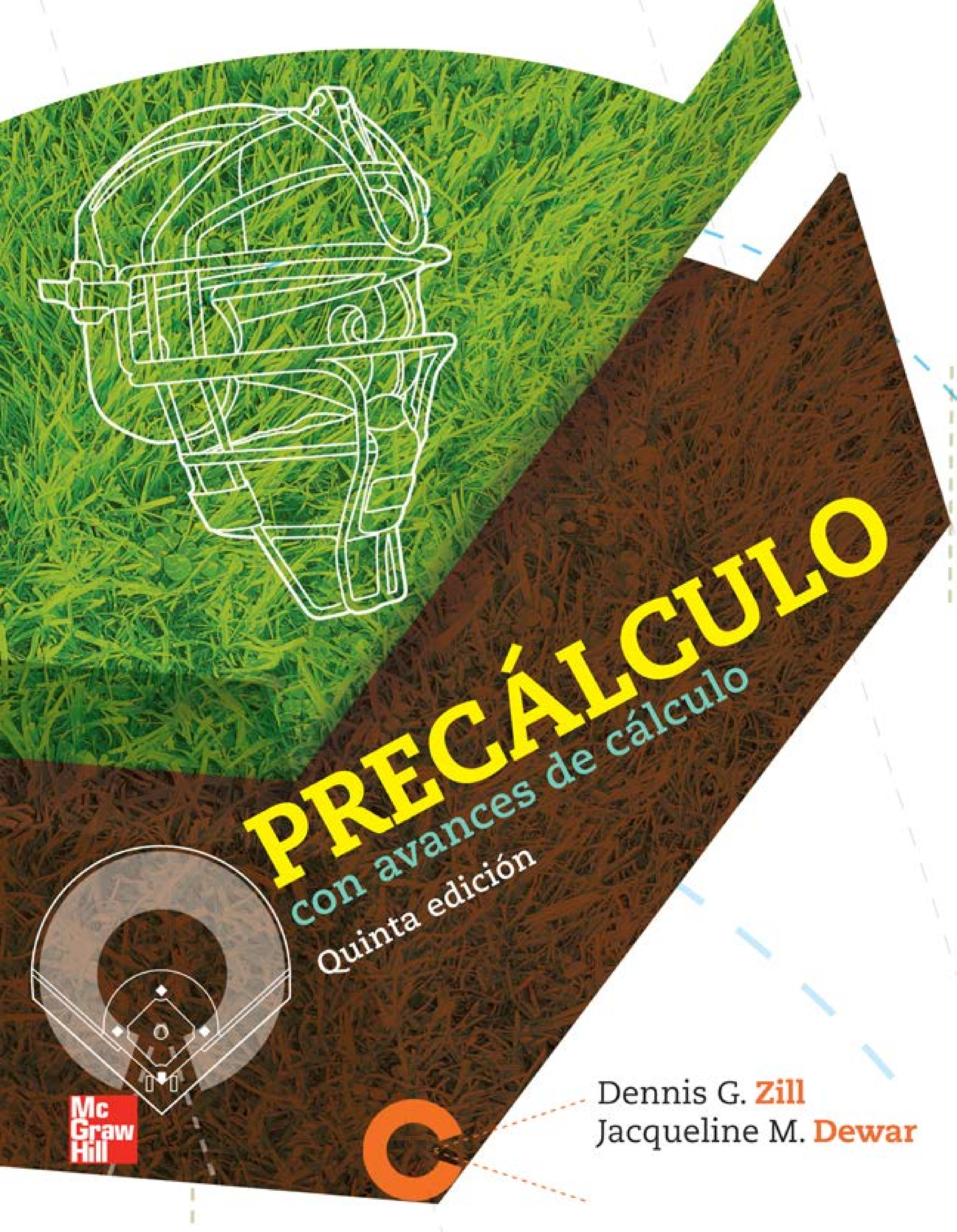


PRECÁLCULO
con avances de cálculo
Quinta edición
Dennis G. Zill
Jacqueline M. Dewar
Mc Graw Hill

PRECÁLCULO

PRECÁLCULO

con avances de cálculo

Quinta edición

DENNIS G. ZILL

Loyola Marymount University

JACQUELINE M. DEWAR

Loyola Marymount University

Revisión técnica

María del Carmen Abad González

Universidad de las Américas, Puebla

José Ángel V. Soto Sánchez

Universidad de las Américas, Puebla

McGraw Hill

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA
MADRID • NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO • SAO PAULO
AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TORONTO

Director general: Miguel Ángel Toledo
Editor sponsor: Pablo E. Roig
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha
Editora de desarrollo: Ana Laura Delgado
Supervisor de producción: Zeferino García
Traducción: Virgilio González y Pozo (†) / Thomas Werner Bartenbach

PRECÁLCULO CON AVANCES DE CÁLCULO
Quinta edición

Mc Graw Hill Educación

Edificio Punta Santa Fe
Prolongación Paseo de la Reforma 1015 Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN: 978-607-15-0715-0

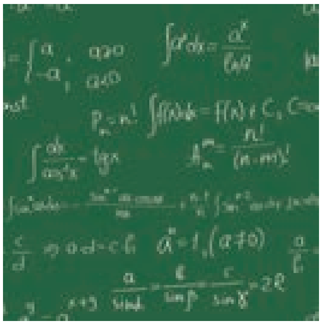
(ISBN cuarta edición: 978-970-10-6516-7)

1234567890 1098765432

Impreso en China *Printed in China*

Contenido

Prefacio ix



1 Desigualdades, ecuaciones y gráficas 3

1.1 La recta numérica 3
1.2 Valor absoluto 11
1.3 El sistema de coordenadas rectangulares 18
1.4 Círculos y gráficas 24
1.5 Avance DE CÁLCULO Álgebra y límites 34
Capítulo 1 Ejercicios de repaso 46

2 Funciones 49

2.1 Funciones y gráficas 49
2.2 Simetría y transformaciones 58
2.3 Funciones lineales 67
2.4 Funciones cuadráticas 75
2.5 Funciones definidas en intervalos 84
2.6 Combinación de funciones 92
2.7 Funciones inversas 99
2.8 Traducción de palabras a funciones 107
2.9 Avance DE CÁLCULO El problema de la recta tangente 115
Capítulo 2 Ejercicios de repaso 123

3 Funciones polinomiales y funciones racionales 127

3.1 Funciones polinomiales 127
3.2 División de funciones polinomiales 138
3.3 Raíces y factores de funciones polinomiales 143
3.4 Raíces reales de funciones polinomiales 150
3.5 Funciones racionales 157
3.6 Fracciones parciales 170
3.7 Avance de cálculo El problema del área 176
Capítulo 3 Ejercicios de repaso 183

4 Funciones trigonométricas 189

4.1 Ángulos y su medición 189
4.2 Las funciones seno y coseno 196
4.3 Gráficas de las funciones seno y coseno 204
4.4 Otras funciones trigonométricas 214
4.5 Identidades especiales 223
4.6 Ecuaciones trigonométricas 233
4.7 Funciones trigonométricas inversas 240
4.8 Movimiento armónico simple 249
4.9 Trigonometría del triángulo rectángulo 254
4.10 Ley de los senos y ley de los cosenos 265
4.11 Avance de cálculo Regreso al concepto de límite 273
Capítulo 4 Ejercicios de repaso 280

5 Funciones exponenciales y logarítmicas 287

5.1 Funciones exponenciales 287
5.2 Funciones logarítmicas 295
5.3 Modelos exponenciales y logarítmicos 304
5.4 Avance de cálculo Funciones hiperbólicas 316
Capítulo 5 Ejercicios de repaso 322

6 Secciones cónicas 327

6.1 La parábola 327

6.2 La elipse 334

6.3 La hipérbola 342

6.4 Sistema de coordenadas polares 351

6.5 Gráficas de ecuaciones polares 355

6.6 Secciones cónicas en coordenadas polares 364

6.7 Ecuaciones paramétricas 371

6.8 Avance DE CÁLCULO Espacio tridimensional 379

Capítulo 6 Ejercicios de repaso 387

Examen final 390

Respuestas a problemas impares seleccionados RESP-1

Índice analítico I-1

Créditos I-10

Prefacio

Al profesor

Filosofía

Hace algunos años publicamos un breve texto cuyo título en español sería “Matemáticas básicas para el cálculo”. En el prefacio de la primera edición se dijo:

> El instructor siempre tiene que hacer frente al dilema de un exceso de materiales y a la falta de tiempo. En el vasto mercado de precálculo, se pueden encontrar textos que cubren todo, desde temas de álgebra elemental hasta temas de cálculo matricial… Creemos que existe una gran necesidad de un texto que llegue rápidamente al núcleo del asunto, un texto que presente únicamente aquellos temas que serán de uso directo e inmediato en la mayoría de los cursos de cálculo.

Después de tres ediciones, aquella publicación se fue perdiendo, puesto que la empresa editora original se fusionó con una editorial más grande, y luego la compañía grande fue adquirida por una todavía más grande. En los años que han pasado, no hemos cambiado de parecer. Al contrario, sentimos que muchos textos de precálculo se quedan cortos por no concentrarse en las matemáticas específicas que se necesitan para el estudio del cálculo. Puesto que los textos modernos tienden a ser enciclopédicamente largos, el instructor podrá repasar muchos capítulos con gran velocidad o usar un número razonable de capítulos, dejando gran parte de un libro sin usar. Es por eso que hemos decidido volver a editar nuestras “Matemáticas básicas para el cálculo”. El presente texto, ahora renombrado como *Precálculo con avances de cálculo*, quinta edición, representa una revisión completa de esa obra.

A continuación enlistamos parte de nuestra filosofía pedagógica que respalda esta quinta edición.

- A lo largo de la revisión sostuvimos firmemente nuestra creencia en un planteamiento objetivo del precálculo. Intencionalmente cubrimos sólo un número razonable de temas. Los seis capítulos que abarcan este texto se podrán cubrir en un curso de un semestre. Nuestro estilo es informal, intuitivo y sencillo; hemos evitado el formato de teorema-prueba. Tratamos de hablarle en forma directa al estudiante.
- Hacemos hincapié en los fundamentos, especialmente en los de álgebra. Por medio de muchos ejemplos y ejercicios variados damos a los estudiantes oportunidades para practicar operaciones tales como: factorización, desarrollo de una potencia de un binomio, completar el cuadrado, divisiones sintética y larga, racionalización y solución de desigualdades y ecuaciones, en situaciones similares a las que encontrarán en el cálculo.

A todo lo largo enfatizamos la importancia de estar familiarizado con fórmulas clave de álgebra, las leyes de exponentes, las leyes de logaritmos, así como definiciones e identidades trigonométricas fundamentales.

- Los temas que se presentan son únicamente los que en nuestra opinión son esenciales para el éxito en cursos de cálculo. Esto le brindará a los instructores tiempo para trabajar con sus estudiantes a fin de reforzar sus habilidades algebraicas, logarítmicas y trigonométricas.
- En la introducción de nuevos temas vamos paso a paso. Por lo general, cuando un texto presenta varios tipos de funciones y conceptos funcionales relacionados en tan sólo una o dos secciones los estudiantes se abruman. Por ende nuestro ritmo, especialmente en el capítulo 2, *Funciones*, es más pausado. Por ejemplo, postergamos la introducción de problemas hasta después de presentar los conceptos esenciales de función. De la misma manera, el importante tema de funciones definidas en secciones se presenta después y se le da su propia sección.
- A lo largo del texto conceptualizamos el curso como un puente hacia el cálculo. En particular empleamos parte de la terminología del cálculo de manera informal para acostumbrar a los estudiantes a estos términos. Así utilizamos, por ejemplo, las palabras "función continua" para describir gráficas de funciones polinómicas y exponenciales y "funciones discontinuas" en el contexto de funciones racionales y definidas en intervalos. Cuando se introduce el concepto de líneas secantes para la gráfica de una función, utilizamos las palabras "cociente de diferencia" para describir sus pendientes.
- En cálculo es fundamental ser capaz de trazar rápida y precisamente gráficas de funciones y ecuaciones básicas. Por lo tanto, hemos puesto gran hincapié en afinar el entendimiento del estudiante de conceptos tales como intersecciones, simetría, transformaciones rígidas y no rígidas, asíntotas y comportamiento en los extremos, además de reconocer el tipo de función o ecuación, todo ello como ayudas valiosas en el dibujo a mano de su gráfica. El uso de la tecnología se limita a problemas del tipo donde se complica este análisis matemático. Estos problemas se colocan cerca del final de un conjunto de ejercicios y están marcados claramente.
- Creemos firmemente que debe usarse una figura para ilustrar un ejemplo, una descripción o un problema en los ejercicios cada vez que sea posible; por ello hay numerosas figuras en este texto; alrededor de 1600.
- Como en las ediciones anteriores, opinamos que el acercamiento a la trigonometría para el cálculo es a través del círculo unitario.

Énfasis en la álgebra Muchas veces hemos visto cómo estudiantes en una clase de cálculo realizan una operación, por ejemplo una diferenciación, de manera impecable, pero fallan en completar el problema porque tuvieron dificultades en simplificar las expresiones resultantes o por no poder resolver una ecuación. Como hemos mencionado, en esta edición continuamos el esfuerzo para reforzar las habilidades algebraicas. Notas al margen, así como anotaciones en el texto completan los detalles de soluciones de ejemplos y proporcionan información adicional al lector.

Énfasis en la terminología del cálculo Palabras cómo "función continua" y "límite" se utilizan de manera corriente. La idea es darles a los estudiantes un sentido intuitivo del significado de estas palabras antes de exponerlos a sus definiciones formales en el cálculo.

Traducción de palabras a funciones Como profesores sabemos que la tasa relacionada y máximos-mínimos aplicados, o de optimización, puede ser una experiencia desalentadora para algunos estudiantes de cálculo. Generalmente, la interpretación correcta de las palabras para establecer una ecuación o una función en este tipo de problemas presenta el mayor desafío para muchos estudiantes. Por ello es apropiado hacer hincapié en este material en un curso de precálculo. En la sección 2.8, que se llama *Traducción de palabras a funciones*, empezamos ilustrando cómo traducir una descripción verbal a una representación simbólica de una función. Luego presentamos problemas reales tomados de un texto de cálculo para demostrar cómo descifrar el enunciado del problema y transformar estas palabras en una función objetiva. Describimos la importancia de trazar imágenes, usar variables para describir cantidades pertinentes, identificar una restricción entre las variables, utilizando la restricción para eliminar una variable extra, y observar que el dominio de la función objetivo podrá no ser igual que su dominio implícito. A fin de asegurar que el enfoque esté completamente sobre el proceso de formar una función simbólica a partir de palabras, hemos decidido no describir cómo se resuelven estos problemas de optimización.

Notas del salón de clase Ciertas secciones de este texto concluyen con observaciones llamadas *Notas del salón de clase*. Estos comentarios se dirigen directamente al estudiante y abordan una variedad de asuntos de estudiantes / libro de texto / salón de clase / cálculo, tales como terminología alternativa, refuerzo de conceptos importantes, qué material es o no es recomendado para memorizar, malas interpretaciones, errores comunes, procedimientos de solución, calculadoras, así como consejos acerca de la importancia de nitidez y organización.

Muestras de cálculo Los capítulos en este texto concluyen con una sección llamada *Avance de cálculo*. Cada una de estas secciones está dedicada a un concepto individual de cálculo:

- Capítulo 1, sección 1.5: *Álgebra y límites*
- Capítulo 2, sección 2.9: *El problema de la tangente*
- Capítulo 3, sección 3.7: *El problema de área*
- Capítulo 4, sección 4.11: *Regreso al concepto de límite*
- Capítulo 5, sección 5.4: *Las funciones hiperbólicas*
- Capítulo 6, sección 6.8: *Espacio tridimensional*

En estas secciones, la discusión se mantiene en un nivel que está fácilmente dentro del alcance de un estudiante de precálculo. El énfasis *no* está en el cálculo; el tema del cálculo ofrece un marco y motivación para las matemáticas de precálculo que abordamos. El enfoque en estas secciones está sobre las manipulaciones algebraicas, logarítmicas y trigonométricas que son necesarias para completar exitosamente problemas de cálculo típicos relacionados con el tema del *Avance de cálculo*. Por consiguiente, esta sección está prevista para su enseñanza como parte de un curso regular de matemáticas de precálculo. En *Álgebra y límites* examinamos el cálculo analítico de un límite como $x \to a$, donde a representa un número real. El material se presenta de tal manera que el instructor tiene una opción: podrá elegir repasar lo importante del álgebra en la simplificación de expresiones fraccionales usando desarrollos binomiales, factorización, denominadores comunes y racionalizaciones, o podrá dar un paso extra y calcular realmente un límite. De manera parecida discutimos el *Problema de la línea tangente* para luego examinar el cálculo de cuatro pasos del límite del cociente de diferencias $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cuando $h \to 0$. Una vez más, el énfasis principal está en los pasos que no son de cálculo, pero el instructor puede optar por extender la explicación para incluir el concepto de una derivada de una función. En las secciones 1.5 y 2.9 no nos sumergimos en los aspectos teóricos de la existencia o no existencia de límites. Todos los límites que se dan en los ejercicios o en los ejemplos existen. En *El problema de área* describimos la geometría y el álgebra requeridos para usar un proceso sin límite para calcular el área debajo de una curva. En *El regreso al límite* examinamos la evaluación de algunos límites trigonométricos y el cálculo del cociente diferente $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cuando f es la función de seno o coseno. En *Las funciones hiperbólicas* usamos primero el cociente diferencial para mostrar al estudiante por qué el número e es la base más natural para la función exponencial en una estructura de cálculo, y luego concluimos la sesión con una discusión del seno hiperbólico y coseno hiperbólico. La sección 6.8, *Espacios tridimensionales*, es nueva en esta edición. En esta sección introducimos los rudimentos del sistema de coordenadas rectangulares en tres dimensiones y consideramos las ecuaciones de esferas y planos.

Examen final Después de los seis capítulos del texto presentamos una lista de 70 preguntas llamada *Examen final*. Esta "prueba" consiste principalmente en preguntas para llenar espacios y preguntas de verdadero/falso. No fue nuestra intención emular un examen final real de precálculo, sino ofrecer un vehículo para un análisis y asimilación del curso completo. Proponemos que se dedique parte de las clases a una discusión de estas preguntas a fin de ayudar a los estudiantes en la preparación de su verdadero examen final y su subsiguiente transición al cálculo. Desde luego, el instructor queda libre para utilizar este material de cualquier manera que elija (incluso ignorarlo completamente).

Ejercicios Todos los conjuntos de ejercicios fueron actualizados, y se han agregado muchos problemas nuevos. La mayoría de los ejercicios concluye con problemas conceptuales bajo el encabezado *Para discusión*. Esperamos que los instructores utilicen estos problemas, que son mayormente de naturaleza conceptual, así como su evaluación para llevar a cabo un intercambio de ideas en clase con los estudiantes acerca de cómo se pueden resolver estos problemas. Asimismo, podrán ser la base para proyectos de tarea. Para alentar el pensamiento creativo, a propósito no hemos incluido respuestas a estos problemas.

Nuevo de la quinta edición A continuación enlistamos algunos puntos que son nuevos en esta quinta edición.

- Fue agregada una sección nueva al capítulo 4 sobre el movimiento armónico simple.
- Se incluye una sección sobre ecuaciones paramétricas en el capítulo 6.
- También, en el capítulo 6, se presenta una nueva muestra de cálculo de espacios tridimensionales.
- Ahora se discute la rotación de gráficas polares (debido a su similitud con las gráficas rectangulares desplazadas) en la sección 6.6.
- La discusión de las funciones hiperbólicas en la sección 5.4 fue ampliada.
- En todo el texto se han agregado muchos problemas nuevos.
- El examen final al término del texto fue ampliado.

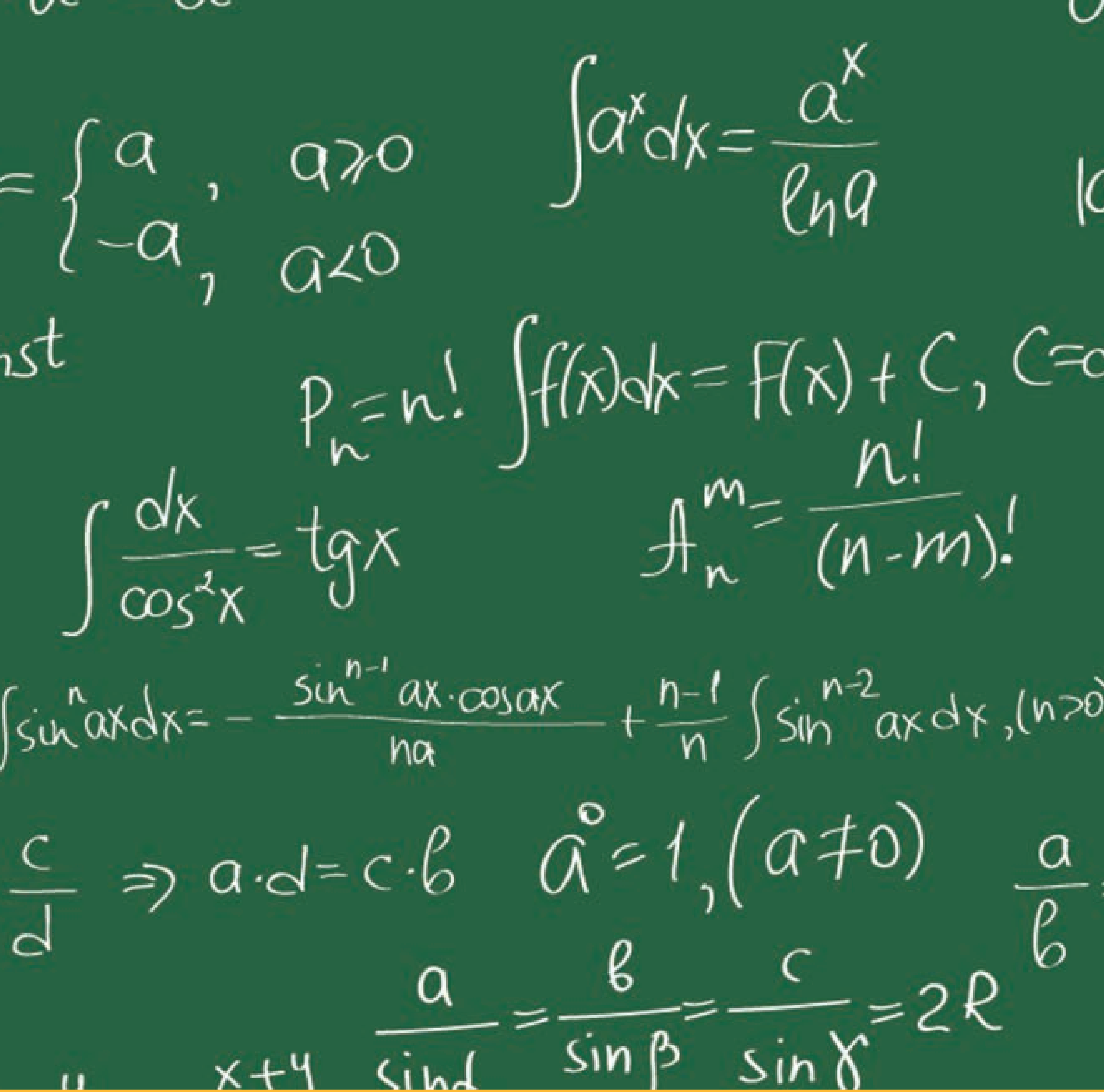
Al estudiante

Tras haber enseñado matemáticas universitarias durante muchos años hemos visto casi todos los tipos de estudiantes, desde el genio naciente que inventaba a su propio cálculo hasta estudiantes que luchan para superar las mecánicas más rudimentarias de la materia. A menudo la fuente de dificultad en cálculo se puede deber a habilidades débiles en álgebra y una base inadecuada de trigonometría. La base del cálculo es su conocimiento y habilidades previos, y habrá mucho terreno nuevo por cubrir. En consecuencia, hay muy poco tiempo para repasar la matemática de precálculo en el salón de clase. Por ello, los que enseñan cálculo suponen que uno sabe factorizar, simplificar y resolver ecuaciones, resolver desigualdades, manejar valores absolutos, usar una calculadora, aplicar las leyes de exponentes, buscar ecuaciones de líneas, graficar puntos, trazar gráficas básicas y aplicar importantes identidades logarítmicas y trigonométricas. La habilidad para hacer álgebra y trigonometría, trabajar con exponenciales y logaritmos y dibujar *en forma manual* gráficas básicas rápida y precisamente son elementales para el éxito en un curso de cálculo. El presente libro se enfoca en los temas y habilidades matemáticas específicas que consideramos esenciales para el cálculo.

En este texto hemos tratado de darle toda la ayuda posible dentro de los confines de la página impresa, utilizando características como anotaciones de margen, anotaciones dentro de ejemplos, notas de precaución, *Notas del salón de clase* y el *Examen final*. Las múltiples anotaciones en el margen y dentro del texto ofrecen informaciones o explicaciones adicionales de los pasos a seguir en la resolución de un ejemplo. Los que enseñamos y escribimos textos de matemáticas nos esforzamos para comunicar claramente *cómo* hacer matemáticas. Este texto refleja nuestra filosofía de que un texto de matemáticas para el nivel universitario inicial debería ser legible, directo y cargado de motivación. La razón principal para estudiar precálculo es la de prepararse bien para el cálculo. Para mostrarles cómo el material cubierto en este texto es esencial para el éxito en cálculo, cerramos cada capítulo con una sección llamada *Avance de cálculo*. En cada una de estas secciones, un tema de cálculo proporciona el marco y la motivación para la matemática de precálculo y demuestra que ésta es una parte vital del problema de cálculo.

Finalmente les advertimos que *aprender* matemáticas no es como aprender a montar una bicicleta que, una vez aprendido, permanecerá toda la vida. La matemática es más bien parecida al aprendizaje de un idioma o de un instrumento musical: se necesita tiempo y esfuerzo para memorizar fórmulas básicas y para aprender cuándo aplicarlas. Lo más importante es que se requiere muchísima práctica para adquirir y mantener experticia. Incluso los músicos experimentados siguen practicando las escalas fundamentales. Así que a fin de cuentas usted, el estudiante, puede aprender matemáticas (es decir, hacer que "se pegue") solamente por medio del trabajo duro de hacer matemáticas.

En conclusión, le deseamos sinceramente la mejor suerte en este curso preparatorio y en su subsiguiente curso de cálculo.



Contenido del capítulo

1.1 La recta numérica

1.2 Valor absoluto

1.3 El sistema de coordenadas rectangulares

1.4 Círculos y gráficas

1.5 Avance DE CÁLCULO Álgebra y límites

Capítulo 1 Ejercicios de repaso

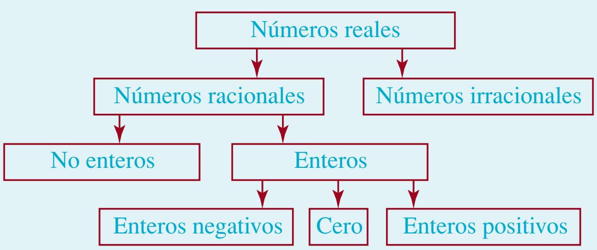
Desigualdades, ecuaciones y gráficas

1

1.1 La recta numérica

Introducción En el cálculo usted estudiará cantidades que se describen con números reales. En consecuencia, comenzaremos con un repaso del conjunto de números reales, usando la terminología y la notación que encontrará usted en cálculo.

Recordará que el conjunto R de **números reales** está formado por números que son **racionales** o **irracionales**. Los números racionales tienen la forma a/b, donde a y $b \neq 0$ son enteros. Por ejemplo, $-3, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 5$ y $\frac{127}{4}$ son números racionales. Los números irracionales son los que no son racionales; es decir, son números que no pueden expresarse como un cociente de enteros. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ y π son números irracionales. Todo número real también se puede escribir como decimal. Un número racional se puede expresar como un *decimal que termina*, como $\frac{1}{8} = 0.125$, o como un *decimal que no termina y que se repite*, como $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$ Los decimales que se repiten, como $0.666\ldots$ y $8.545454\ldots$, suelen escribirse en la forma $0.\overline{6}$ y $8.\overline{54}$, respectivamente; la barra indica que el dígito o el conjunto de dígitos se repiten. Un número irracional siempre es un *decimal que no termina y que no se repite*, como $\sqrt{2} = 1.41421\ldots$ o $\pi = 3.14159\ldots$ El esquema siguiente resume la relación entre los conjuntos principales de números reales.



La recta numérica El conjunto R de los números reales puede ponerse en correspondencia uno-a-uno con el conjunto de los puntos de una línea recta. En consecuencia, podemos imaginar, o representar a los números reales como los puntos de una *recta horizontal* llamada **recta numérica** o **recta de coordenadas**. El punto que se escoja para representar al número 0 se llama **origen**. La dirección hacia la derecha del 0 se llama **dirección positiva** en la recta numérica. La dirección hacia la izquierda del 0 es la **dirección negativa**. Los números reales que corresponden a puntos a la derecha del 0 se llaman **números positivos**, y los números que corresponden a puntos a la izquierda del 0 se llaman **números negativos**. Como se ve en la **FIGURA 1.1.1**, se considera que el número 0 no es positivo ni negativo. De aquí en adelante no diferenciaremos entre un punto en la recta numérica y el número que corresponde a ese punto.

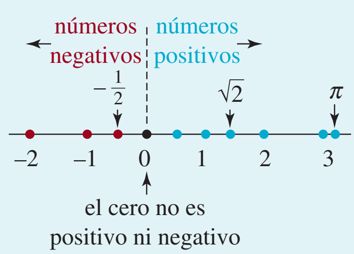


FIGURA 1.1.1 La recta real

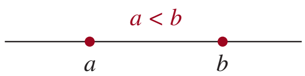


FIGURA 1.1.2 a es menor que b

Desigualdades

La recta numérica es útil para demostrar relaciones de orden entre dos números reales a y b. Como se ve en la **FIGURA 1.1.2**, se dice que el número a es **menor que** el número b, y se escribe $a < b$, siempre que el número a esté a la izquierda del número b en la recta numérica. En forma equivalente, como el número b está a la derecha de a en la recta numérica, se dice que b es **mayor que** a y se escribe $b > a$. Por ejemplo, $4 < 9$ es lo mismo que $9 > 4$. También se usa la notación $a \leq b$ si el número a es **menor que o igual** al número b. De igual modo, $b \geq a$ quiere decir que b es **mayor que o igual a** a. Por ejemplo, $2 \leq 5$, ya que $2 < 5$. También, $4 \geq 4$, porque $4 = 4$. En el caso de dos números reales a y b cualesquiera, exactamente *una* de las afirmaciones siguientes es cierta:

$$a < b, \qquad a = b \qquad \text{o} \qquad a > b.$$

A los símbolos $<$, $>$, $\geq$ y $\leq$ se les llama **símbolos de desigualdad**, y a las expresiones como $a < b$ o $b \geq a$ se les llama **desigualdades**. La desigualdad $a > 0$ quiere decir que el número a está a la derecha del número 0 en la recta numérica, por lo que a es **positivo**. Para indicar que un número a es **negativo** se usa la desigualdad $a < 0$. Como la desigualdad $a \geq 0$ quiere decir que a es mayor que 0 (positivo) o igual a 0 (que no es positivo ni negativo), se dice que a es **no negativo**.

Solución de desigualdades

Nos interesa resolver diversas clases de desigualdades que contengan una variable. Si un número real a se sustituye por la variable x en una desigualdad como

$$8x + 4 < 16 + 5x, \tag{1}$$

y si el resultado es un enunciado correcto, se dice que a es una **solución** de la desigualdad. Por ejemplo, -2 es una solución de la ecuación (1), porque si x se sustituye por -2, la desigualdad que resulta es $8(-2) + 4 < 16 + 5(-2)$ y se simplifica al enunciado correcto $-12 < 6$. La palabra *resolver* quiere decir que se debe determinar el conjunto de *todas* las soluciones de una desigualdad como la (1). A este conjunto se le llama **conjunto solución** de la desigualdad. Se dice que dos desigualdades son **equivalentes** si tienen exactamente el mismo conjunto solución. La representación del conjunto solución en la recta numérica es la **gráfica** de la desigualdad.

Una desigualdad se resuelve determinando una desigualdad equivalente que tenga soluciones obvias. La lista siguiente resume tres operaciones que producen desigualdades equivalentes.

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

Suponga que a y b son números reales, y que c es un número real distinto de cero. Entonces, la desigualdad $a < b$ es equivalente a:

i) $a + c < b + c$,
ii) $ac < bc$, para $c > 0$,
iii) $ac > bc$, para $c < 0$.

Con frecuencia se olvida la propiedad *iii*). En palabras, *iii*) dice que:

Si una desigualdad se multiplica por un número negativo, entonces, se debe invertir la dirección de la desigualdad resultante.

Por ejemplo, si se multiplica la desigualdad $-2 < 5$ por -3, el símbolo *menor que* cambia al símbolo *mayor que*:

$$-2(-3) > 5(-3) \qquad \text{o sea} \qquad 6 > -15.$$

EJEMPLO 1 Solución de la desigualdad (1)

Resolver $8x + 4 < 16 + 5x$.

Solución La desigualdad se resuelve con base en el empleo de las propiedades de las desigualdades, mediante las cuales se obtiene una secuencia de desigualdades equivalentes.

$$\begin{aligned} 8x + 4 &< 16 + 5x \\ 8x + 4 - 4 &< 16 + 5x - 4 && \leftarrow \text{por } i) \\ 8x &< 12 + 5x \\ 8x - 5x &< 12 + 5x - 5x && \leftarrow \text{por } i) \\ 3x &< 12 \\ (\tfrac{1}{3})3x &< (\tfrac{1}{3})12 && \leftarrow \text{por } ii) \\ x &< 4. \end{aligned}$$

Si se usa la notación de conjuntos, el conjunto solución es $\{x \mid x \text{ real y } x < 4\}$. ■

☐ Notación de intervalos

El conjunto solución del ejemplo 1 se grafica en la recta numérica de la FIGURA 1.1.3, como una flecha de color que apunta hacia la izquierda, sobre la recta. En la figura, el paréntesis derecho después del 4 indica que el número 4 *no está* incluido en el conjunto solución. Como éste se extiende indefinidamente hacia la izquierda, hacia la dirección negativa, la desigualdad $x < 4$ también se puede escribir como $-\infty < x < 4$, donde ∞ es el símbolo de infinito. En otras palabras, el conjunto solución de la desigualdad $x < 4$ es

$$\{x \mid x \text{ real y } x < 4\} = \{x \mid -\infty < x < 4\}.$$

Al usar la **notación de intervalos**, este conjunto de números reales se escribe $(-\infty, 4)$, que es un ejemplo de un **intervalo no acotado**. La tabla 1.1 es un resumen de las diversas desigualdades y sus conjuntos solución, así como las notaciones de intervalo, los nombres y las

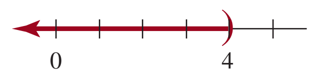


FIGURA 1.1.3 Conjunto solución del ejemplo 1; en la notación de intervalo es $(-\infty, 4)$

TABLA 1.1 Desigualdades e intervalos

Desigualdad	Conjunto solución	Notación de intervalo	Nombre	Gráfica
$a < x < b$	$\{x \mid a < x < b\}$	(a, b)	Intervalo abierto	
$a \le x \le b$	$\{x \mid a \le x \le b\}$	$[a, b]$	Intervalo cerrado	
$a < x \le b$	$\{x \mid a < x \le b\}$	$(a, b]$	Intervalo semiabierto	
$a \le x < b$	$\{x \mid a \le x < b\}$	$[a, b)$	Intervalo semiabierto	
$a < x$	$\{x \mid a < x < \infty\}$	(a, ∞)		
$x < b$	$\{x \mid -\infty < x < b\}$	$(-\infty, b)$		
$x \le b$	$\{x \mid -\infty < x \le b\}$	$(-\infty, b]$	Intervalos no acotados	
$a \le x$	$\{x \mid a \le x < \infty\}$	$[a, \infty)$		
$-\infty < x < \infty$	$\{x \mid -\infty < x < \infty\}$	$(-\infty, \infty)$		

gráficas. En cada uno de los primeros cuatro renglones de la tabla, a los números a y b se les llama **extremos** del intervalo. Como conjunto, el **intervalo abierto**

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}$$

no contiene a los extremos, mientras que el **intervalo cerrado**

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$$

incluye a ambos. También observe que la gráfica del último intervalo de la tabla 1.1, que se extiende en forma indefinida hacia la izquierda y hacia la derecha, es toda la recta numérica. Por lo general, en cálculo se usa la notación de intervalo $(-\infty, \infty)$ para representar al conjunto R de los números reales.

Corresponde aquí presentar una nota precautoria, útil cuando es necesario usar la tabla 1.1. Los **símbolos de infinito**, $-\infty$ ("menos infinito") e ∞ ("infinito") no representan números reales y *nunca* deben manipularse aritméticamente como un número. Los símbolos de infinito sólo son dispositivos de notación: $-\infty$ e ∞ se usan para indicar no acotamiento en la dirección negativa y en la dirección positiva, respectivamente. Así, al usar la notación de intervalos, los símbolos $-\infty$ e ∞ nunca pueden aparecer junto a un paréntesis rectangular o corchete. Por ejemplo, la expresión $(2, \infty]$ no tiene sentido.

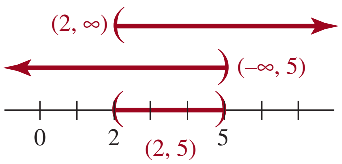


FIGURA 1.1.4 Los números en (2, 5) son los números comunes a (2, ∞) y a (−∞, 5)

A veces, a una desigualdad de la forma $a < x < b$ se le llama **desigualdad simultánea**, porque el número x está *entre* los números a y b. En otras palabras, $x > a$ *y* al mismo tiempo $x < b$. Por ejemplo, los números reales que satisfacen $2 < x < 5$ representan la intersección de los intervalos definidos por las desigualdades $2 < x$ y $x < 5$. Recuerde que la **intersección** de dos conjuntos A y B se escribe $A \cap B$, que es el conjunto de elementos que están en A *y también* en B; en otras palabras, los elementos que son comunes a ambos conjuntos. Como se ve en la **FIGURA 1.1.4** debido a que la superposición de las flechas se prolongan indefinidamente hacia la derecha y hacia la izquierda, el conjunto solución de la desigualdad $2 < x < 5$ se puede escribir como la intersección $(2, \infty) \cap (-\infty, 5) = (2, 5)$.

EJEMPLO 2 Solución de una desigualdad simultánea

Resolver $-2 \leq 1 - 2x < 3$.

Solución Como se describió antes, una forma de proceder es resolver dos desigualdades:

$$-2 \leq 1 - 2x \qquad \text{y} \qquad 1 - 2x < 3$$

para después tomar la intersección de los dos conjuntos solución. Un método más rápido es resolver las dos desigualdades en forma simultánea del siguiente modo:

$$\begin{aligned} -2 &\leq 1 - 2x < 3 \\ -1 - 2 &\leq -1 + 1 - 2x < -1 + 3 \qquad \leftarrow \text{por } i) \\ -3 &\leq -2x < 2. \end{aligned}$$

Se aísla la variable x que está en medio de la última desigualdad simultánea, multiplicando por $-\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} (-\tfrac{1}{2})(-3) \geq (-\tfrac{1}{2})(-2x) &> (-\tfrac{1}{2})2 \qquad \leftarrow \text{por } iii) \\ \tfrac{3}{2} \geq x &> -1, \end{aligned}$$

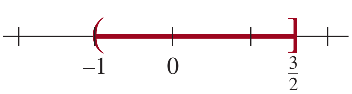


FIGURA 1.1.5 Conjunto solución del ejemplo 2

en donde se ve que la multiplicación por el número negativo ha invertido la dirección de las desigualdades. Para expresar esta desigualdad en notación de intervalos, primero se reescribe de tal manera que el número más a la izquierda en la recta numérica esté en el lado izquierdo de la desigualdad: $-1 < x \leq \frac{3}{2}$. Así, el conjunto solución de la última desigualdad es el intervalo semiabierto $(-1, \frac{3}{2}]$; el corchete de la derecha quiere decir que $\frac{3}{2}$ está incluido en el conjunto solución. La gráfica de este intervalo se ve en la **FIGURA 1.1.5**. ■

Método de la tabla de signos

En los ejemplos 1 y 2 se resolvieron **desigualdades lineales**, esto es, que contenían una sola variable x que se pueden poner en las formas $ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$, etc. En los ejemplos que siguen se ilustra el **método de la tabla de signos** que se usa en cálculo para resolver **desigualdades no lineales**. Las dos propiedades de los números reales que se mencionan a continuación son básicas para construir una tabla de signos de una desigualdad.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE LOS SIGNOS

i) El producto de dos números reales es **positivo** si y sólo si los números tienen igual signo, esto es $(+)(+)$ o $(-)(-)$.
ii) El producto de dos números reales es **negativo** si y sólo si los números tienen signo opuesto, esto es $(+)(-)$ o $(-)(+)$.

A continuación se presentan algunos de los pasos básicos del método de la tabla de signos, que se ilustrará en el ejemplo siguiente.

- Use las propiedades de las desigualdades para modificar la desigualdad dada en una forma en que todas las variables y las constantes distintas de cero estén en el mismo lado del símbolo de desigualdad, y el número 0 esté en el otro lado.
- Entonces, si es posible, factorice la expresión que contenga a las variables y constantes, para obtener factores lineales $ax + b$.
- Marque la recta numérica en los puntos en los que los factores sean cero. Esos puntos dividen la recta numérica en intervalos.
- En cada uno de estos intervalos, determine el signo de cada factor, y a continuación el signo del producto usando *i*) y *ii*) de las propiedades del producto de los signos.

EJEMPLO 3 Solución de una desigualdad no lineal

Resolver $x^2 \geq -2x + 15$.

Solución Comenzaremos reescribiendo la desigualdad con todos los términos a la izquierda del símbolo de desigualdad, y 0 a la derecha. Según *i*) de las propiedades de las desigualdades,

$$x^2 \geq -2x + 15 \qquad \text{equivale a} \qquad x^2 + 2x - 15 \geq 0.$$

Cuando se factoriza, la última expresión es lo mismo que $(x + 5)(x - 3) \geq 0$.

A continuación se indica, en la recta numérica, dónde está cada factor 0; en este caso, $x = -5$ y $x = 3$. Como se ve en la **FIGURA 1.1.6**, así se divide la recta numérica en tres intervalos ajenos, es decir, que no se intersecan: $(-\infty, -5)$, $(-5, 3)$ y $(3, \infty)$. También observe que como la desigualdad dada requiere que el producto sea no negativo, es decir, "mayor o *igual* a 0", los números -5 y 3 son dos soluciones. A continuación se deben determinar los signos de los factores $x + 5$ y $x - 3$ en cada uno de los tres intervalos. Estamos buscando los intervalos en los que los dos factores sean positivos o negativos, porque entonces su producto será positivo. Debido a que los factores lineales $x + 5$ y $x - 3$ no pueden cambiar de signo dentro de esos intervalos, basta con obtener el signo de cada factor sólo en *un* valor de prueba elegido en el interior de cada intervalo. Por ejemplo, en el intervalo $(-\infty, -5)$, si se usa $x = -10$, entonces

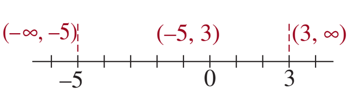


FIGURA 1.1.6 Tres intervalos ajenos

◀ Vea *i*) en Propiedades del producto de los signos.

Intervalo	$(-\infty, -5)$	
Signo de $x + 5$	$-$	$\leftarrow$ en $x = -10$, $x + 5 = -10 + 5 < 0$
Signo de $x - 3$	$-$	$\leftarrow$ en $x = -10$, $x - 3 = -10 - 3 < 0$
Signo de $(x + 5)(x - 3)$	$+$	$\leftarrow (-)(-)$ es $(+)$

Al continuar de esta forma en los dos intervalos restantes, se obtiene la tabla de signos de la **FIGURA 1.1.7**. Como se puede ver en el tercer renglón de esta figura, el producto $(x + 5)(x - 3)$ es no negativo en cualquiera de los intervalos no acotados $(-\infty, -5]$ o $[3, \infty)$.

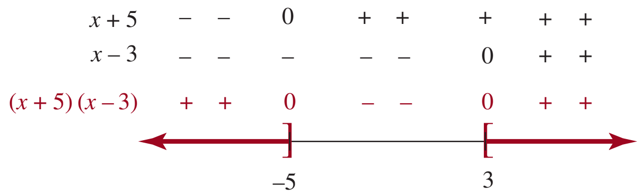


FIGURA 1.1.7 Tabla de signos para el ejemplo 3 ■

Como el conjunto solución del ejemplo 3 consiste en dos intervalos que no se intersecan, es decir, que son **ajenos**, no se puede expresar como un solo intervalo. Lo mejor que podemos hacer es escribir el conjunto solución como la unión de los dos intervalos. Recuerde que la **unión** de dos conjuntos A y B se escribe $A \cup B$ y es el conjunto de elementos que están en A, en B o en ambos. Entonces, el conjunto solución en el ejemplo 3 se puede escribir $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$.

EJEMPLO 4 Solución de una desigualdad no lineal

Resolver $(x - 4)^2 (x + 8)^3 > 0$.

Solución Como la desigualdad indicada ya tiene la forma adecuada para aplicar el método de la tabla de signos (una expresión factorizada a la izquierda del símbolo de desigualdad y 0 a la derecha), comenzaremos determinando los números con los que cada factor es 0; en este caso son $x = 4$ y $x = -8$. Esos números se colocan en la recta numérica y se determinan tres intervalos. A continuación, en cada intervalo se examinan los signos de las potencias de cada factor lineal. Debido a la potencia par, se ve que $(x - 4)^2$ nunca es negativo. Sin embargo, debido a la potencia impar $(x + 8)^3$ tiene el mismo signo que el factor $x + 8$. Observe que los números $x = 4$ y $x = -8$ no son soluciones de la desigualdad, debido al signo "mayor que". Por consiguiente, como se ve en la **FIGURA 1.1.8**, el conjunto solución es $(-8, 4) \cup (4, \infty)$.

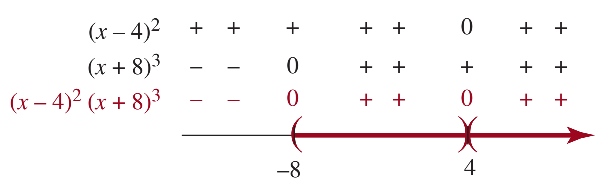


FIGURA 1.1.8 Tabla de signos para el ejemplo 4 ■

EJEMPLO 5 Solución de una desigualdad no lineal

Resolver $x \leq 3 - \dfrac{6}{x + 2}$.

Solución Comenzaremos reescribiendo la desigualdad con todas las variables y las constantes distintas de cero a la izquierda, y 0 a la derecha del signo de desigualdad.

$$x - 3 + \frac{6}{x + 2} \leq 0.$$

A continuación se ponen los términos sobre un denominador común.

Una cosa que *no se hace* es quitar el denominador multiplicando la desigualdad por $x + 2$. Vea el problema 68 de los ejercicios 1.1.

$$\frac{(x - 3)(x + 2) + 6}{x + 2} \leq 0 \quad \text{que se simplifica como} \quad \frac{x(x - 1)}{x + 2} \leq 0. \tag{2}$$

Ahora los números que hacen que esos tres factores lineales de la última expresión sean cero son -2, 0 y 1. En la recta numérica esos tres números determinan cuatro intervalos. En consecuencia del “menor que o *igual a* 0”, se ve que el 0 y el 1 son miembros del conjunto solución. Sin embargo, -2 está excluido de él, porque al sustituir este valor en la expresión fraccionaria se obtiene un cero en el denominador (que hace que la fracción sea indefinida). Como se puede ver en la tabla de signos de la **FIGURA 1.1.9**, el conjunto solución es $(-\infty, -2) \cup [0, 1]$.

x	− −	−	− −	0	+ +	+	+ +
$x - 1$	− −	−	− −	−	− −	0	+ +
$x + 2$	− −	0	+ +	+	+ +	+	+ +
$x(x-1)/(x+2)$	− −	indefinido	+ +	0	− −	0	+ +
		-2		0		1	

FIGURA 1.1.9 Tabla de signos para el ejemplo 5

NOTAS PARA EL SALÓN DE CLASE

i) Con frecuencia, la terminología que se usa en matemáticas varía entre los profesores así como entre los libros de texto. Por ejemplo, las desigualdades con los símbolos $<$ o $>$ se llaman a veces desigualdades *estrictas*, mientras que las que usan $\leq$ o $\geq$ se llaman *no estrictas*. Otro ejemplo: a los *enteros positivos* 1, 2, 3, . . . se les llama con frecuencia *números naturales*.

ii) Suponga que el conjunto solución de una desigualdad consiste en números tales que $x < -1$ o $x > 3$. Una solución que se ve con mucha frecuencia en las tareas, cuestionarios y exámenes es $3 < x < -1$. Esto es falta de comprensión de la noción de *simultaneidad*. La afirmación $3 < x < -1$ quiere decir que $x > 3$ y que *además*, al mismo tiempo, $x < -1$. Si el lector dibuja esta expresión en la recta numérica verá que es imposible que la misma x satisfaga ambas desigualdades. Lo mejor que se puede hacer para reescribir “$x < -1$ o $x > 3$” es usar la unión de intervalos $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$.

iii) He aquí otro error frecuente: la notación $a < x > b$ no tiene sentido. Si, digamos, sucede que $x > -2$ *y también* $x > 6$, entonces sólo los números $x > 6$ satisfacen *las dos* condiciones.

iv) En la clase se oye con frecuencia la respuesta “positivo” cuando en realidad el alumno quiere decir “no negativo”. Pregunta: x dentro de una raíz cuadrada $\sqrt{x}$, ¿debe ser positivo, verdad? Levanten la mano los que estén de acuerdo. Siempre hay muchas manos que se levantan. La respuesta correcta es: x debe ser no negativo, esto es, $x \geq 0$. No olvidar que $\sqrt{0} = 0$.

1.1 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1 a 6, escriba la afirmación en forma de una desigualdad.

1. $a + 2$ es positivo

2. $4y$ es negativo

3. $a + b$ es no negativo

4. a es menor que -3

5. $2b + 4$ es mayor que o igual a 100

6. $c - 1$ es menor que o igual a 5.

En los problemas 7 a 14, escriba la desigualdad usando notación de intervalos, y a continuación grafique el intervalo.

7. $x < 0$
8. $0 < x < 5$
9. $x \geq 5$
10. $-1 \leq x$
11. $8 < x \leq 10$
12. $-5 < x \leq -3$
13. $-2 \leq x \leq 4$
14. $x > -7$

En los problemas 15 a 18, escriba el intervalo en forma de desigualdad.

15. $[-7, 9]$
16. $[1, 15)$
17. $(-\infty, 2)$
18. $[-5, \infty)$

En los problemas 19 a 34, resuelva la desigualdad lineal. Escriba el conjunto solución usando la notación de intervalos. Grafique el conjunto solución.

19. $x + 3 > -2$
20. $3x - 9 < 6$
21. $\frac{3}{2}x + 4 \leq 10$
22. $5 - \frac{5}{4}x \geq -4$
23. $\frac{3}{2} - x > x$
24. $-(1 - x) \geq 2x - 1$
25. $2 + x \geq 3(x - 1)$
26. $-7x + 3 \leq 4 - x$
27. $-\frac{20}{3} < \frac{2}{3}x < 4$
28. $-3 \leq -x < 2$
29. $-7 < x - 2 < 1$
30. $3 < x + 4 \leq 10$
31. $7 < 3 - \frac{1}{2}x \leq 8$
32. $100 + x \leq 41 - 6x \leq 121 + x$
33. $-1 \leq \dfrac{x - 4}{4} < \frac{1}{2}$
34. $2 \leq \dfrac{4x + 2}{-3} \leq 10$

En los problemas 35 a 58, resuelva la desigualdad no lineal. Escriba el conjunto solución usando notación de intervalos. Grafique el conjunto solución.

35. $x^2 - 9 < 0$
36. $x^2 \geq 16$
37. $x(x - 5) \geq 0$
38. $4x^2 + 7x < 0$
39. $x^2 - 8x + 12 < 0$
40. $(3x + 2)(x - 1) \leq 0$
41. $9x \geq 2x^2 - 18$
42. $4x^2 > 9x + 9$
43. $(x + 1)(x - 2)(x - 4) < 0$
44. $(1 - x)(x + \frac{1}{2})(x - 3) \leq 0$
45. $(x^2 - 1)(x^2 - 4) \leq 0$
46. $(x - 1)^2(x + 3)(x - 5) \geq 0$
47. $\dfrac{5}{x + 8} < 0$
48. $\dfrac{10}{x^2 + 2} > 0$
49. $\dfrac{5}{x} \geq -1$
50. $\dfrac{x - 3}{x + 2} < 0$
51. $\dfrac{x + 1}{x - 1} + 2 > 0$
52. $\dfrac{x - 2}{x + 3} \leq 1$
53. $\dfrac{x(x - 1)}{x + 5} \geq 0$
54. $\dfrac{(1 + x)(1 - x)}{x} \leq 0$
55. $\dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 1} \leq 1$
56. $\dfrac{x}{x^2 - 16} > 0$
57. $\dfrac{2}{x + 3} - \dfrac{1}{x + 1} < 0$
58. $\dfrac{4x + 5}{x^2} \geq \dfrac{4}{x + 5}$

59. Si 7 veces un número decrece su valor en 6, el resultado es menor que 50. ¿Qué se puede determinar acerca de ese número?

60. Los lados de un cuadrado se extienden para formar un rectángulo. Como se ve en la FIGURA 1.1.10, un lado se extiende 2 pulgadas, y el otro se extiende 5 pulgadas. Si el área del rectángulo resultante es menor que 130 pulg^2, ¿cuáles son las longitudes posibles del lado del cuadrado original?

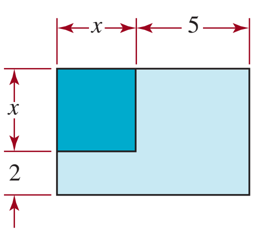


FIGURA 1.1.10 Rectángulo del problema 60

61. Un polígono es una figura cerrada que se forma uniendo segmentos de línea. Por ejemplo, un *triángulo* es un polígono de tres lados. En la FIGURA 1.1.11 se ve un polígono con ocho lados, que se llama *octágono*. Una *diagonal* de un polígono se define como un segmento de recta que une dos vértices no adyacentes cualesquiera. La cantidad d de diagonales de un polígono con n lados es $d = \frac{1}{2}(n - 1)n - n$. ¿Para qué polígonos la cantidad de diagonales es mayor que 35?

62. La cantidad total N de puntos en un arreglo triangular con n filas se determina mediante la fórmula $N = \frac{1}{2}n(n + 1)$. Vea la FIGURA 1.1.12. ¿Cuántas filas puede tener el arreglo si la cantidad total de puntos debe ser menor que 5 050?

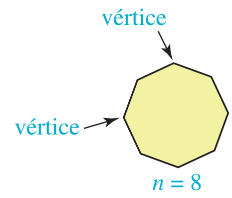


FIGURA 1.1.11 Octágono para el problema 61

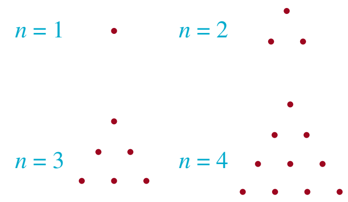
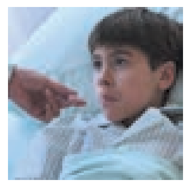


FIGURA 1.1.12 Arreglos triangulares de puntos del problema 62

Aplicaciones diversas

63. Jardín de flores Un lecho de flores rectangular debe tener una longitud del doble que su ancho. Si el área encerrada debe ser mayor que 98 m^2, ¿qué puede concluir acerca del ancho del lecho de flores?

64. Fiebre La relación entre la temperatura T_C en grados Celsius y T_F en grados Fahrenheit es $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$. Se considera que una persona tiene fiebre si su temperatura oral es mayor que 98.6°F. En la escala Celsius, ¿qué temperaturas indican que hay fiebre?



Termómetro oral

65. Resistores en paralelo Un resistor de 5 ohms y un resistor variable se conectan en paralelo. La resistencia combinada es $R_T = \dfrac{5R}{5 + R}$. Determine los valores R del resistor variable, en los cuales la resistencia resultante R_T será mayor que 2 ohms.

66. Lo que sube . . . Con ayuda del cálculo es fácil demostrar que la altura s de un proyectil lanzado desde una altura inicial s_0, directo hacia arriba y con una velocidad inicial v_0 es $s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$, con t en segundos y $g = 32$ pies/s^2. Si un cohete de juguete se dispara directo hacia arriba desde el nivel del suelo, entonces $s_0 = 0$. Si su velocidad inicial es 72 pies/s, ¿por cuánto tiempo el cohete estará a más de 80 pies arriba del suelo?

Para discusión

67. Describa cómo podría usted determinar el conjunto de números para los cuales la expresión dada es un número real.

a) $\sqrt{2x - 3}$ ***b)*** $\sqrt{4 - 10x}$ ***c)*** $\sqrt{x(x - 5)}$ ***d)*** $\dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$

Ponga en práctica sus ideas.

68. En el ejemplo 5, explique por qué no se debe multiplicar la última ecuación en (2) por $x + 2$.

69. ***a)*** Si $0 < a < b$, entonces use las propiedades de las desigualdades para demostrar que $a^2 < b^2$.

b) Si $a < b$, entonces explique por qué, en general, $a^2 < b^2$ *no* es verdadero.

70. Use las propiedades de desigualdades para demostrar que si $a < b$, entonces

$$a < \frac{a + b}{2} < b.$$

El número $(a + b)/2$ se llama **promedio** o **promedio aritmético** de dos números a y b.

1.2 Valor absoluto

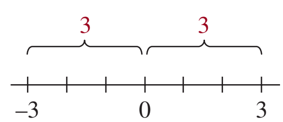


FIGURA 1.2.1 La distancia es 3 unidades

Introducción

Se puede usar la recta numérica para visualizar la distancia. Como se ve en la FIGURA 1.2.1, la distancia entre el número 0 y el número 3 es 3, y la distancia entre -3 y 0 también es 3. En general, en el caso de todo número *positivo* real x, la distancia entre x y 0 es x.

Si x representa un número *negativo*, la distancia entre x y 0 es $-x$. El concepto de distancia desde un número en la recta numérica hasta el número 0 se describe con el **valor absoluto** de ese número.

VALOR ABSOLUTO

En el caso de todo número real x, el **valor absoluto** de x, representado por $|x|$, es

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Tenga cuidado. Es un error frecuente pensar que $-x$ representa una cantidad negativa, sólo por la presencia del signo menos. Si un símbolo x representa un número negativo (esto es, $x < 0$), entonces $-x$ es un número positivo. Por ejemplo, si $x = -10 < 0$, entonces $|x| = -x = -(-10) = 10$.

Como se muestra en nuestro primer ejemplo, el símbolo x en (1) es un comodín que denota simplemente una variable que puede tomar distintos valores, es decir, dentro de los símbolos de valor absoluto, $|\,|$, se pueden poner otras cantidades.

EJEMPLO 1 Valor absoluto

Escribir $|x - 5|$ sin símbolos de valor absoluto.

Solución Donde aparezca el símbolo x en (1), se sustituye por $x - 5$:

$$|x - 5| = \begin{cases} x - 5, & \text{si } x - 5 \geq 0 \\ -(x - 5), & \text{si } x - 5 < 0. \end{cases}$$

Examinemos cada parte de la definición por separado. En primer lugar la desigualdad $x - 5 \geq 0$ quiere decir que $x \geq 5$. Por consiguiente,

$$|x - 5| = x - 5 \qquad \text{si} \qquad x \geq 5.$$

Compruebe el lector este resultado (esto es, que $x - 5$ es no negativo) sustituyendo números como 5, 8 y 10. A continuación, $x - 5 < 0$ quiere decir que $x < 5$. En este caso,

ley distributiva

$$|x - 5| = -(x - 5) = -x + 5 \qquad \text{si} \qquad x < 5.$$

De nuevo, el lector se debe convencer de que esto es correcto (esto es, $-x + 5$ es positivo) sustituyendo algunos números, como 2 y -3. ■

Como se ve en la figura 1.2.1, para todo número real x y su negativo $-x$, la distancia a 0 es la misma. Esto es, $|x| = |-x|$. Ésta es una propiedad de una lista de ellas del valor absoluto, que veremos a continuación.

PROPIEDAD DE LOS VALORES ABSOLUTOS

i) $|a| = |-a|$

ii) $|a| = 0$ si y sólo si $a = 0$

iii) $|ab| = |a||b|$

iv) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$

v) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (**Desigualdad del triángulo**)

Por ejemplo, en virtud de la propiedad *iii*), se puede escribir la expresión $|-2x|$ en la forma $|-2||x| = 2|x|$.

De nuevo la distancia Si se desea determinar la distancia entre dos números cualesquiera en la recta numérica, todo lo que se debe hacer es restar el número que esté más hacia la izquierda del número que esté más hacia la derecha. Por ejemplo, la distancia entre 10 y -2 es

$$\overset{\text{número más hacia la derecha}}{\overset{\downarrow}{10}} - \overset{\text{número más hacia la izquierda}}{\overset{\downarrow}{(-2)}} = 12.$$

Como se vio en la introducción, la distancia entre -3 y 0 es $0 - (-3) = 3$. Si se usa un valor absoluto para definir la distancia, entonces no necesita preocuparse del orden en que se haga la resta.

DISTANCIA ENTRE DOS NÚMEROS

Si a y b son dos números cualesquiera en la recta numérica, la **distancia** entre ellos es

$$d(a, b) = |b - a|. \qquad (2)$$

Usando las propiedades de los valores absolutos,

de acuerdo con la propiedad *iii*)

$$|b - a| = |(-1)(a - b)| = |-1|\,|a - b| = |a - b|,$$

y así se tiene que $d(a, b) = d(b, a)$. Por ejemplo, la distancia entre $\sqrt{2}$ y 3 es

$$d(\sqrt{2}, 3) = |3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2}$$

porque $\qquad 3 > \sqrt{2} \quad$ o sea que $\quad 3 - \sqrt{2} > 0,$

o bien $\qquad d(3, \sqrt{2}) = |\sqrt{2} - 3| = -(\sqrt{2} - 3) = 3 - \sqrt{2}$

porque $\qquad \sqrt{2} < 3 \quad$ o sea que $\quad \sqrt{2} - 3 < 0.$

Punto medio Supongamos que a y b representan dos números distintos en la recta numérica, tales que $a < b$. El **punto medio** m del segmento de recta entre los números a y b se define como el promedio de los dos extremos del intervalo $[a, b]$; esto es

$$m = \frac{a + b}{2}. \qquad (3)$$

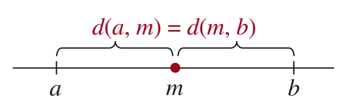


FIGURA 1.2.2 Punto medio m entre a y b

Como se ve en la **FIGURA 1.2.2**, es fácil de verificar (3) usando (2) para demostrar que $d(a, m) = d(m, b)$.

EJEMPLO 2 Punto medio

De acuerdo con (3), el punto medio del segmento de recta que une a los números -2 y 5 es

$$\frac{(-2) + 5}{2} = \frac{3}{2}.$$

Vea **FIGURA 1.2.3**. ■

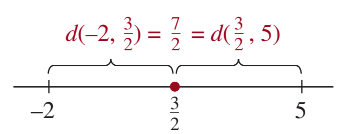


FIGURA 1.2.3 Punto medio en el ejemplo 2

☐ Ecuaciones Debido a que *i*) de las propiedades de los valores absolutos implica que $|-6| = |6| = 6$, se puede llegar a la conclusión de que la ecuación sencilla $|x| = 6$ tiene dos soluciones, $x = -6$ o $x = 6$. En general, si a es un número positivo real, entonces

$$|x| = a \quad \text{si y sólo si} \quad x = a \quad \text{o} \quad x = -a. \tag{4}$$

EJEMPLO 3 Ecuación con valor absoluto

Resolver ***a***) $|5x - 3| = 8$ ***b***) $|x - 4| = -3$.

Solución

a) En (4), el símbolo x es un comodín, es decir, una variable que puede tomar cualquier cantidad. Al sustituir x por $5x - 3$, la ecuación dada equivale a dos ecuaciones

$$5x - 3 = 8 \quad \text{o} \quad 5x - 3 = -8.$$

Resolveremos cada una. Con $5x - 3 = 8$ se obtiene

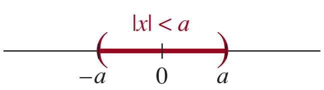
$$5x = 11 \quad \text{que implica que} \quad x = \frac{11}{5}.$$

Con $5x - 3 = -8$ se obtiene

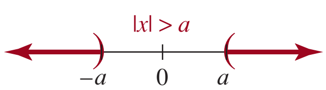
$$5x = -5 \quad \text{que implica que} \quad x = -1.$$

Por consiguiente, las soluciones son $\frac{11}{5}$ y -1.

b) En razón de que el valor absoluto de un número real siempre es no negativo, no hay solución a una ecuación como $|x - 4| = -3$. ■



a) La distancia entre x y 0 es *menor* que a



b) La distancia entre x y 0 es *mayor* que a

FIGURA 1.2.4 Interpretación gráfica de las propiedades *vi*) y *vii*)

☐ Desigualdades Muchas aplicaciones importantes de las desigualdades contienen valores absolutos. Acabamos de ver que $|x|$ representa la distancia, a lo largo de la recta numérica, entre el número x y el número 0. Entonces, la desigualdad $|x| < a$, donde $a > 0$ quiere decir que la distancia entre x y 0 es menor que a. Se puede ver en la **FIGURA 1.2.4*a*)** que es el conjunto de números reales x tales que $-a < x < a$. Por otra parte, $|x| > a$ significa que la distancia entre x y 0 es mayor que a. En la figura 1.2.4*b*) se ven los números que satisfacen a $x > a$, o $x < -a$. Estas observaciones gráficas sugieren dos propiedades adicionales del valor absoluto.

PROPIEDADES DE LOS VALORES ABSOLUTOS (CONTINUACIÓN)

Sea a un número real positivo.

vi) $|x| < a$ si y sólo si $-a < x < a$.
vii) $|x| > a$ si y sólo si $x > a$ o $x < -a$.

Las propiedades *vi*) y *vii*) también son válidas cuando los símbolos de desigualdad $<$ y $>$ se sustituyen por $\leq$ y $\geq$, respectivamente.

EJEMPLO 4 Dos desigualdades de valor absoluto

a) De acuerdo con la propiedad *vi*) de los valores absolutos, la desigualdad $|x| < 1$ equivale a la desigualdad simultánea $-1 < x < 1$.

b) De acuerdo con la propiedad *vii*) de los valores absolutos, la desigualdad $|x| \geq 5$ equivale a dos desigualdades: $x \geq 5$ o $x \leq -5$. ■

EJEMPLO 5 Dos desigualdades de valor absoluto

Resolver ***a***) $|3x - 7| < 1$ ***b***) $|2x - 5| \leq 0$.

Solución

a) Como en el ejemplo 3, el símbolo x en la desigualdad $|x| < a$ sólo es un parámetro que sirve para poner allí otras cantidades. Si se sustituye x por $3x - 7$ y a por el número 1, la propiedad *vi*) produce la desigualdad simultánea

$$-1 < 3x - 7 < 1$$

que se resuelve en la forma acostumbrada (vea el ejemplo 2, en la sección 1.1):

$$\begin{aligned} -1 + 7 < 3x - 7 + 7 &< 1 + 7 \\ 6 < 3x &< 8 \\ (\tfrac{1}{3})6 < (\tfrac{1}{3})3x &< (\tfrac{1}{3})8 \\ 2 < x &< \tfrac{8}{3}. \end{aligned}$$

El conjunto solución es el intervalo abierto $(2, \frac{8}{3})$ que se ve en la **FIGURA 1.2.5**.

b) Debido a que el valor absoluto de cualquier expresión nunca es negativo, los valores de x que satisfacen la desigualdad $\leq$ son aquellos para los cuales $|2x - 5| = 0$. De acuerdo con la propiedad *ii*) de los valores absolutos, se llega a la conclusión de que $2x - 5 = 0$. Por consiguiente, la única solución es $\frac{5}{2}$. ■

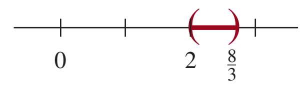


FIGURA 1.2.5 Conjunto solución para el ejemplo 5

Una desigualdad como $|x - b| < a$ también se puede interpretar en términos de una distancia a lo largo de la recta numérica. Ya que $|x - b|$ es la distancia entre x y b, una desigualdad como $|x - b| < a$ queda satisfecha por todos los números reales x cuya distancia entre x y b sea menor que a. Este intervalo se ve en la **FIGURA 1.2.6**. Note que cuando $b = 0$ se obtiene la propiedad *vi*). De igual modo, el conjunto de números que satisfacen $|x - b| > a$ son los números x cuya distancia entre x y b es mayor que a.

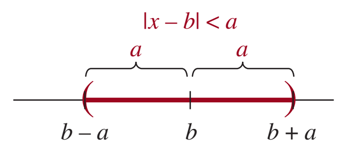


FIGURA 1.2.6 La distancia entre x y b es *menor* que a

EJEMPLO 6 Una desigualdad de valor absoluto

Resolver $|4 - \frac{1}{2}x| \geq 7$.

Solución Si se sustituyen x y a en $|x| \geq a$ por $4 - \frac{1}{2}x$ y 7, respectivamente, se ve que, de acuerdo con la propiedad *vii*), que $|4 - \frac{1}{2}x| \geq 7$ equivale a las dos desigualdades diferentes que siguen:

$$4 - \tfrac{1}{2}x \geq 7 \quad \text{o} \quad 4 - \tfrac{1}{2}x \leq -7.$$

Por separado se resuelve cada una de esas desigualdades. Primero se resuelve

$$\begin{aligned} 4 - \tfrac{1}{2}x &\geq 7 \\ -\tfrac{1}{2}x &\geq 3 \\ x &\leq -6. \quad \leftarrow \text{La multiplicación por } -2 \text{ invierte la dirección de la desigualdad} \end{aligned}$$

En la notación de intervalos, el conjunto solución de esta desigualdad es $(-\infty, -6]$. Después se resuelve

$$\begin{aligned} 4 - \tfrac{1}{2}x &\leq -7 \\ -\tfrac{1}{2}x &\leq -11 \\ (-2)(-\tfrac{1}{2})x &\geq (-2)(-11) \quad \leftarrow \text{La multiplicación por } -2 \text{ invierte la dirección de la desigualdad} \\ x &\geq 22. \end{aligned}$$

En notación de intervalos, el conjunto solución es $[22, \infty)$.

Como los dos intervalos son ajenos, el conjunto solución es la unión de ellos: $(-\infty, -6] \cup [22, \infty)$. La gráfica de este conjunto solución se ve en la **FIGURA 1.2.7**. ■

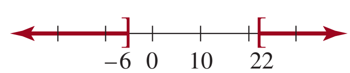


FIGURA 1.2.7 Conjunto solución del ejemplo 6

Note que en la figura 1.2.4*a*), el número 0 es el punto medio del intervalo solución para $|x| < a$, y que en la figura 1.2.6 el número b es el punto medio del intervalo solución para la desigualdad $|x - b| < a$. Teniendo esto presente se resuelve el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7 Construcción de una desigualdad

Encontrar una desigualdad de la forma $|x - b| < a$ para la cual el intervalo abierto (4, 8) sea su conjunto solución.

Solución El punto medio del intervalo (4, 8) es $m = \dfrac{4 + 8}{2} = 6$. La distancia entre el punto medio m y uno de los extremos del intervalo es $d(m, 8) = |8 - 6| = 2$. Por consiguiente, la desigualdad que se pide es $|x - 6| < 2$. ■

1.2 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1 a 6 escriba la cantidad dada sin los símbolos de valor absoluto.

1. $|\pi - 4|$
2. $|\sqrt{5} - 3|$
3. $|8 - \sqrt{63}|$
4. $|\sqrt{5} - 2.3|$
5. $|-6| - |-2|$
6. $||-3| - |10||$

En los problemas 7 a 12, escriba la expresión sin los símbolos de valor absoluto.

7. $|h|$, si h es negativo
8. $|-h|$, si h es negativo
9. $|x - 6|$, si $x < 6$
10. $|2x - 1|$, si $x \geq \frac{1}{2}$
11. $|x - y| - |y - x|$
12. $\dfrac{|x - y|}{|y - x|}$, $x \neq y$

En los problemas 13 a 16, escriba la expresión $|x - 2| + |x - 5|$ sin los símbolos de valor absoluto, si x está en el intervalo dado.

13. $(-\infty, 1)$
14. $(7, \infty)$
15. $(3, 4]$
16. $[2, 5]$

En los problemas 17 a 20, escriba la expresión $|x + 1| - |x - 3|$ sin los símbolos de valor absoluto, si x está en el intervalo dado.

17. $[-1, 3)$
18. $(0, 1)$
19. (π, ∞)
20. $(-\infty, -5)$

En los problemas 21 a 24, determine *a*) la distancia entre los números dados y *b*) el punto medio del segmento de recta entre ellos.

21. 3, 7
22. -100, 255
23. $-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$
24. $-\frac{1}{4}, \frac{7}{4}$

En los problemas 25 a 28, m es el punto medio del segmento de recta que une a a (el extremo izquierdo) con b (el extremo derecho). Use las condiciones dadas para determinar las cantidades indicadas.

25. $m = 5$, $d(a, m) = 3$; a y b
26. $m = -1$, $d(m, b) = 2$; a y b
27. $a = 4$, $d(a, m) = \pi$; m y b
28. $a = 10$, $d(m, b) = 5$; m y b

En los problemas 29 a 34, resuelva la ecuación dada.

29. $|4x - 1| = 2$

30. $|5v - 4| = 7$

31. $|\frac{1}{4} - \frac{3}{2}y| = 1$

32. $|2 - 16t| = 0$

33. $\left|\dfrac{x}{x - 1}\right| = 2$

34. $\left|\dfrac{x + 1}{x - 2}\right| = 4$

En los problemas 35 a 46, resuelva la desigualdad dada. Escriba el conjunto solución con notación de intervalos. Grafique el conjunto solución.

35. $|-5x| < 4$

36. $|3x| > 18$

37. $|3 + x| > 7$

38. $|x - 4| \leq 9$

39. $|2x - 7| \leq 1$

40. $|5 - \frac{1}{3}x| < \frac{1}{2}$

41. $|x + \sqrt{2}| \geq 1$

42. $|6x + 4| > 4$

43. $\left|\dfrac{3x - 1}{-4}\right| < 2$

44. $\left|\dfrac{2 - 5x}{3}\right| \geq 5$

45. $|x - 5| < 0.01$

46. $|x - (-2)| < 0.001$

En los problemas 47 a 50, proceda como en el ejemplo 7 y determine una desigualdad $|x - b| < a$, o $|x - b| > a$ para la cual el intervalo dado sea su conjunto solución.

47. $(-3, 11)$

48. $(1, 2)$

49. $(-\infty, 1) \cup (9, \infty)$

50. $(-\infty, -3) \cup (13, \infty)$

En los problemas 51 y 52 determine una desigualdad cuya solución sea el conjunto de los números reales x que satisfagan la condición que se menciona. Exprese cada conjunto con notación de intervalos.

51. Mayor que o igual a 2 unidades desde -3.

52. Menor que $\frac{1}{2}$ unidad desde 3.5.

Aplicaciones diversas

53. Comparación de edades Las edades de Beto y María —A_B y A_M—, difieren cuando mucho por 3 años. Expréselas como desigualdad, usando símbolos de valor absoluto.

54. Supervivencia Su calificación en el primer examen fue de 72%. La calificación intermedia es el promedio de la del primer examen con la del examen de medio curso. Si el rango para obtener una B es de 80 a 89%, ¿qué calificaciones puede usted obtener en el examen de medio curso para que su calificación a medio semestre sea B?

55. Peso del café El peso w del café en latas que llena una empresa procesadora de alimentos satisface la expresión

$$\left|\frac{w - 12}{0.05}\right| \leq 1,$$

en donde w se mide en onzas. Determine el intervalo dentro del cual se encuentra w.

56. Peso de las latas La báscula de una tienda está diseñada para que su error máximo sea de 0.25 oz. Si en la báscula se ponen dos latas idénticas de sopa, y su peso combinado es de 33.15 oz, ¿cuáles son los pesos máximo y mínimo que puede tener una de las latas?

Para discusión

57. Describa cómo resolvería las siguientes desigualdades.

***a*)** $\left|\dfrac{x + 5}{x - 2}\right| \leq 3$

***b*)** $|5 - x| = |1 - 3x|$

Ejecute sus ideas.

58. La distancia entre el número x y 5 es $|x-5|$.

a) Con palabras, describa la interpretación gráfica de las desigualdades $0<|x-5|$ y $0<|x-5|<3$.

b) Resuelva cada desigualdad del inciso *a*) y escriba cada conjunto solución usando notación de intervalos.

59. ***a***) Interprete $|x-3|$ como la distancia entre los números x y 3. Trace sobre la recta numérica el conjunto de los números reales que satisfacen $2<|x-3|<5$.

b) Ahora resuelva la desigualdad simultánea $2<|x-3|<5$ resolviendo primero $|x-3|<5$, y después $2<|x-3|$. Estudie la intersección de los dos conjuntos solución y compárela con su esquema del inciso *a*).

60. La siguiente afirmación podrá encontrarla al comenzar un curso de cálculo. Exprese la siguiente afirmación en palabras, lo mejor que pueda.

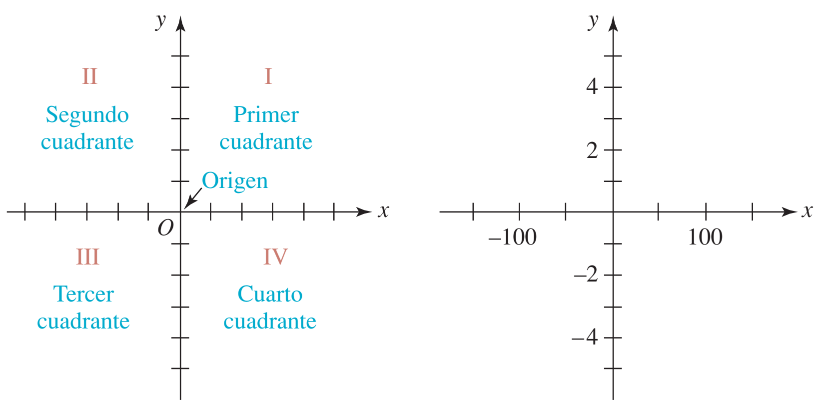
Para toda $\epsilon>0$, *existe una* $\delta>0$ *tal que* $|y-L|<\epsilon$ *cuando* $0<|x-a|<\delta$.

No use los símbolos $>$, $<$ ni $|\ |$. Los símbolos ϵ y δ son las letras griegas épsilon y delta, que representan números reales.

1.3 El sistema de coordenadas rectangulares

Introducción Vimos en la sección 1.1 que cada número real se puede asociar con exactamente un punto de la recta numérica, o recta de coordenadas. Ahora examinaremos una correspondencia entre los puntos de un plano y los pares ordenados de números reales.

El plano coordenado Un **sistema coordenado rectangular** se forma con dos rectas numéricas perpendiculares que se cruzan en el punto correspondiente al número 0 en cada línea. El punto de intersección se llama **origen** y se representa por el símbolo O. Las rectas numéricas horizontal y vertical se llaman **eje *x*** y **eje *y***, respectivamente. Esos dos ejes dividen al plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**, que se numeran como se indica en la FIGURA 1.3.1*a*). Como se puede ver en la FIGURA 1.3.1*b*), las escalas en los ejes x y



a) Cuatro cuadrantes *b*) Escalas diferentes en los ejes x y y

FIGURA 1.3.1 Plano coordenado

y no necesitan ser iguales. En este texto si *no* se especifican las marcas de intervalo en los ejes coordenados, como en la figura 1.3.1*a*), se puede suponer que una marca corresponde a una unidad. Un plano que contiene un sistema coordenado rectangular se llama **plano *xy***, o **plano coordenado**.

Al sistema de coordenadas rectangulares y al plano coordenado *xy* se les llama también **sistema de coordenadas cartesianas** y **plano cartesiano**, en honor de **René Descartes** (1596-1650), famoso matemático y filósofo francés.

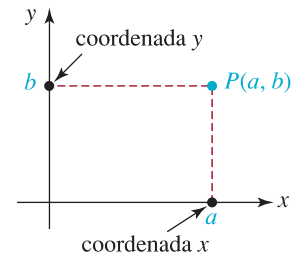


FIGURA 1.3.2 Punto con coordenadas (a, b)

Coordenadas de un punto

Sea un punto en el plano coordenado, representado por P. Asociamos un par ordenado de números reales con P trazando una recta vertical desde P al eje x, y una recta horizontal desde P al eje y. Si la recta vertical cruza al eje x en el número a, y la recta horizontal cruza al eje y en el número b, asociamos el par ordenado de números reales (a, b) con el punto. Al revés, a cada par ordenado (a, b) de números reales, corresponde un punto P en el plano. Este punto está en la intersección de la línea vertical que pasa por a en el eje x, y la línea horizontal que pasa por b en el eje y. En adelante, a un par ordenado se le llamará un **punto** y se representará por $P(a, b)$ o bien por (a, b).[1] El número a es la **abscisa** o **coordenada *x*** del punto, y el número b es la **ordenada**, o **coordenada *y*** del punto, y se dice que P tiene las **coordenadas** (a, b). Por ejemplo, las coordenadas del origen son $(0, 0)$. Vea la FIGURA 1.3.2.

En la FIGURA 1.3.3 se indican los signos algebraicos de la coordenada x o abscisa y la coordenada y u ordenada de cualquier punto (x, y) en cada uno de los cuatro cuadrantes. Se considera que los puntos en cualquiera de los dos ejes no están en cuadrante alguno. Como un punto en el eje x tiene la forma $(x, 0)$, la ecuación que describe al eje x es $y = 0$. De igual modo, un punto en el eje y tiene la forma $(0, y)$, por lo que la ecuación del eje y es $x = 0$. Cuando se ubica un punto en el plano coordenado, que corresponde a un par ordenado de números, y se representa usando un punto lleno, se dice que **se grafica** el punto.

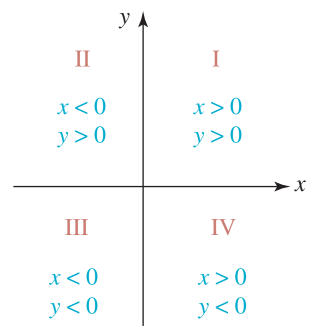


FIGURA 1.3.3 Signos algebraicos de las coordenadas en los cuatro cuadrantes

EJEMPLO 1 Graficación de puntos

Graficar los puntos $A(1, 2)$, $B(-4, 3)$, $C(-\frac{3}{2}, -2)$, $D(0, 4)$ y $E(3.5, 0)$. Especificar el cuadrante en el que está cada uno.

Solución Los cinco puntos se graficaron en el plano coordenado de la FIGURA 1.3.4. El punto A está en el primer cuadrante (cuadrante I), B en el segundo (cuadrante II) y C en el tercero (cuadrante III). Los puntos D y E están en los ejes x y y, respectivamente, y no están en cuadrante alguno. ■

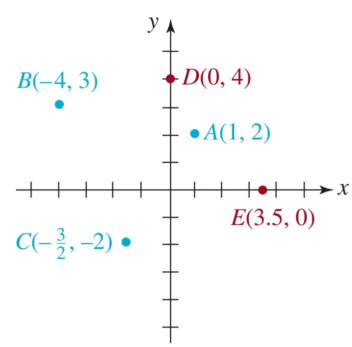


FIGURA 1.3.4 Gráfica de los cinco puntos del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Graficación de puntos

Trazar el conjunto de puntos (x, y) en el plano xy cuyas coordenadas satisfacen $0 \leq x \leq 2$ y también que $|y| = 1$.

Solución Primero, recuerde que la ecuación de valor absoluto $|y| = 1$ implica que $y = -1$ o $y = 1$. En consecuencia, los puntos que satisfacen las condiciones dadas son aquellos cuyas coordenadas (x, y) satisfacen *al mismo tiempo* las siguientes condiciones: cada abscisa es un número en el intervalo cerrado $[0, 2]$ y cada ordenada es ya sea $y = -1$ o $y = 1$. Por ejemplo, algunos de los puntos que satisfacen las dos condiciones son $(1, 1)$, $(\frac{1}{2}, -1)$, $(2, -1)$. En la FIGURA 1.3.5 se muestra en forma gráfica que el conjunto de todos los puntos que satisfacen las dos condiciones son aquellos que están en los dos segmentos de recta paralelos. ■

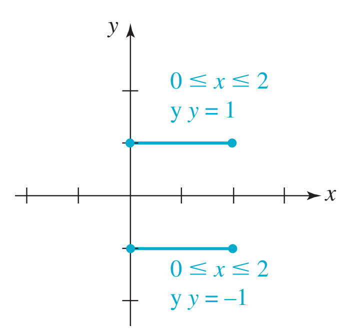


FIGURA 1.3.5 Conjunto de puntos para el ejemplo 2

[1] Es la misma notación que se usa para representar un intervalo abierto. Debe quedar claro, por el contexto de la descripción, si se está considerando un punto (a, b) o un intervalo abierto (a, b).

EJEMPLO 3 Regiones definidas por desigualdades

Trazar el conjunto de puntos (x, y) en el plano xy cuyas coordenadas satisfagan cada una de las condiciones siguientes: ***a***) $xy < 0$ ***b***) $|y| \geq 2$.

Solución

a) De acuerdo con *ii*) de las propiedades de signos de productos, en la sección 1.1, se ve que un producto de dos números reales x y y es negativo cuando uno de ellos es positivo y el otro es negativo. Así, $xy < 0$ cuando $x > 0$ y $y < 0$, *o también* cuando $x < 0$ y $y > 0$. En la figura 1.3.3 se ve que $xy < 0$ para todos los puntos (x, y) del segundo y el cuarto cuadrantes. Por consiguiente, se puede representar el conjunto de los puntos para los que $xy < 0$ mediante las regiones sombreadas de la **FIGURA 1.3.6**. Los ejes coordenados se muestran como líneas interrumpidas, para indicar que los puntos en esos ejes no se incluyen en el conjunto solución.

b) En la sección 1.2 vimos que $|y| \geq 2$ quiere decir que $y \geq 2$, o bien que $y \leq -2$. Como x no tiene restricción alguna, puede ser cualquier número real, por lo que los puntos (x, y) para los cuales

$$y \geq 2 \text{ y } -\infty < x < \infty \qquad \text{o bien} \qquad y \leq -2 \text{ y } -\infty < x < \infty$$

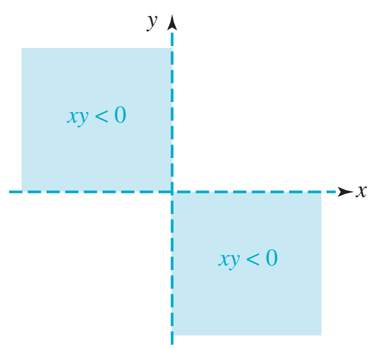


FIGURA 1.3.6 Región del plano xy que satisface la condición *a*) del ejemplo 3

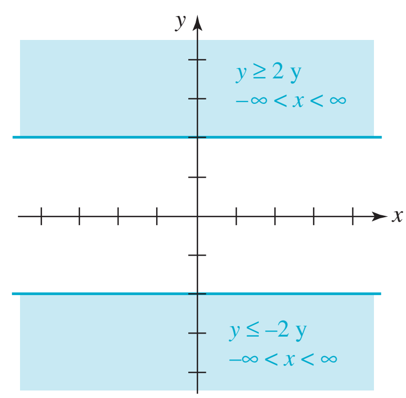


FIGURA 1.3.7 Región del plano xy que satisface la condición *b*) del ejemplo 3

se pueden representar por medio de las dos regiones sombreadas de la **FIGURA 1.3.7**. Se usan líneas llenas para representar las cotas $y = -2$ y $y = 2$ de la región, que indican que los puntos en esos límites están incluidos en el conjunto solución. ■

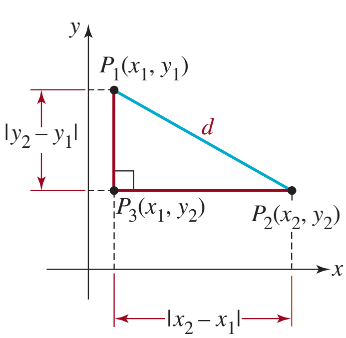


FIGURA 1.3.8 Distancia entre los puntos P_1 y P_2

□ Fórmula de la distancia

Supongamos que $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos distintos en el plano xy, que no están en una recta vertical ni en una recta horizontal. En consecuencia, P_1, P_2 y $P_3(x_1, y_2)$ son vértices de un triángulo rectángulo, como se ve en la **FIGURA 1.3.8**. La longitud del lado P_3P_2 es $|x_2 - x_1|$, mientras que la longitud del lado P_1P_3 es $|y_2 - y_1|$. Si representamos con d la longitud P_1P_2, entonces

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \tag{1}$$

de acuerdo con el teorema de Pitágoras. Debido a que el cuadrado de todo número real es igual al cuadrado de su valor absoluto, se pueden reemplazar los signos de valor absoluto en la ecuación (1) por paréntesis. Entonces, la fórmula de la distancia se deriva directamente de (1).

FÓRMULA DE LA DISTANCIA

La **distancia** entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ cualesquiera en el plano xy se determina por

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{2}$$

Aunque esta ecuación fue deducida para dos puntos que no estén en una recta horizontal o vertical, la ecuación (2) es válida también en esos casos. También, como $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$, no importa qué punto se use primero en la fórmula de la distancia; esto es, $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$.

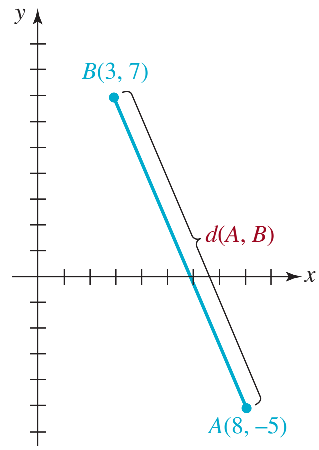


FIGURA 1.3.9 Distancia entre dos puntos del ejemplo 4

EJEMPLO 4 Distancia entre dos puntos

Calcular la distancia entre los puntos $A(8, -5)$ y $B(3, 7)$.

Solución De acuerdo con (2), si A y B son P_1 y P_2, respectivamente:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(3 - 8)^2 + (7 - (-5))^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = \sqrt{169} = 13. \end{aligned}$$

La distancia d se ilustra en la **FIGURA 1.3.9**. ■

EJEMPLO 5 Tres puntos forman un triángulo

Determinar si los puntos $P_1(7, 1)$, $P_2(-4, -1)$ y $P_3(4, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

Solución Según la geometría plana, un triángulo es rectángulo si y sólo si la suma de los cuadrados de las longitudes de dos de sus lados es igual al cuadrado de la longitud del lado restante. Ahora bien, de acuerdo con la fórmula de la distancia, ecuación (2):

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(-4 - 7)^2 + (-1 - 1)^2} \\ &= \sqrt{121 + 4} = \sqrt{125}, \\ d(P_2, P_3) &= \sqrt{(4 - (-4))^2 + (5 - (-1))^2} \\ &= \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10, \\ d(P_3, P_1) &= \sqrt{(7 - 4)^2 + (1 - 5)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

Ya que

$$[d(P_3, P_1)]^2 + [d(P_2, P_3)]^2 = 25 + 100 = 125 = [d(P_1, P_2)]^2,$$

se llega a la conclusión de que P_1, P_2 y P_3 son los vértices de un triángulo rectángulo, y el ángulo recto está en P_3. Vea la **FIGURA 1.3.10**. ■

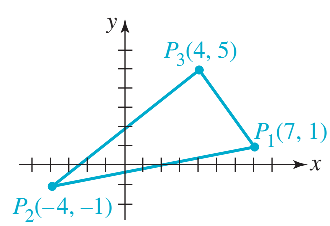


FIGURA 1.3.10 Triángulo del ejemplo 5

□ Fórmula del punto medio En la sección 1.2 se explicó que el punto medio en la recta numérica de un segmento de recta entre dos números a y b es su promedio $(a + b)/2$. En el plano xy, cada coordenada del punto medio M de un segmento de recta que une a dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ que se ven en la **FIGURA 1.3.11** es el promedio de las coordenadas correspondientes a los extremos de los intervalos $[x_1, x_2]$ y $[y_1, y_2]$.

Para demostrarlo, se ve en la figura 1.3.11 que los triángulos P_1CM y MDP_2 son congruentes, porque los ángulos correspondientes son iguales y $d(P_1, M) = d(M, P_2)$. Por consiguiente, $d(P_1, C) = d(M, D)$, o $y - y_1 = y_2 - y$. Al despejar y de la última ecuación se obtiene

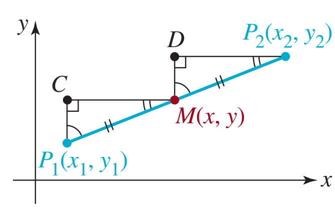


FIGURA 1.3.11 M es el punto medio del segmento de recta que une a P_1 con P_2

$y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$. De igual modo, $d(C, M) = d(D, P_2)$, y entonces $x - x_1 = x_2 - x$; por lo que $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Este resultado se resume como sigue.

FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO

Las coordenadas del **punto medio** del segmento de recta que une a los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ se determinan por medio de

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right). \qquad (3)$$

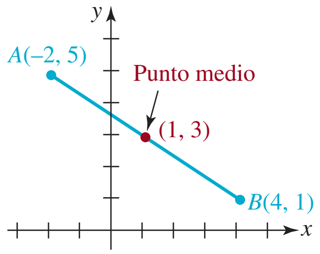


FIGURA 1.3.12 Punto medio del segmento de recta del ejemplo 6

EJEMPLO 6 Punto medio de un segmento de recta

Calcular las coordenadas del punto medio del segmento de recta que une $A(-2, 5)$ con $B(4, 1)$.

Solución De acuerdo con la fórmula del punto medio, ecuación (3), las coordenadas del punto medio son

$$\left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{5 + 1}{2}\right) \quad \text{o} \quad (1, 3).$$

Este punto se indica en color en la **FIGURA 1.3.12**. ■

1.3 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

En los problemas 1 a 4 grafique los puntos.

1. $(2, 3), (4, 5), (0, 2), (-1, -3)$
2. $(1, 4), (-3, 0), (-4, 2), (-1, -1)$
3. $(-\frac{1}{2}, -2), (0, 0), (-1, \frac{4}{3}), (3, 3)$
4. $(0, 0.8), (-2, 0), (1.2, -1.2), (-2, 2)$

En los problemas 5 a 16 determine el cuadrante en el que está el punto si (a, b) está en el cuadrante I.

5. $(-a, b)$
6. $(a, -b)$
7. $(-a, -b)$
8. (b, a)
9. $(-b, a)$
10. $(-b, -a)$
11. (a, a)
12. $(b, -b)$
13. $(-a, -a)$
14. $(-a, a)$
15. $(b, -a)$
16. $(-b, b)$

17. Grafique los puntos de los problemas 5 a 16, si (a, b) es el punto que se ve en la **FIGURA 1.3.13**.

18. Indique las coordenadas de los puntos que se ven en la **FIGURA 1.3.14**.

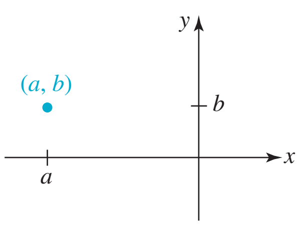


FIGURA 1.3.13 Punto (a, b) del problema 17

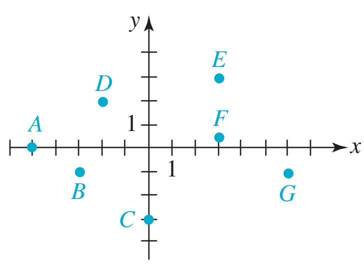


FIGURA 1.3.14 Puntos A a G del problema 18

19. Los puntos $(-2, 0)$, $(-2, 6)$ y $(3, 0)$ son los vértices de un rectángulo. Determine el cuarto vértice.
20. Describa el conjunto de los puntos (x, x) en el plano coordenado. También el conjunto de los puntos $(x, -x)$.

En los problemas 21 a 26, grafique el conjunto de puntos (x, y) en el plano xy, cuyas coordenadas satisfagan las condiciones indicadas.

21. $xy = 0$ **22.** $xy > 0$
23. $|x| \leq 1$ y $|y| \leq 2$ **24.** $x \leq 2$ y $y \geq -1$
25. $|x| > 4$ **26.** $|y| \leq 1$

En los problemas 27 a 32, calcule la distancia entre los puntos.

27. $A(1, 2), B(-3, 4)$ **28.** $A(-1, 3), B(5, 0)$
29. $A(2, 4), B(-4, -4)$ **30.** $A(-12, -3), B(-5, -7)$
31. $A(-\frac{3}{2}, 1), B(\frac{5}{2}, -2)$ **32.** $A(-\frac{5}{3}, 4), B(-\frac{2}{3}, -1)$

En los problemas 33 a 36, determine si los puntos A, B y C son vértices de un triángulo rectángulo.

33. $A(8, 1), B(-3, -1), C(10, 5)$ **34.** $A(-2, -1), B(8, 2), C(1, -11)$
35. $A(2, 8), B(0, -3), C(6, 5)$ **36.** $A(4, 0), B(1, 1), C(2, 3)$

37. Determine si los puntos $A(0, 0)$, $B(3, 4)$ y $C(7, 7)$ son vértices de un triángulo isósceles.
38. Determine todos los puntos del eje y que estén a 5 unidades del punto $(4, 4)$.
39. Se tiene el segmento de recta que une $A(-1, 2)$ con $B(3, 4)$.
    a) Encuentre una ecuación que exprese el hecho que un punto $P(x, y)$ sea equidistante de A y de B.
    b) Defina geométricamente el conjunto de puntos que describe la ecuación del inciso *a*).
40. Use la fórmula de la distancia para determinar si los puntos $A(-1, -5)$, $B(2, 4)$ y $C(4, 10)$ están en una recta.
41. Determine todos los puntos cuya abscisa sea 6, tales que la distancia de cada punto a $(-1, 2)$ es $\sqrt{85}$.
42. ¿Cuál de los puntos $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ o $(0.25, 0.97)$ está más cerca del origen?

En los problemas 43 a 48, determine el punto medio del segmento de recta que une los puntos A y B.

43. $A(4, 1), B(-2, 4)$ **44.** $A(\frac{2}{3}, 1), B(\frac{7}{3}, -3)$
45. $A(-1, 0), B(-8, 5)$ **46.** $A(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}), B(-\frac{5}{2}, 1)$
47. $A(2a, 3b), B(4a, -6b)$ **48.** $A(x, x), B(-x, x + 2)$

En los problemas 49 a 52, determine el punto B si M es el punto medio del segmento de recta que une los puntos A y B.

49. $A(-2, 1), M(\frac{3}{2}, 0)$ **50.** $A(4, \frac{1}{2}), M(7, -\frac{5}{2})$
51. $A(5, 8), M(-1, -1)$ **52.** $A(-10, 2), M(5, 1)$

53. Calcule la distancia del punto medio del segmento de recta que une a $A(-1, 3)$ con $B(3, 5)$, al punto medio del segmento de recta que une a $C(4, 6)$ con $D(-2, -10)$.
54. Determine todos los puntos del eje x que estén a 3 unidades del punto medio del segmento de recta que une a $(5, 2)$ con $(-5, -6)$.

55. El eje x es la perpendicular que pasa por el punto medio (mediatriz) del segmento de recta que pasa por $A(2, 5)$ y $B(x, y)$. Calcule x y y.
56. En el segmento de recta que une los puntos $A(0, 0)$ y $B(6, 0)$, determine un punto $C(x, y)$ en el primer cuadrante, tal que A, B y C sean vértices de un triángulo equilátero.
57. Determine los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ en el segmento de recta que une $A(3, 6)$ con $B(5, 8)$, y que dividan al segmento de recta en cuatro partes iguales.

Aplicaciones diversas

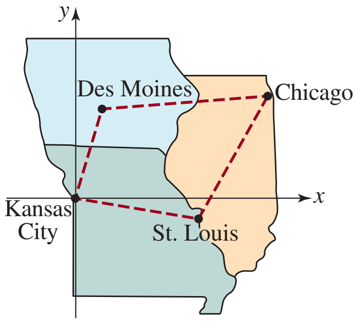


FIGURA 1.3.15 Mapa para el problema 58

58. **Camino a Chicago** Las ciudades de Kansas City y Chicago no están unidas directamente por una carretera interestatal, pero cada una de ellas está conectada con las ciudades de St. Louis y Des Moines. Vea la FIGURA 1.3.15. Des Moines está a unas 40 millas al este, y a 180 millas al norte de Kansas City. St. Louis está más o menos a 230 millas al este y a 40 millas al sur de Kansas City, y Chicago está aproximadamente a 360 millas al este, y a 200 millas al norte de Kansas City. Suponga que esta parte del Medio Oeste es un plano, y que las carreteras son rectas. ¿Qué ruta de Kansas City a Chicago es más corta; ¿la que pasa por St. Louis o la que pasa por Des Moines?

Para discusión

59. Los puntos $A(1, 0)$, $B(5, 0)$, $C(4, 6)$ y $D(8, 6)$ son los vértices de un paralelogramo. Indique cómo se puede demostrar que las diagonales del paralelogramo se bisecan entre sí. Ponga sus ideas a trabajar.
60. Los puntos $A(0, 0)$, $B(a, 0)$ y $C(a, b)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. Describa cómo se puede demostrar que el punto medio de la hipotenusa equidista de los vértices. Ponga sus ideas a trabajar.

1.4 Círculos y gráficas

Introducción Una **ecuación con dos variables**, que pueden ser x y y, sólo es una afirmación o declaración matemática que asevera que dos cantidades que contienen esas variables son iguales. En los campos de las ciencias físicas, ingeniería y comercio, las ecuaciones son un medio de comunicación. Por ejemplo, si un físico desea comunicar a otro la distancia que recorre una piedra que se deja caer desde una gran altura durante cierto tiempo t, escribirá $s = 16t^2$. Un matemático verá $s = 16t^2$ y de inmediato lo considerará como cierto *tipo* de ecuación. La clasificación de una ecuación conlleva información acerca de propiedades que comparten todas las ecuaciones de ese tipo. El resto de este libro se dedica a examinar diversas clases de ecuaciones que contienen dos variables, y a estudiar sus propiedades. A continuación presentamos una muestra de las ecuaciones que verá el lector:

$$\begin{gathered} x = 1, \qquad x^2 + y^2 = 1, \qquad y = x^2, \qquad y = \sqrt{x}, \\ y = 5x - 1, \qquad y = x^3 - 3x, \qquad y = 2^x, \qquad y = \ln x, \\ y = \operatorname{sen} x, \qquad y^2 = x - 1, \qquad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \qquad \tfrac{1}{2}x^2 - y^2 = 1. \end{gathered} \tag{1}$$

Una **solución** de una ecuación con dos variables x y y es un par ordenado de números (a, b) que produce una afirmación cierta cuando $x = a$ y $y = b$ se sustituyen en la ecuación. Por ejemplo $(-2, 4)$ es una solución de la ecuación $y = x^2$, porque

$$\overset{\overset{y\,=\,4}{\downarrow}}{4} = (\overset{\overset{x\,=\,-2}{\downarrow}}{-2})^2$$

es una afirmación cierta. También se dice que las coordenadas $(-2, 4)$ **satisfacen** la ecuación. El conjunto de todas las soluciones de una ecuación se llama **conjunto solución**. Se dice que dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución. Por ejemplo, veremos (ejemplo 4 de esta sección) que la ecuación $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 17 = 0$ es equivalente a $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$.

En la lista de las ecuaciones (1) el lector podrá objetar que la primera ecuación, $x = 1$, no contiene dos variables. ¡Es asunto de interpretación! Como no hay una dependencia explícita de y en la ecuación, se puede interpretar que $x = 1$ es el conjunto

$$\{(x, y) \,|\, x = 1, \text{ donde } y \text{ es cualquier número real}\}.$$

Las soluciones de $x = 1$ son los pares ordenados $(1, y)$ donde se tiene la libertad de escoger a y en forma arbitraria, mientras sea un número real. Por ejemplo, $(1, 0)$ y $(1, 3)$ son soluciones de la ecuación $x = 1$. La **gráfica** de una ecuación es la representación visual, en el plano coordenado, del conjunto de puntos cuyas coordenadas (a, b) satisfacen la ecuación. La gráfica de $x = 1$ es la recta vertical que muestra la **FIGURA 1.4.1**.

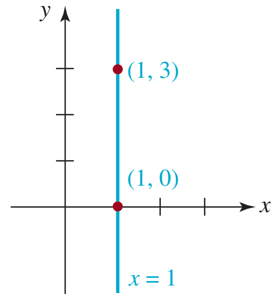


FIGURA 1.4.1 Gráfica de la ecuación $x = 1$

□ Círculos

Se puede usar la fórmula de la distancia que presentamos en la sección 1.3 para definir un conjunto de puntos en el plano coordenado. Uno de esos muy importantes conjuntos se define como sigue.

CÍRCULO

Un **círculo** es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en el plano coordenado que están a determinada distancia fija r, llamada **radio** de un punto fijo dado C, llamado **centro**.

Si las coordenadas del centro son $C(h, k)$, entonces, de acuerdo con la anterior definición, un punto $P(x, y)$ está en un círculo de radio r si y sólo si

$$d(P, C) = r \qquad \text{o sea} \qquad \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r.$$

Ya que $(x - h)^2 + (y - k)^2$ siempre es no negativo, se obtiene una ecuación equivalente si los dos lados se elevan al cuadrado. Llegamos a la conclusión de que un círculo de radio r y centro $C(h, k)$ tiene la ecuación

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2. \tag{2}$$

En la **FIGURA 1.4.2** hemos trazado una gráfica típica de una ecuación con la forma de la ecuación (2). La ecuación (2) se llama **forma normal**, **estándar** o **canónica** de la ecuación de un círculo. Se ve que los símbolos h y k en (2) representan números reales, y como tales pueden ser positivos, cero o negativos. Cuando $h = 0$ y $k = 0$, se ve que la forma normal de la ecuación de un círculo con centro en el origen es

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{3}$$

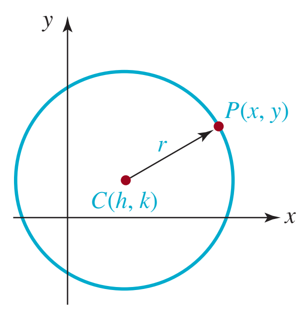


FIGURA 1.4.2 Círculo con radio r y centro en (h, k)

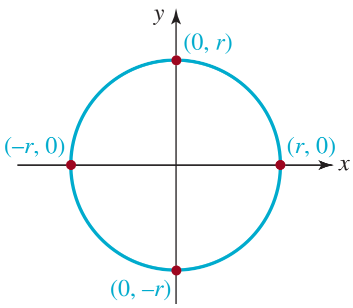


FIGURA 1.4.3 Círculo con radio r y centro en (0, 0)

Vea la **FIGURA 1.4.3**. Cuando $r = 1$ se dice que (2) es una ecuación de un **círculo unitario**. Por ejemplo, $x^2 + y^2 = 1$ es una ecuación de un círculo unitario con centro en el origen.

EJEMPLO 1 Centro y radio

Determinar el centro y el radio del círculo cuya ecuación es

$$(x - 8)^2 + (y + 2)^2 = 49. \tag{4}$$

Solución Para obtener la forma normal de la ecuación (4) se escribe como sigue:

$$(x - 8)^2 + (y - (-2))^2 = 7^2.$$

En esta última forma se identifican $h = 8$, $k = -2$ y $r = 7$. Así, el círculo tiene su centro en $(8, -2)$ y su radio es 7. ∎

EJEMPLO 2 Ecuación de un círculo

Deducir la ecuación del círculo cuyo centro es $C(-5, 4)$ y cuyo radio es $\sqrt{2}$.

Solución Al sustituir $h = -5$, $k = 4$ y $r = \sqrt{2}$ en la ecuación (2), se obtiene

$$(x - (-5))^2 + (y - 4)^2 = (\sqrt{2})^2 \qquad \text{o sea que} \qquad (x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 2. \quad ∎$$

EJEMPLO 3 Ecuación de un círculo

Deducir la ecuación del círculo cuyo centro es $C(4, 3)$ y que pasa por $P(1, 4)$.

Solución Con $h = 4$ y $k = 3$, y de acuerdo con la ecuación (2),

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = r^2. \tag{5}$$

Como el punto $P(1, 4)$ está en el círculo, como se ve en la **FIGURA 1.4.4**, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (5), esto es,

$$(1 - 4)^2 + (4 - 3)^2 = r^2 \qquad \text{o} \qquad 10 = r^2.$$

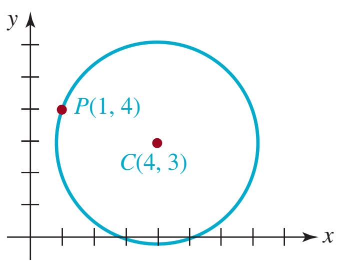


FIGURA 1.4.4 Círculo del ejemplo 3

Entonces, la ecuación que se pide en forma normal es

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 10. \quad ∎$$

☐ **Completar el cuadrado** Si los términos $(x - h)^2$ y $(y - k)^2$ se desarrollan y se agrupan sus términos semejantes, una ecuación de un círculo en forma normal se puede reescribir como

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0. \tag{6}$$

Naturalmente, en esta forma no se aprecian el centro y el radio. Para invertir el proceso, en otras palabras, para pasar de (6) a la forma normal (2), se debe **completar el cuadrado** en x y en y. Recuerde que en álgebra, al sumar $(a/2)^2$ a una expresión como $x^2 + ax$ se obtiene $x^2 + ax + (a/2)^2$, que es el cuadrado perfecto $(x + a/2)^2$. Al rearreglar los términos en (6),

$$(x^2 + ax \qquad) + (y^2 + by \qquad) = -c,$$

y después sumar $(a/2)^2$ y $(b/2)^2$ a *los dos* lados de la última ecuación,

Los términos en color, agregados dentro de los paréntesis en el lado izquierdo, también se agregan al lado derecho de la igualdad. Esta nueva ecuación es equivalente a (6).

$$\left(x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 + by + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c,$$

y se obtiene la forma normal de la ecuación de un círculo:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 4c).$$

El lector *no debe* memorizar esta última ecuación. Le recomendamos que siga el proceso de completar el cuadrado cada vez que se le presente.

EJEMPLO 4 Completar el cuadrado

Determine el centro y el radio del círculo cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 17 = 0. \tag{7}$$

Solución Para determinar el centro y el radio, se debe reescribir la ecuación (7) en la forma normal (2). Primero, se reordenan los términos,

$$(x^2 + 10x \qquad) + (y^2 - 2y \qquad) = -17.$$

A continuación se completa el cuadrado en x y y sumando, respectivamente, $(10/2)^2$ dentro del primer paréntesis, y $(-2/2)^2$ en el segundo. Se debe hacer con cuidado, porque esos números se deben sumar en ambos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned}[x^2 + 10x + (\tfrac{10}{2})^2] + [y^2 - 2y + (\tfrac{-2}{2})^2] &= -17 + (\tfrac{10}{2})^2 + (\tfrac{-2}{2})^2 \\ (x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 2y + 1) &= 9 \\ (x + 5)^2 + (y - 1)^2 &= 3^2.\end{aligned}$$

De acuerdo con la última ecuación, se ve que el círculo está centrado en $(-5, 1)$ y tiene radio 3. Vea la **FIGURA 1.4.5**. ■

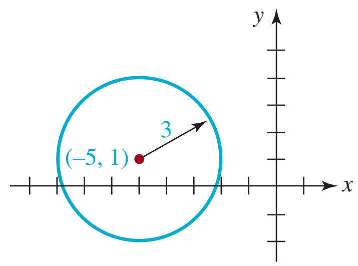


FIGURA 1.4.5 Círculo del ejemplo 4

Es posible que una expresión para la que se debe completar el cuadrado tenga un primer coeficiente distinto de 1. Por ejemplo,

Nota:

$$3x^2 + 3y^2 - 18x + 6y + 2 = 0$$

es una ecuación de un círculo. Como en el ejemplo 4, se comienza reordenando la ecuación:

$$(3x^2 - 18x \qquad) + (3y^2 + 6y \qquad) = -2.$$

Sin embargo, ahora se debe dar un paso adicional antes de tratar de completar el cuadrado; esto es, se deben dividir ambos lados de la ecuación entre 3, para que los coeficientes de x^2 y y^2 sean 1:

$$(x^2 - 6x \qquad) + (y^2 + 2y \qquad) = -\tfrac{2}{3}.$$

En este momento ya se pueden sumar los números adecuados en cada conjunto de paréntesis *y también* al lado derecho de la igualdad. El lector debe comprobar que la forma normal que resulta es $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = \frac{28}{3}$.

□ **Semicírculos** Si se despeja y de (3), el resultado es $y^2 = r^2 - x^2$ o $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Esta última expresión equivale a dos ecuaciones, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$. De igual manera, si se despeja x de (3), se obtiene $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ y $x = -\sqrt{r^2 - y^2}$.

Por convención, el símbolo $\sqrt{\ }$ representa una cantidad no negativa; entonces, los valores de y definidos por una ecuación como $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ son no negativos. Las gráficas de las cuatro ecuaciones indicadas en color son, a su vez, la mitad superior, mitad inferior, mitad derecha y mitad izquierda del círculo de la figura 1.4.3. Cada gráfica de la **FIGURA 1.4.6** se llama **semicírculo**.

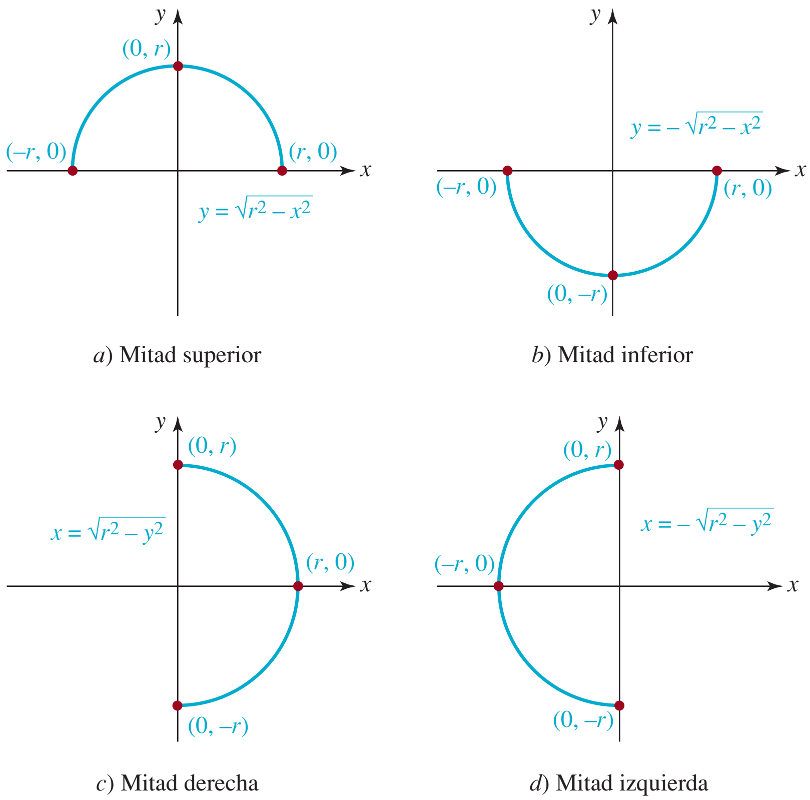


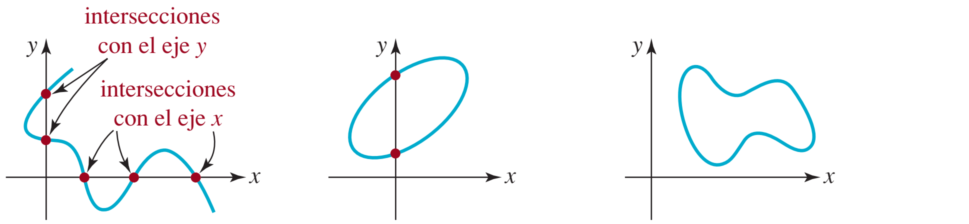
FIGURA 1.4.6 Semicírculos

□ Desigualdades Un último punto acerca de los círculos: a veces se encuentran problemas en los que se debe trazar el conjunto de puntos, en el plano xy, cuyas coordenadas satisfagan desigualdades como $x^2 + y^2 < r^2$ o $x^2 + y^2 \geq r^2$. La ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ describe al conjunto de puntos (x, y) cuya distancia al origen $(0, 0)$ es exactamente r. Por consiguiente, la desigualdad $x^2 + y^2 < r^2$ describe al conjunto de puntos (x, y) cuya distancia al origen es menor que r. En otras palabras, los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad $x^2 + y^2 < r^2$ están en el *interior* del círculo. En forma parecida, los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen $x^2 + y^2 \geq r^2$ están ya sea *en* el círculo, o en el *exterior* de él.

□ Gráficas Es difícil de leer un periódico, un texto científico o comercial, navegar por internet o hasta ver las noticias en TV sin observar representaciones gráficas de datos. Hasta parecerá imposible ir más allá de la primera página de un texto de matemáticas sin ver algún tipo de gráfica. Hay tantas y diversas cantidades relacionadas por medio de ecuaciones, y tantas preguntas acerca del comportamiento de las cantidades relacionadas por la ecuación que se pueden contestar mediante una gráfica, que la destreza de graficar ecuaciones con rapidez y exactitud, como la destreza para manejar el álgebra con rapidez y exactitud, es muy importante en la lista de conocimientos esenciales para el éxito en un curso de cálculo. El resto de esta sección hablaremos acerca de gráficas en general, y en forma más específica acerca de dos aspectos importantes de gráficas de ecuaciones.

□ Intersecciones Puede ser útil ubicar los puntos en los que la gráfica de una ecuación cruza los ejes coordenados cuando se traza a mano una gráfica. Las **intersecciones en el eje *x*** de la gráfica de una ecuación son los puntos en los que la gráfica cruza al eje x. Ya que todo punto del eje x tiene la ordenada (coordenada y) 0, las abscisas (coordenadas x) de esos puntos, si las hay, se pueden determinar a partir de la ecuación dada, haciendo que $y = 0$ y despejando x.

A su vez, las **intersecciones en el eje *y*** de la gráfica de una ecuación son los puntos en los que su gráfica cruza al eje y. Las ordenadas de esos puntos se pueden determinar igualando $x = 0$ en la ecuación, y despejando a y. Vea la **FIGURA 1.4.7**.



a) Cinco intersecciones con los ejes

b) Dos intersecciones con el eje y

c) La gráfica no tiene intersecciones con los ejes

FIGURA 1.4.7 Intersecciones de una gráfica con los ejes coordenados

EJEMPLO 5 Intersecciones

Determine las intersecciones de las gráficas de las ecuaciones con los ejes coordenados
a) $x^2 - y^2 = 9$ ***b***) $y = 2x^2 + 5x - 12$.

Solución

a) Para determinar las intersecciones con el eje x se elige $y = 0$ y se despeja x de la ecuación resultante, $x^2 = 9$:

$$x^2 - 9 = 0 \qquad \text{o sea} \qquad (x + 3)(x - 3) = 0$$

y se obtiene $x = -3$ y $x = 3$. Las intersecciones con el eje x de la gráfica son los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$. Para calcular las intersecciones con el eje y se hace que $x = 0$ y se resuelve $-y^2 = 9$, o $y^2 = -9$. Como no hay números reales cuyo cuadrado sea negativo, la conclusión es que la gráfica de la ecuación no cruza al eje y.

b) Si $y = 0$, se obtiene $2x^2 + 5x - 12 = 0$. Es una ecuación cuadrática, y se puede resolver factorizando o mediante la solución general de una fórmula cuadrática. Con factorización se obtiene

$$(x + 4)(2x - 3) = 0$$

por lo que $x = -4$ y $x = \frac{3}{2}$. Las intersecciones con el eje x de la gráfica son los puntos $(-4, 0)$ y $(\frac{3}{2}, 0)$. Ahora, si se hace que $x = 0$ en la ecuación $y = 2x^2 + 5x - 12$, de inmediato se obtiene $y = -12$. La intersecciones con el eje y de la gráfica es el punto $(0, -12)$. ■

EJEMPLO 6 Regreso al ejemplo 4

Regresemos al círculo del ejemplo 4 y determinemos las coordenadas al origen a partir de la ecuación (7). Al hacer que $y = 0$ en $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 17 = 0$ y usar la fórmula cuadrática para resolver $x^2 + 10x + 17 = 0$, se ve que las intersecciones con el eje x de este círculo son $(-5 - 2\sqrt{2}, 0)$ y $(-5 + 2\sqrt{2}, 0)$. Si se hace que $x = 0$, con la fórmula cuadrática se ve que las raíces de la ecuación $y^2 - 2y + 17 = 0$ son números complejos. Como se ve en la figura 1.4.5, el círculo no cruza al eje y. ■

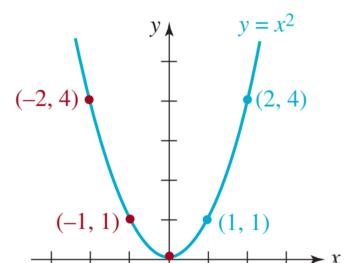
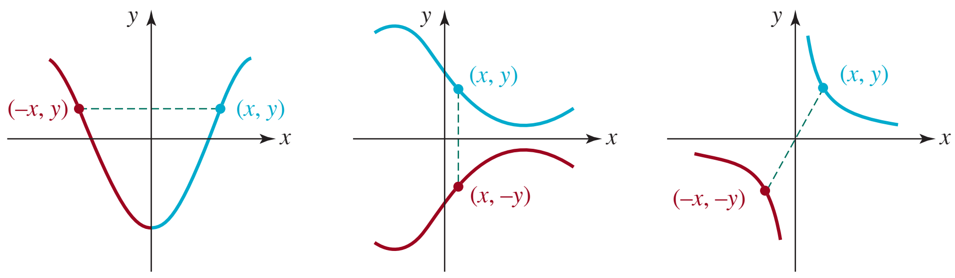


FIGURA 1.4.8 Gráfica con simetría con respecto al eje y

□ Simetría

Una gráfica también puede tener simetría. El lector ya sabrá que la gráfica de la ecuación $y = x^2$ se llama *parábola*. La **FIGURA 1.4.8** muestra que la gráfica de $y = x^2$ es simétrica con respecto al eje y, porque la parte de la gráfica que está en el segundo cuadrante es la *imagen especular* (de espejo) o la *reflexión con respecto al eje y* de esa parte de la gráfica en el primer cuadrante. En general, una gráfica es **simétrica con respecto al eje *y*** si siempre que (x, y) es un punto de la gráfica, $(-x, y)$ también es un punto de ella. Note, en la figura 1.4.8, que los puntos $(1, 1)$ y $(2, 4)$ están en la gráfica. Como ésta tiene simetría respecto del eje y, los puntos $(-1, 1)$ y $(-2, 4)$ deben estar también en la gráfica. Se dice que una gráfica es **simétrica con respecto al eje *x*** si siempre que (x, y) es un punto de la gráfica, $(x, -y)$ también es un punto de la gráfica. Por último, una gráfica es **simétrica con respecto al origen** si cuando (x, y) está en la gráfica, $(-x, -y)$ también es un punto de la gráfica. La **FIGURA 1.4.9** ilustra estos tres tipos de simetría.



a) Simetría con respecto al eje *y*

b) Simetría con respecto al eje *x*

c) Simetría con respecto al origen

FIGURA 1.4.9 Simetrías en una gráfica

Observe que la gráfica del círculo en la figura 1.4.3 tiene las tres simetrías anteriores.

En la práctica deseamos saber si una gráfica tiene alguna simetría antes de trazarla. Eso se puede saber aplicando las siguientes pruebas a la ecuación que define la gráfica.

PRUEBAS DE SIMETRÍA

La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto a:

i) el **eje *y*** si al sustituir x por $-x$ se obtiene una ecuación equivalente;
ii) el **eje *x*** si al sustituir y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente;
iii) el **origen** si al sustituir x y y por $-x$ y $-y$ se obtiene una ecuación equivalente.

La ventaja de usar simetrías al graficar debería ser manifiesta. Por ejemplo, si la gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje x, sólo se necesita trazar la gráfica para $y \geq 0$, porque los puntos de la gráfica para $y < 0$ se obtienen con imágenes especulares, con respecto al eje x, de los puntos en el primero y segundo cuadrantes.

EJEMPLO 7 Prueba de simetría

Reemplazando x por $-x$ en la ecuación $y = x^2$, y usando $(-x)^2 = x^2$, se ve que

$$y = (-x)^2 \qquad \text{es equivalente a} \qquad y = x^2.$$

Esto demuestra lo que se aprecia en la figura 1.4.8: que la gráfica de $y = x^2$ es simétrica con respecto al eje y. ■

EJEMPLO 8 Intersecciones y simetría

Determinar las intersecciones con los ejes y la simetría de la gráfica de

$$x + y^2 = 10. \tag{8}$$

Solución

Intersecciones: Se hace $y = 0$ en la ecuación (8) y de inmediato se obtiene $x = 10$. La gráfica de la ecuación tiene una sola intersección con el eje x, $(10, 0)$. Cuando $x = 0$, se obtiene $y^2 = 10$, lo que implica que $y = -\sqrt{10}$ o $y = \sqrt{10}$. Entonces, hay dos intersecciones con el eje y, $(0, -\sqrt{10})$ y $(0, \sqrt{10})$.

Simetría: Si se sustituye x por $-x$ en la ecuación (8), se obtiene $-x + y^2 = 10$. Este resultado no equivale a la ecuación (8). El lector también debe verificar que al sustituir x y y por $-x$ y $-y$ en (8) no se obtiene una ecuación equivalente. Sin embargo, si se sustituye y por $-y$, se encuentra que

$$x + (-y)^2 = 10 \qquad \text{es equivalente a} \qquad x + y^2 = 10.$$

Entonces, la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje x.

Gráfica: En la gráfica de la ecuación que se muestra en la FIGURA 1.4.10, las intersecciones se indican y se debe apreciar la simetría con respecto al eje x. ■

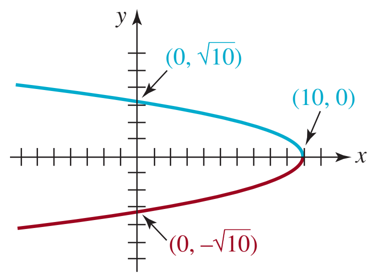


FIGURA 1.4.10 Gráfica de la ecuación del ejemplo 8

1.4 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

En los problemas 1 a 6, determine el centro y el radio de cada círculo. Trace su gráfica.

1. $x^2 + y^2 = 5$
2. $x^2 + y^2 = 9$
3. $x^2 + (y - 3)^2 = 49$
4. $(x + 2)^2 + y^2 = 36$
5. $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 1$
6. $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$

En los problemas 7 a 14, complete el cuadrado en x y y para determinar el centro y el radio de cada círculo.

7. $x^2 + y^2 + 8y = 0$
8. $x^2 + y^2 - 6x = 0$
9. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$
10. $x^2 + y^2 - 18x - 6y - 10 = 0$
11. $x^2 + y^2 - 20x + 16y + 128 = 0$
12. $x^2 + y^2 + 3x - 16y + 63 = 0$
13. $2x^2 + 2y^2 + 4x + 16y + 1 = 0$
14. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{5}{2}x + 10y + 5 = 0$

En los problemas 15 a 24, deduzca una ecuación del círculo que satisfaga las condiciones indicadas.

15. centro $(0, 0)$, radio 1
16. centro $(1, -3)$, radio 5
17. centro $(0, 2)$, radio $\sqrt{2}$
18. centro $(-9, -4)$, radio $\frac{3}{2}$
19. extremos de un diámetro en $(-1, 4)$ y $(3, 8)$
20. extremos de un diámetro en $(4, 2)$ y $(-3, 5)$
21. centro $(0, 0)$; la gráfica pasa por $(-1, -2)$
22. centro $(4, -5)$; la gráfica pasa por $(7, -3)$
23. centro $(5, 6)$; la gráfica es tangente al eje x
24. centro $(-4, 3)$; la gráfica es tangente al eje y

En los problemas 25 a 28, trace el semicírculo definido por la ecuación indicada.

25. $y = \sqrt{4 - x^2}$

26. $x = 1 - \sqrt{1 - y^2}$

27. $x = \sqrt{1 - (y - 1)^2}$

28. $y = -\sqrt{9 - (x - 3)^2}$

29. Deduzca la ecuación de la mitad superior del círculo $x^2 + (y - 3)^2 = 4$. Repita lo anterior con respecto a la mitad derecha del círculo.

30. Deduzca la ecuación de la mitad inferior del círculo $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 9$. Repita lo anterior con respecto a la mitad izquierda del círculo.

En los problemas 31 a 34, trace el conjunto de puntos en el plano xy, cuyas coordenadas satisfagan la desigualdad dada.

31. $x^2 + y^2 \geq 9$

32. $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 \leq 25$

33. $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

34. $x^2 + y^2 > 2y$

En los problemas 35 y 36, determine las coordenadas al origen del círculo dado.

35. el círculo con centro $(3, -6)$ y radio 7

36. el círculo $x^2 + y^2 + 5x - 6y = 0$

En los problemas 37 a 62, determine las intersecciones de la gráfica de la ecuación indicada con los ejes. Determine si la gráfica de la ecuación tiene simetría con respecto al eje x, al eje y o al origen. No trace la gráfica.

37. $y = -3x$

38. $y - 2x = 0$

39. $-x + 2y = 1$

40. $2x + 3y = 6$

41. $x = y^2$

42. $y = x^3$

43. $y = x^2 - 4$

44. $x = 2y^2 - 4$

45. $y = x^2 - 2x - 2$

46. $y^2 = 16(x + 4)$

47. $y = x(x^2 - 3)$

48. $y = (x - 2)^2(x + 2)^2$

49. $x = -\sqrt{y^2 - 16}$

50. $y^3 - 4x^2 + 8 = 0$

51. $4y^2 - x^2 = 36$

52. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

53. $y = \dfrac{x^2 - 7}{x^3}$

54. $y = \dfrac{x^2 - 10}{x^2 + 10}$

55. $y = \dfrac{x^2 - x - 20}{x + 6}$

56. $y = \dfrac{(x + 2)(x - 8)}{x + 1}$

57. $y = \sqrt{x} - 3$

58. $y = 2 - \sqrt{x + 5}$

59. $y = |x - 9|$

60. $x = |y| - 4$

61. $|x| + |y| = 4$

62. $x + 3 = |y - 5|$

En los problemas 63 a 66 establezca todas las simetrías que tenga la gráfica indicada.

63.

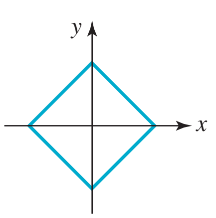


FIGURA 1.4.11 Gráfica del problema 63

64.

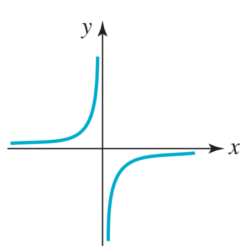


FIGURA 1.4.12 Gráfica del problema 64

65.

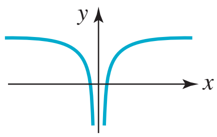


FIGURA 1.4.13 Gráfica del problema 65

66.

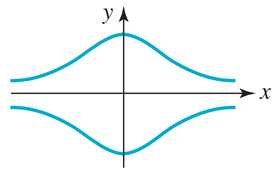


FIGURA 1.4.14 Gráfica del problema 66

En los problemas 67 a 72, use la simetría para completar la gráfica dada.

67. La gráfica es simétrica con respecto al eje *y*.

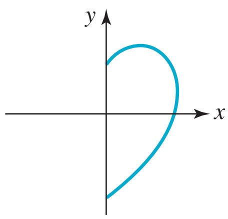


FIGURA 1.4.15 Gráfica del problema 67

68. La gráfica es simétrica con respecto al eje *x*.

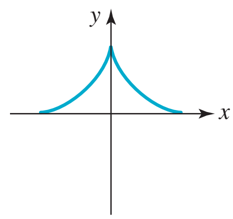


FIGURA 1.4.16 Gráfica del problema 68

69. La gráfica es simétrica con respecto al origen.

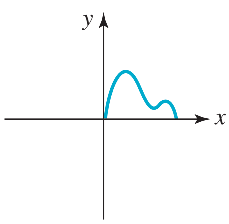


FIGURA 1.4.17 Gráfica del problema 69

70. La gráfica es simétrica con respecto al eje *y*.

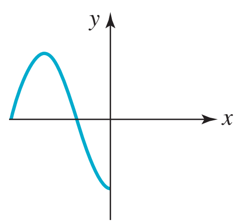


FIGURA 1.4.18 Gráfica del problema 70

71. La gráfica es simétrica con respecto a los ejes *x* y *y*.

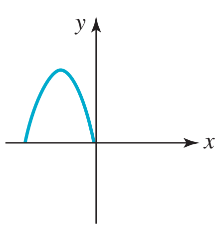


FIGURA 1.4.19 Gráfica del problema 71

72. La gráfica es simétrica con respecto al origen.

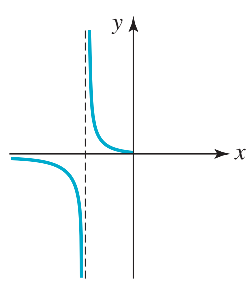


FIGURA 1.4.20 Gráfica del problema 72

Para discusión

73. Diga si la siguiente afirmación es cierta o falsa. Respalde su respuesta.

Si una gráfica tiene dos de las tres simetrías definidas en la página 30, por necesidad poseerá la tercera simetría.

74. ***a***) El radio del círculo en la **FIGURA 1.4.21*a*)** es r. ¿Cuál es su ecuación en la forma normal?

b) El centro del círculo de la **FIGURA 1.4.21*b*)** es (h, k). ¿Cuál es su ecuación en la forma normal?

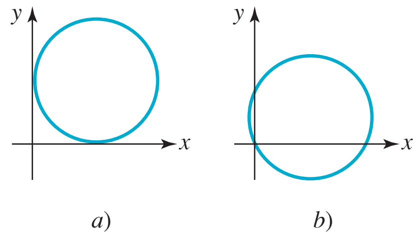


FIGURA 1.4.21 Gráficas del problema 74

75. Diga si la siguiente afirmación es cierta o falsa:

Toda ecuación de la forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ *es un círculo.*

76. Busque las áreas de las regiones sombreadas en la **FIGURA 1.4.22**.

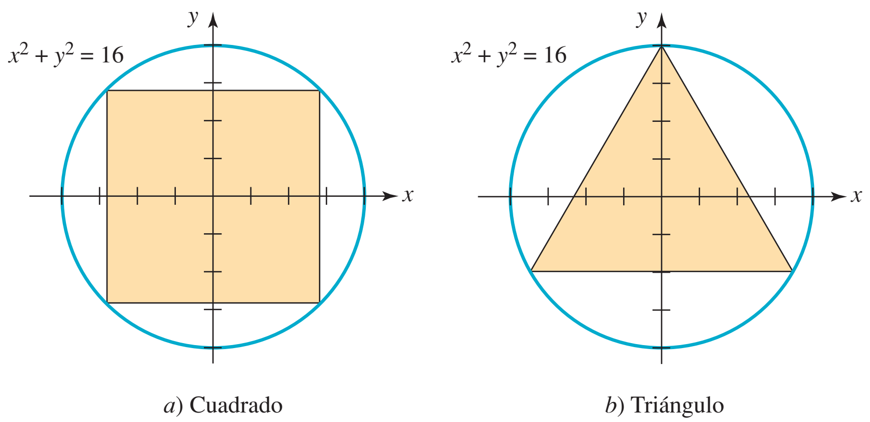


FIGURA 1.4.22 Círculos del problema 76

77. Demuestre que el triángulo de la parte *b*) del problema 76 es un triángulo isósceles.

1.5 Álgebra y límites

Avance DE CÁLCULO

☐ **Introducción** Con frecuencia, un problema de cálculo consiste en una sucesión de pasos, en los que la mayor parte de ellos sólo son algebraicos y sólo los últimos, y a veces sólo el último paso, son de cálculo. La descripción que sigue se enfoca en una clase de problemas de cálculo: la determinación de cierto tipo de *límite*. Aunque se presenta una breve e intuitiva introducción a la noción de límite, el objeto de la descripción es presentar un panorama de la clase de álgebra que se encuentra con frecuencia en esos problemas.

En esta sección sólo nos ocuparemos de **expresiones fraccionarias**. Basta imaginar que una expresión fraccionaria es un cociente de dos expresiones *algebraicas*.[2] Dicho de manera

[2] En este punto estamos excluyendo las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales. Véanse los capítulos 4 y 5.

simple, una **expresión algebraica** es la que resulta de efectuar una cantidad finita de adiciones, sustracciones, multiplicaciones, divisiones o raíces en una colección de variables y números reales. Por ejemplo, unas expresiones algebraicas con una sola variable, x, son las siguientes.

$$5x^3 - 3x + 1, \qquad \frac{2x^2 - 18}{x + 3} \qquad \text{y} \qquad x + \sqrt{x - 5}.$$

Una rama del álgebra que causa dificultades al resolver problemas de cálculo es la manipulación de las expresiones fraccionarias.

Factorización

Factorización Cuando la ley distributiva

$$a(b + c) = ab + ac$$

se lee de derecha a izquierda,

$$ab + ac = a(b + c),$$

se dice que se ha **factorizado** la expresión $ab + ac$. En el capítulo 3 veremos que la factorización juega un papel importante en la solución de ecuaciones, así como para trazar gráficas. Sin embargo, en el contexto presente sólo nos concierne el uso de la factorización para simplificar expresiones fraccionarias.

Las tres fórmulas de factorización que siguen son importantes y se usan como parte de cursos en diversos campos de la matemática.

FACTORIZACIONES IMPORTANTES

Diferencia de dos cuadrados:	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	(1)
Diferencia de dos cubos:	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	(2)
Suma de dos cubos:	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	(3)

Los símbolos a y b en las ecuaciones (1) a (3) pueden tomar cualquier valor. Por ejemplo, la expresión $x^4 - 16$ tiene la forma de (1). Si se identifican $a = x^2$ y $b = 4$, entonces

$$x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 - 4)(x^2 + 4). \tag{4}$$

Como el factor $x^2 - 4$ es a su vez la diferencia de dos cuadrados, la ecuación (4) continúa simplificándose como

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4). \tag{5}$$

La factorización de (5) es hasta donde se puede llegar usando números reales y exponentes enteros; la suma de dos cuadrados $x^2 + 4$ no se factoriza con números reales. Otro ejemplo: veamos la expresión $2x^2 - 3$. Como todo número real positivo se puede escribir como el cuadrado de su raíz cuadrada, $2 = (\sqrt{2})^2$ y $3 = (\sqrt{3})^2$, y en consecuencia, de acuerdo con (1), la expresión $2x^2 - 3$ se factoriza como sigue:

$$2x^2 - 3 = (\overset{\overset{a}{\downarrow}}{\sqrt{2}x})^2 - (\overset{\overset{b}{\downarrow}}{\sqrt{3}})^2 = (\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3}).$$

Usaremos la factorización y la propiedad de simplificación (o *cancelación*) para reducir una expresión fraccionaria.

Propiedad de cancelación: Si a, b y c son números reales, entonces

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, \quad c \neq 0.$$

EJEMPLO 1 Factorización y cancelación

Simplificar ***a)*** $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ***b)*** $\dfrac{x + 3}{x^2 - 4x - 21}$.

Solución

a) De (1),

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

La cancelación de $x - 1$ en la expresión anterior sólo es válida cuando $x \neq 1$. Si $x = 1$, estaríamos dividiendo entre 0.

b) Se trata de encontrar factores $x - a$ y $x - b$ tales que

$$x^2 - 4x - 21 = (x - a)(x - b).$$

Esto implica que $ab = -21$, por lo que a y b deben ser factores de -21 cuya suma es $-(a + b) = -4$. Con el procedimiento normal de prueba y error se llega a que $a = 7$ y $b = -3$. Por consiguiente,

$$\frac{x + 3}{x^2 - 4x - 21} = \frac{x + 3}{(x + 3)(x - 7)} = \frac{1}{x - 7}, \qquad x \neq -3.$$ ■

□ **Desarrollo del binomio** Una expresión algebraica de dos términos, $a + b$, se llama **binomio**. Sin duda el lector habrá resuelto problemas en los que debió desarrollar potencias de binomios como $(a + b)^2$ y $(a + b)^3$. Esto sucede con tanta frecuencia en los cursos de matemáticas, que le recomendamos memorizar los desarrollos en (6) y (7).

DESARROLLOS DE BINOMIOS IMPORTANTES

Desarrollos de $(a + b)^n$ para

$n = 2$: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (6)

$n = 3$: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (7)

Naturalmente, las fórmulas (6) y (7) se aplican por igual a un binomio que tenga la forma de una diferencia, $a - b$. Sólo se debe considerar que $a - b$ es la suma $a + (-b)$, y sustituir el símbolo b en (6) y (7) por $-b$:

$$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

y

$$\begin{aligned}(a - b)^3 &= (a + (-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.\end{aligned}$$

Hay maneras de recordar cómo obtener los coeficientes del desarrollo de potencias mayores, como por ejemplo $(a + b)^4$. El **triángulo de Pascal** es una de ellas.

EJEMPLO 2 Desarrollo de binomio

Simplificar $\dfrac{(7 + h)^2 - 49}{h}$.

Solución Usaremos el desarrollo de $(a + b)^2$ que muestra la ecuación (6), con $a = 7$ y $b = h$:

$$\begin{aligned}\frac{(7 + h)^2 - 49}{h} &= \frac{(7^2 + 2(7)h + h^2) - 49}{h}\\ &= \frac{49 + 14h + h^2 - 49}{h} \qquad \leftarrow 49 - 49 = 0\end{aligned}$$

$$= \frac{h(14 + h)}{h} \quad \leftarrow \text{se cancelan las } h$$
$$= 14 + h, \qquad h \neq 0.$$

■

□ Adición de expresiones fraccionarias Combinar dos o más expresiones fraccionarias, o simplificar una fracción compuesta donde numerador o denominador son a su vez fracciones, puede ser bastante difícil para algunas personas.

EJEMPLO 3 Suma de fracciones

Escribir como una fracción $\dfrac{10x}{2x^2 + 3x - 2} - \dfrac{4}{x + 2} + \dfrac{8}{2x - 1}$.

Solución Como $2x^2 + 3x - 2 = (2x - 1)(x + 2)$, el mínimo común denominador de los tres términos es $(2x - 1)(x + 2)$. En consecuencia multiplicaremos el segundo término por $(2x - 1)/(2x - 1)$ y el tercer término por $(x - 2)/(x - 2)$:

$$\frac{10x}{(2x - 1)(x + 2)} - \frac{4}{x + 2}\,\frac{2x - 1}{2x - 1} + \frac{8}{2x - 1}\,\frac{x + 2}{x + 2}.$$

Los numeradores se suman y después se simplifica como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{10x - 4(2x - 1) + 8(x + 2)}{(2x - 1)(x + 2)} &= \frac{10x - 8x + 4 + 8x + 16}{(2x - 1)(x + 2)} \\
&= \frac{10x + 20}{(2x - 1)(x + 2)} \\
&= \frac{10(x + 2)}{(2x - 1)(x + 2)} \\
&= \frac{10}{2x - 1}.
\end{aligned}$$

Se permite cancelar $x + 2$, siempre que $x \neq -2$. ■

Ilustraremos la simplificación de una fracción compuesta en el ejemplo 9.

□ Racionalización El lector habrá aprendido a **racionalizar un denominador** en un curso anterior de matemáticas. Recuerde que consiste en multiplicar una expresión por un factor igual a 1 para tratar de eliminar un radical de un denominador. Por ejemplo, para racionalizar el denominador de $1/\sqrt{2}$, se multiplica la fracción por $\sqrt{2}/\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}^{\text{la fracción es igual a 1}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En matemáticas no hay una regla que disponga que sólo se deben racionalizar denominadores. Hay veces, en cálculo, donde el interés no sólo es racionalizar denominadores, sino también numeradores. El siguiente ejemplo usa la factorización de la diferencia de dos cuadrados, en una forma un poco distinta. Para $a > 0$ y $b > 0$, se puede escribir $(\sqrt{a})^2 = a$, $(\sqrt{b})^2 = b$, y entonces $a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$. En consecuencia, de acuerdo con (1),

$$a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}). \tag{8}$$

Una variación de (8) es $a^2 - b = (a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b})$. Entonces, si un numerador o denominador de una expresión fraccionaria contiene un término binomial que incluya cuando menos un radical como

$$a - \sqrt{b},\ a + \sqrt{b},\ \sqrt{a} - b,\ \sqrt{a} + b,\ \sqrt{a} - \sqrt{b},\ \text{o}\ \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

se multiplican numerador y denominador de la fracción por el **factor conjugado** correspondiente

$$a + \sqrt{b},\ a - \sqrt{b},\ \sqrt{a} + b,\ \sqrt{a} - b,\ \sqrt{a} + \sqrt{b}\ \text{o}\ \sqrt{a} - \sqrt{b}.$$

Por ejemplo, para racionalizar el denominador de $3/(\sqrt{2} - \sqrt{5})$ se aplica (8) y se escribe

$$\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} \overbrace{\underbrace{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}}_{\text{factor conjugado del denominador}}}^{\text{la fracción es igual a 1}} = \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{-3} = -(\sqrt{2}+\sqrt{5}).$$

EJEMPLO 4 Racionalización de un numerador

Racionalizar el numerador de $\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$.

Solución Imaginemos que el numerador es $\sqrt{a} - b$, donde $a = 4 + x$ y $b = 2$. Como el factor conjugado de $\sqrt{a} - b$ es $\sqrt{a} + b$, se puede eliminar el radical del numerador multiplicando numerador y denominador de esta expresión fraccionaria por $\sqrt{4+x} + 2$:

$$\frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\,\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2} = \frac{(\sqrt{4+x})^2 - 2^2}{x(\sqrt{4+x}+2)}$$

$$= \frac{4+x-4}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \frac{x}{x(\sqrt{4+x}+2}.$$

Después de cancelar las x en numerador y denominador del último término, la racionalización se ha completado:

$$\frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \frac{1}{\sqrt{4+x}+2}, \qquad x \neq 0.$$ ■

□ Límites: la conexión con el cálculo

Se tiene la expresión algebraica fraccionaria $\dfrac{x^2-1}{x-1}$. Observe que no puede evaluarse esta fracción cuando $x = 1$, porque al sustituir en la expresión se llega a la cantidad indefinida 0/0. Sin embargo, se puede evaluar la expresión fraccionaria en cualquier otro número real; en particular, se puede evaluar con números *muy cercanos* a 1. Los valores numéricos de la expresión fraccionaria que se ven en las dos tablas siguientes, se obtienen mediante la simplificación del inciso *a*) del ejemplo 1:

x	0.9	0.99	0.999
$\dfrac{x^2-1}{x-1}$	1.9	1.99	1.999

x	1.1	1.01	1.001
$\dfrac{x^2-1}{x-1}$	2.1	2.01	2.001

(9)

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1, \qquad \text{para } x \neq 1.$$

Si se hace que el símbolo de flecha, $\to$, represente a la palabra *tiende a*, entonces el simbolismo $x \to a^-$ indica que x tiende al número a desde la *izquierda*, esto es, pasando por números que son menores o iguales a a, y $x \to a^+$ quiere decir que x tiende a a desde la *derecha*, o sea pasando por números que son mayores que a. En la tabla del lado izquierdo, en (9) arriba, se hace que $x \to 1^-$ y en la tabla del lado derecho, $x \to 1^+$. Cada tabla del conjunto (9) muestra que la expresión fraccionaria $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ se acerca al número 2 cuando x se acerca a 1; esto es,

$$\frac{x^2-1}{x-1} \to 2 \text{ cuando } x \to 1^- \qquad \text{y} \qquad \frac{x^2-1}{x-1} \to 2 \text{ cuando } x \to 1^+. \tag{10}$$

Se dice que 2 es el **límite** de $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ cuando x tiende a 1, y se escribe

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2. \tag{11}$$

Antes de seguir, debemos aclarar que *un límite de una expresión no necesita existir*. En las dos tablas que siguen veamos a $1/x$ cuando x tiende a cero:

$x \to 0^-$	-0.1	-0.01	-0.001
$1/x$	-10	-100	$-1\,000$

$x \to 0^+$	0.1	0.01	0.001
$1/x$	10	100	1 000

Como se puede ver en las tablas, a medida que x se acerca cada vez más a 0, los valores de $1/x$ se vuelven más y más grandes en valor absoluto. En otras palabras, $1/x$ se vuelve no acotada. En este caso se escribe

$$\frac{1}{x} \to -\infty \text{ cuando } x \to 0^- \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{x} \to \infty \text{ cuando } x \to 0^+,$$

donde ∞ es el símbolo infinito. Se dice que no existe $\lim_{x\to 0} 1/x$.

Supongamos que $f(x)$ representa una expresión con una sola variable x, y que los símbolos a y L representan números reales. Si, como se ilustra en (10),

$$f(x) \to L \text{ cuando } x \to a^- \qquad \text{y} \qquad f(x) \to L \text{ cuando } x \to a^+,$$

se dice que **existe** el $\lim_{x\to a} f(x)$, y se escribe

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

En cálculo no se le pedirá determinar un límite haciendo tablas de valores numéricos, aunque con seguridad sí se le pedirá hacer esas tablas, porque son útiles para convencerse de la existencia o no de un límite (véanse los problemas 47 y 48 en los ejercicios 1.5). Los límites se determinan, o se demuestra su existencia, con métodos analíticos; en muchos casos se usan leyes probadas, o propiedades de límites. Como nuestra meta no es examinar las interpretaciones teóricas o geométricas de un límite, y como queremos aclarar que la parte de cálculo de *algunos* problemas con frecuencia es la menos importante en la solución, aceptaremos tres resultados del cálculo, sin demostrarlos: si a y c son números reales, entonces

$$\lim_{x \to a} c = c, \qquad \lim_{x \to a} x = a \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} x^n = a^n, \tag{12}$$

siendo n un entero positivo. Por ejemplo, la ecuación (12) nos permite escribir[3]

$$\lim_{x \to 3} (5x + 4) = 5(3) + 4 = 19$$

y

$$\lim_{x \to 3} (2x^2 + x + 1) = 2(3)^2 + 3 + 1 = 22.$$

En la línea precedente hemos usado $\lim_{x \to 3} x = 3$, $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$, $\lim_{x \to 3} 4 = 4$ y $\lim_{x \to 3} 1 = 1$.

El concepto de límite es el fundamento del cálculo y una clase de límite tiene importancia especial: el límite de una expresión fraccionaria donde *tanto* el numerador *como* el denominador tienden a 0. Se dice que ese límite tiene la **forma indeterminada 0/0**. Por ejemplo, a la vista de los resultados en (12), $\lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$ y $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1) = 0$. Por consiguiente, $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ tiene la forma indeterminada 0/0. Naturalmente, no todos los problemas de límite tienen esa forma indeterminada, pero debido a su importancia (vea la sección 2.9), los límites de los siguientes cinco ejemplos así como *todos* los límites de los ejercicios 1.5 tienen la forma 0/0. Además, para simplificar, sólo presentaremos límites que existan.

Ahora indicaremos cómo determinar $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ sin ayuda de tablas numéricas:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \overset{\substack{\text{álgebra del ejemplo 1}a) \\ \downarrow}}{=} \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2.$$

¡Fue todo! Los pasos intermedios son todos algebraicos, que se hacen para reescribir la expresión en una forma más manejable, con lo cual se pueda calcular el límite real, con un esfuerzo mínimo.

EJEMPLO 5 Regreso al ejemplo 1

Determinar $\lim_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 - 4x - 21}$.

Solución Ésta es la expresión fraccionaria del inciso *b*) del ejemplo 1. Observe que cuando $x \to -3$, el límite que se pide tiene la forma indeterminada 0/0. Ahora bien, aplicando la simplificación algebraica de esta expresión, que hicimos en el ejemplo 1, se comprueba que

$$\lim_{x \to -3} \frac{x + 3}{x^2 - 4x - 21} \overset{\substack{\text{álgebra del ejemplo 1 }b) \\ \downarrow}}{=} \lim_{x \to -3} \frac{1}{x - 7} = \frac{1}{-10} = -\frac{1}{10}.$$

■

EJEMPLO 6 Regreso al ejemplo 2

Determinar $\lim_{h \to 0} \dfrac{(7 + h)^2 - 49}{h}$.

[3] En realidad estamos usando aquí varias propiedades de los límites. Sin embargo, no creemos que aquí deban describirse todas las propiedades del concepto de límite.

Solución Se aplica el álgebra del ejemplo 2:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(7+h)^2-49}{h}=\lim_{h\to 0}(14+h)=14.$$

EJEMPLO 7 Regreso al ejemplo 3

Determinar $\displaystyle\lim_{x\to -2}\left[\frac{10x}{2x^2+3x-2}-\frac{4}{x+2}+\frac{8}{2x-1}\right]$.

Solución Si éste fuera un curso de cálculo, el lector debería observar que los términos primero y segundo tienen la forma 1/0 cuando $x \to -2$. Podrá creer que ése es el caso $\infty - \infty$, cuyo resultado sería 0. No, recuerde que nunca se maneja ∞ como se hace con los números. La observación que la expresión algebraica dada contiene esas cantidades indefinidas debe despertar la idea que al combinar las fracciones en *una* sola fracción se podría proceder. Después de hacer las maniobras algebraicas que se hicieron en el ejemplo 3, se terminaría el problema como sigue:

$$\lim_{x\to -2}\left[\frac{10x}{2x^2+3x-2}-\frac{4}{x+2}+\frac{8}{2x-1}\right]\overset{\substack{\text{álgebra}\\ \downarrow}}{=}\lim_{x\to -2}\frac{10}{2x-1}=\frac{10}{-5}=-2.$$

EJEMPLO 8 Regreso al ejemplo 4

Determinar $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$.

Solución Luego de hacer las operaciones algebraicas del ejemplo 4, se ve que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\overset{\substack{\text{álgebra}\\ \downarrow}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

Al determinar el valor de un límite, pueden hacerse las manipulaciones algebraicas como problema adjunto (como lo hemos hecho en los ejemplos 1 a 4), para entonces usarlas y completar el problema como se ilustró en los ejemplos 5 a 8. En el último ejemplo combinamos el álgebra con el cálculo del límite. Recomendamos al lector que resuelva este ejemplo, y no que sólo lo lea.

EJEMPLO 9 Límite de una fracción compuesta

Determinar $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{(2+x)^3}-\dfrac{1}{8}}{x}$.

Solución Esta expresión es un ejemplo de una fracción compuesta, esto es, un cociente donde el denominador o el denominador es a su vez una expresión fraccionaria. Comenzaremos determinando un denominador común en el numerador:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{(2+x)^3}-\dfrac{1}{8}}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{(2+x)^3}\dfrac{8}{8}-\dfrac{1}{8}\dfrac{(2+x)^3}{(2+x)^3}}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{8-(2+x)^3}{8(2+x)^3}}{x}\end{aligned}$$

Para continuar usaremos el desarrollo de $(a + b)^3$ de la ecuación (7), con $a = 2$ y $b = x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{(2+x)^3}-\dfrac{1}{8}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{8-(2^3+3x(2)^2+3x^2(2)+x^3)}{8(2+x)^3}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{8-8-12x-6x^2-x^3}{8(2+x)^3}}{x} \qquad \leftarrow 8 - 8 = 0$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-12x-6x^2-x^3}{8(2+x)^3}}{x}.$$

Ya que x en el denominador de la última fracción compuesta equivale a la fracción $x/1$, invertiremos y multiplicaremos:

Recuerde que la división de fracciones se convierte en multiplicación de fracciones como sigue:

$$\frac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}} = \frac{a}{b}\times\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad bc \neq 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{(2+x)^3}-\dfrac{1}{8}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-12x-6x^2-x^3}{8(2+x)^3}}{\dfrac{x}{1}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-12x-6x^2-x^3}{8(2+x)^3}\,\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x(-12-6x-x^2)}{8(2+x)^3}\,\frac{1}{x} \qquad \leftarrow \begin{cases}\text{Factorizar } x \text{ desde el}\\ \text{numerador y cancelar las } x\end{cases}$$

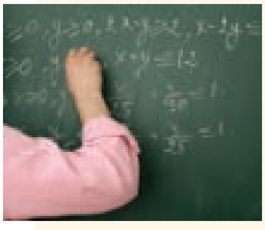
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-12-6x-x^2}{8(2+x)^3}.$$

Por último,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{(2+x)^3}-\dfrac{1}{8}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-12-6x-x^2}{8(2+x)^3} = \frac{-12}{8\cdot 2^3} = -\frac{3}{16},$$

porque $\lim_{x\to 0} x = 0$ y $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ según (12). ■

NOTAS PARA EL SALÓN DE CLASE



i) En los exámenes se ve a los alumnos desarrollar $(a + b)^3$ "por la fuerza bruta", multiplicando $(a + b)(a + b)(a + b)$. No se recomienda este procedimiento; es lento y propenso a errores. En su lugar, se deben memorizar (6) y (7).

ii) En *cualquier* curso de matemáticas, no sólo en cálculo, no borre ni elimine pasos importantes de su trabajo. La mayoría de los profesores de matemáticas desean ver todo el trabajo. También es una ventaja presentar ese trabajo en forma limpia y ordenada. Por último, en el caso de un problema de límites, como el del ejemplo 9, asegúrese de escribir el símbolo $\lim_{x\to a}$ en cada paso. Por ejemplo con frecuencia se ven afirmaciones *incorrectas* como la siguiente:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

en las hojas que presentan los alumnos. La versión correcta de la ecuación anterior es

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2}.$$

1.5 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

En los problemas 1 a 12 factorice para simplificar la expresión indicada en el inciso *a*). A continuación, si se le pide, determine el límite en el inciso *b*).

1. ***a***) $\dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ ***b***) $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$

2. ***a***) $\dfrac{y - 3}{y^2 - 9}$ ***b***) $\lim_{y \to 3} \dfrac{y - 3}{y^2 - 9}$

3. ***a***) $\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 1}$ ***b***) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 1}$

4. ***a***) $\dfrac{2x + 10}{x^2 + 7x + 10}$ ***b***) $\lim_{x \to -5} \dfrac{2x + 10}{x^2 + 7x + 10}$

5. ***a***) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x + 6}$ ***b***) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x + 6}$

6. ***a***) $\dfrac{x^2 - 8x}{x^2 - 6x - 16}$ ***b***) $\lim_{x \to 8} \dfrac{x^2 - 8x}{x^2 - 6x - 16}$

7. ***a***) $\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ ***b***) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

8. ***a***) $\dfrac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$ ***b***) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$

9. ***a***) $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 3x - 4}$ ***b***) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 3x - 4}$

10. ***a***) $\dfrac{x^5 + 2x^4 + x^3}{x^4 - 2x^2 + 1}$ ***b***) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^5 + 2x^4 + x^3}{x^4 - 2x^2 + 1}$

11. ***a***) $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^4 + x^3 + x + 1}$ ***b***) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^4 + x^3 + x + 1}$

12. ***a***) $\dfrac{x^4 - 5x^3 + 4x - 20}{x^4 - 5x^3 + x - 5}$ ***b***) $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^4 - 5x^3 + 4x - 20}{x^4 - 5x^3 + x - 5}$

En los problemas 13 a 20 aplique el desarrollo del binomio para simplificar la expresión que se indica en el inciso *a*). A continuación, si se le pide, determine el límite en el inciso *b*).

13. ***a***) $\dfrac{(2 + h)^2 - 4}{h}$ ***b***) $\lim_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^2 - 4}{h}$

14. ***a***) $\dfrac{5 - 5(h + 1)^2}{h}$ ***b***) $\lim_{h \to 0} \dfrac{5 - 5(h + 1)^2}{h}$

15. ***a***) $\dfrac{(2x + 1)^2 - 9}{x - 1}$ ***b***) $\lim_{x \to 1} \dfrac{(2x + 1)^2 - 9}{x - 1}$

16. ***a***) $\dfrac{2(x-1)^2-4(x-1)-6}{x}$ ***b***) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(x-1)^2-4(x-1)-6}{x}$

17. ***a***) $\dfrac{(1+x)^3-1}{x}$ ***b***) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-1}{x}$

18. ***a***) $\dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x}$ ***b***) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x}$

19. ***a***) $\dfrac{2(h+1)^3-5(h+1)^2+3}{h}$ ***b***) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(h+1)^3-5(h+1)^2+3}{h}$

20. ***a***) $\dfrac{(x+2)^4-16}{x}$ ***b***) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)^4-16}{x}$

En los problemas 21 a 26, aplique la adición de fracciones algebraicas para simplificar las expresiones indicadas en el inciso *a*). A continuación, si se le pide, determine el límite en el inciso *b*).

21. ***a***) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{6}{x^2+2x-8}$ ***b***) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{6}{x^2+2x-8}\right]$

22. ***a***) $\dfrac{x^2+3x-1}{x}+\dfrac{1}{x}$ ***b***) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^2+3x-1}{x}+\dfrac{1}{x}\right]$

23. ***a***) $\dfrac{1}{x-10}-\dfrac{20}{x^2-100}$ ***b***) $\lim\limits_{x\to 10}\left[\dfrac{1}{x-10}-\dfrac{20}{x^2-100}\right]$

24. ***a***) $\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{x+9}\right]$ ***b***) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{x+9}\right]$

25. ***a***) $\dfrac{\dfrac{1}{(2+h)^2}-\dfrac{1}{4}}{h}$ ***b***) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{(2+h)^2}-\dfrac{1}{4}}{h}$

26. ***a***) $\dfrac{1}{t-1}\left[\dfrac{1}{(t+3)^2}-\dfrac{1}{16}\right]$ ***b***) $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{1}{t-1}\left[\dfrac{1}{(t+3)^2}-\dfrac{1}{16}\right]$

En los problemas 27 a 34, aplique la racionalización para simplificar las expresiones en el inciso *a*). A continuación, si se le pide, determine el límite en el inciso *b*).

27. ***a***) $\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ ***b***) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

28. ***a***) $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{x-2}$ ***b***) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{x-2}$

29. ***a***) $\dfrac{x}{\sqrt{7+x}-\sqrt{7}}$ ***b***) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{7+x}-\sqrt{7}}$

30. ***a***) $\dfrac{\sqrt{u+4}-3}{u-5}$ ***b***) $\lim\limits_{u\to 5}\dfrac{\sqrt{u+4}-3}{u-5}$

31. ***a***) $\dfrac{25-t}{5-\sqrt{t}}$ ***b***) $\lim\limits_{t\to 25}\dfrac{25-t}{5-\sqrt{t}}$

32. ***a***) $\dfrac{1}{h}\left[1-\dfrac{1}{\sqrt{1+h}}\right]$ ***b***) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left[1-\dfrac{1}{\sqrt{1+h}}\right]$

33. ***a***) $\dfrac{4y^2}{\sqrt{y^2+y+1}-\sqrt{y+1}}$ ***b***) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{4y^2}{\sqrt{y^2+y+1}-\sqrt{y+1}}$

34. ***a***) $\dfrac{9t^2}{t+2-2\sqrt{t+1}}$ ***b***) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{9t^2}{t+2-2\sqrt{t+1}}$

Problemas diversos relacionados con el cálculo

En los problemas 35 a 40, la expresión algebraica es una respuesta a un problema de cálculo. No está simplificada. Simplifíquela.

35. $\dfrac{x + \dfrac{1}{x} - a - \dfrac{1}{a}}{x - a}$

36. $\dfrac{\dfrac{3}{(x+1)^2} - \dfrac{3}{(a+1)^2}}{x - a}$

37. $(3x^2 + 4x - 1)(4)(2x - 3)^3(2) + (2x - 3)^4(6x + 4)$

38. $(12x - 1)^{1/3}(2)(x^2 - 1)(2x) + (x^2 - 1)^2(\frac{1}{3})(12x - 1)^{-2/3}(12)$

39. $\dfrac{2x(-4x + 6)^{1/2} - x^2(\frac{1}{2})(-4x + 6)^{-1/2}(-4)}{[(-4x + 6)^{1/2}]^2}$

40. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x - 1}{4x + 1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{(4x + 1)2 - (2x - 1)4}{(4x + 1)^2}$

En los problemas 41 a 46, las ecuaciones son respuestas parciales a problemas de cálculo. Resuelva la ecuación despejando el símbolo y'.

41. $3y^2y' - y - xy' = x$

42. $y' = 2(x - y)(1 - y')$

43. $2yy' + 2x = y'$

44. $2xy^2 + x^2(2y)y' - 2 = -3y'$

45. $\dfrac{(x - y)(1 + y') - (x + y)(1 - y')}{(x - y)^2} = 1$

46. $\dfrac{1}{1 + x^2y^2}(xy' + y) = 2xyy' + y^2$

Problemas para calculadora o computadora

En los problemas 47 y 48, use una calculadora o computadora para estimar el límite que se pide, llenando cada tabla. Redondee a ocho decimales los elementos en cada una de las tablas.

47. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$;

$x \to 0^+$	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001
$\dfrac{x^3 - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$					

$x \to 0^-$	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999
$\dfrac{x^3 - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$					

48. $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$;

$x \to 0^+$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$(1 + x)^{1/x}$					

$x \to 0^-$	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001
$(1 + x)^{1/x}$					

Para discusión

En los problemas 49 y 50, indique qué maniobras algebraicas son necesarias para evaluar el límite indicado. Ponga a trabajar sus ideas.

49. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^8 - 1}$

50. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x + 27} - 3}{x}$

CAPÍTULO 1

Ejercicios de repaso

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

En los problemas 1 a 20 llene los espacios en blanco.

1. Una desigualdad cuyo conjunto solución es $(-\infty, 9]$, es _______.
2. El conjunto solución del intervalo definido por la desigualdad $-3 < x \leq 8$ es _______.
3. Si el punto (a, b) está en el cuadrante IV, entonces (b, a) está en el cuadrante _______.
4. El punto $(x, -3x)$ en el segundo cuadrante que está a 5 unidades de $(2, -1)$ es _______.
5. Si la gráfica de una ecuación contiene al punto $(2, 3)$ y es simétrica con respecto al eje x, también contiene al punto _______.
6. Si la gráfica de una ecuación contiene al punto $(-1, 6)$, y es simétrica con respecto al origen también contiene al punto _______.
7. Una ecuación del círculo con centro en $(-2, -5)$ y radio 6 es _______.
8. Si $|2 - x| = 15$, entonces $x =$ _______.
9. La distancia del origen al punto medio del segmento de recta que une a $(4, -6)$ con $(-2, 0)$ es _______.
10. La gráfica de $y = 2|x| - 5$ es simétrica con respecto a _______.
11. Las intersecciones de la gráfica de $y = 2|x| - 5$ con los ejes son _______.
12. El círculo $x^2 - 16x + y^2 = 0$ es simétrico con respecto a _______.
13. El centro y el radio del círculo $x^2 - 16x + y^2 = 0$ son _______.
14. Las coordenadas al origen del círculo $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$ son _______.
15. Dos puntos del círculo $x^2 + y^2 = 25$, que tengan la misma abscisa $x = -3$, son _______.
16. La gráfica de $y = -\sqrt{100 - x^2}$ es un _______.
17. La desigualdad _______ describe el conjunto de puntos en el plano xy que están fuera del círculo $x^2 + y^2 = 36$.
18. Si $(a, a + \sqrt{3})$ está en la gráfica de $y = 2x$, entonces $a =$ _______.
19. El conjunto de números reales x cuya distancia entre x y $\sqrt{2}$ es mayor que 3 se define con la desigualdad de valor absoluto _______.
20. Un punto (x, y) en el plano xy, cuyas coordenadas satisfacen $xy < 0$, está en el o los cuadrantes _______ o _______.

En los problemas 21 a 40 conteste "cierto" o "falso".

21. La palabra *no negativo* quiere decir lo mismo que la palabra *positivo.*_______
22. El número 0 no es positivo ni negativo. _______
23. -3 no es mayor que -1. _______
24. Si $a < b$, entonces $b - a$ es un número positivo. _______
25. Si $a < b$, entonces $a^2 < b^2$. _______
26. Para todo número real a, $-a \leq a$. _______
27. Si $a < 0$, entonces $\dfrac{a}{-a} < 0$. _______
28. Si $a^2 < a$, entonces $a < 1$. _______
29. Si x es un número negativo, entonces $-x$ es un número positivo. _______
30. El conjunto solución de $|4x - 6| \geq -1$ es $(-\infty, \infty)$. _______
31. $|-3t + 6| = 3|t - 2|$. _______
32. El punto $(5, 0)$ está en el cuadrante I. _______
33. El punto $(-3, 7)$ está en el cuadrante III. _______
34. La distancia entre los puntos $(0, 0)$ y $(3, 6)$ es 9. _______
35. Para determinar las intersecciones en el eje y de la gráfica de una ecuación, se hace que $x = 0$ y se despeja y. _______
36. No hay un punto en el círculo $x^2 + y^2 - 10x + 22 = 0$ que tenga la abscisa 2. _______

37. Un círculo cuya ecuación se puede poner en la forma $x^2 + y^2 + ax + by = 0$, debe pasar por el origen. _______
38. Los puntos $(0, 0)$, $(a, 0)$, $a > 0$ y $(0, b)$, $b < 0$ son vértices de un triángulo rectángulo. _______
39. La gráfica de la ecuación $x^2y + 4y = x$ es simétrica con respecto al origen. _______
40. La desigualdad $\frac{100}{x^2 + 64} \leq 0$ no tiene solución. _______

En los problemas 41 a 44 suponga que $0 < a < b$. Compare las expresiones usando símbolos de desigualdad.

41. a^2 y ab **42.** $-a$ y $-b$ **43.** a y $a + b$ **44.** $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{a+b}$

En los problemas 45 a 50 llene el espacio, ya sea con un signo adecuado de desigualdad o con un número.

45. Si $x - 10 > 5$, entonces $x +$ _______ > 25.
46. Si $x - 2 \leq 7$, entonces x _______ 9.
47. Si $-\frac{1}{3}x \geq 4$, entonces x _______ -12.
48. Si $3x - 6 \leq 4x - 4$, entonces x _______ 2.
49. Si $-2 \leq 1 - x \leq 5$, entonces _______ $\leq x \leq$ _______.
50. Si $-3 < x < 9$, entonces _______ $< -2x <$ _______.
51. En la recta numérica, $m = 5$ es el punto medio del segmento de recta que une el número a (extremo izquierdo) con el número b (extremo derecho). Si $d(a, b) = 2$, determine a y b.
52. En el plano xy, deduzca una ecuación que describa el conjunto de puntos (x, y) que sean equidistantes de $(0, 5)$ y de $(x, -5)$.

En los problemas 53 a 66, resuelva las desigualdades. Escriba las soluciones usando notación de intervalos.

53. $2x - 5 \geq 6x + 7$
54. $\frac{1}{4}x - 3 < \frac{1}{2}x + 1$
55. $-4 < x - 8 < 4$
56. $7 \leq 3 - 2x < 11$
57. $|x| > 10$
58. $|-6x| \leq 42$
59. $|3x - 4| < 5$
60. $|5 - 2x| \geq 7$
61. $3x \geq 2x^2 - 5$
62. $x^2 > 6x - 9$
63. $x^3 > x$
64. $(x^2 - x)(x^2 + x) \leq 0$
65. $\frac{1}{x} + x > 2$
66. $\frac{2x - 6}{x - 1} \geq 1$

En los problemas 67 a 70, simplifique las expresiones en el inciso *a*). Después, si se lo piden, determine el límite en el inciso *b*).

67. ***a*)** $\frac{2x - 1}{4x^2 - 1}$ ***b*)** $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x - 1}{4x^2 - 1}$
68. ***a*)** $\frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$ ***b*)** $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$
69. ***a*)** $\frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$ ***b*)** $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$
70. ***a*)** $\frac{1}{h}\left(\frac{1}{3 + h} - \frac{1}{3}\right)$ ***b*)** $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{3 + h} - \frac{1}{3}\right)$

Contenido del capítulo

2.1 Funciones y gráficas

2.2 Simetría y transformaciones

2.3 Funciones lineales

2.4 Funciones cuadráticas

2.5 Funciones definidas en intervalos

2.6 Combinación de funciones

2.7 Funciones inversas

2.8 Traducción de palabras a funciones

2.9 Avance de cálculo El problema de la recta tangente

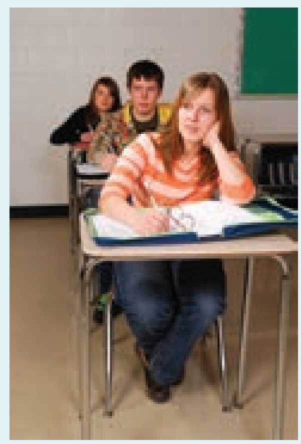
Capítulo 2 Ejercicios de repaso

Funciones

2

2.1 Funciones y gráficas

☐ **Introducción** Con los objetos y las personas que nos rodean, es fácil establecer una regla de correspondencia que asocie, esto es, que haga coincidir, los miembros o elementos de un conjunto con los miembros de otro conjunto. Por ejemplo, cada número de seguro social se relaciona con una persona; cada automóvil con un número de placas, cada libro tiene cuando menos un autor, cada estado tiene un gobernador, etc. Hay una correspondencia natural entre un conjunto de 20 alumnos y un conjunto de, digamos, 25 pupitres en un salón de clase, cuando cada uno haya seleccionado y se siente en uno de los que están disponibles. En matemáticas nos interesa un tipo especial de correspondencia, una *correspondencia unívoca entre valores*, que se llama función.



Correspondencia alumno-pupitre

FUNCIÓN

Una **función** de un conjunto X a un conjunto Y es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento x de X exactamente un elemento y de Y.

En la correspondencia entre alumnos y pupitres, suponga que el conjunto de 20 alumnos es el conjunto X, y el conjunto de 25 pupitres es el conjunto Y. Esta correspondencia es una función del conjunto X al conjunto Y, siempre que no haya alumno que se siente en dos pupitres al mismo tiempo.

☐ **Terminología** Se acostumbra representar una función por una letra, como por ejemplo f, g o h. Entonces, se puede representar una función f de un conjunto X a un conjunto Y mediante la notación $f{:}X \to Y$. El conjunto X se llama **dominio** de f. El conjunto de elementos correspondientes y del conjunto Y se llama **contradominio o rango** de la función. En el caso de nuestra función alumno/pupitre, el conjunto de alumnos es el dominio y el conjunto de 20 pupitres que realmente estén ocupados por alumnos es el contradominio. Observe que el contradominio de f no necesita ser el conjunto entero Y. El elemento único y en el contradominio que corresponde a un elemento seleccionado x en el dominio X se llama **valor** de la función en x, o la **imagen** de x, y se escribe $f(x)$. Este último símbolo se lee "efe de equis o "efe en equis", y se escribe $y = f(x)$.[1] Vea la FIGURA 2.1.1. Como el valor de y depende de la elección de x, a y se le llama **variable dependiente**; a x se le llama **variable independiente**. A menos que se indique otra cosa, aquí supondremos en adelante que los conjuntos X y Y están formados por números reales.

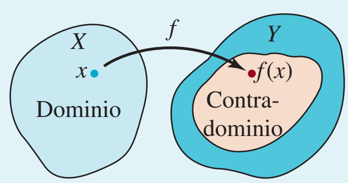


FIGURA 2.1.1 Dominio y contradominio de una función f

[1] A muchos profesores les gusta llamar *entrada* de la función a x, y *salida* de la función a $f(x)$.

EJEMPLO 1 La función elevar al cuadrado

La regla para elevar al cuadrado un número real es la ecuación $y = x^2$ o $f(x) = x^2$. Los valores de f en $x = -5$ y $x = \sqrt{7}$ se obtienen sustituyendo x, cada vez, por los números -5 y $\sqrt{7}$:

$$f(-5) = (-5)^2 = 25 \quad \text{y} \quad f(\sqrt{7}) = (\sqrt{7})^2 = 7. \qquad \blacksquare$$

A veces, para resaltar, escribiremos una función usando paréntesis, en lugar del símbolo x. Por ejemplo, podemos escribir la función de elevar al cuadrado, $f(x) = x^2$, en la forma

$$f(\quad) = (\quad)^2. \tag{1}$$

Esto ilustra el hecho que x es un *comodín* que puede ser sustituido por cualquier número del dominio de la función $y = f(x)$. Así, si se desea evaluar (1) en, por ejemplo, $3 + h$, donde h representa un número real, se pone $3 + h$ entre los paréntesis y se hacen las operaciones algebraicas adecuadas.

Vea (6) de la sección 1.5.

$$f(3 + h) = (3 + h)^2 = 9 + 6h + h^2.$$

Si una función f se define mediante una fórmula o una ecuación, en el caso típico el dominio de $y = f(x)$ no se indica en forma expresa. Se verá que normalmente se puede deducir el dominio de $y = f(x)$, ya sea por la estructura de la ecuación, o por el contexto del problema.

EJEMPLO 2 Dominio y contradominio

En el ejemplo 1, como todo número real x se puede elevar al cuadrado, y el resultado x^2 es otro número real, $f(x) = x^2$ es una función de R a R, esto es, $f: R \to R$. En otras palabras, el dominio de f es el conjunto R de números reales. Usando la notación de intervalos, el dominio también se expresa como $(-\infty, \infty)$. El contradominio de f es el conjunto de números reales no negativos, o $[0, \infty)$; esto se debe a que $x^2 \geq 0$ para todo número real x. $\blacksquare$

Dominio de una función

Como se vio antes, en general no se especifica el dominio de una función $y = f(x)$ que se define por una fórmula. A menos que se indique o esté implícito lo contrario, se sobreentiende que:

El dominio de una función f es el mayor subconjunto del conjunto de números reales para los que $f(x)$ es un número real.

A este conjunto se le llama a veces **dominio implícito** de la función. Por ejemplo, no se puede calcular $f(0)$ de la función recíproca $f(x) = 1/x$, ya que $1/0$ no es un número real. En este caso se dice que f está **indefinida** en $x = 0$. Como todo número real distinto de cero tiene un recíproco, el dominio de $f(x) = 1/x$ es el conjunto de números reales excepto 0. Con el mismo razonamiento se ve que la función $g(x) = 1/(x^2 - 4)$ no está definida en $x = -2$ o en $x = 2$, por lo que su dominio es el conjunto de números reales, excluyendo a -2 y 2. La función raíz cuadrada, $h(x) = \sqrt{x}$, no está definida en $x = -1$, porque $\sqrt{-1}$ no es un número real. Para que $h(x) = \sqrt{x}$ esté definido en el sistema de números reales, se requiere que el **radicando**, que en este caso simplemente es x, sea no negativo. En la desigualdad $x \geq 0$ se ve que el dominio de la función h es el intervalo $[0, \infty)$.

EJEMPLO 3 Dominio y contradominio

Determinar el dominio y el contradominio de $f(x) = 4 + \sqrt{x - 3}$.

Solución El radicando $x - 3$ debe ser no negativo. Al resolver la desigualdad $x - 3 \geq 0$ se obtiene $x \geq 3$, por lo que el dominio de f es $[3, \infty)$. Ahora, como el símbolo $\sqrt{\ }$ representa la raíz cuadrada no negativa de un número, $\sqrt{x - 3} \geq 0$ para $x \geq 3$, y en consecuencia, $4 + \sqrt{x - 3} \geq 4$. El valor mínimo de $f(x)$ está en $x = 3$, y es $f(3) = 4 + \sqrt{0} = 4$. Además, debido a que $x - 3$ y $\sqrt{x - 3}$ crecen cuando x toma valores cada vez mayores, llegamos a la conclusión de que $y \geq 4$. En consecuencia, el contradominio de f es $[4, \infty)$. ■

EJEMPLO 4 Dominio de *f*

Determinar el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$.

Solución Como en el ejemplo 3, la expresión bajo el signo radical, el radicando, debe ser no negativa, esto es, el dominio de f es el conjunto de números reales x para los cuales $x^2 + 2x - 15 \geq 0$ o $(x - 3)(x + 5) \geq 0$. Ya resolvimos esta desigualdad, mediante una tabla de signos, en el ejemplo 3 de la sección 1.1. El conjunto solución de la desigualdad $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$ también es el dominio de f. ■

EJEMPLO 5 Dominios de dos funciones

Determinar el dominio de

$$\textbf{\textit{a)}}\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 15}} \quad \text{y} \quad \textbf{\textit{b)}}\ h(x) = \frac{5x}{x^2 - 3x - 4}.$$

Solución Una función representada por una expresión fraccionaria no está definida en los valores de x para los cuales su denominador es igual a 0.

a) La expresión bajo el radical es la misma que la del ejemplo 4. Como $x^2 + 2x - 15$ está en el denominador, entonces $x^2 + 2x - 15 \neq 0$. Esto excluye a $x = -5$ y a $x = 3$. Además, como $x^2 + 2x - 15$ aparece dentro de un radical se debe cumplir que $x^2 + 2x - 15 > 0$ para todos los demás valores de x. Entonces, el dominio de la función g es la unión de dos intervalos abiertos $(-\infty, -5) \cup (3, \infty)$.

b) Como el denominador de $h(x)$ se puede factorizar,

$$x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$$

se ve que $(x + 1)\,(x - 4) = 0$ para $x = -1$ y $x = 4$. En contraste con la función del inciso *a*), éstos son los *únicos* números para los que h no está definida. Por consiguiente, el dominio de la función h es el conjunto de los números reales, excluyendo a $x = -1$ y a $x = 4$. ■

Con la notación de intervalos, el dominio de h en el inciso *b*) del ejemplo 5 se puede escribir como sigue:

$$(-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, \infty).$$

Como alternativa para esta complicada unión de intervalos ajenos, también se puede expresar este dominio con la notación de conjuntos, como $\{x \,|\, x \neq -1 \text{ y } x \neq 4\}$.

□ Gráficas Con frecuencia se usa una función para describir fenómenos en ciencias, ingeniería y comercio. Para interpretar y utilizar datos, se aconseja mostrarlos en forma de una gráfica. La gráfica de una función f es la gráfica del conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$, donde x está en el dominio de f. En el plano xy, un par ordenado $(x, f(x))$ es un punto, y entonces la gráfica de una ecuación es un conjunto de puntos. Si una función está definida por una ecuación $y = f(x)$, entonces la gráfica de f es la gráfica de la ecuación. Para obtener puntos de la gráfica de una ecuación $y = f(x)$ se escogen números adecuados $x_1, x_2, x_3 \ldots$ en su dominio, se calculan $f(x_1), f(x_2), f(x_3)\ldots$, se grafican los puntos correspondientes $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))\ldots$ y a continuación se unen esos puntos con una curva. Vea la **FIGURA 2.1.2**. Téngase en cuenta que:

- un valor de x es una distancia dirigida desde el eje y, y
- un valor de función $f(x)$ es una distancia dirigida desde el eje x.

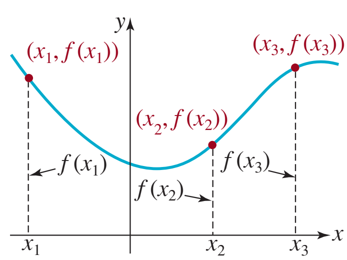
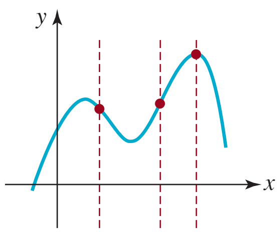


FIGURA 2.1.2 Puntos en la gráfica de una ecuación $y = f(x)$

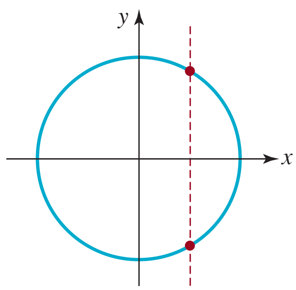
Se debe aclarar algo acerca de las figuras de este libro. Con pocas excepciones, en general es imposible mostrar la gráfica completa de una función, y entonces se muestran con frecuencia sólo las características más importantes de ella. En la figura 2.1.3*a*), nótese que la gráfica baja en sus lados izquierdo y derecho. A menos que se indique lo contrario, podremos suponer que no hay sorpresas más allá de las que hemos mostrado, y que la gráfica sólo continúa en la forma indicada. La gráfica de la figura 2.1.3*a*) indica el llamado **comportamiento final**, o **comportamiento global** de la función: para un punto (x, y) en la gráfica, $y \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$ y $y \to -\infty$ cuando $x \to \infty$. (Diremos más acerca de este concepto de comportamiento global en el capítulo 3.) Si una gráfica termina en su extremo derecho o izquierdo, lo indicaremos con un punto cuando se necesite para aclarar. Vea la figura 2.1.4. Usaremos un punto lleno para representar que el extremo se incluye en la gráfica, y un punto abierto para indicar que el extremo no se incluye en la gráfica.

☐ Prueba de la recta vertical

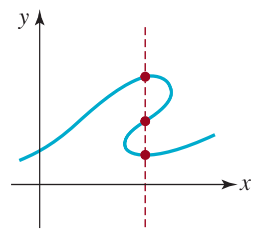
De acuerdo con la definición de función, sabemos que a cada x en el dominio de f, corresponde sólo un valor $f(x)$ en el contradominio. Eso quiere decir que una recta vertical que cruce a la gráfica de una función $y = f(x)$ (equivale a escoger una x), sólo lo puede hacer una vez. Al revés, si *cada* recta vertical que cruza una gráfica de una ecuación lo hace cuando mucho en un punto, entonces la gráfica es la gráfica de una función. A esta última afirmación se le llama **prueba de la recta vertical** de una función. Vea la **FIGURA 2.1.3a)**. Por otra parte, si *alguna* recta vertical cruza a una gráfica de una ecuación más de una vez, la gráfica no es la de una función. Vea las figura 2.1.3*b*) y 2.1.3*c*). Cuando una recta vertical cruza a una gráfica en varios puntos, el mismo número x corresponde a diferentes valores de y, lo que contradice la definición de una función.



a) Función



b) No es una función



c) No es una función

FIGURA 2.1.3 Prueba de la recta vertical

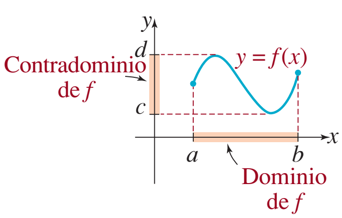


FIGURA 2.1.4 Interpretación gráfica del dominio y contradominio

Si tiene usted una gráfica precisa de una función $y = f(x)$, con frecuencia es posible *ver* el dominio y el contradominio de f. En la **FIGURA 2.1.4** se supone que la curva de color es la gráfica entera y completa de una función f. El dominio de f es, entonces, el intervalo $[a, b]$ en el eje x, y el contradominio es el intervalo $[c, d]$ en el eje y.

EJEMPLO 6 Regreso al ejemplo 3

En la gráfica de $f(x) = 4 + \sqrt{x - 3}$, de la **FIGURA 2.1.5**, se ve que el dominio y el contradominio de f son, respectivamente, $[3, \infty)$ y $[4, \infty)$. Esto concuerda con los resultados del ejemplo 3. ■

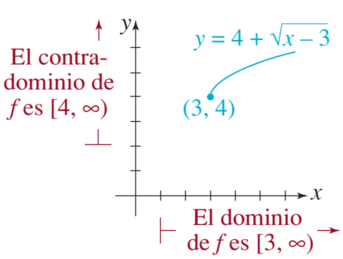
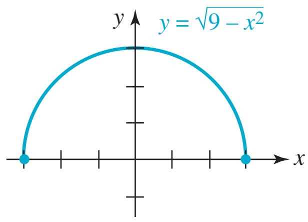


FIGURA 2.1.5 Gráfica de la función f del ejemplo 6

Como se vio en la figura 2.1.3*b*), un círculo no es la gráfica de una función. En realidad, una ecuación como $x^2 + y^2 = 9$ define (al menos) dos funciones de x. Si esta ecuación se resuelve para y en función de x, se obtiene $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Debido a la convención del valor único del signo $\sqrt{\ }$, ambas ecuaciones, $y = \sqrt{9 - x^2}$ y $y = -\sqrt{9 - x^2}$, definen funciones. Como se vio en la sección 1.4, la primera ecuación define un *semicírculo superior*, y la segunda define a un *semicírculo inferior*. De las gráficas que muestra la **FIGURA 2.1.6**, el dominio de $y = \sqrt{9 - x^2}$ es $[-3, 3]$ y el contradominio es $[0, 3]$; el dominio y el contradominio de $y = -\sqrt{9 - x^2}$ son $[-3, 3]$ y $[-3, 0]$, respectivamente.



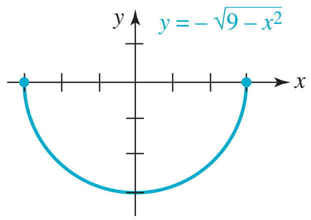


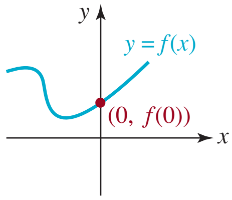
FIGURA 2.1.6 Estos semicírculos son gráficas de funciones

Intersecciones

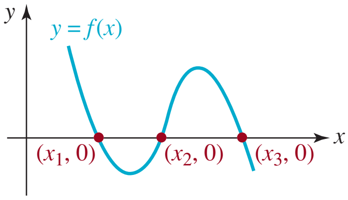
Para graficar una función definida por una ecuación $y = f(x)$, se suele aconsejar que primero se determine si la gráfica de f interseca los ejes. Recuérdese que todos los puntos del eje y tienen la forma $(0, y)$. Así, si 0 está en el dominio de una función f, la **intersección en el eje *y***, es el punto cuya ordenada es $f(0)$; en otras palabras, es $(0, f(0))$. Vea la **FIGURA 2.1.7*a*)**. De igual modo, todos los puntos en el eje x tienen la forma $(x, 0)$. Eso quiere decir que para determinar las intersecciones con el eje x de la gráfica de $y = f(x)$, se determinan los valores de x que hacen que $y = 0$. Esto es, se debe despejar x de la ecuación $f(x) = 0$. Un número c para el cual

$$f(c) = 0$$

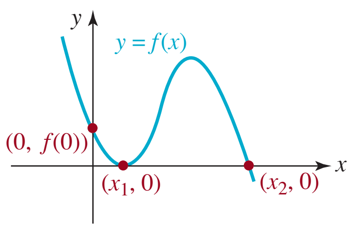
se llama **cero** de la función f, o **raíz** (o **solución**) de la ecuación $f(x) = 0$. Los ceros *reales* de una función f son las coordenadas x de las intersecciones con el eje x de la gráfica de f. En la figura 2.1.7*b*) hemos ilustrado una función que tiene tres ceros, x_1, x_2 y x_3, porque $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$ y $f(x_3) = 0$. Las tres correspondientes intersecciones con el eje x $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, $(x_3, 0)$. Naturalmente, la gráfica de una función puede no tener intersecciones con los ejes, lo cual se ve en la figura 2.1.5.



a) Intersecciones con el eje y



b) Tres intersecciones con el eje x



c) Una intersección con el eje y y dos con el eje x

FIGURA 2.1.7 Intersecciones de la gráfica de una función f

Una gráfica no necesariamente tiene que *cruzar* un eje coordenado en una intersección. La gráfica podría ser simplemente tangente al eje, es decir, podría *tocarlo*. En la figura 2.1.7*c*), la gráfica de $y = f(x)$ es tangente al eje x en $(x_1, 0)$, También, la gráfica de una función f puede tener cuando mucho una intersección con el eje y ya que, si 0 está en el dominio de f, sólo puede corresponderle un valor de y, que sería $y = f(0)$.

En el capítulo 3 encontrará más este tema.

EJEMPLO 7 Intersecciones

Determinar las intersecciones con los ejes coordenados de la función indicada, si es que existen.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 2$ *b*) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x}$

Solución

a) Como 0 está en el dominio de f, $f(0) = -2$ es la coordenada y de la intersección con el eje y de la gráfica de f. La intersección con el eje y es el punto $(0, -2)$. Para obtener las intersecciones con el eje x se debe determinar si f tiene ceros reales, esto es, soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$. Como el lado izquierdo de la ecuación $x^2 + 2x - 2 = 0$ no tiene factores obvios, se aplica la fórmula general de segundo grado para obtener $x = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{12})$. Debido a que $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$, los ceros de f son los números $1 - \sqrt{3}$ y $1 + \sqrt{3}$. Las intersecciones con el eje x son los puntos $(1 - \sqrt{3}, 0)$ y $(1 + \sqrt{3}, 0)$.

b) Como 0 no está en el dominio de f ($f(0) = -3/0$ (no está definida), la gráfica de f no tiene intersección con el eje y. Ahora, como f es una expresión fraccionaria, la única forma en que $f(x) = 0$ es hacer que el numerador sea igual a cero. Si se factoriza el lado izquierdo de $x^2 - 2x - 3 = 0$, se obtiene $(x + 1)(x - 3) = 0$. Por consiguiente, los números -1 y 3 son los ceros de f. Las intersecciones con el eje x son los puntos $(-1, 0)$ y $(3, 0)$. ■

☐ **Determinación aproximada de los ceros** Aun cuando sea obvio que la gráfica de una función $y = f(x)$ tenga intersecciones con el eje x, no siempre es posible resolver la ecuación $f(x) = 0$. De hecho, es *imposible* resolver exactamente algunas ecuaciones; a veces lo mejor que se puede hacer es **aproximar** los ceros de la función. Una forma de hacerlo es hacer una gráfica muy exacta de f.

EJEMPLO 8 Ordenadas al origen aproximadas

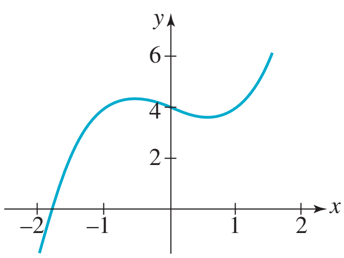


FIGURA 2.1.8 Abscisa al origen aproximada del ejemplo 8

Con ayuda de un graficador, la gráfica de la función $f(x) = x^3 - x + 4$ se ve en la FIGURA 2.1.8. De $f(0) = 4$, se observa que el punto de cruce con el eje y es $(0, 4)$. Como se ve en la figura, parece que hay una sola intersección con el eje x, cuya abscisa puede ser -1.7 o -1.8. Sin embargo, no hay alguna forma de determinar con exactitud las raíces de la ecuación $x^3 - x + 4 = 0$. Sin embargo, se puede calcular aproximadamente, o *aproximar*, la raíz real de esta ecuación, con ayuda de la función *encontrar raíz* de una calculadora graficadora o un programa de álgebra para cómputo. De este modo se ve que $x \approx -1.796$, por lo que la abscisa al origen aproximada es $(-1.796, 0)$. Para comprobar, obsérvese que el valor de la función

$$f(-1.796) = (-1.796)^3 - (-1.796) + 4 \approx 0.0028$$

es cercano a cero. ■

NOTAS PARA EL SALÓN DE CLASE

Al trazar la gráfica de una función nunca debe graficar muchos puntos a mano. Es algo que hacen bien las calculadoras graficadoras o las computadoras. Por otra parte, nunca debe dependerse de una calculadora para obtener una gráfica. Créalo o no, hay profesores de precálculo y de cálculo que no permiten usar calculadoras graficadoras en exámenes. En general, no hay objeción al empleo de calculadoras o computadoras como auxiliares para comprobar los problemas de tarea, pero en la clase, los profesores quieren ver el fruto de las mentes de sus alumnos, es decir, su capacidad para analizar. Por ello, le recomendamos desarrollar su destreza para trazar gráficas, hasta el punto de poder bosquejar rápidamente, a mano, una función, al tener una familiaridad básica con los tipos de funciones, y graficando un mínimo de puntos bien escogidos.

2.1 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

En los problemas 1 a 6, calcule los valores indicados de la función.

1. Si $f(x) = x^2 - 1$; $f(-5)$, $f(-\sqrt{3})$, $f(3)$ y $f(6)$

2. Si $f(x) = -2x^2 + x$; $f(-5)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(2)$ y $f(7)$

3. Si $f(x) = \sqrt{x+1}$; $f(-1)$, $f(0)$, $f(3)$ y $f(5)$

4. Si $f(x) = \sqrt{2x+4}$; $f(-\frac{1}{2})$, $f(\frac{1}{2})$, $f(\frac{5}{2})$ y $f(4)$

5. Si $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$; $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ y $f(\sqrt{2})$

6. Si $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3-2}$; $f(-\sqrt{2})$, $f(-1)$, $f(0)$ y $f(\frac{1}{2})$

En los problemas 7 y 8 determine

$$f(x),\ f(2a),\ f(a^2),\ f(-5x),\ f(2a+1),\ f(x+h)$$

de la función dada f, y simplifique todo lo posible.

7. $f(\quad) = -2(\quad)^2 + 3(\quad)$

8. $f(\quad) = (\quad)^3 - 2(\quad)^2 + 20$

9. ¿Para qué valores de x es $f(x) = 6x^2 - 1$ igual a 23?

10. ¿Para qué valores de x es $f(x) = \sqrt{x-4}$ igual a 4?

En los problemas 11 a 20, determine el dominio de la función f.

11. $f(x) = \sqrt{4x-2}$

12. $f(x) = \sqrt{15-5x}$

13. $f(x) = \dfrac{10}{\sqrt{1-x}}$

14. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x-1}}$

15. $f(x) = \dfrac{2x-5}{x(x-3)}$

16. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

17. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-10x+25}$

18. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4x-12}$

19. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x+1}$

20. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-1}$

En los problemas 21 a 26, use el método de la tabla de signos para determinar el dominio de la función f.

21. $f(x) = \sqrt{25-x^2}$

22. $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$

23. $f(x) = \sqrt{x^2-5x}$

24. $f(x) = \sqrt{x^2-3x-10}$

25. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}$

26. $f(x) = \sqrt{\dfrac{5-x}{x}}$

En los problemas 27 a 30, determine si la gráfica que muestra la figura es la gráfica de una función.

27.

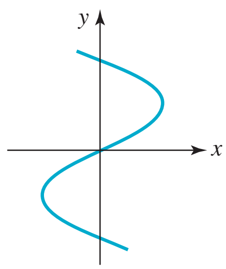


FIGURA 2.1.9 Gráfica del problema 27

28.

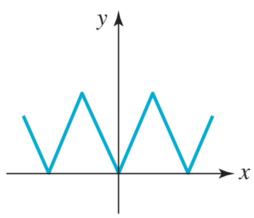


FIGURA 2.1.10 Gráfica del problema 28

29.

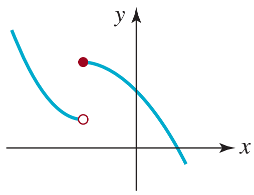


FIGURA 2.1.11 Gráfica del problema 29

30.

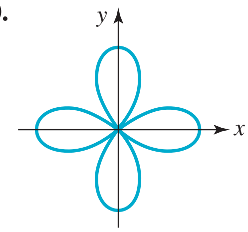


FIGURA 2.1.12 Gráfica del problema 30

En los problemas 31 a 34 use la gráfica de la función f que se ve en la figura para determinar su dominio y su contradominio.

31.

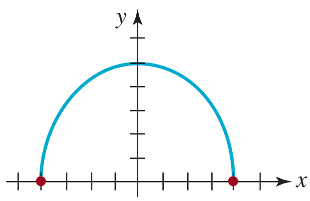


FIGURA 2.1.13 Gráfica del problema 31

32.

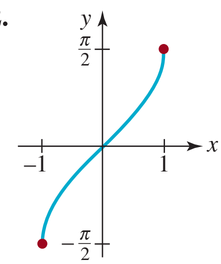


FIGURA 2.1.14 Gráfica del problema 32

33.

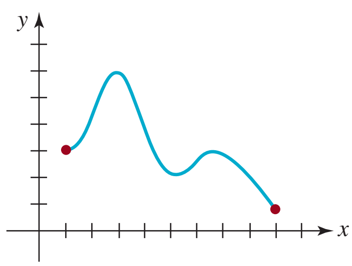


FIGURA 2.1.15 Gráfica del problema 33

34.

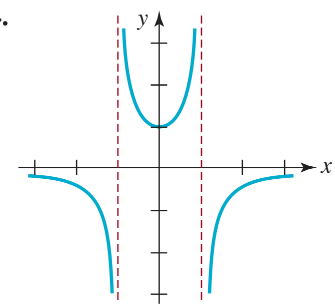


FIGURA 2.1.16 Gráfica del problema 34

En los problemas 35 a 42, determine los ceros de la función dada f.

35. $f(x) = 5x + 6$

36. $f(x) = -2x + 9$

37. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

38. $f(x) = x^2 - 2x - 1$

39. $f(x) = x(3x - 1)(x + 9)$

40. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

41. $f(x) = x^4 - 1$

42. $f(x) = 2 - \sqrt{4 - x^2}$

En los problemas 43 a 50, calcule las intersecciones con los ejes coordenados, si las hay, de la gráfica de la función indicada f. No haga la gráfica.

43. $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$

44. $f(x) = x^2 - 6x + 5$

45. $f(x) = 4(x - 2)^2 - 1$

46. $f(x) = (2x - 3)(x^2 + 8x + 16)$

47. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 16}$

48. $f(x) = \dfrac{x(x + 1)(x - 6)}{x + 8}$

49. $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$

50. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 2x - 3}$

En los problemas 51 y 52, encuentre dos funciones $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$ definidas por la ecuación indicada. Determine el dominio de las funciones f_1 y f_2.

51. $x = y^2 - 5$

52. $x^2 - 4y^2 = 16$

En los problemas 53 y 54, use la gráfica de la función f que se ve en la figura para estimar los valores de $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$ y $f(3)$. Estime la intersección con el eje y.

53.

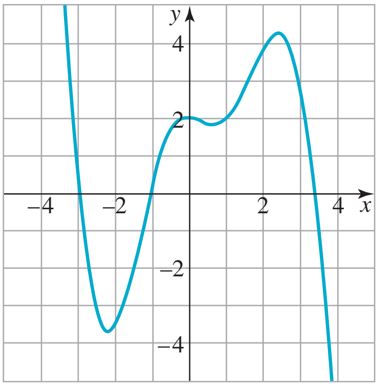


FIGURA 2.1.17 Gráfica del problema 53

54.

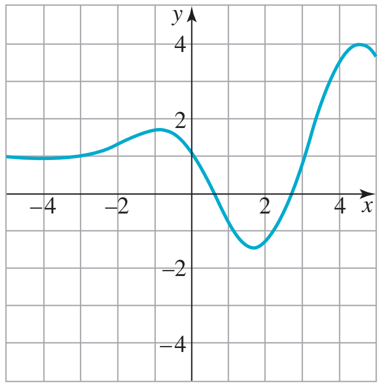


FIGURA 2.1.18 Gráfica del problema 54

En los problemas 55 y 56, use la gráfica de la función f que muestra la figura para estimar los valores de $f(-2)$, $f(-1.5)$, $f(0.5)$, $f(1)$, $f(2)$ y $f(3.2)$. Estime las intersecciones con el eje x.

55.

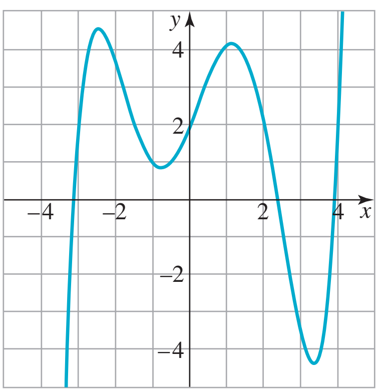


FIGURA 2.1.19 Gráfica del problema 55

56.

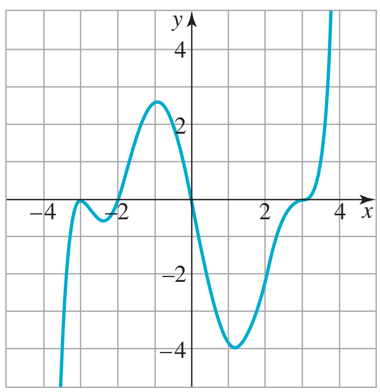


FIGURA 2.1.20 Gráfica del problema 56

Problemas diversos relacionados con el cálculo

57. En cálculo, algunas de las funciones con las que se encontrará el lector tienen como dominio el conjunto de los enteros positivos n. La **función factorial** $f(n) = n!$ se define como el producto de los primeros n enteros positivos, esto es,

$$f(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.$$

a) Calcule $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$ y $f(7)$.
b) Demuestre que $f(n+1) = f(n) \cdot (n+1)$.
c) Simplifique $f(n+2)/f(n)$.

58. Otra función de un entero positivo n expresa la suma de los primeros n enteros positivos elevados al cuadrado:

$$S(n) = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

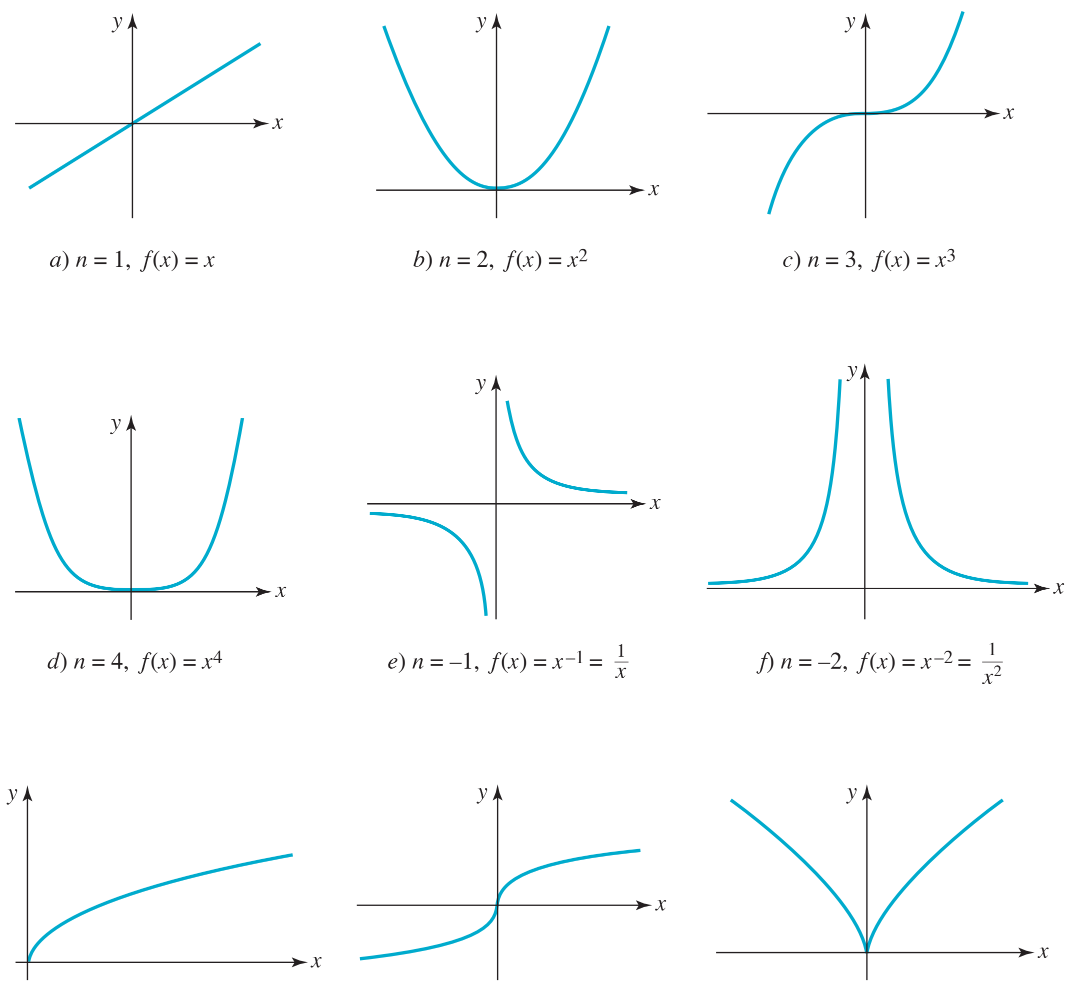
a) Calcule el valor de la suma $1^2 + 2^2 + \cdots + 99^2 + 100^2$.
b) Calcule n tal que $300 < S(n) < 400$. [*Sugerencia:* Use una calculadora.]

Para discusión

59. Deduzca la ecuación de una función $y = f(x)$ cuyo dominio sea ***a***) $[3, \infty)$, ***b***) $(3, \infty)$.
60. Deduzca la ecuación de una función $y = f(x)$ cuyo contradominio sea ***a***) $[3, \infty)$, ***b***) $(3, \infty)$.

2.2 Simetría y transformaciones

Introducción En esta sección describiremos dos ayudas para trazar gráficas de función en forma rápida y exacta. Si usted determina antes que la gráfica de una función tiene alguna *simetría*, entonces puede disminuir el trabajo a la mitad. Además, el trazo de una gráfica de una función aparentemente complicada se acelera si se reconoce que en realidad la gráfica que se pide es una *transformación* de la gráfica de una función más sencilla. Esta última ayuda de graficado se basa en los conocimientos anteriores del lector acerca de las gráficas de algunas funciones básicas.



a) $n = 1,\ f(x) = x$ | *b*) $n = 2,\ f(x) = x^2$ | *c*) $n = 3,\ f(x) = x^3$

d) $n = 4,\ f(x) = x^4$ | *e*) $n = -1,\ f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ | *f*) $n = -2,\ f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

g) $n = \frac{1}{2},\ f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ | *h*) $n = \frac{1}{3},\ f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ | *i*) $n = \frac{2}{3},\ f(x) = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$

FIGURA 2.2.1 Breve catálogo de la función potencia, $f(x) = x^n$, para varias n

Funciones potencia

Una función que tenga la forma

$$f(x) = x^n,$$

donde n representa un número real, se llama **función potencia**. El dominio de una función potencia depende de la potencia n. Por ejemplo, ya se ha visto, en la sección 2.1, que para $n = 2$, $n = \frac{1}{2}$ y $n = -1$ respectivamente, que:

- el dominio de $f(x) = x^2$ es el conjunto R de los números reales, o sea $(-\infty, \infty)$,
- el dominio de $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$,
- el dominio de $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ es el conjunto R de los números reales, excepto $x = 0$.

Las funciones sencillas de potencia, o las versiones modificadas de esas funciones, se presentan con tanta frecuencia en los problemas de cálculo que no es necesario gastar un tiempo valioso graficándolas. Sugerimos que se aprenda (memorice) el breve catálogo de gráficas de funciones de potencia de la **FIGURA 2.2.1** de la página anterior. Probablemente ya sepa que la gráfica del inciso *a*) de la figura es una **recta**, y que la gráfica del inciso *b*) se llama **parábola**.

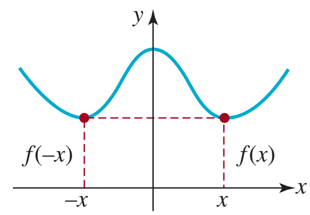


FIGURA 2.2.2 Función par; la gráfica tiene simetría con respecto al eje y

Simetría

En la sección 1.4 describimos la simetría de una gráfica con respecto al eje y, al eje x y al origen. De esos tres tipos de simetrías, la gráfica de una función puede ser simétrica con respecto al eje y, o con respecto al origen, pero la gráfica de una función distinta de cero *no puede* ser simétrica con respecto al eje x. Vea el problema 43 en los ejercicios 2.2. Si la gráfica de una función es simétrica con respecto al eje y se dice que f es una **función par**. Una función cuya gráfica sea simétrica con respecto al origen se llama **función impar**. Para las funciones, las dos pruebas de simetría que siguen equivalen a las pruebas *i*) y *iii*), respectivamente, de la página 30. Vea las **FIGURAS 2.2.2** y **2.2.3**. La función cuya gráfica está en la **FIGURA 2.2.4** no es ni par ni impar.

¿Puede usted explicar *por qué* la gráfica de una función no puede ser simétrica con respecto al eje x?

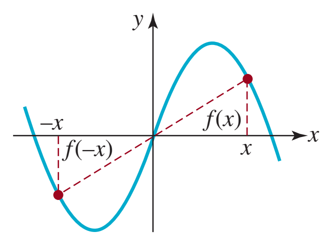


FIGURA 2.2.3 Función impar; la gráfica tiene simetría con respecto al origen

PRUEBAS DE SIMETRÍA

La gráfica de una función f con dominio X es simétrica con respecto a:

i) el eje y si $f(-x) = f(x)$ para toda x en X, o bien (1)

ii) el origen si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en X. (2)

La interpretación gráfica de estas pruebas se ilustra en las figuras 2.2.2 y 2.2.3. En la figura 2.2.2, observe que si f es una función par y

$$(x, \overset{\substack{f(x)\\ \downarrow}}{y}) \text{ es un punto en su gráfica, entonces necesariamente } (-x, \overset{\substack{f(-x)\\ \downarrow}}{y})$$

también está en su gráfica. De igual modo, en la figura 2.2.3 se ve que si f es una función impar y

$$(x, \overset{\substack{f(x)\\ \downarrow}}{y}) \text{ es un punto en su gráfica, entonces necesariamente } (-x, \overset{\substack{f(-x) = -f(x)\\ \downarrow}}{-y})$$

está en su gráfica.

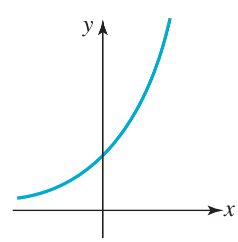


FIGURA 2.2.4 La función no es par ni impar: no hay simetría con respecto al eje y ni al origen

EJEMPLO 1 Funciones impares y pares

a) $f(x) = x^3$ es una función impar, porque de acuerdo con (2),

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3x^3 = -x^3 = -f(x).$$

Al inspeccionar la figura 2.2.1*c*) se ve que la gráfica de f es simétrica con respecto al origen. Por ejemplo, ya que $f(1) = 1$, entonces $(1, 1)$ es un punto de la gráfica de $y = x^3$. Como f es una función impar, $f(-1) = -f(1)$ implica que $(-1, -1)$ está en la gráfica.

b) $f(x) = x^{2/3}$ es una función par, porque de acuerdo con (1) y las leyes de los exponentes,

$$f(-x) = (-x)^{2/3} = (-1)^{2/3}x^{2/3} = (\overset{\substack{\text{la raíz cúbica de } -1 \text{ es } -1 \\ \downarrow}}{\sqrt[3]{-1}})^2x^{2/3} = (-1)^2x^{2/3} = x^{2/3} = f(x).$$

En la figura 2.2.1*i*), se ve que la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y. Por ejemplo, como $f(8) = 8^{2/3} = 4$, $(8, 4)$ es un punto de la gráfica de $y = x^{2/3}$. Como f es una función par, $f(-8) = f(8)$ implica que $(-8, 4)$ está en la misma gráfica.

c) $f(x) = x^3 + 1$ no es par ni impar. En

$$f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1$$

se ve que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$. ■

Las gráficas de la figura 2.2.1, donde el inciso *g*) es la única excepción, tienen simetría, ya sea con respecto al eje y o al origen. Las funciones de las figuras 2.2.1*b*), *d*), *f*) e *i*) son pares, mientras que las de las figuras 2.2.1*a*), *c*), *e*) y *h*) son impares.

Con frecuencia se puede trazar la gráfica de una función aplicando cierta transformación a la gráfica de una función más simple (como las de la figura 2.2.1). A continuación examinaremos dos clases de transformaciones gráficas: las rígidas y las no rígidas.

□ Transformaciones rígidas

Una **transformación rígida** de una gráfica es aquella que sólo cambia la *posición* de la gráfica en el plano xy, pero no su forma. Ya hemos examinado este concepto, en forma breve, al describir al círculo, en la sección 1.4. Por ejemplo, el círculo $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ con centro en $(2, 3)$ y radio $r = 1$, tiene *exactamente* la misma forma que el círculo $x^2 + y^2 = 1$, con centro en el origen. Se puede imaginar que la gráfica de $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ es la de $x^2 + y^2 = 1$, pero desplazada dos unidades horizontalmente a la derecha, y después desplazada tres unidades verticalmente hacia arriba. En el caso de la gráfica de una función $y = f(x)$, examinaremos cuatro clases de desplazamiento, o traslaciones.

DESPLAZAMIENTOS VERTICALES Y HORIZONTALES

Supongamos que $y = f(x)$ es una función, y que c es una constante positiva. Entonces, la gráfica de

i) $y = f(x) + c$ es la gráfica de f, desplazada c unidades verticalmente **hacia arriba**,
ii) $y = f(x) - c$ es la gráfica de f, desplazada c unidades verticalmente **hacia abajo**,
iii) $y = f(x + c)$ es la gráfica de f, desplazada c unidades horizontalmente **hacia la izquierda**,
iv) $y = f(x - c)$ es la gráfica de f, desplazada c unidades horizontalmente **hacia la derecha**.

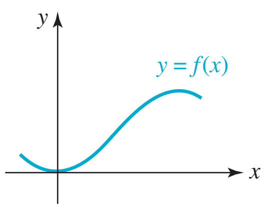
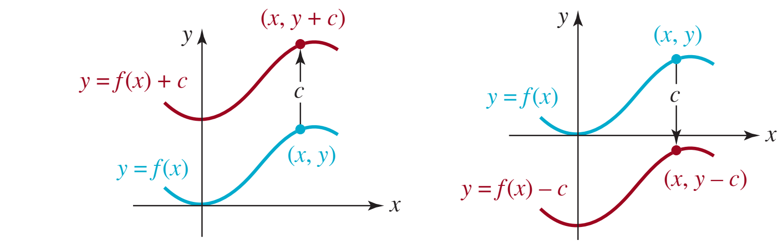


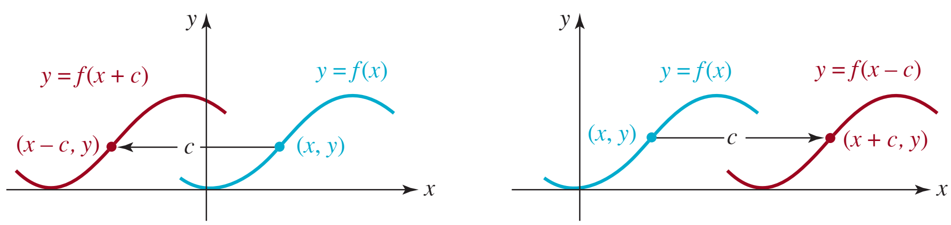
FIGURA 2.2.5 Gráfica de $y = f(x)$

Examinemos la gráfica de una función $y = f(x)$, que se ve en la **FIGURA 2.2.5**. Los desplazamientos de la gráfica que se describen en *i*) a *iv*) son las gráficas, en rojo, de los incisos *a*) a *d*) de la figura 2.2.6. Si un punto de la gráfica de $y = f(x)$ es (x, y), y la gráfica de f está desplazada, digamos que $c > 0$ unidades hacia arriba; entonces $(x, y + c)$ es un punto de la nueva gráfica. En general, las coordenadas x no cambian debido a un desplazamiento vertical. Vea las **FIGURAS 2.2.6*a*)** y 2.2.6*b*). De igual modo, en un desplazamiento horizontal, las coordenadas y de los puntos en la gráfica desplazada son iguales que en la gráfica original. Vea las figuras 2.2.6*c*) y 2.2.6*d*).



a) Desplazamiento vertical hacia arriba

b) Desplazamiento vertical hacia abajo



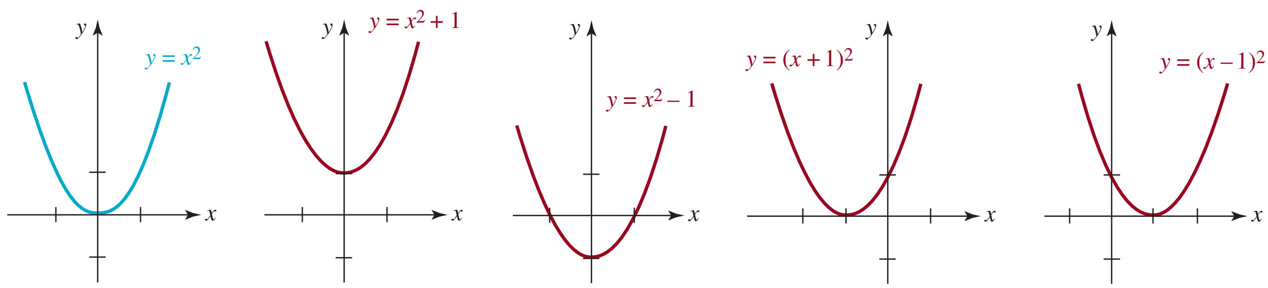
c) Desplazamiento horizontal hacia la izquierda

d) Desplazamiento horizontal hacia la derecha

FIGURA 2.2.6 Desplazamientos verticales y horizontales de la gráfica de $y = f(x)$, por una cantidad $c > 0$

EJEMPLO 2 Desplazamientos horizontales y verticales

Las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$, $y = (x + 1)^2$ y $y = (x - 1)^2$ se obtienen a partir de la gráfica de $f(x) = x^2$ en la **FIGURA 2.2.7*a*)** desplazando esta gráfica, respectivamente, 1 unidad hacia arriba (figura 2.2.7*b*), 1 unidad hacia abajo (figura 2.2.7*c*), 1 unidad hacia la izquierda (figura 2.2.7*d*) y 1 unidad hacia la derecha (figura 2.2.7*e*).



a) Punto de partida

b) Desplazamiento hacia arriba

c) Desplazamiento hacia abajo

d) Desplazamiento hacia la izquierda

e) Desplazamiento hacia la derecha

FIGURA 2.2.7 Gráficas desplazadas del ejemplo 2 ■

□ Combinación de desplazamientos

En general, la gráfica de una función

$$y = f(x \pm c_1) \pm c_2, \tag{3}$$

donde c_1 y c_2 son constantes positivas, combina un desplazamiento horizontal (hacia la izquierda o la derecha) con un desplazamiento vertical (hacia arriba o hacia abajo). Por ejemplo, la gráfica de $y = f(x - c_1) + c_2$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada c_1 unidades hacia la derecha, y después c_2 unidades hacia arriba.

◀ El orden en que se hacen los desplazamientos es irrelevante. Podría hacer primero el desplazamiento hacia arriba, y después hacia la derecha.

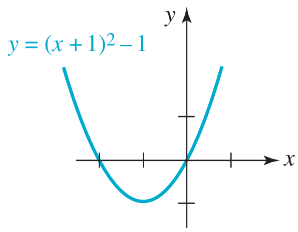


FIGURA 2.2.8 Gráfica desplazada del ejemplo 3

Reflexión o imagen especular en eje horizontal

Reflexión o imagen especular en eje vertical

EJEMPLO 3 Desplazamiento vertical y horizontal de una gráfica

Graficar $y = (x + 1)^2 - 1$.

Solución De acuerdo con el párrafo anterior, se ve que (3) es la forma $y = f(x + c_1) - c_2$, con $c_1 = 1$ y $c_2 = 1$. Así, la gráfica de $y = (x + 1)^2 - 1$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada 1 unidad hacia la izquierda, seguida de un desplazamiento de 1 unidad hacia abajo. Esta gráfica se ve en la **FIGURA 2.2.8**. ■

En la gráfica de la figura 2.2.8 se ve de inmediato que el contradominio de la función $y = (x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2x$ es el intervalo $[-1, \infty)$ del eje y. También obsérvese que la gráfica tiene las intersecciones con el eje x en $(0, 0)$ y $(-2, 0)$; el lector debe comprobarlo resolviendo $x^2 + 2x = 0$. También, si volvemos a examinar la figura 2.1.5 de la sección 2.1, veremos que la gráfica de $y = 4 + \sqrt{x - 3}$ es la gráfica de la función raíz cuadrada, $f(x) = \sqrt{x}$ (figura 2.2.1*g*) desplazada 3 unidades hacia la derecha y después 4 unidades hacia arriba.

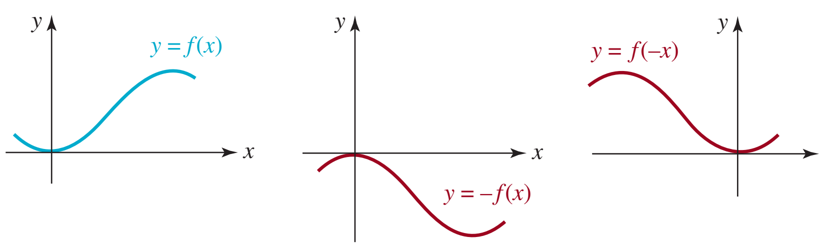
Otra forma de transformar rígidamente la gráfica de una función es con una **reflexión** con respecto a un eje coordenado.

REFLEXIONES

Supongamos que $y = f(x)$ es una función. Entonces, la gráfica de

i) $y = -f(x)$ es la gráfica de f reflejada en el **eje x**,
ii) $y = f(-x)$ es la gráfica de f reflejada en el **eje y**.

En el inciso *a*) de la **FIGURA 2.2.9** se ha repetido la gráfica de una función $y = f(x)$ que se presentó en la figura 2.2.5. Las reflexiones de esta gráfica, descritas en *i*) y *ii*), se ilustran en las figuras 2.2.9*b*) y 2.2.9*c*). Si (x, y) representa un punto de la gráfica de $y = f(x)$, entonces el punto $(x, -y)$ está en la gráfica de $y = -f(x)$ y $(-x, y)$ está en la gráfica de $y = f(-x)$. Cada una de esas reflexiones es una imagen especular de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje coordenado respectivo.



a) Punto de partida *b*) Reflexión en el eje x *c*) Reflexión en el eje y

FIGURA 2.2.9 Reflexiones en los ejes coordenados

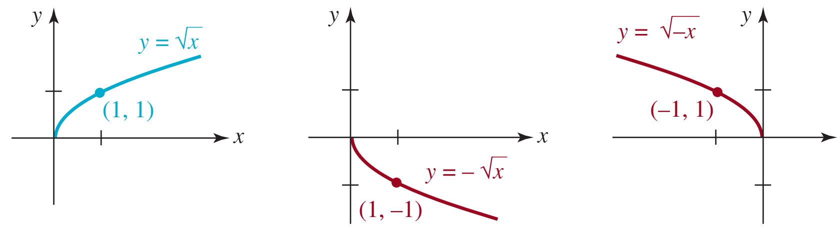
EJEMPLO 4 Reflexiones

Graficar ***a***) $y = -\sqrt{x}$ ***b***) $y = \sqrt{-x}$

Solución El punto de partida es la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, de la **FIGURA 2.2.10*a*)**.

a) La gráfica de $y = -\sqrt{x}$ es la reflexión de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en el eje x. Obsérvese que, en la figura 2.2.10*b*), ya que $(1, 1)$ está en la gráfica de f, el punto $(1, -1)$ está en la gráfica de $y = -\sqrt{x}$.

b) La gráfica de $y = \sqrt{-x}$ es la reflexión de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en el eje y. Obsérvese que, en la figura 2.2.10*c*), como $(1, 1)$ está en la gráfica de f el punto $(-1, 1)$ está en la gráfica de $y = \sqrt{-x}$. La función $y = \sqrt{-x}$ se ve algo extraña, pero téngase en cuenta que su dominio está determinado por el requisito que $-x \geq 0$, o lo que es lo mismo, que $x \leq 0$, por lo que la gráfica reflejada está definida en el intervalo $(-\infty, 0]$.



a) Punto de partida *b*) Reflexión en el eje x *c*) Reflexión en el eje y

FIGURA 2.2.10 Gráficas del ejemplo 4

Si una función f es par, entonces $f(-x) = f(x)$ demuestra que una reflexión en el eje y sería exactamente la misma gráfica. Si una función es impar, entonces, de acuerdo con $f(-x) = -f(x)$, se ve que una reflexión de la gráfica de f en el eje y es idéntica a la gráfica de f reflejada en el eje x. En la **FIGURA 2.2.11** la curva en azul es la gráfica de la función impar $f(x) = x^3$; la curva roja es la gráfica de $y = f(-x) = (-x)^3 = -x^3$. Nótese que si la curva en azul se refleja en el eje y o en el eje x, se obtiene la curva roja.

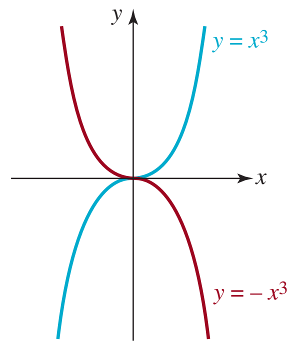


FIGURA 2.2.11 Reflexión de una función impar en el eje y

Transformaciones no rígidas

Si una función f se multiplica por una constante $c > 0$, cambia la forma de la gráfica, pero se conserva, *aproximadamente*, su forma original. La gráfica de $y = cf(x)$ es la de $y = f(x)$ deformada de manera vertical; la gráfica de f se estira (o se alarga, o se elonga) verticalmente, o se comprime (o se aplana) de manera vertical, lo cual depende del valor de c. El estiramiento o la compresión de una gráfica son ejemplos de **transformaciones no rígidas**.

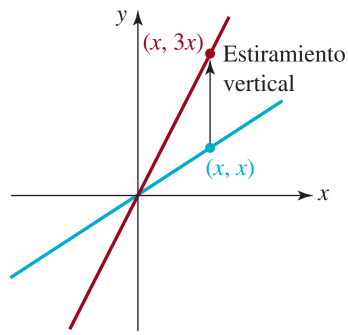


FIGURA 2.2.12 Estiramiento vertical de la gráfica de $f(x) = x$

ESTIRAMIENTOS Y COMPRESIONES VERTICALES

Supongamos que $y = f(x)$ es una función y que c es una constante positiva. Entonces, la gráfica de $y = cf(x)$ es la gráfica de f

i) estirada verticalmente por un factor de c unidades, si $c > 1$,
ii) comprimida verticalmente por un factor de c unidades, si $0 < c < 1$.

Si (x, y) representa un punto en la gráfica de f, entonces el punto (x, cy) está en la gráfica de cf. Las gráficas de $y = x$ y de $y = 3x$ se comparan en la **FIGURA 2.2.12**; la ordenada de un punto en la gráfica de $y = 3x$ es 3 veces mayor que la ordenada del punto con la misma abscisa, en la gráfica de $y = x$. La comparación de las gráficas de $y = 10x^2$ (gráfica en azul) y $y = \frac{1}{10}x^2$ (gráfica en rojo) de la **FIGURA 2.1.13** es algo más drástica; la gráfica de $y = \frac{1}{10}x^2$ tiene un aplastamiento vertical considerable, en especial cerca del origen. Nótese que en esta descripción, c es positiva. Para trazar la gráfica de $y = -10x^2$ uno se la imagina como $y = -(10x^2)$, lo cual quiere decir que primero se estira verticalmente la gráfica de $y = x^2$, por un factor de 10, y después se refleja esa gráfica en el eje x.

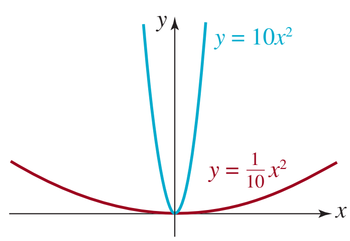


FIGURA 2.2.13 Estiramiento vertical (azul) y compresión vertical (rojo) de la gráfica de $f(x) = x^2$

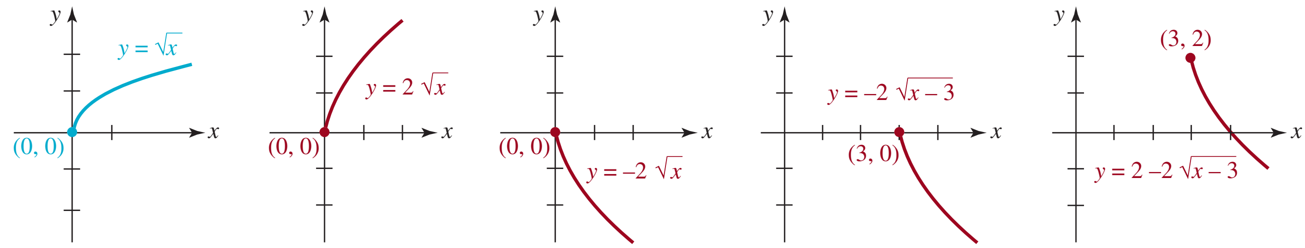
EJEMPLO 5 Combinación de transformaciones

Graficar $y = 2 - 2\sqrt{x - 3}$.

Solución El lector debe reconocer que la función dada es producto de cuatro transformaciones de la función básica $f(x) = \sqrt{x}$:

$$y = \overset{\substack{\text{desplazamiento vertical hacia arriba}\\ \downarrow}}{2} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{reflexión en el eje } y}}{-}\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{estiramiento vertical}}}{2}\sqrt{x \overset{\substack{\text{desplazamiento horizontal hacia la derecha}\\ \downarrow}}{-} 3}$$

Comenzaremos con la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ de la **FIGURA 2.2.14 A)**. A continuación, se estira verticalmente esa gráfica, por un factor de 2, para obtener $y = 2\sqrt{x}$ en la figura 2.2.14*b*), que se refleja en el eje x, para obtener $y = -2\sqrt{x}$, de la figura 2.2.14*c*). Esta tercera gráfica se desplaza 3 unidades hacia la derecha, para obtener $y = -2\sqrt{x-3}$ en la figura 2.2.14*d*). Por último, la cuarta gráfica se desplaza 2 unidades hacia arriba, para obtener $y = 2 - 2\sqrt{x-3}$, de la figura 2.2.14*e*). Nótese que el punto (0, 0) de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ queda fijo en el estiramiento vertical y en la reflexión en el eje x, pero bajo el primer desplazamiento (horizontal), el punto (0, 0) se mueve a (3, 0) y en el segundo desplazamiento (vertical), el punto (3, 0) se mueve a (3, 2).



a) Punto de partida

b) Estiramiento vertical

c) Reflexión en el eje x

d) Desplazamiento hacia la derecha

e) Desplazamiento hacia arriba

FIGURA 2.2.14 Gráficas de las funciones del ejemplo 5

2.2 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

En los problemas 1 a 10, use las condiciones (1) y (2) para determinar si la función $y = f(x)$ es par, impar o ni par ni impar. No haga la gráfica.

1. $f(x) = 4 - x^2$

2. $f(x) = x^2 + 2x$

3. $f(x) = x^3 - x + 4$

4. $f(x) = x^5 + x^3 + x$

5. $f(x) = 3x - \dfrac{1}{x}$

6. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

7. $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$

8. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x}$

9. $f(x) = |x^3|$

10. $f(x) = x|x|$

En los problemas 11 a 14, indique si la función $y = f(x)$, cuya gráfica se presenta, es par, impar o ni par ni impar.

11.

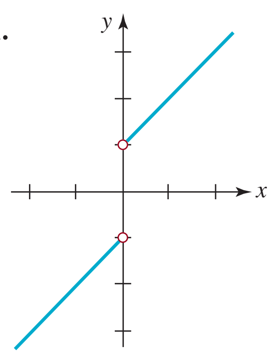


FIGURA 2.2.15 Gráfica del problema 11

12.

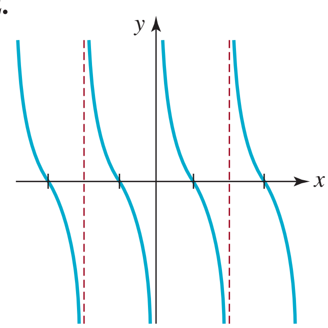


FIGURA 2.2.16 Gráfica del problema 12

13.

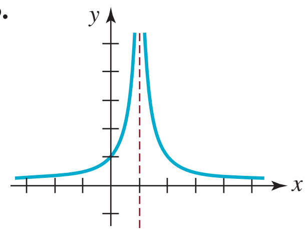


FIGURA 2.2.17 Gráfica del problema 13

14.

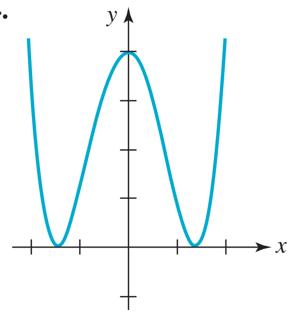


FIGURA 2.2.18 Gráfica del problema 14

En los problemas 15 a 18, complete la gráfica de la función dada $y = f(x)$ si ***a***) f es una función par, y ***b***) si f es una función impar.

15.

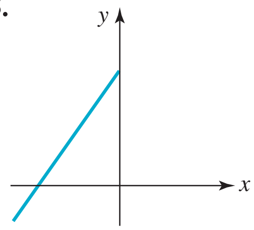


FIGURA 2.2.19 Gráfica del problema 15

16.

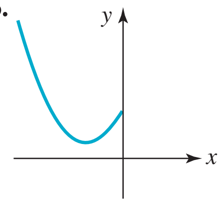


FIGURA 2.2.20 Gráfica del problema 16

17.

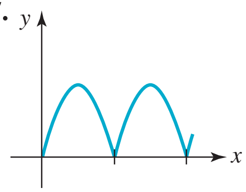


FIGURA 2.2.21 Gráfica del problema 17

18.

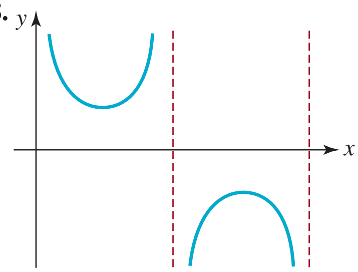


FIGURA 2.2.22 Gráfica del problema 18

En los problemas 19 y 20, suponga que $f(-2) = 4$ y que $f(3) = 7$. Determine $f(2)$ y $f(-3)$.

19. Si f es una función par.

20. Si f es una función impar.

En los problemas 21 y 22, suponga que $g(-1) = -5$ y que $g(4) = 8$. Determine $g(1)$ y $g(-4)$.

21. Si g es una función impar.

22. Si g es una función par.

En los problemas 23 a 32, los puntos $(-2, 1)$ y $(3, -4)$ están en la gráfica de la función $y = f(x)$. Determine los puntos correspondientes en la gráfica que obtuvo con las transformaciones dadas.

23. la gráfica de f desplazada 2 unidades hacia arriba
24. la gráfica de f desplazada 5 unidades hacia abajo
25. la gráfica de f desplazada 6 unidades hacia la izquierda
26. la gráfica de f desplazada 1 unidad hacia la derecha
27. la gráfica de f desplazada 1 unidad hacia arriba y 4 unidades hacia la izquierda
28. la gráfica de f desplazada 3 unidades hacia abajo y 5 unidades hacia la derecha
29. la gráfica de f reflejada en el eje y
30. la gráfica de f reflejada en el eje x

31. la gráfica de f estirada verticalmente por un factor de 15 unidades

32. la gráfica de f comprimida verticalmente por un factor de $\frac{1}{4}$ de unidad, y después reflejada en el eje x.

En los problemas 33 a 36, use la gráfica de la función $y = f(x)$ que se indica en la figura, para graficar las funciones siguientes:

a) $y = f(x) + 2$ *b*) $y = f(x) - 2$

c) $y = f(x + 2)$ *d*) $y = f(x - 5)$

e) $y = -f(x)$ *f*) $y = f(-x)$

33.

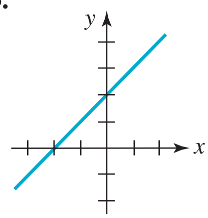


FIGURA 2.2.23 Gráfica del problema 33

34.

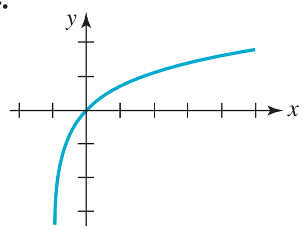


FIGURA 2.2.24 Gráfica del problema 34

35.

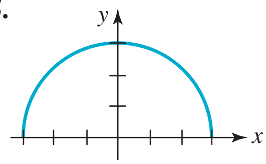


FIGURA 2.2.25 Gráfica del problema 35

36.

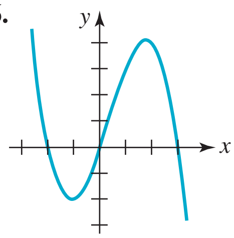


FIGURA 2.2.26 Gráfica del problema 36

En los problemas 37 y 38, use la gráfica de la función $y = f(x)$ que muestra la figura, para graficar las siguientes funciones.

(a) $y = f(x) + 1$ **(b)** $y = f(x) - 1$

(c) $y = f(x + \pi)$ **(d)** $y = f(x - \pi/2)$

(e) $y = -f(x)$ **(f)** $y = f(-x)$

(g) $y = 3f(x)$ **(h)** $y = -\frac{1}{2}f(x)$

37.

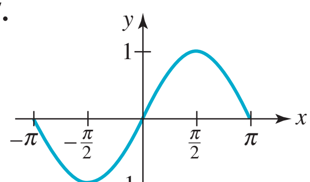


FIGURA 2.2.27 Gráfica del problema 37

38.

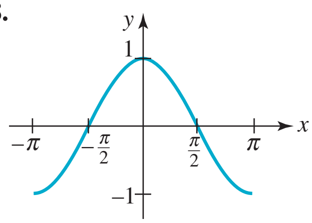


FIGURA 2.2.28 Gráfica del problema 38

En los problemas 39 a 42, deduzca la ecuación de la gráfica final después de aplicar las transformaciones indicadas a la gráfica de $y = f(x)$.

39. la gráfica de $f(x) = x^3$ desplazada 5 unidades hacia arriba y 1 unidad hacia la derecha.

40. la gráfica de $f(x) = x^{2/3}$, estirada verticalmente por un factor de 3, y a continuación desplazada 2 unidades hacia la derecha.

41. la gráfica de $f(x) = x^4$, reflejada en el eje x y desplazada 7 unidades hacia la izquierda.

42. la gráfica de $f(x) = 1/x$, reflejada en el eje y y desplazada 5 unidades hacia la izquierda y 10 unidades hacia abajo.

En los problemas 43 a 46, describa en palabras cómo se obtiene la gráfica de la primera función de la gráfica de la segunda función, usando transformaciones rígidas y no rígidas. Grafique cuidadosamente la primera función.

43. $y = -1 + 2\sqrt{-x + 2};\ y = \sqrt{x}$

44. $y = 2 + \frac{1}{2}(-x)^3;\ y = \sqrt{x^3}$

45. $y = 2 - \dfrac{2}{x - 1};\ y = \dfrac{1}{x}$

46. $y = -1 - \dfrac{1}{(x - 2)^2};\ y = \dfrac{1}{x^2}$

Para discusión

47. Explique por qué la gráfica de una función no cero no puede ser simétrica con respecto al eje x.

48. ¿Qué puntos, si los hay, en la gráfica de $y = f(x)$ permanecen fijos, esto es, igual en la gráfica resultante después de un estiramiento o una compresión vertical? ¿Y después de una reflexión en el eje x? ¿Después de una reflexión en el eje y?

49. Indique la relación que hay entre las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(|x|)$.

50. Indique qué relación hay entre las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(cx)$, donde $c > 0$ es una constante. Considere dos casos: $0 < c < 1$ y $c > 1$.

51. Revise las gráficas de $y = x$ y $y = 1/x$, de la figura 2.2.1. A continuación indique cómo obtener la gráfica de la recíproca $y = 1/f(x)$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$. Trace la gráfica de $y = 1/f(x)$ a partir de la función cuya gráfica se ve en la figura 2.2.26.

2.3 Funciones lineales

Introducción La noción de una línea recta juega un papel importante en el estudio del cálculo diferencial. Hay tres tipos de rectas en el plano xy, o plano cartesiano: rectas horizontales, verticales e inclinadas u oblicuas. En esta sección veremos que cada una de esas rectas se origina de una **ecuación lineal**

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

donde A, B y C son constantes reales. La característica que da el nombre de *lineal* a (1) es que las variables x y y sólo aparecen elevadas a la primera potencia. Regresaremos a (1) cuando repasemos las líneas y sus ecuaciones, pero veamos los casos de especial interés:

$$A = 0, B \neq 0, \text{ da } y = -\frac{C}{B}, \tag{2}$$

$$A \neq 0, B = 0, \text{ da } x = -\frac{C}{A}, \tag{3}$$

$$A \neq 0, B \neq 0, \text{ da } y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \tag{4}$$

La primera y tercera de las anteriores ecuaciones definen funciones. Si $-C/B$ de (2) se denomina b, se obtiene una función constante.

FUNCIÓN CONSTANTE

Una **función constante** $y = f(x)$ es una que tiene la forma

$$y = b, \tag{5}$$

donde b es una constante.

El **dominio** de una función constante es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$. En la definición de una función estamos haciendo corresponder a cada número real x con el mismo valor de y, esto es, (x, b). En nuestro ejemplo de una función, con los alumnos y pupitres de la sección 2.2, eso equivale a que todos los alumnos en un salón de clase estén sentados en un pupitre. Por otra parte, la ecuación (3) no define una función. No se puede hacer que un alumno (el valor fijo de x) se siente en todos los pupitres de un salón de clase.

Si se representan $-A/B$ y $-C/B$ de (4) por a y b, respectivamente, se obtiene la forma de una función lineal.

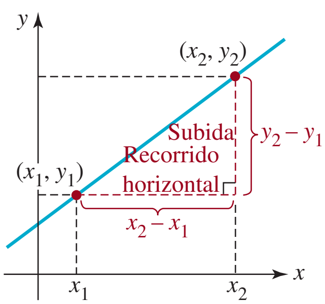
FUNCIÓN LINEAL

Una **función lineal** $y = f(x)$ es aquella que tiene la forma

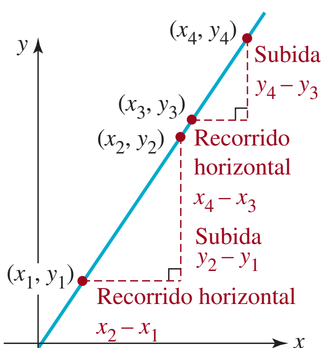
$$f(x) = ax + b, \tag{6}$$

donde $a \neq 0$ y b son constantes.

El **dominio** de una función lineal es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$.



a) Subida y recorrido horizontal



b) Triángulos semejantes

FIGURA 2.3.1 Pendiente de una recta

☐ Gráficas

Como las gráficas de las funciones constantes y lineales son líneas rectas, es adecuado repasar las ecuaciones de todas las rectas. Comenzaremos recordando, de la geometría plana, que a través de dos puntos distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) del plano, pasa sólo una recta L. Si $x_1 \neq x_2$, el número

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{7}$$

se llama la **pendiente** de la recta determinada por esos dos puntos. Se acostumbra llamar a $y_2 - y_1$ el **cambio de** $\boldsymbol{y}$, **incremento de** $\boldsymbol{y}$, o **subida** de la recta; $x_2 - x_1$ es el **cambio de** $\boldsymbol{x}$, **incremento de** $\boldsymbol{x}$, o **recorrido horizontal** de la recta. En consecuencia, la ecuación (7) es

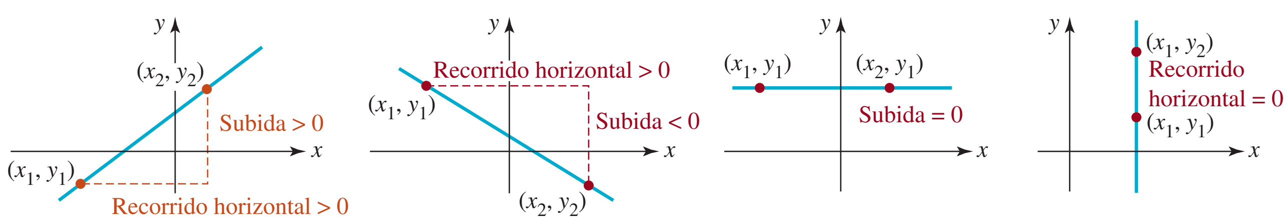
$$m = \frac{\text{subida}}{\text{recorrido horizontal}}.$$

Vea la **FIGURA 2.3.1*a*)**. Todo par de puntos diferentes en una recta determinan la misma pendiente. Para ver por qué sucede así, examine los dos triángulos rectángulos semejantes, de la figura 2.3.1*b*). Como sabemos que las relaciones de los lados correspondientes de los triángulos semejantes son iguales, entonces

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}.$$

Por consiguiente, la pendiente de una recta es independiente de la elección de puntos en ella.

En la **FIGURA 2.3.2** se comparan las gráficas de rectas con pendientes positiva, negativa, cero e indefinidas. En la figura 2.3.2*a*) se ve, leyendo la gráfica de izquierda a derecha, que una recta con pendiente positiva $(m > 0)$ sube a medida que x aumenta. La figura 2.3.2*b*) muestra que una recta con pendiente negativa $(m < 0)$ baja cuando aumenta x. Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son



a) $m > 0$ *b*) $m < 0$ *c*) $m = 0$ *d*) m indefinida

FIGURA 2.3.2 Rectas y sus pendientes *a*) a *c*); recta sin pendiente *d*) puntos en una recta horizontal, entonces $y_1 = y_2$, por lo que la subida es $y_2 - y_1 = 0$. Por consiguiente, de acuerdo con (7), la pendiente es cero ($m = 0$). Vea la figura 2.3.2*c*). Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son puntos de una recta vertical, entonces $x_1 = x_2$, y su recorrido horizontal es $x_2 - x_1 = 0$. En este caso se dice que la pendiente de la recta es **indefinida**, o que la recta no tiene pendiente. Vea la figura 2.3.2*d*).

□ **Ecuación punto-pendiente (o forma punto-pendiente de la ecuación de una recta)** Ya podemos deducir una ecuación de una recta L. Para empezar, supongamos que L tiene la pendiente m, y que (x_1, y_1) está en la recta. Si (x, y) representa cualquier otro punto de L, entonces de acuerdo con (7),

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Al multiplicar ambos lados de la última igualdad por $x - x_1$, se llega a la importante ecuación.

ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE DE UNA RECTA

La **ecuación punto-pendiente** de la recta que pasa por (x_1, y_1) cuya pendiente es m, es

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{8}$$

EJEMPLO 1 Ecuación punto-pendiente

Determinar la ecuación de la recta con pendiente 6 que pasa por $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

Solución Si se hacen $m = 6$, $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $y_1 = 2$, con la ecuación (8) se obtiene

$$y - 2 = 6\left[x - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right].$$

Al simplificar se llega a

$$y - 2 = 6\left(x + \tfrac{1}{2}\right) \quad \text{es decir,} \quad y = 6x + 5.$$

■

EJEMPLO 2 Ecuación punto-pendiente

Deducir la ecuación de la recta que pasa por los puntos (4, 3) y (−2, 5).

Solución Primero calcularemos la pendiente de la recta que pasa por esos puntos. De acuerdo con (7),

$$m = \frac{5 - 3}{-2 - 4} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}.$$

Entonces, la ecuación punto-pendiente (8) da como resultado

$$\overset{\text{ley distributiva}}{y - 3 = -\tfrac{1}{3}(x - 4)} \qquad \text{o sea} \qquad y = -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{13}{3}.$$

■

La ley distributiva $a(b + c) = ab + ac$ causa muchos errores en los trabajos de los alumnos. Un error frecuente se comete más o menos como sigue:

$$-(2x - 3) = -2x - 3.$$

El resultado correcto es:

$$\begin{aligned} -(2x - 3) &= (-1)(2x - 3) \\ &= (-1)2x - (-1)3 \\ &= -2x + 3. \end{aligned}$$

□ **Ecuación pendiente-ordenada al origen** Toda recta con pendiente (esto es, toda recta que no sea vertical) debe cruzar el eje y. Si este cruce con el eje y es $(0, b)$, entonces, con $x_1 = 0$, $y_1 = b$, la forma punto-pendiente (8) da como resultado $y - b = m(x - 0)$. Esta última ecuación se convierte en el siguiente resultado.

ECUACIÓN PENDIENTE-ORDENADA AL ORIGEN DE UNA RECTA

La **ecuación pendiente-ordenada al origen** de la recta con pendiente m y ordenada al origen b es

$$y = mx + b. \tag{9}$$

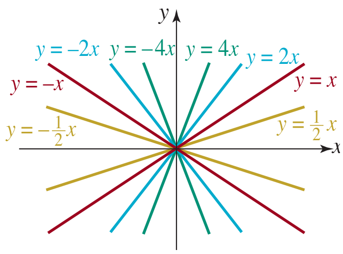


FIGURA 2.3.3 Las rectas que pasan por el origen son $y = mx$

□ Familia de rectas Cuando $m \neq 0$, las ecuaciones (8) y (9) resultan en la forma de la función lineal, ecuación (6). El coeficiente a en (6) es, naturalmente, la pendiente m de la recta. Cuando $b = 0$ en (9), la ecuación $y = mx$ representa una **familia de rectas** que pasan por el origen (0, 0). En la **FIGURA 2.3.3** hemos dibujado algunos de los miembros de esa familia.

EJEMPLO 3 Regreso al ejemplo 2

También se puede usar la forma pendiente-ordenada al origen, ecuación (9), para obtener la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, en el ejemplo 2. Como en ese ejemplo, se comienza determinando la pendiente, que es $m = -\frac{1}{3}$. Entonces, la ecuación de la recta es $y = -\frac{1}{3}x + b$. Al sustituir las coordenadas de cualquiera de los puntos, (4, 3) o (−2, 5) en esta última ecuación podemos determinar b. Si usamos $x = 4$ y $y = 3$, entonces $3 = -\frac{1}{3} \cdot 4 + b$, por lo que $b = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$. La ecuación de la recta es $y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$. ■

□ Rectas horizontal y vertical En el figura 2.3.2*c*) vimos que una recta horizontal tiene la pendiente $m = 0$. La ecuación de una recta horizontal que pasa por un punto (a, b) puede obtenerse de la ecuación (8), esto es, $y - b = 0\,(x - a)$. La **ecuación de una recta horizontal** es, entonces

$$y = b. \tag{10}$$

Esto ya lo vimos en las relaciones (5) y en (2), donde $-C/B$ desempeñaba la parte del símbolo b. Una recta vertical que pase por (a, b) tiene una pendiente indefinida, y todos los puntos de ella tienen la misma abscisa. Entonces, la **ecuación de una recta vertical** es

$$x = a. \tag{11}$$

La ecuación (11) es la ecuación (3), donde $-C/A$ se sustituye por el símbolo a.

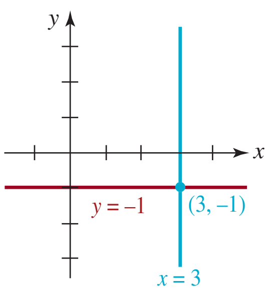


FIGURA 2.3.4 Rectas horizontal y vertical del ejemplo 4

EJEMPLO 4 Rectas horizontal y vertical

Deducir las ecuaciones de las rectas horizontal y vertical que pasan por (3, −1). Graficar esas rectas.

Solución Cualquier punto de la recta vertical que pasa por (3, −1) tiene la abscisa 3. Entonces, la ecuación de esta recta es $x = 3$. De igual modo, cualquier punto de la recta horizontal que pasa por (3, −1) tiene la ordenada −1. Entonces, la ecuación de esta recta es $y = -1$. Ambas rectas se graficaron en la **FIGURA 2.3.4**. No se debe olvidar que sólo $y = -1$ es una función. ■

Rectas paralelas

□ Rectas paralelas y perpendiculares Supongamos que L_1 y L_2 son dos rectas diferentes con pendiente. Esta hipótesis quiere decir que tanto L_1 como L_2 no son verticales. Entonces, necesariamente L_1 y L_2, o son paralelas o se cruzan. Si las líneas se cruzan y forman un ángulo recto, se dice que son perpendiculares. Podemos determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares, examinando sus pendientes.

PENDIENTES DE RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

Si L_1 y L_2 son rectas con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, entonces

- L_1 es **paralela** a L_2 si, y sólo si $m_1 = m_2$, y (12)
- L_1 es **perpendicular** a L_2 si, y sólo si $m_1 m_2 = -1$. (13)

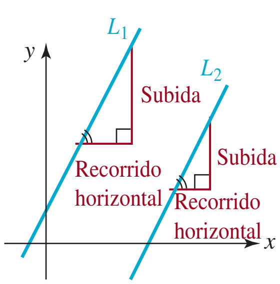


FIGURA 2.3.5 Rectas paralelas

Hay varias maneras de demostrar estos teoremas. La demostración de (12) se puede hacer usando triángulos rectángulos semejantes, como en la **FIGURA 2.3.5**, y el hecho de que las relaciones de los lados correspondientes en esos triángulos son iguales. Dejamos la justificación de (13) como ejercicio. Vea el problema 64, de los ejercicios 2.3. Observe que la condición $m_1m_2 = -1$ implica que $m_2 = -1/m_1$, es decir, que las pendientes son recíprocas negativas entre sí. Una recta horizontal $y = b$, y una recta vertical $x = a$, son perpendiculares, pero esta última es una recta sin pendiente.

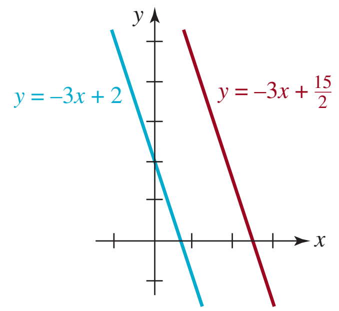


FIGURA 2.3.6 Rectas paralelas del ejemplo 5

EJEMPLO 5 Rectas paralelas

Las ecuaciones lineales $3x + y = 2$ y $6x + 2y = 15$ se pueden ordenar en sus formas pendiente-ordenada al origen

$$y = -3x + 2 \qquad \text{y} \qquad y = -3x + \tfrac{15}{2},$$

respectivamente. Como se indicó en color en el renglón anterior, la pendiente de cada recta es -3. Por consiguiente, las rectas son paralelas. Las gráficas de esas ecuaciones se ven en la FIGURA 2.3.6. ■

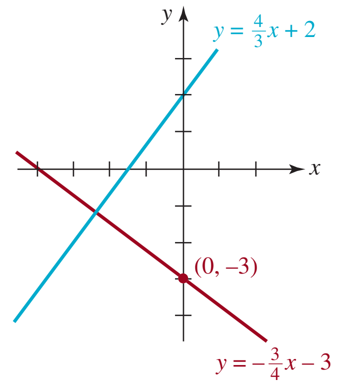


FIGURA 2.3.7 Rectas perpendiculares del ejemplo 6

EJEMPLO 6 Rectas perpendiculares

Deducir la ecuación de la recta que pase por $(0, -3)$, y que sea perpendicular a la gráfica de $4x - 3y + 6 = 0$.

Solución Expresaremos la ecuación lineal indicada en su forma pendiente-ordenada al origen:

$$4x - 3y + 6 = 0 \qquad \text{implica que} \qquad 3y = 4x + 6.$$

Al dividir entre 3 se obtiene $y = \frac{4}{3}x + 2$. Esta recta, cuya gráfica se ve en azul en la FIGURA 2.3.7, tiene pendiente $\frac{4}{3}$. La pendiente de cualquier recta perpendicular a ella es la recíproca negativa de $\frac{4}{3}$, o sea $-\frac{3}{4}$. Como $(0, -3)$ es la intersección en el eje de las y de la recta que se pide, entonces, de acuerdo con (9), su ecuación es $y = -\frac{3}{4}x - 3$. La gráfica de esta última ecuación es la línea roja de la figura 2.3.7. ■

□ Gráficas

Como se mencionó en secciones anteriores de este capítulo, al graficar una ecuación siempre se recomienda tratar de determinar sus intersecciones con los ejes coordenados. Excepto los casos de rectas horizontales y verticales, y de las que pasen por el origen, una recta tendrá diferentes coordenadas al origen. Naturalmente, todo lo que necesita para trazar una recta son dos puntos.

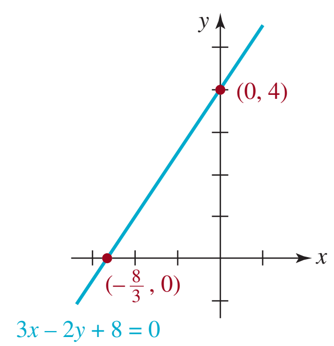


FIGURA 2.3.8 Gráfica de la ecuación del ejemplo 7

EJEMPLO 7 Gráfica de una ecuación lineal

Graficar la ecuación lineal $3x - 2y + 8 = 0$.

Solución No hay necesidad de volver a escribir la ecuación lineal $y = mx + b$. Sólo se calculan las intersecciones con los ejes coordenados.

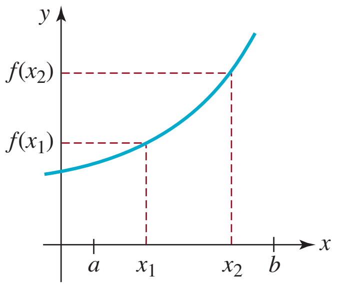
Intersección con el eje y: Igualando $x = 0$ se obtiene $-2y + 8 = 0$, o sea $y = 4$. La ordenada al origen es 4, y el cruce con el eje y está en $(0, 4)$.

Intersección con el eje x: Igualando $y = 0$ queda $3x + 8 = 0$ o sea que $x = -\frac{8}{3}$. La abscisa al origen es 0, y el cruce con el eje x está en $\left(-\frac{8}{3}, 0\right)$.

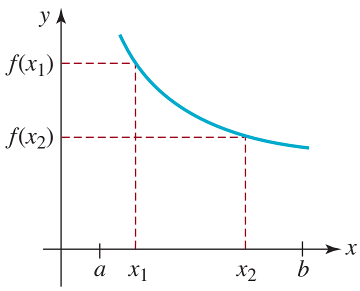
Como muestra la FIGURA 2.3.8, la recta se traza por las dos intersecciones con los ejes $(0, 4)$ y $\left(-\frac{8}{3}, 0\right)$. ■

□ Funciones crecientes y decrecientes

Acabamos de ver en las figuras 2.3.2*a*) y 2.3.2*b*) que si $a > 0$ (que, como acabamos de ver también, hace la parte de m), los valores de una función lineal $f(x) = ax + b$ aumentan cuando x crece, mientras que cuando $a < 0$, los valores de $f(x)$ decrecen cuando x aumenta. Las nociones de creciente y decreciente se pueden ampliar a *cualquier* función. La capacidad de determinar intervalos dentro de los cuales una función f es creciente o decreciente tiene un lugar importante en las aplicaciones del cálculo.



a) $f(x_1) < f(x_2)$



b) $f(x_1) > f(x_2)$

FIGURA 2.3.9 Función creciente en *a*); función decreciente en *b*)

FUNCIONES CRECIENTES/DECRECIENTES

Supongamos que $y = f(x)$ es una función definida en un intervalo, y que x_1 y x_2 son dos números cualesquiera en el intervalo, tales que $x_1, < x_2$. Entonces, la función f es

- **creciente** en el intervalo, si $f(x_1) < f(x_2)$. (14)
- **decreciente** en el intervalo si $f(x_1) > f(x_2)$. (15)

En la **FIGURA 2.3.9a)**, la función f es creciente en el intervalo $[a, b]$, mientras que f es decreciente en $[a, b]$ en la figura 2.3.9*b*). Una función lineal $f(x) = ax + b$ es creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$ cuando $a > 0$, y es decreciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$ cuando $a < 0$.

☐ Puntos de intersección

Con frecuencia interesa encontrar los puntos donde se cruzan las gráficas de dos funciones. Las intersecciones con el eje x de la gráfica de una función f se pueden interpretar como los puntos donde la gráfica de f cruza a la gráfica de la función constante $y = 0$. En general, en un punto P de intersección de las gráficas de dos funciones, f y g, las coordenadas (x, y) de P deben satisfacer las dos ecuaciones, $y = f(x)$ y $y = g(x)$, por lo que $f(x) = g(x)$.

EJEMPLO 8 Intersección de rectas

Determinar el punto donde se intersecan las dos rectas de la figura 2.3.7.

Solución Se igualan $y = \frac{4}{3}x + 2$ y $y = -\frac{3}{4}x - 3$, y se despeja x:

$$\begin{aligned} \tfrac{4}{3}x + 2 &= -\tfrac{3}{4}x - 3 \\ \left(\tfrac{4}{3} + \tfrac{3}{4}\right)x &= -5 \\ \tfrac{25}{12}x &= -5 \\ x &= -\tfrac{12}{5}. \end{aligned}$$

Al sustituir $x = -\frac{12}{5}$ en cualquier ecuación se llega a $y = -\frac{6}{5}$. El punto de intersección de las rectas es $\left(-\frac{12}{5}, -\frac{6}{5}\right)$. ■

2.3 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-4.

En los problemas 1 a 6 determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos indicados. Grafique esa recta.

1. $(3, -7), (1, 0)$

2. $(-4, -1), (1, -1)$

3. $(5, 2), (4, -3)$

4. $(1, 4), (6, -2)$

5. $(-1, 2), (3, -2)$

6. $(8, -\frac{1}{2}), (2, \frac{5}{2})$

En los problemas 7 y 8, use la gráfica para estimar sus pendientes.

7.

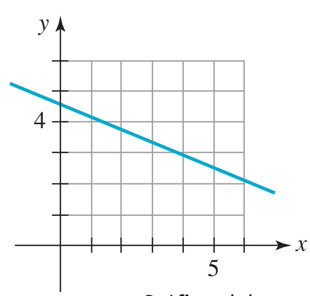


FIGURA 2.3.10 Gráfica del problema 7

8.

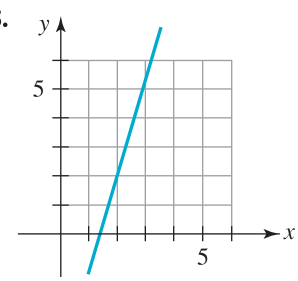


FIGURA 2.3.11 Gráfica del problema 8

En los problemas 9 a 16, determine la pendiente y las intersecciones con los ejes coordenados de la recta dada. Grafique esa recta.

9. $3x - 4y + 12 = 0$

10. $\frac{1}{2}x - 3y = 3$

11. $2x - 3y = 9$

12. $-4x - 2y + 6 = 0$

13. $2x + 5y - 8 = 0$

14. $\dfrac{y}{2} - \dfrac{x}{10} - 1 = 0$

15. $y + \frac{2}{3}x = 1$

16. $y = 2x + 6$

En los problemas 17 a 22, deduzca una ecuación de la recta que pase por (1, 2) y tenga la pendiente indicada.

17. $\frac{2}{3}$

18. $\frac{1}{10}$

19. 0

20. -2

21. -1

22. indefinida

En los problemas 23 a 38, deduzca la ecuación de la recta que satisfaga las condiciones indicadas.

23. pasa por $(2, 3)$ y $(6, -5)$
24. pasa por $(5, -6)$ y $(4, 0)$
25. pasa por $(8, 1)$ y $(-3, 1)$
26. pasa por $(2, 2)$ y por $(-2, -2)$
27. pasa por $(-2, 0)$ y $(-2, 6)$
28. pasa por $(0, 0)$ y por (a, b)
29. pasa por $(-2, 4)$ y es paralela a $3x + y - 5 = 0$
30. pasa por $(1, -3)$ y es paralela a $2x - 5y + 4 = 0$
31. pasa por $(5, -7)$ y es paralela al eje y
32. pasa por el origen y es paralela a la recta que pasa por $(1, 0)$ y $(-2, 6)$
33. pasa por $(2, 3)$ y es perpendicular a $x - 4y + 1 = 0$
34. pasa por $(0, -2)$ y es perpendicular a $3x + 4y + 5 = 0$
35. pasa por $(-5, -4)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(1, 1)$ y $(3, 11)$
36. pasa por el origen y es perpendicular a todas las rectas que tienen pendiente 2.
37. Encuentre las coordenadas del punto P que se muestra en la FIGURA 2.3.12.
38. Una línea a través de $(2, 4)$ tiene la subida 8. Sin buscar la ecuación de la línea, determine si el punto $(1, -5)$ está en la línea.

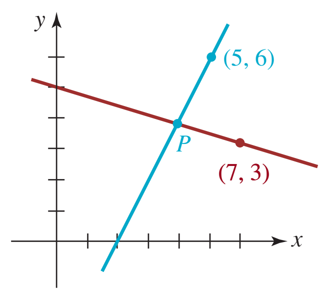


FIGURA 2.3.12 Rectas del problema 37

En los problemas 39 a 42, determine cuáles de las rectas indicadas son paralelas o perpendiculares entre sí.

39. *a*) $3x - 5y + 9 = 0$ *b*) $5x = -3y$
c) $-3x + 5y = 2$ *d*) $3x + 5y + 4 = 0$
e) $-5x - 3y + 8 = 0$ *f*) $5x - 3y - 2 = 0$

40. *a*) $2x + 4y + 3 = 0$ *b*) $2x - y = 2$
c) $x + 9 = 0$ *d*) $x = 4$
e) $y - 6 = 0$ *f*) $-x - 2y + 6 = 0$

41. *a*) $3x - y - 1 = 0$ *b*) $x - 3y + 9 = 0$
c) $3x + y = 0$ *d*) $x + 3y = 1$
e) $6x - 3y + 10 = 0$ *f*) $x + 2y = -8$

42. *a*) $y + 5 = 0$ *b*) $x = 7$
c) $4x + 6y = 3$ *d*) $12x - 9y + 7 = 0$
e) $2x - 3y - 2 = 0$ *f*) $3x + 4y - 11 = 0$

En los problemas 43 y 44, deduzca la función lineal con la forma de la ecuación (6) que satisfaga las dos condiciones indicadas.

43. $f(-1) = 5, f(1) = 6$

44. $f(-1) = 1 + f(2), f(3) = 4f(1)$

En los problemas 45 a 48, determine el punto de intersección de las gráficas correspondientes a las funciones lineales indicadas. Trace las dos líneas.

45. $f(x) = -2x + 1,\ g(x) = 4x + 6$

46. $f(x) = 2x + 5,\ g(x) = \frac{3}{2}x + 5$

47. $f(x) = 4x + 7,\ g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

48. $f(x) = 2x - 10,\ g(x) = -3x$

En los problemas 49 y 50, calcule el cociente de la siguiente función lineal

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

donde h es una constante.

49. $f(x) = -9x + 12$

50. $f(x) = \frac{4}{3}x - 5$

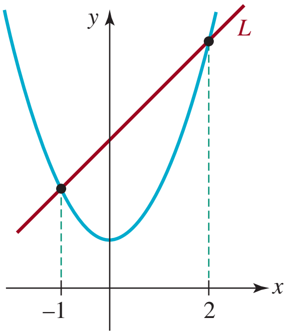


FIGURA 2.3.13 Gráficas del problema 51

51. Deduzca una ecuación de la recta L que muestra la FIGURA 2.3.13 si la ecuación de la curva en azul es $y = x^2 + 1$.

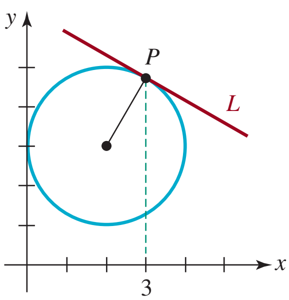


FIGURA 2.3.14 Círculo y recta tangente del problema 52

52. Una recta L tangente a un círculo en un punto P del círculo es perpendicular a la recta que pasa por P y por el centro del círculo. Deduzca la ecuación de la recta L, que se ve en la FIGURA 2.3.14.

Aplicaciones diversas

53. Termómetros La función que relaciona a T_C, en grados Celsius, y T_F, en grados Fahrenheit, es lineal.

a) Exprese T_F en función de T_C si (0°C, 32°F) y (60°C, 140°F) están en la gráfica de T_F.

b) Demuestre que 100°C equivale al punto de ebullición en grados Fahrenheit, 212°F. Vea la FIGURA 2.3.15.

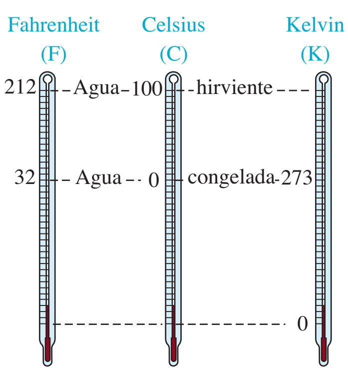


FIGURA 2.3.15 Termómetros de los problemas 53 y 54

54. Termómetros: continuación La función que relaciona a T_C, en grados Celsius, con T_K, en kelvins, es lineal.

a) Exprese T_K en función de T_C si (0°C, 273 K) y (27°C, 300 K) están en la gráfica de T_K.

b) Exprese el punto de ebullición, 100°C, en kelvins. Vea la figura 2.3.15.

c) Se define al cero absoluto como 0 K. ¿Cuánto es 0 K en grados Celsius?

d) Exprese T_K como función lineal de T_F.

e) ¿Cuánto es 0 K en grados Fahrenheit?

55. Interés simple A interés simple, la cantidad A acumulada durante un tiempo es la función lineal $A = P + Prt$, donde P es el principal, t se expresa en años y r es la tasa de interés anual, expresada como decimal. Calcule A después de 20 años si el principal es $P = 1\,000$ y la tasa de interés anual es 3.4%. ¿En cuánto tiempo $A = 2\,200$?

56. Depreciación lineal La depreciación lineal, o en línea recta, quiere decir que un artículo pierde todo su valor inicial de \$$A$ en un periodo de n años, y cada año pierde una cantidad A/n. Si un artículo que costó \$20 000 cuando era nuevo se deprecia linealmente en 25 años, determine la función lineal que exprese su valor V a los x años, donde $0 \leq x \leq 25$. ¿Cuál es el valor del artículo a los 10 años?

Para discusión

57. Examine la función lineal $f(x) = \frac{5}{2}x - 4$. Si x cambia una unidad, ¿cuántas unidades cambiará y? ¿Y si x cambia 2 unidades? ¿Y si x cambia n unidades (n entero positivo)?

58. Considere el intervalo $[x_1, x_2]$ y la función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Demuestre que

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

y describa la interpretación geométrica de este resultado, cuando $a > 0$.

59. ¿Cómo deduciría usted una ecuación de la recta que es perpendicular y divide en dos partes iguales (es decir, es mediatriz) al segmento de recta cuyos extremos son $(\frac{1}{2}, 10)$ y $(\frac{3}{2}, 4)$?

60. Usando sólo los conceptos expuestos en esta sección, ¿cómo demostraría o negaría que el triángulo cuyos vértices están en $(2, 3)$, $(-1, -3)$ y $(4, 2)$ es un triángulo rectángulo?

61. Usando sólo los conceptos expuestos en esta sección, ¿cómo demostraría o negaría que el cuadrilátero con vértices en $(0, 4)$, $(-1, 3)$ $(-2, 8)$ y $(-3, 7)$ es un paralelogramo?

62. Si C es una constante real arbitraria, se dice que una ecuación como $2x - 3y = C$ define una **familia de rectas**. Escoja cuatro valores diferentes de C y grafique las rectas correspondientes en los mismos ejes coordenados. ¿Qué es verdad en el caso de las rectas que son miembros de esta familia?

63. Deduzca las ecuaciones de las rectas que pasan por $(0, 4)$ y que son tangentes al círculo $x^2 + y^2 = 4$.

64. Para demostrar la ecuación (13) usted debe demostrar dos cosas, las partes "sólo si" y "si" del teorema.

a) En la **FIGURA 2.3.16**, sin perder generalidad, hemos supuesto que dos rectas perpendiculares, $y = m_1x$, $m_1 > 0$ y $y = m_2x$, $m_2 < 0$ se cortan en el origen. Use la información de la figura para demostrar la parte "sólo si":

Si L_1 y L_2 son rectas perpendiculares con pendientes m_1 y m_2, entonces $m_1m_2 = -1$.

b) Invierta su argumento del inciso *a*) para demostrar la parte "si":

Si L_1 y L_2 son rectas con pendientes m_1 y m_2, tales que $m_1m_2 = -1$, entonces L_1 y L_2 son perpendiculares.

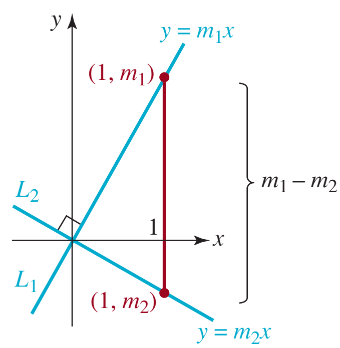


FIGURA 2.3.16 Rectas que cruzan el origen, del problema 64

2.4 Funciones cuadráticas

Introducción La función de elevación al cuadrado, $y = x^2$, que tuvo un papel importante en la sección 2.2, es un miembro de una familia de funciones llamadas **funciones cuadráticas**.

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una **función cuadrática** $y = f(x)$ es una función que tiene la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{1}$$

donde $a \neq 0$, b y c son constantes.

El **dominio** de una función cuadrática f es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$.

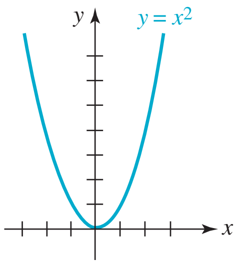


FIGURA 2.4.1 Gráfica de la parábola más sencilla

☐ Gráficas

La gráfica de toda función cuadrática, a la que se le llama **parábola**, tiene la misma forma básica que la función de elevar al cuadrado, $y = x^2$, que muestra la **FIGURA 2.4.1**. En los ejemplos que siguen veremos que las gráficas de las funciones cuadráticas (1) sólo son transformaciones de la gráfica de $y = x^2$:

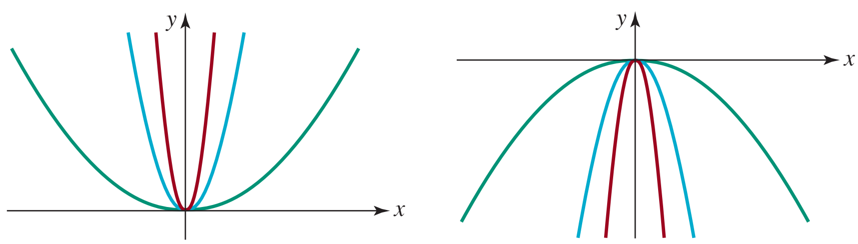
- La gráfica de $f(x) = ax^2$, $a > 0$, es la gráfica de $y = x^2$, **estirada** verticalmente cuando $a > 1$ y **comprimida** verticalmente cuando $0 < a < 1$.
- La gráfica de $f(x) = ax^2$, $a < 0$, es la gráfica de $y = ax^2$, $a > 0$, **reflejada** en el eje x.
- La gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$, $b \neq 0$, es la gráfica de $y = ax^2$ **desplazada** horizontalmente o verticalmente.

De acuerdo con los dos primeros puntos de esta lista, se llega a la conclusión de que la gráfica de una función cuadrática se abre hacia arriba, como en la figura 2.4.1, si $a > 0$ y se abre hacia abajo si $a < 0$.

EJEMPLO 1 Estiramiento, compresión y reflexión

a) Las gráficas de $y = 4x^2$ y $y = \frac{1}{10}x^2$ son, respectivamente, un estiramiento vertical y una compresión vertical de la gráfica de $y = x^2$. Las gráficas de esas funciones se ven en la **FIGURA 2.4.2*a*)**; la gráfica de $y = 4x^2$ se ve en rojo, la de $y = \frac{1}{10}x^2$ es verde, y la de $y = x^2$ está en azul.

b) Las gráficas de $y = -4x^2$, $y = -\frac{1}{10}x^2$ y $y = -x^2$ se obtienen a partir de las gráficas de las funciones del inciso *a*), reflejándolas en el eje x. Vea la figura 2.4.2*b*).



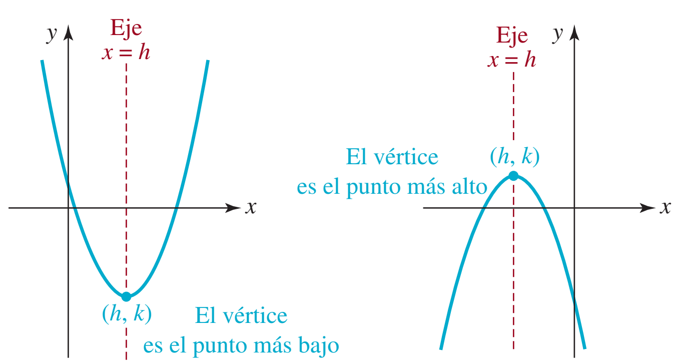
a) La gráfica en rojo es un estiramiento vertical de la gráfica en azul; la gráfica en verde es una compresión vertical de la gráfica en azul

b) Reflexiones en el eje x

FIGURA 2.4.2 Gráficas de las funciones cuadráticas del ejemplo 1

☐ Vértice y eje

Si la gráfica de una función cuadrática se abre hacia arriba, $a > 0$ (o hacia abajo, $a < 0$), el punto más bajo (más alto) (h, k) de la parábola se llama **vértice**. Todas las parábolas son simétricas con respecto a una recta vertical que pasa por el vértice (h, k). La recta $x = h$ se llama **eje de simetría**, o simplemente **eje** de la parábola. Vea la **FIGURA 2.4.3**.



a) $y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$

b) $y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$

FIGURA 2.4.3 Vértice y eje de una parábola

Forma normal El vértice de una parábola puede determinarse ordenando la ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$ en su **forma normal**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k. \tag{2}$$

La forma (2) se obtiene a partir de la ecuación (1), completando el cuadrado en x. Para completar el cuadrado en la ecuación (1) se comienza factorizando el número a de todos los términos que contienen a la variable x:

Vea la sección 1.4.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c. \end{aligned}$$

Dentro de los paréntesis se suma y se resta el cuadrado de la mitad del coeficiente de x:

$$\begin{aligned} f(x) &= a\Bigg(x^2 + \frac{b}{a}x + \overset{\substack{\text{cuadrado de } \frac{b}{2a} \\ \downarrow}}{\frac{b^2}{4a^2}} - \frac{b^2}{4a^2}\Bigg) + c && \leftarrow \text{los términos en color suman 0} \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c && \leftarrow \text{nótese que } a \cdot \left(-\frac{b^2}{4a^2}\right) = -\frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned} \tag{3}$$

La última expresión es la ecuación (2), en la cual se iguala $h = -b/2a$ y $k = (4ac - b^2)/4a$. Si $a > 0$, entonces por necesidad $a(x - h)^2 \geq 0$. Por consiguiente, $f(x)$ en la ecuación (2) es mínima cuando $(x - h)^2 = 0$; esto es, cuando $x = h$. Con un argumento similar se demuestra que si $a < 0$ en (2), $f(x)$ es un valor máximo para $x = h$. Por consiguiente, (h, k) es el vértice de la parábola. La ecuación del eje x de la parábola es $x = h$ o $x = -b/2a$.

Si $a > 0$, entonces la función f en (2) es decreciente en el intervalo $(-\infty, h]$ y es creciente en el intervalo $[h, \infty)$. Si $a < 0$, sucede exactamente lo contrario, esto es, f es creciente en $(-\infty, h]$ y sigue decreciente en $[h, \infty)$.

Recomendamos mucho que *no memorice* el resultado del último renglón de las ecuaciones (3), sino que practique cada vez completar el cuadrado. Sin embargo, si el profesor permite la memorización para ahorrar tiempo, el vértice se puede determinar calculando las coordenadas del punto

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right). \tag{4}$$

Intersecciones La gráfica de la ecuación (1) tiene siempre una **intersección con el eje** $\boldsymbol{y}$, porque $f(0) = c$, por lo que el punto de intersección con el eje y está en $(0, c)$. Para determinar si la gráfica tiene intersecciones con el eje x, se debe resolver la ecuación $f(x) = 0$. Eso se puede hacer sea por factorización o usando la fórmula general de segundo orden. Recuerde que una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, tiene las soluciones

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Distinguiremos tres casos, de acuerdo con el signo algebraico del discriminante $b^2 - 4ac$.

- Si $b^2 - 4ac > 0$, hay dos soluciones reales distintas, x_1 y x_2. La parábola cruza el eje x en $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

- Si $b^2 - 4ac = 0$, hay una sola solución real x_1. El vértice de la parábola está en el eje x, en $(x_1, 0)$. La parábola es tangente al eje x, es decir, lo toca en ese punto.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, no hay soluciones reales. La parábola no cruza al eje x.

Como verá en el ejemplo que sigue, se puede obtener un bosquejo razonable de una parábola graficando las intersecciones con los ejes coordenados y el vértice.

EJEMPLO 2 Gráfica usando las intersecciones con los ejes y el vértice

Graficar $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Solución Como $a = 1 > 0$, se ve que la parábola se abre hacia arriba. De $f(0) = -3$, se obtiene el cruce con el eje y en $(0, -3)$. Para ver si hay intersecciones con el eje x, se resuelve $x^2 - 2x - 3 = 0$. Factorizando:

$$(x + 1)(x - 3) = 0,$$

y se ve que las soluciones son $x = -1$ y $x = 3$. Los cruces con el eje x están en $(-1, 0)$ y en $(3, 0)$. Para ubicar el vértice se completa el cuadrado:

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 4.$$

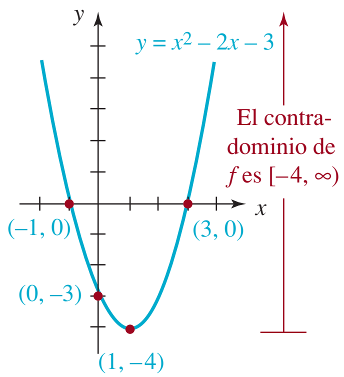


FIGURA 2.4.4 Parábola del ejemplo 2

De esta manera llegamos a la forma normal, que es $f(x) = (x - 1)^2 - 4$. Si $h = 1$ y $k = -4$, la conclusión es que el vértice está en $(1, -4)$. Con esta información trazamos una parábola que pase por estos cuatro puntos, como se ve en la **FIGURA 2.4.4**.

Una última observación. Al ubicar el vértice, en forma automática se determina el contradominio de una función cuadrática. En este ejemplo, $y = -4$ es el número menor del contradominio de f, por lo que el contradominio de f es el intervalo $[-4, \infty)$ en el eje y. ■

EJEMPLO 3 El vértice está en la intersección con el eje x

Graficar $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$.

Solución La gráfica de esta función cuadrática es una parábola que se abre hacia abajo, porque $a = -4 < 0$. Para completar el cuadrado se comienza sacando a –4 como factor común de los dos términos en x:

$$\begin{aligned} f(x) &= -4x^2 + 12x - 9 \\ &= -4(x^2 - 3x) - 9 \\ &= -4\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) - 9 \\ &= -4\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - 9 + 9 \\ &= -4\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right). \end{aligned}$$

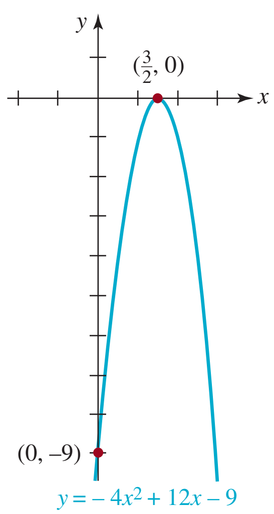


FIGURA 2.4.5 Parábola del ejemplo 3

Entonces, la forma normal es $f(x) = -4(x - \frac{3}{2})^2$. Con $h = \frac{3}{2}$ y $k = 0$, se ve que el vértice está en $(\frac{3}{2}, 0)$. El cruce con el eje y está en $(0, f(0)) = (0, -9)$. Al resolver $-4x^2 + 12x - 9 = 0$ se ve que sólo hay un cruce con el eje x, en $(\frac{3}{2}, 0)$, lo cual era de esperarse, porque el vértice $(\frac{3}{2}, 0)$ está en el eje x. Como se ve en la **FIGURA 2.4.5**, se puede obtener un esquema aproximado sólo con estos dos puntos. La parábola es tangente al eje x en $(\frac{3}{2}, 0)$. ■

EJEMPLO 4 Uso de la ecuación (4) para encontrar el vértice

Graficar $f(x) = x^2 + 2x + 4$.

Solución La gráfica es una parábola que se abre hacia arriba, porque $a = 1 > 0$. Para fines de ilustración, usaremos esta vez la ecuación (4) para determinar el vértice. Con $b = 2$, $-b/2a = -2/2 = -1$, y

$$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 4 = 3,$$

el vértice está en $(-1, f(-1)) = (-1, 3)$. Ahora, el cruce con el eje y está en $(0, f(0)) = (0, 4)$, pero la fórmula cuadrática indica que la ecuación $f(x) = 0$, o $x^2 + 2x + 4 = 0$ no tiene soluciones reales. En vista de lo anterior, la gráfica no tiene intersección con el eje x. Como el vértice está arriba del eje x y la parábola se abre hacia arriba, la gráfica debe estar toda arriba del eje x. Vea la **FIGURA 2.4.6**. ■

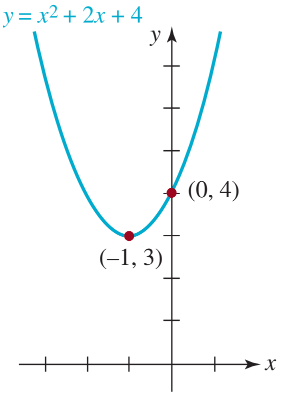


FIGURA 2.4.6 Parábola del ejemplo 4

□ Gráficas por transformaciones

La forma normal, ecuación (2), describe con claridad cómo se traza la gráfica de cualquier función cuadrática a partir de la gráfica de $y = x^2$, comenzando con una transformación no rígida, seguida por dos transformaciones rígidas:

- $y = ax^2$ es la gráfica de $y = x^2$ estirada o comprimida verticalmente.
- $y = a(x - h)^2$ es la gráfica de $y = ax^2$ desplazada $|h|$ unidades horizontalmente.
- $y = a(x - h)^2 + k$ es la gráfica de $y = a(x - h)^2$ desplazada $|k|$ unidades verticalmente.

La **FIGURA 2.4.7** ilustra los desplazamientos horizontal y vertical en el caso en donde $a > 0$, $h > 0$ y $k > 0$.

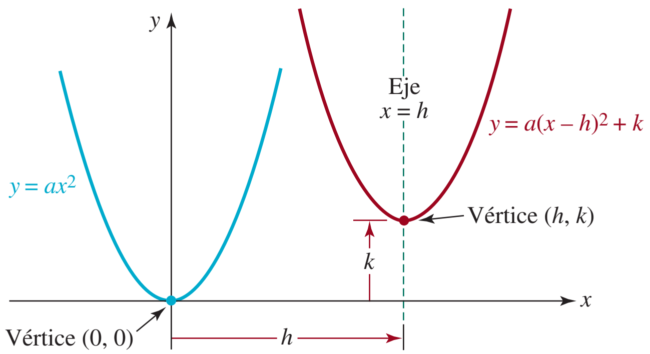


FIGURA 2.4.7 La gráfica en rojo se obtiene desplazando la gráfica en azul h unidades hacia la derecha, y k unidades hacia arriba

EJEMPLO 5 Gráficas con desplazamiento horizontal

Comparar las gráficas de ***a***) $y = (x - 2)^2$ y ***b***) $y = (x + 3)^2$.

Solución La gráfica en línea interrumpida azul, en la **FIGURA 2.4.8**, es la gráfica de $y = x^2$. Al comparar las funciones *a*) y *b*) con la ecuación (2), se ve en cada caso que $a = 1$ y $k = 0$. Eso quiere decir que ninguna de ellas tiene estiramiento o compresión verticales, ni que esté desplazada verticalmente.

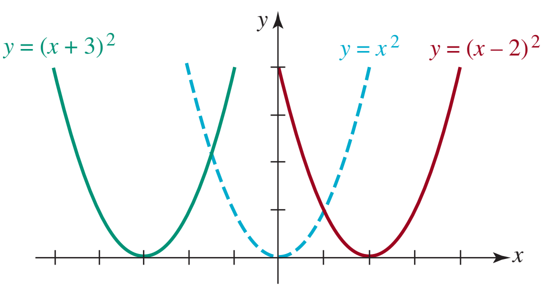


FIGURA 2.4.8 Gráficas desplazadas del ejemplo 5

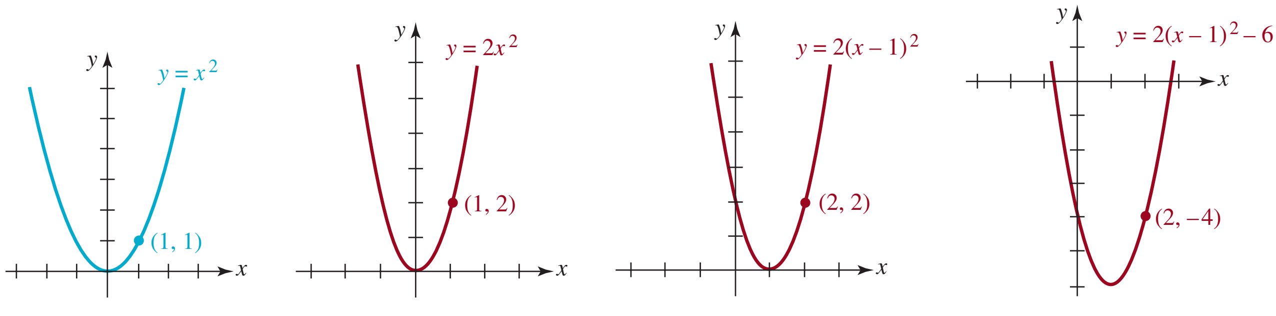
a) Igualando $h = 2$, la gráfica de $y = (x - 2)^2$ es la gráfica de $y = x^2$ desplazada horizontalmente 2 unidades hacia la derecha. El vértice (0, 0) de $y = x^2$ se convierte en el vértice (2, 0) de $y = (x - 2)^2$. Vea la gráfica en rojo de la figura 2.4.8.

b) Si hacemos que $h = -3$, la gráfica de $y = (x + 3)^2$ es la gráfica de $y = x^2$ desplazada $|-3| = 3$ unidades horizontalmente hacia la izquierda. El vértice (0, 0) de $y = x^2$ se convierte en el vértice $(-3, 0)$ de $y = (x + 3)^2$. Vea la gráfica en verde de la figura 2.4.8. ■

EJEMPLO 6 Gráfica desplazada

Graficar $y = 2(x - 1)^2 - 6$.

Solución Ésta es la gráfica de $y = x^2$ estirada hacia arriba verticalmente, seguida por un desplazamiento horizontal de 1 unidad hacia la derecha, y después por un desplazamiento vertical de 6 unidades hacia abajo. En la FIGURA 2.4.9, el lector debe notar la forma en que el vértice (0, 0) de la gráfica de $y = x^2$ se mueve a $(1, -6)$ en la gráfica de $y = 2(x - 1)^2 - 6$, como resultado de estas transformaciones. También debe comprender la forma en que el punto (1, 1) de la figura 2.4.9*a*) termina siendo el punto $(2, -4)$ de la figura 2.4.9*d*).



a) Parábola básica *b*) Estiramiento vertical *c*) Desplazamiento horizontal *d*) Desplazamiento vertical

FIGURA 2.4.9 Gráficas del ejemplo 6 ■

Las gráficas pueden ayudar a resolver ciertas desigualdades cuando una tabla de signos no es útil porque la función cuadrática no se factoriza en forma cómoda. Por ejemplo, la función cuadrática del ejemplo 6 equivale a $y = 2x^2 - 4x - 4$. Si se nos pidiera resolver la desigualdad $2x^2 - 4x - 4 \geq 0$, en la figura 2.4.9*d*) veríamos que $y \geq 0$ hacia la izquierda de la intersección con el eje x en el eje de las x negativas, y a la derecha de la intersección con el eje x en el eje de las x positivas. Las abscisas de estas intersecciones, obtenidas resolviendo $2x^2 - 4x - 4 = 0$ con la fórmula cuadrática, son $1 - \sqrt{3}$ y $1 + \sqrt{3}$. Entonces, la solución de $2x^2 - 4x - 4 \geq 0$ es $(-\infty, 1 - \sqrt{3}] \cup [1 + \sqrt{3}, \infty)$.

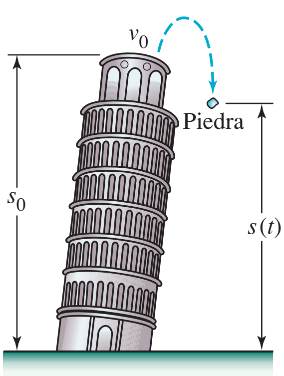


FIGURA 2.4.10 Piedra lanzada hacia arriba desde una altura inicial s_0

□ Objeto en caída libre

Supongamos que un objeto, como una pelota, se lanza ya sea directamente hacia arriba (hacia abajo) o simplemente se deja caer desde una altura inicial s_0. Entonces, si la dirección positiva se toma hacia arriba, la altura $s(t)$ del objeto sobre el suelo se determina con la función cuadrática

$$s(t) = \tfrac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0, \tag{5}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad (-32 pies/s^2 o -9.8 m/s^2); v_0 es la velocidad inicial que se imparte al objeto, y t es el tiempo, expresado en segundos. Vea la FIGURA 2.4.10. Si se deja caer el objeto, entonces $v_0 = 0$. Para deducir la ecuación (5), lo cual es un ejercicio directo en cálculo integral, es que el movimiento se efectúa cerca de la superficie terrestre, y entonces no se tiene en cuenta los efectos de retardo debidos a la resistencia del aire. También, la velocidad del objeto cuando está en el aire se determina con la función lineal

$$v(t) = gt + v_0. \tag{6}$$

Vea los problemas 49 a 52, en los ejercicios 2.4.

2.4 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

En los problemas 1 a 6, trace la gráfica de la función *f* indicada.

1. $f(x) = 2x^2$

2. $f(x) = -2x^2$

3. $f(x) = 2x^2 - 2$

4. $f(x) = 2x^2 + 5$

5. $f(x) = -2x^2 + 1$

6. $f(x) = -2x^2 - 3$

En los problemas 7 a 18, en el caso de la función cuadrática *f*:

a) Determine todas las intersecciones con los ejes de la gráfica de *f*.
b) Exprese la función *f* en la forma normal.
c) Determine el vértice y el eje de simetría.
d) Trace la gráfica de *f*.

7. $f(x) = x(x + 5)$

8. $f(x) = -x^2 + 4x$

9. $f(x) = (3 - x)(x + 1)$

10. $f(x) = (x - 2)(x - 6)$

11. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

12. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

13. $f(x) = 4x^2 - 4x + 3$

14. $f(x) = -x^2 + 6x - 10$

15. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$

16. $f(x) = x^2 - 2x - 7$

17. $f(x) = x^2 - 10x + 25$

18. $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

En los problemas 19 y 20, calcule el valor máximo o el valor mínimo de la función *f*. Indique cuál es el contradominio de la función *f*.

19. $f(x) = 3x^2 - 8x + 1$

20. $f(x) = -2x^2 - 6x + 3$

En los problemas 21 a 24, determine el intervalo más grande en el que la función *f* sea creciente, y el intervalo más grande en el que la función *f* sea decreciente.

21. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 25$

22. $f(x) = -(x + 10)^2$

23. $f(x) = -2x^2 - 12x$

24. $f(x) = x^2 + 8x - 1$

En los problemas 25 a 30, describa, en palabras, cómo se puede obtener la gráfica de la función indicada a partir de la gráfica de $y = x^2$, mediante transformaciones rígidas o no rígidas.

25. $f(x) = (x - 10)^2$

26. $f(x) = (x + 6)^2$

27. $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 4)^2 + 9$

28. $f(x) = 10(x - 2)^2 - 1$

29. $f(x) = (-x - 6)^2 - 4$

30. $f(x) = -(1 - x)^2 + 1$

En los problemas 31 a 36, la gráfica que se ve es $y = x^2$, desplazada y/o reflejada en el plano *xy*. Escriba la ecuación de la gráfica.

31.

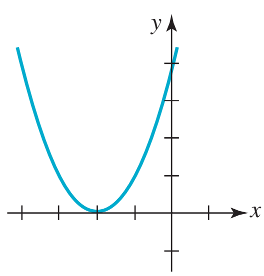


FIGURA 2.4.11 Gráfica del problema 31

32.

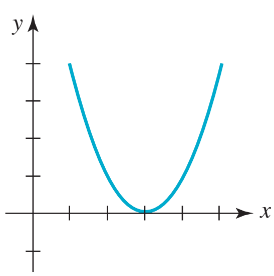


FIGURA 2.4.12 Gráfica del problema 32

33.

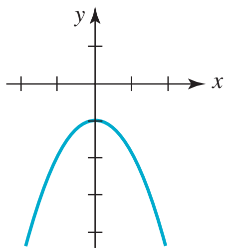


FIGURA 2.4.13 Gráfica del problema 33

34.

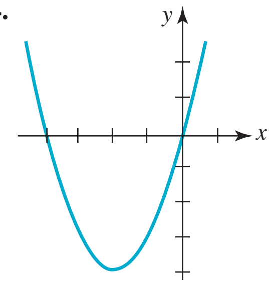


FIGURA 2.4.14 Gráfica del problema 34

35.

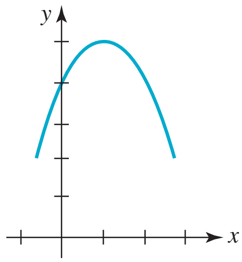


FIGURA 2.4.15 Gráfica del problema 35

36.

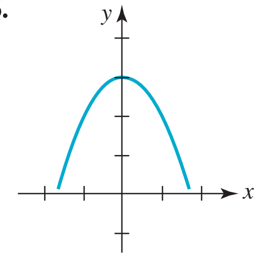


FIGURA 2.4.16 Gráfica del problema 36

En los problemas 37 y 38, deduzca la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ que satisfaga las condiciones indicadas.

37. f tiene los valores $f(0) = 5, f(1) = 10, f(-1) = 4$

38. su gráfica pasa por $(2, -1)$ y los ceros de f son 1 y 3

En los problemas 39 y 40, deduzca las funciones cuadráticas en su forma normal $f(x) = a(x - h)^2 + k$, que satisfaga las condiciones indicadas.

39. el vértice de la gráfica de f está en $(1, 2)$, y la gráfica pasa por $(2, 6)$

40. el valor máximo de f es 10; el eje de simetría es $x = -1$ y la intersección con el eje y es $(0, 8)$.

En los problemas 41 a 44, trace la región del plano xy que está acotada entre las gráficas de las funciones indicadas. Determine los puntos de intersección de las gráficas.

41. $y = -x + 4, \quad y = x^2 + 2x$

42. $y = 2x - 2, \quad y = 1 - x^2$

43. $y = x^2 + 2x + 2, \quad y = -x^2 - 2x + 2$

44. $y = x^2 - 6x + 1, \quad y = -x^2 + 2x + 1$

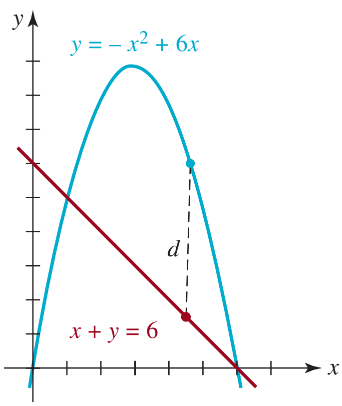


FIGURA 2.4.17 Gráficas del problema 46

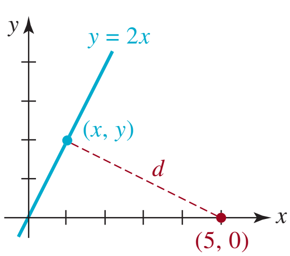


FIGURA 2.4.18 Distancia del problema 47

45. Busque el valor máximo de $f(x) = -x + 6\sqrt{x} + 10$. [*Sugerencia:* Vea los problemas 19 y 20. Sea $t = \sqrt{x}$.]

46. Considere las gráficas que se muestran en la FIGURA 2.4.17. Busque los puntos en ambas gráficas de $1 \le x \le 6$ de tal modo que la distancia vertical d entre las gráficas es un máximo. ¿Cuál es la máxima distancia vertical?

47. ***a***) Exprese, en función de x, el cuadrado de la distancia d del punto (x, y) en la gráfica de $y = 2x$, al punto $(5, 0)$ indicado en la FIGURA 2.4.18.

b) Use la función de la parte *a*) para calcular el punto (x, y) que es el más cercano a $(5, 0)$.

48. Como se ve en la FIGURA 2.4.19, una flecha disparada con un ángulo de 45° con respecto a la horizontal, describe un arco parabólico definido por la ecuación $y = ax^2 + x + c$. Use el hecho de que la flecha se lanza a una altura vertical de 6 pies, y recorre una distancia horizontal de 200 pies, para calcular los coeficientes a y c. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la flecha?

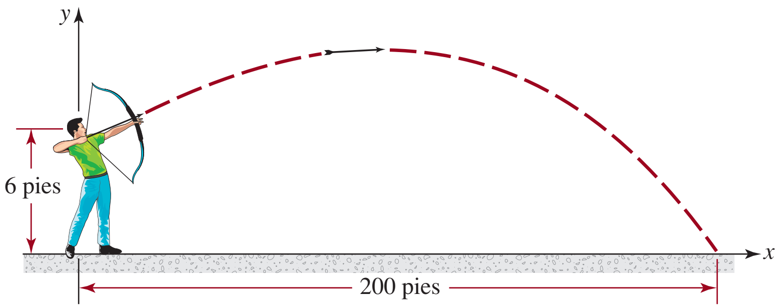


FIGURA 2.4.19 Flecha del problema 48

49. Se dispara una flecha verticalmente hacia arriba, con una velocidad de 64 pies/s, desde un punto que está a 6 pies arriba del suelo. Vea la **FIGURA 2.4.20**.

a) Calcule la altura $s(t)$ y la velocidad $v(t)$ de la flecha cuando el tiempo es $t \geq 0$.

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la flecha? ¿Cuál es la velocidad de la flecha en el momento en que alcanza su altura máxima?

c) En qué momento (tiempo) la flecha regresa al nivel de los 6 pies? ¿Cuál es su velocidad en ese momento?

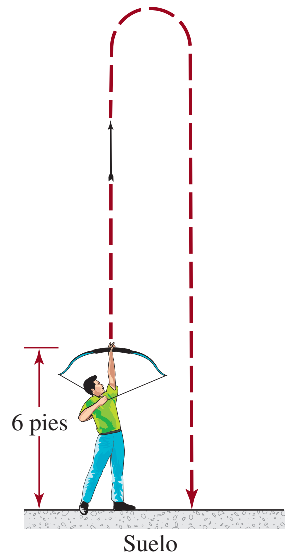


FIGURA 2.4.20 Flecha del problema 49

50. La altura sobre el piso a la que llega un cohete de juguete lanzado hacia arriba desde la azotea de un edificio, se determina por medio de $s(t) = -16t^2 + 96t + 256$.

a) ¿Cuál es la altura del edificio?

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el cohete?

c) Calcule el tiempo para que el cohete llegue al suelo.

51. Se deja caer una pelota desde el techo de un edificio, que está a 122.5 metros sobre el nivel del suelo.

a) ¿Cuál es la altura y la velocidad de la pelota cuando $t = 1$ s?

b) ¿En qué tiempo llega la pelota al suelo?

c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota al chocar con el suelo?

52. Hace pocos años, un periódico informó que un escapista planeaba saltar de un puente en el río Mississippi, cargado con 70 lb de cadenas y esposas. En el artículo se afirmaba que la altura del puente era de 48 pies, y que la velocidad de impacto del escapista, al llegar al agua, sería de 85 millas por hora. Suponiendo que sólo se dejara caer desde el puente, entonces su altura (en pies) y su velocidad (en pies/segundo), a los t segundos después de saltar del puente, se definen con las funciones $s(t) = -16t^2 + 48$, y $v(t) = -32t$, respectivamente. Determine si la velocidad de impacto estimada por el periódico era la correcta.

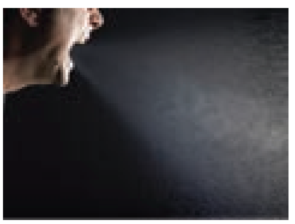
Aplicaciones diversas

53. Difusión de una enfermedad Un modelo de la difusión de un virus catarral supone que dentro de una población de P personas, la rapidez con la que se difunde una enfermedad es proporcional tanto a la cantidad D de personas que ya son portadores de ella, como a la cantidad $P - D$ de personas que todavía no están infectadas. Matemáticamente, el modelo se define con la función cuadrática

$$R(D) = kD(P - D),$$

donde $R(D)$ es la rapidez de difusión del virus del catarro (en casos por día) y $k > 0$ es una constante de proporcionalidad.

a) Demuestre que si la población P es constante, entonces la enfermedad se extiende con más rapidez cuando exactamente la mitad de la población es portadora del catarro.



Difusión de un virus

b) Suponga que en un pueblo de 10 000 personas hay 125 enfermas el domingo, y que el lunes se presentan 37 casos nuevos. Estime el valor de la constante k.
c) Use el resultado del inciso *b*) para estimar los casos nuevos que se presentarán el martes. [*Sugerencia:* La cantidad de personas portadoras de catarro, el lunes, es 162 = 125 + 37.]
d) Estime la cantidad de casos nuevos el miércoles, jueves, viernes y sábado.

Para discusión

54. En los problemas 50 y 52 ¿cuál es el dominio de la función $s(t)$? [*Sugerencia:* No es $(-\infty, \infty)$.]

55. En la Luna, la aceleración debida a la gravedad es la sexta parte de la que hay en la Tierra. Si se lanza verticalmente hacia arriba una pelota desde la superficie lunar, ¿alcanzaría una altura máxima seis veces mayor que la que alcanza en la Tierra, cuando tiene la misma velocidad inicial? Argumente su respuesta.

56. Suponga que la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene dos ceros reales distintos. ¿Cómo demostraría usted que la abscisa del vértice es el punto medio del segmento de recta que une a las intersecciones con el eje x? Ponga en práctica sus ideas.

2.5 Funciones definidas en intervalos

Introducción Una función f puede contener dos o más expresiones o fórmulas, cada una de ellas definida para diferentes partes del dominio de f. Una función definida de esta manera se llama **función definida en intervalos** (o función definida en secciones o partes). Por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

no son dos funciones, sino una sola en la que la regla de correspondencia está en dos partes. En este caso, una parte se usa para los números reales negativos ($x < 0$) y la otra parte para los números no negativos ($x \geq 0$); el dominio de f es la unión de los intervalos $(-\infty, 0) \cup [0, \infty) = (-\infty, \infty)$. Por ejemplo, como $-4 < 0$, la regla indica que se eleve al cuadrado el número:

$$f(-4) = (-4)^2 = 16;$$

pero, por otra parte, como $6 \geq 0$, se suma 1 al número:

$$f(6) = 6 + 1 = 7.$$

Por ejemplo, la tarifa postal en Estados Unidos para cartas, tarjetas o paquetes es un caso real de una función definida en intervalos. Cuando se escribió este libro, el porte por mandar una carta en sobre tamaño normal, por correo de primera clase, depende de su peso en onzas:

$$\text{Importe} = \begin{cases} \$0.44, & 0 < \text{peso} \leq 1 \text{ onza} \\ \$0.61, & 1 < \text{peso} \leq 2 \text{ onzas} \\ \$0.78, & 2 < \text{peso} \leq 3 \text{ onzas,} \\ \quad\vdots & \\ \$2.92, & 12 < \text{peso} \leq 13 \text{ onzas.} \end{cases} \tag{1}$$

La regla, en las ecuaciones (1), es una función P formada por 13 partes (las cartas con más de 13 onzas se envían por correo prioritario). Un valor $P(w)$ es una de trece constantes; la constante cambia de acuerdo con el peso w (en onzas) de la carta. Por ejemplo,

$$P(0.5) = \$0.44,\ P(1.7) = \$0.61,\ P(2.2) = \$0.78,\ P(2.9) = \$0.78,$$
$$\text{y } P(12.1) = \$2.92.$$

El dominio de la función P es la unión de los trece intervalos:

$$(0, 1] \cup (1, 2] \cup (2, 3] \cup \cdots \cup (12, 13] = (0, 13].$$

EJEMPLO 1 Gráfica de una función definida en intervalos

Graficar la función definida en intervalos

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Solución Aunque el dominio de f consiste en todos los números reales $(-\infty, \infty)$, cada parte de la función se define en una parte diferente de su dominio. Trazaremos

- la recta horizontal $y = -1$ para $x < 0$,
- el punto $(0, 0)$ para $x = 0$, y
- la recta $y = x + 1$ para $x > 0$.

La gráfica se ve en la **FIGURA 2.5.1**. ■

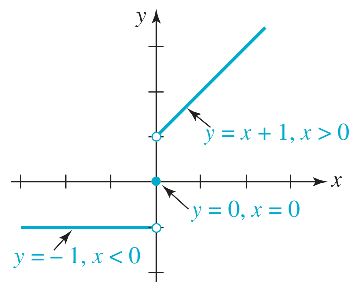


FIGURA 2.5.1 Gráfica de la función definida en intervalos del ejemplo 1

El punto lleno en el origen de la figura 2.5.1 indica que la función (2) está definida en $x = 0$, sólo por $f(0) = 0$; los puntos vacíos indican que las fórmulas correspondientes a $x < 0$ y a $x > 0$ no definen f cuando $x = 0$. Como se están inventando funciones, vamos a considerar la definición:

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases} \qquad (3)$$

La gráfica de g que se ve en la **FIGURA 2.5.2** se parece mucho a la gráfica de la función (2), pero (2) y (3) no son la misma función, porque $f(0) = 0$, pero $g(0) = -1$.

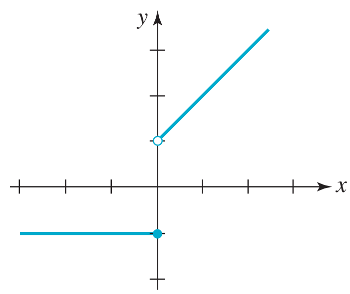


FIGURA 2.5.2 Gráfica de la función g definida en (3)

□ Función máximo entero

A continuación describiremos una función definida en intervalos, que se parece a la función (1), de "importe postal" , porque ambas son ejemplos de *funciones escalón*: cada función es constante en un intervalo, y a continuación salta a otro valor constante en el siguiente intervalo vecino. Esta nueva función, que tiene muchas notaciones, se representará aquí por $f(x) = [\![x]\!]$, y se define mediante la regla

$$[\![x]\!] = n, \quad \text{donde } n \text{ es un entero que satisface a } n \leq x < n + 1. \qquad (4)$$

A la función f se le llama **función máximo entero** (o función entero mayor) porque (4), traducida a palabras, quiere decir que:

$f(x)$ es el entero mayor n que es menor o igual a x.

Por ejemplo,

$f(6) = 6$ porque $6 \leq x = 6$, $\qquad f(-1.5) = -2$ porque $-2 \leq x = -1.5$,
$f(0.4) = 0$ porque $0 \leq x = 0.4$, $\qquad f(7.6) = 7$ porque $7 \leq x = 7.6$,
$f(\pi) = 3$ porque $3 \leq x = \pi$, $\qquad f(-\sqrt{2}) = -2$ porque $-2 \leq x = -\sqrt{2}$,

y así sucesivamente. El dominio de f es el conjunto de los números reales, y consiste en la unión de una cantidad infinita de intervalos ajenos; en otras palabras, $f(x) = [\![x]\!]$ es una función definida en intervalos, expresada por

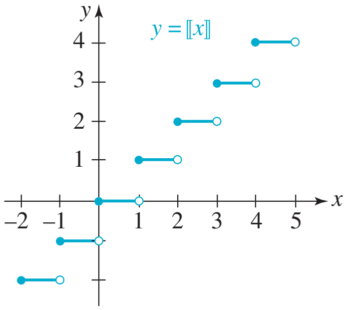


FIGURA 2.5.3 Función máximo entero

$$f(x) = [\![x]\!] = \begin{cases} \vdots & \\ -2, & -2 \leq x < -1 \\ -1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 2, & 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \end{cases} \tag{5}$$

El contradominio de f es el conjunto de los enteros. En la **FIGURA 2.5.3** se muestra una parte de la gráfica de f en el intervalo cerrado $[-2, 5]$.

En computación, la función máximo entero se llama **función piso**, y se representa por $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Vea los problemas 47, 48 y 53, en los ejercicios 2.5.

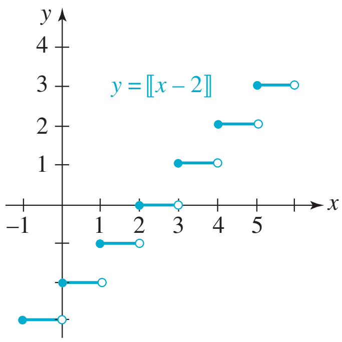


FIGURA 2.5.4 Gráfica desplazada del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Gráfica desplazada

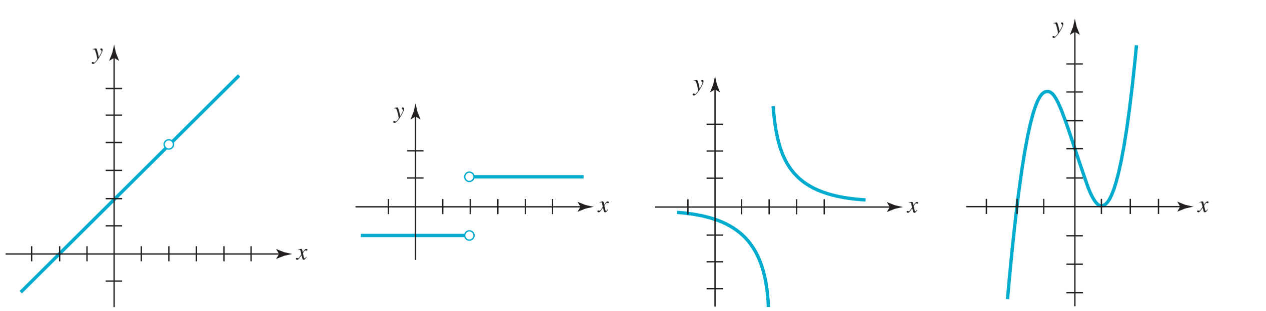
Graficar $y = [\![x - 2]\!]$.

Solución La función es $y = f(x - 2)$, donde $f(x) = [\![x]\!]$. Entonces, la gráfica de la figura 2.5.3 se desplaza a la derecha 2 unidades horizontalmente. Nótese, en la figura 2.5.3, que si n es un entero, entonces $f(n) = [\![n]\!] = n$. Pero en la **FIGURA 2.5.4**, para $x = n$, $y = n - 2$. ■

□ Funciones continuas La gráfica de una **función continua** no tiene agujeros, espacios vacíos finitos ni interrupciones infinitas. Si bien la definición formal de continuidad de una función es un tema importante de discusión en cálculo, en este curso bastará imaginarla en términos informales. Con frecuencia, una función continua se caracteriza al decir que su gráfica puede trazarse "sin levantar el lápiz del papel". Los incisos *a*) a *c*) de la figura 2.5.5 ilustran funciones que *no son* continuas, es decir, son **discontinuas**, en $x = 2$. La función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2, \quad x \neq 2,$$

de la **FIGURA 2.5.5*a*)** tiene un agujero en la gráfica (no está el punto $(2, f(2))$); la función $f(x) = \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$ de la figura 2.5.5*b*) tiene un hueco o salto finito en su gráfica, en $x = 2$; la función $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ en la figura 2.5.5*c*) tiene una interrupción infinita en su gráfica, en $x = 2$. La función $f(x) = x^3 - 3x + 2$ es continua; su gráfica se ve en la figura 2.5.5*d*); no tiene agujeros, huecos ni interrupciones infinitas.



a) Agujero en la gráfica *b*) Hueco finito en la gráfica *c*) Salto infinito en la gráfica *d*) Sin agujeros, huecos ni saltos

FIGURA 2.5.5 Funciones discontinuas *a*) a *c*); función continua *d*)

El lector debe tener en cuenta que las funciones constantes, lineales y cuadráticas son continuas. Las funciones definidas en intervalos pueden ser continuas o discontinuas. Las funciones en (2), (3) y (4) son discontinuas.

Función valor absoluto A la función $y = |x|$ se le llama **función valor absoluto**, y surge con frecuencia al estudiar cálculo. Para obtener su gráfica se trazan sus dos partes, que consisten en semirrectas perpendiculares:

$$y = |x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Vea la FIGURA 2.5.6*a*). Ya que $y \geq 0$ para toda x, otra forma de graficar (6) es tan sólo trazar la recta $y = x$ y reflejar en el eje x la parte de la recta que está debajo de él. Vea la figura 2.5.6*b*). El dominio de (6) es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$, y como se ve en la figura 2.5.6*a*), la función valor absoluto es una función par, decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en el intervalo $(0, \infty)$; además, es continua.

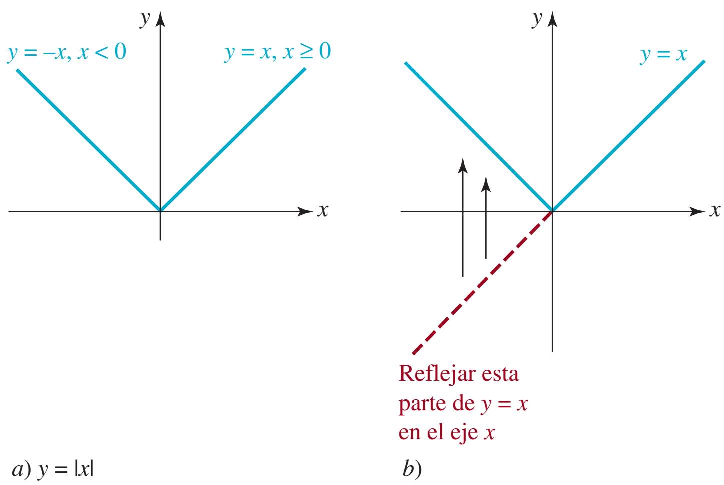


FIGURA 2.5.6 Función valor absoluto, ecuación (6)

En algunas aplicaciones interesa la gráfica de valor absoluto de una función arbitraria $y = f(x)$. En otras palabras, de $y = |f(x)|$. Como $|f(x)|$ es no negativa para todos los números x en el dominio de f, la gráfica de $y = |f(x)|$ no se prolonga abajo del eje x. Además, la definición de valor absoluto de $f(x)$ es

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & \text{si } f(x) < 0 \\ f(x), & \text{si } f(x) \geq 0, \end{cases} \tag{7}$$

y demuestra que se debe negar $f(x)$ cuando $f(x)$ sea negativa. No hay necesidad de preocuparse por resolver las desigualdades (7); para obtener la gráfica de $y = |f(x)|$ se puede proceder igual que hicimos en la figura 2.5.6*b*): con cuidado trazar la gráfica de $y = f(x)$ y a continuación reflejar en el eje x todas las partes de la gráfica que estén abajo de ese eje.

EJEMPLO 3 Valor absoluto de una función

Graficar $y = |-3x + 2|$.

Solución Primero trazaremos la gráfica de la función lineal $f(x) = -3x + 2$. Nótese que, como la pendiente es negativa, f es decreciente, y su gráfica cruza al aje x en $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Se traza con línea de puntos la gráfica para $x > \frac{2}{3}$, porque esa parte está abajo del eje x. Por último, reflejamos hacia arriba la parte, sobre el eje x, para obtener la gráfica en forma de v con línea azul continua, de la **FIGURA 2.5.7**. Como $f(x) = x$ es una función lineal simple, no debe sorprender que la gráfica del valor absoluto de cualquier función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, dé como resultado una gráfica parecida a la de la función valor absoluto de la figura 2.5.6*a*). ■

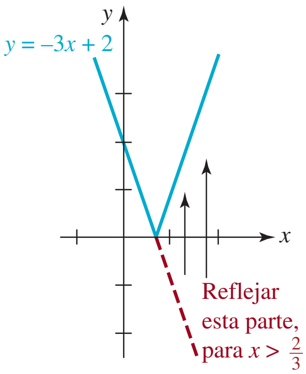
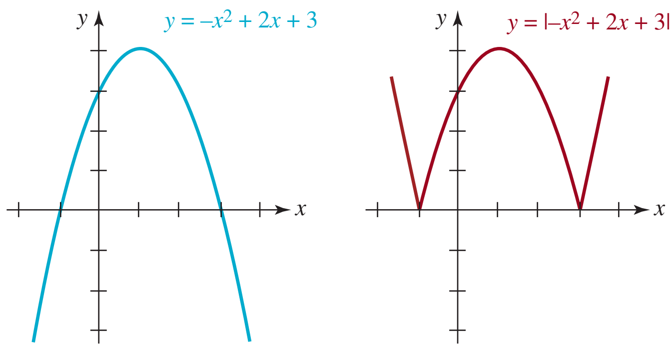


FIGURA 2.5.7 Gráfica de la función del ejemplo 3

EJEMPLO 4 Valor absoluto de una función

Graficar $y = |-x^2 + 2x + 3|$.

Solución Como en el ejemplo 3, comenzaremos trazando la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, calculando las intersecciones con los ejes, que son $(-1, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$ y, como f es una función cuadrática, su vértice, que está en $(1, 4)$. Observe que, en la **FIGURA 2.5.8*a*)**, $y < 0$ para $x < -1$ y para $x > 3$. Esas partes de la gráfica de f se reflejan en el eje x, para obtener la gráfica de $y = |-x^2 + 2x + 3|$ que vemos en la figura 2.5.8*b*).



a) *b*)

FIGURA 2.5.8 Gráficas de las funciones del ejemplo 4 ■

2.5 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-6.

En los problemas 1 a 4 determine los valores indicados de la función f definida en intervalos:

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}; \quad f(0), f(2), f(-7)$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, & x \neq \pm 1 \\ 3, & x = -1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}; \quad f(-1), f(1), f(3)$

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \geq 1 \\ -x^3, & x < 1 \end{cases}; \quad f(1), f(0), f(-2), f(\sqrt{2})$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 < x < 1; \\ x + 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad f(-\frac{1}{2}), f(\frac{1}{3}), f(4), f(6.2)$

5. Si la función f definida en intervalos es

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ es número racional} \\ 0, & x \text{ es número irracional,} \end{cases}$$

calcule cada uno de los valores siguientes.

a) $f(\frac{1}{3})$ ***b***) $f(-1)$ ***c***) $f(\sqrt{2})$

d) $f(1.\overline{12})$ ***e***) $f(5.72)$ ***f***) $f(\pi)$

6. ¿Cuál es la intersección con el eje y de la gráfica de la función f en el problema 5?

7. Determine los valores de x para los cuales la función definida en intervalos

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x < 0 \\ x^2 - 2, & x \geq 0, \end{cases}$$

es igual al número indicado.

a) 7 ***b***) 0 ***c***) -1

d) -2 ***e***) 1 ***f***) -7

8. Determine los valores de x para los cuales la función definida en intervalos

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x^2, & x > 0, \end{cases}$$

es igual al número indicado.

a) 1 ***b***) 0 ***c***) 4

d) $\frac{1}{2}$ ***e***) 2 ***f***) -4

En los problemas 9 a 34, trace la gráfica de la función definida en intervalos que se indique. Calcule todas las intersecciones con los ejes de la gráfica. Indique todos los números para los cuales la función es discontinua.

9. $y = \begin{cases} -x, & x \leq 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}$

10. $y = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

11. $y = \begin{cases} -3, & x < -3 \\ x, & -3 \leq x \leq 3 \\ 3, & x > 3 \end{cases}$

12. $y = \begin{cases} -x^2 - 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$

13. $y = [\![x + 2]\!]$

14. $y = 2 + [\![x]\!]$

15. $y = -[\![x]\!]$

16. $y = [\![-x]\!]$

17. $y = |x + 3|$

18. $y = -|x - 4|$

19. $y = 2 - |x|$

20. $y = -1 - |x|$

21. $y = -2 + |x + 1|$

22. $y = 1 - \frac{1}{2}|x - 2|$

23. $y = -|5 - 3x|$

24. $y = |2x - 5|$

25. $y = |x^2 - 1|$

26. $y = |4 - x^2|$

27. $y = |x^2 - 2x|$

28. $y = |-x^2 - 4x + 5|$

29. $y = ||x| - 2|$

30. $y = |\sqrt{x} - 2|$

31. $y = |x^3 - 1|$

32. $y = |[\![x]\!]|$

33. $y = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ |x - 1|, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$

34. $y = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 1 - |x - 1|, & 0 \leq x \leq 2 \\ x - 2, & x > 2 \end{cases}$

35. Sin trazar la gráfica, indique el contradominio de la función $f(x) = (-1)^{[\![x]\!]}$.

36. Compare las gráficas de $y = 2[\![x]\!]$ y $y = [\![2x]\!]$.

En los problemas 37 a 40, deduzca la fórmula definida en intervalos de la función f cuya gráfica se muestra. Suponga que el dominio de f es $(-\infty, \infty)$.

37.

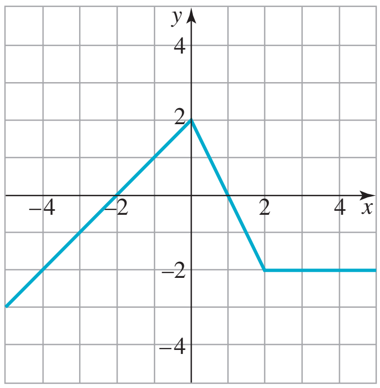


FIGURA 2.5.9 Gráfica del problema 37

38.

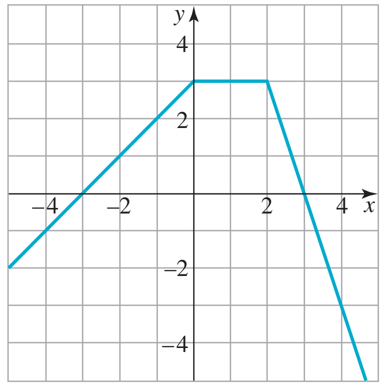


FIGURA 2.5.10 Gráfica del problema 38

39.

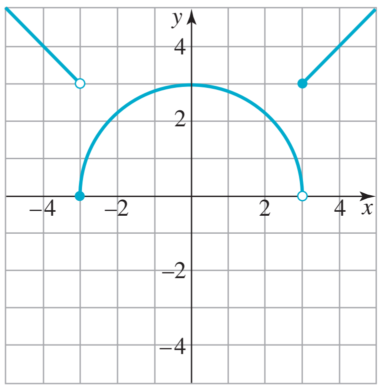


FIGURA 2.5.11 Gráfica del problema 39

40.

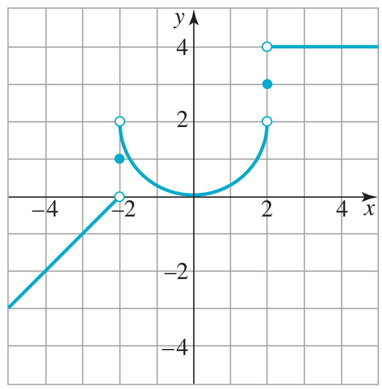


FIGURA 2.5.12 Gráfica del problema 40

En los problemas 41 y 42, trace la gráfica de $y = |f(x)|$.

41. f es la función cuya gráfica está en la figura 2.5.9.
42. f es la función cuya gráfica se ve en la figura 2.5.10.

En los problemas 43 y 44, use la definición de valor absoluto, y exprese la función indicada f como función definida en intervalos.

43. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

44. $f(x) = \dfrac{x-3}{|x-3|}$

En los problemas 45 y 46, calcule los valores de la constante k tal que la función f definida en intervalos indicada sea continua en $x = 2$. Esto es, que la gráfica de f no tenga agujeros, huecos ni saltos en $x = 2$.

45. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x \leq 2 \\ kx, & x > 2 \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} kx + 2, & x < 2 \\ x^2 + 1, & x \geq 2 \end{cases}$

47. La **función mínimo entero** $g(x) = \lceil x \rceil$ se define como el mínimo entero n que es mayor o igual a x. Llene los espacios en blanco.

$$g(x) = \lceil x \rceil = \begin{cases} \vdots \\ \_\_\_\_\_\_\_, & -3 < x \leq -2 \\ \_\_\_\_\_\_\_, & -2 < x \leq -1 \\ \_\_\_\_\_\_\_, & -1 < x \leq 0 \\ \_\_\_\_\_\_\_, & 0 < x \leq 1 \\ \_\_\_\_\_\_\_, & 1 < x \leq 2 \\ \_\_\_\_\_\_\_, & 2 < x \leq 3 \\ \vdots \end{cases}$$

48. Grafique la función mínimo entero $g(x) = \lceil x \rceil$, definida en el problema 47.

Para discusión

En los problemas 49 a 52, describa con palabras en qué difieren las gráficas de las funciones indicadas. [*Sugerencia:* Factorice y simplifique.]

49. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 4, & x = 3 \end{cases},$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 6, & x = 3 \end{cases}$$

50. $f(x) = -\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 1}, \qquad g(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 8, & x = 1 \end{cases},$

$$h(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$$

51. $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases},$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

52. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases},$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 12, & x = 2 \end{cases}$$

53. Usando la noción de reflexión de una gráfica en un eje, exprese la función mínimo entero $g(x) = \lceil x \rceil$ en términos de la función máximo entero $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (vea la página 86).

54. Describa cómo graficar la función $y = |x| + |x - 3|$. Ponga en práctica sus ideas.

2.6 Combinación de funciones

Introducción Se pueden combinar dos funciones, f y g, de varias maneras para crear nuevas funciones. En esta sección examinaremos dos de esas maneras de combinar: por operaciones aritméticas y por la operación de composición de funciones.

Combinaciones aritméticas Dos funciones se pueden combinar mediante las cuatro conocidas operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y división.

COMBINACIONES ARITMÉTICAS

Si f y g son dos funciones, entonces la **suma** $f + g$, la **diferencia** $f - g$, el **producto** fg y el **cociente** f/g se definen como sigue:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \tag{1}$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x), \tag{2}$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x), \tag{3}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{siempre que } g(x) \neq 0. \tag{4}$$

EJEMPLO 1 Suma, diferencia, producto y cociente de funciones

Se tienen las funciones $f(x) = x^2 + 4x$ y $g(x) = x^2 - 9$. De acuerdo con las ecuaciones (1) a (4), se pueden producir cuatro nuevas funciones:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 + 4x) + (x^2 - 9) = 2x^2 + 4x - 9,$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 + 4x) - (x^2 - 9) = 4x + 9,$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x^2 + 4x)(x^2 - 9) = x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 36x,$$

y

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 9}.$$

■

Dominio de una combinación aritmética Al combinar aritméticamente dos funciones, es necesario que f y g estén definidas en los mismos números x. Por consiguiente, el **dominio** de las funciones $f + g$, $f - g$ y fg es el conjunto de los números reales que son *comunes* a ambos dominios; esto es, el dominio es la *intersección* del dominio de f y el dominio de g. En el caso del cociente f/g, el dominio también es la intersección de los dos dominios, *pero* también se deben excluir todos los valores de x para los cuales el denominador $g(x)$ sea cero. En el ejemplo 1, el dominio de f y el dominio de g es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$, por lo que el dominio de $f + g$, $f - g$ y fg también es $(-\infty, \infty)$. Sin embargo, como $g(-3) = 0$ y $g(3) = 0$, el dominio del cociente de $(f/g)(x)$ es $(-\infty, \infty)$, excluidos $x = -3$ y $x = 3$; en otras palabras, es $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$. En resumen, si el dominio de f es el conjunto X_1, y el dominio de g es el conjunto X_2, entonces:

- el dominio de $f + g$, $f - g$ y fg es $X_1 \cap X_2$, y
- el dominio de f/g es el conjunto $\{x \mid x \in X_1 \cap X_2, g(x) \neq 0\}$.

EJEMPLO 2 Dominio de $f + g$

Al resolver la desigualdad $1 - x \geq 0$, se ve que el dominio de $f(x) = \sqrt{1-x}$ es el intervalo $(-\infty, 1]$. De igual modo, el dominio de la función $g(x) = \sqrt{x+2}$ es el intervalo $[-2, \infty)$. Por lo anterior, el dominio de la suma

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+2}$$

es la intersección $(-\infty, 1] \cap [-2, \infty)$. El lector debe verificar que es intersección, o el conjunto de números comunes a ambos dominios es el intervalo cerrado $[-2, 1]$, trazando los intervalos anteriores en la recta numérica. ■

□ Composición de funciones

Otro método para combinar las funciones f y g se llama **composición de funciones**. Para ilustrar el concepto supongamos que para una x dada en el dominio de g, el valor de la función $g(x)$ es un número en el dominio de la función f. Eso quiere decir que se puede evaluar f en $g(x)$; en otras palabras, se puede evaluar $f(g(x))$. Por ejemplo, supongamos que $f(x) = x^2$ y que $g(x) = x + 2$. Entonces, cuando $x = 1$, $g(1) = 3$, y como 3 está en el dominio de f, podemos escribir que $f(g(1)) = f(3) = 3^2 = 9$. En realidad sucede que en el caso de estas dos funciones en particular podemos evaluar f en cualquier valor de la función $g(x)$, esto es,

$$f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2.$$

La función que resulta, llamada composición de f y g, se define a continuación.

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Si f y g son dos funciones, la **composición** de f y g, representada por $f \circ g$, es la función definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)). \tag{5}$$

La **composición** de g y f, representada por $g \circ f$, es la función definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)). \tag{6}$$

Cuando se calcula una composición como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, no olvide sustituir toda x que aparezca en $f(x)$, en $g(x)$. Vea el inciso *a*) del siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Dos composiciones

Si $f(x) = x^2 + 3x - 1$ y $g(x) = 2x^2 + 1$, determinar ***a***) $(f \circ g)(x)$ y ***b***) $(g \circ f)(x)$.

Solución

a) Para hacer hincapié, sustituiremos x por el conjunto de paréntesis ( ), y escribiremos f en la forma

$$f(x) = (\quad)^2 + 3(\quad) - 1.$$

Entonces, para evaluar $(f \circ g)(x)$ se llena cada conjunto de paréntesis con $g(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2x^2 + 1)\\ &= (2x^2 + 1)^2 + 3(2x^2 + 1) - 1 && \leftarrow \text{use } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ y la ley distributiva}\\ &= 4x^4 + 4x^2 + 1 + 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot 1 - 1\\ &= 4x^4 + 10x^2 + 3.\end{aligned}$$

b) En este caso, g se escribe en la forma

$$g(x) = 2(\quad)^2 + 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2 + 3x - 1)\\ &= 2(x^2 + 3x - 1)^2 + 1 && \leftarrow \text{use } (a+b+c)^2 = ((a+b)+c)^2\\ &= 2(x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1) + 1 && = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \text{ etc.}\\ &= 2 \cdot x^4 + 2 \cdot 6x^3 + 2 \cdot 7x^2 - 2 \cdot 6x + 2 \cdot 1 + 1\\ &= 2x^4 + 12x^3 + 14x^2 - 12x + 3.\end{aligned}$$

■

Los incisos *a*) y *b*) del ejemplo 3 ilustran que la composición de funciones no es conmutativa. Esto es, que en general

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

El siguiente ejemplo muestra que una función se puede componer consigo misma.

EJEMPLO 4 Composición de f con f

Si $f(x) = 5x - 1$, la composición $f \circ f$ es

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(5x - 1) = 5(5x - 1) - 1 = 25x - 6.$$

EJEMPLO 5 Expresar una función como composición

Expresar $F(x) = \sqrt{6x^3 + 8}$ como la composición de dos funciones, f y g.

Solución Si definimos f y g como $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 6x^3 + 8$, entonces

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(6x^3 + 8) = \sqrt{6x^3 + 8}.$$

Hay otras soluciones para el ejemplo 5. Por ejemplo, si las funciones f y g se definen por $f(x) = \sqrt{6x + 8}$ y $g(x) = x^3$, entonces, obsérvese que $(f \circ g)(x) = f(x^3) = \sqrt{6x^3 + 8}$.

Dominio de una composición

Como indicamos en el ejemplo de la introducción a esta descripción, para evaluar la composición $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, el número $g(x)$ debe estar en el dominio de f. Por ejemplo, el dominio $f(x) = \sqrt{x}$ es $x \geq 0$, y el dominio de $g(x) = x - 2$ es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$. Tenga en cuenta que no se puede evaluar $f(g(1))$, porque $g(1) = -1$, y -1 no está en el dominio de f. La función $g(x)$ debe satisfacer la desigualdad que define el dominio de f, que es $g(x) \geq 0$, para poder sustituir $g(x)$ en $f(x)$. Esta desigualdad es igual que $x - 2 \geq 0$, o sea $x \geq 2$. El dominio de la composición $f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x - 2}$ es $[2, \infty)$, que sólo es una porción del dominio original, $(-\infty, \infty)$, de g. En general,

Lea varias veces este párrafo ▶

- el dominio de la composición $f \circ g$ está formado por los números x en el dominio de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de f.

EJEMPLO 6 Dominio de una composición

Examinemos la función $f(x) = \sqrt{x - 3}$. De acuerdo con el requisito que $x - 3 \geq 0$, se ve que cualquier número x que se sustituya en f debe satisfacer $x \geq 3$. Ahora, supongamos que $g(x) = x^2 + 2$, y que se desea evaluar $f(g(x))$. Aunque el dominio de g es el conjunto de los números reales, para sustituir a $g(x)$ en $f(x)$ se requiere que x sea un número en el dominio, tal que $g(x) \geq 3$. En la **FIGURA 2.6.1** vemos que esta última desigualdad se satisface siempre que $x \leq -1$ o $x \geq 1$. En otras palabras, el dominio de la composición

$$f(g(x)) = f(x^2 + 2) = \sqrt{(x^2 + 2) - 3} = \sqrt{x^2 - 1}$$

es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

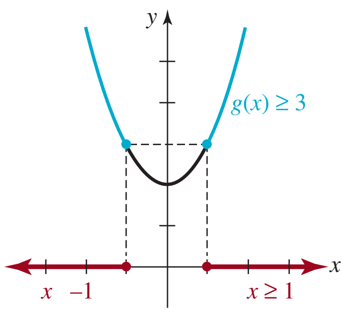


FIGURA 2.6.1 Dominio de $(f \circ g)(x)$ en el ejemplo 6

En ciertas aplicaciones, una cantidad y se expresa en función de una variable x, que a su vez es una función de otra variable t. Aplicando la composición de funciones podemos expresar a y en función de t. El siguiente ejemplo ilustra esta idea; el símbolo V hace la parte de y, y r hace la parte de x.

Globo meteorológico

EJEMPLO 7 Inflado de un globo

Un globo meteorológico se infla con un gas. Si el radio del globo aumenta con una velocidad de 5 cm/s, expresar el volumen del globo en función del tiempo t, en segundos.

Solución Suponga que cuando se infla el globo, su forma es la de una esfera. Si r representa el radio del globo, entonces $r(t) = 5t$. Como el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, la composición es $(V \circ r)(t) = V(r(t)) = V(5t)$, es decir

$$V = \frac{4}{3}\pi(5t)^3 = \frac{500}{3}\pi t^3. \qquad ■$$

□ **Nota final** Las transformaciones rígidas y no rígidas que estudiamos en la sección 2.2 son ejemplos de las operaciones sobre funciones que acabamos de describir. En el caso de una constante $c > 0$, las transformaciones rígidas definidas por $y = f(x) + c$ y $y = f(x) - c$ son la *suma* y la *diferencia* de la función $f(x)$ y la función constante $g(x) = c$. La transformación no rígida $y = cf(x)$ es el *producto* de $f(x)$ por la función constante $g(x) = c$. Las transformaciones rígidas definidas por $y = f(x + c)$ y $y = f(x - c)$ son *composiciones* de $f(x)$ con las funciones lineales $g(x) = x + c$ y $g(x) = x - c$, respectivamente.

2.6 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

En los problemas 1 a 8 determine las funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g, y describa sus dominios.

1. $f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = 2x^2 - x$

2. $f(x) = x^2 - 4, \quad g(x) = x + 3$

3. $f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$

4. $f(x) = x - 2, \quad g(x) = \dfrac{1}{x + 8}$

5. $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x, \quad g(x) = (1 - x)^2$

6. $f(x) = \dfrac{4}{x - 6}, \quad g(x) = \dfrac{x}{x - 3}$

7. $f(x) = \sqrt{x + 2}, \quad g(x) = \sqrt{5 - 5x}$

8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}, \quad g(x) = \dfrac{\sqrt{x + 4}}{x}$

9. Complete la tabla

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	2	10	8	0
$g(x)$	2	3	0	1	4
$(f \circ g)(x)$					

10. Complete la tabla, donde g es una función impar.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-2	-3	0	-1	-4
$g(x)$	9	7	-6	-5	13
$(g \circ f)(x)$					

En los problemas 11 a 14 determine las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$, y describa sus dominios.

11. $f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$

12. $f(x) = x^2 - x + 5, \quad g(x) = -x + 4$

13. $f(x) = \dfrac{1}{2x - 1}, \quad g(x) = x^2 + 1$

14. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

En los problemas 15 a 20, determine las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

15. $f(x) = 2x - 3, \quad g(x) = \frac{1}{2}(x + 3)$

16. $f(x) = x - 1, \quad g(x) = x^3$

17. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

18. $f(x) = \sqrt{x - 4}, \quad g(x) = x^2$

19. $f(x) = x + 1, \quad g(x) = x + \sqrt{x - 1}$

20. $f(x) = x^3 - 4, \quad g(x) = \sqrt[3]{x + 3}$

En los problemas 21 a 24, determine las funciones $f \circ f$ y $f \circ (1/f)$.

21. $f(x) = 2x + 6$

22. $f(x) = x^2 + 1$

23. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

24. $f(x) = \dfrac{x + 4}{x}$

En los problemas 25 y 26, determine $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$.

25. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x - 1$

26. $f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2 + 3x, \quad h(x) = 2x$

27. En el caso de las funciones $f(x) = 2x + 7$, $g(x) = 3x^2$, determine $(f \circ g \circ g)(x)$.

28. En el caso de las funciones $f(x) = -x + 5$, $g(x) = -4x^2 + x$, determine $(f \circ g \circ f)(x)$.

En los problemas 29 y 30, determine $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x)))$.

29. $f(x) = 2x - 5$

30. $f(x) = x^2 - 1$

En los problemas 31 a 34, determine las funciones f y g tales que $F(x) = f \circ g$.

31. $F(x) = (x^2 - 4x)^5$

32. $F(x) = \sqrt{9x^2 + 16}$

33. $F(x) = (x - 3)^2 + 4\sqrt{x - 3}$

34. $F(x) = 1 + |2x + 9|$

En los problemas 35 y 36 trace las gráficas de las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

35. $f(x) = |x| - 2, \quad g(x) = |x - 2|$

36. $f(x) = [\![x - 1]\!], \quad g(x) = |x|$

37. Se tiene la función $y = f(x) + g(x)$, donde $f(x) = x$ y $g(x) = -[\![x]\!]$. Llene los espacios en blanco, y a continuación bosqueje la gráfica de la suma $f + g$, en los intervalos indicados.

$$y = \begin{cases} \vdots & \\ \_\_\_\_\_\_, & -3 \le x < -2 \\ \_\_\_\_\_\_, & -2 \le x < -1 \\ \_\_\_\_\_\_, & -1 \le x < 0 \\ \_\_\_\_\_\_, & 0 \le x < 1 \\ \_\_\_\_\_\_, & 1 \le x < 2 \\ \_\_\_\_\_\_, & 2 \le x < 3 \\ \vdots & \end{cases}$$

38. En el caso de la función $y = f(x) + g(x)$, donde $f(x) = |x|$ y $g(x) = [\![x]\!]$. Proceda como en el problema 37, y a continuación grafique la suma de $f + g$.

En los problemas 39 y 40, trace la gráfica de la suma $f + g$.

39. $f(x) = |x - 1|, \quad g(x) = |x|$

40. $f(x) = x, \quad g(x) = |x|$

En los problemas 41 y 42, trace la gráfica del producto fg.

41. $f(x) = x, \quad g(x) = |x|$

42. $f(x) = x, \quad g(x) = [\![x]\!]$

En los problemas 43 y 44, trace la gráfica del recíproco $1/f$.

43. $f(x) = |x|$

44. $f(x) = x - 3$

Problemas diversos relacionados con el cálculo

En los problemas 45 y 46,

a) determine los puntos de intersección de las gráficas de las funciones indicadas.

b) calcule la distancia vertical d entre las gráficas, en función de x, en el intervalo I definido por las coordenadas x de sus puntos de intersección,

c) use el concepto de vértice de una parábola para calcular el valor máximo de d en el intervalo I.

45.

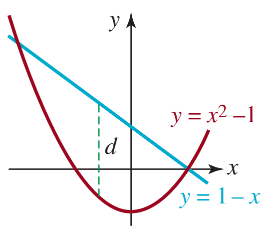


FIGURA 2.6.2 Gráfica del problema 45

46.

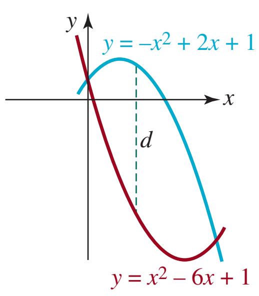


FIGURA 2.6.3 Gráfica del problema 46

Aplicaciones diversas

47. De aves Un avistador de aves ve un pájaro a 100 pies hacia el este de su posición. Si el ave vuela hacia el sur a una velocidad de 500 pies/min, exprese la distancia d del avistador al ave, en función del tiempo t. Calcule la distancia a los 5 minutos después del avistamiento. Vea la FIGURA 2.6.4.

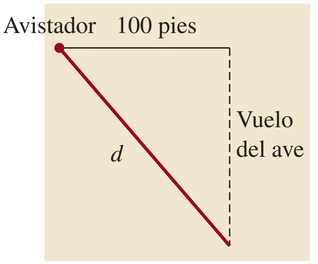


FIGURA 2.6.4 Avistador de aves del problema 47

48. Bacterias Cuando se las cultiva, ciertas bacterias forman colonias circulares. El radio del círculo, en centímetros, es

$$r(t) = 4 - \frac{4}{t^2 + 1},$$

donde el tiempo t es expresado en horas.

a) Exprese el área de la colonia en función del tiempo t.

b) Exprese la circunferencia de la colonia en función del tiempo t.

Para discusión

49. Suponga que $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Explique: ¿Por qué el dominio de

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$$

no es $(-\infty, \infty)$?

50. Suponga que $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$ y $g(x) = \dfrac{5}{x + 3}$. Explique: ¿Por qué el dominio de

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{2}{g(x) - 1} = \frac{2}{\dfrac{5}{x + 3} - 1} = \frac{2x + 6}{2 - x}$$

no es $\{x \,|\, x \neq 2\}$?

51. Encuentre el error en el siguiente razonamiento: Si $f(x) = 1/(x - 2)$ y $g(x) = 1/\sqrt{x + 1}$, entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1/(x - 2)}{1/\sqrt{x + 1}} = \frac{\sqrt{x + 1}}{x - 2} \qquad \text{y así} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(-1) = \frac{\sqrt{0}}{-3} = 0.$$

52. Suponga que $f_1(x) = \sqrt{x + 2}$, $f_2(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x(x - 10)}}$, y $f_3(x) = \dfrac{x + 1}{x}$. ¿Cuál es el dominio de la función $y = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$?

53. Suponga que $f(x) = x^3 + 4x$, $g(x) = x - 2$ y $h(x) = -x$. Explique: Sin hacer la gráfica, ¿cómo se relacionan las gráficas de $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$ y $h \circ f$ con la gráfica de f?

54. El dominio de cada función definida en intervalos,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq -1 \\ x - 2, & x > -1, \end{cases}$$

es $(-\infty, \infty)$. Indique cómo determinar $f + g$, $f - g$ y fg. Ponga en práctica sus ideas.

55. Indique cómo se relaciona la gráfica de $y = \frac{1}{2}\{f(x) + |f(x)|\}$ con la gráfica de $y = f(x)$. Ilustre sus ideas, usando $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

56. Explique lo siguiente:

a) La suma de dos funciones pares f y g, ¿es par?

b) La suma de dos funciones impares f y g, ¿es impar?

c) El producto de una función f par, por una función g impar, ¿es par, impar o ninguna de las dos?

d) El producto de una función impar f por una función impar g, ¿es par, impar o ninguna de las dos?

57. El producto fg de dos funciones lineales con coeficientes reales, $f(x) = ax + b$, por $g(x) = cx + d$, es una función cuadrática. Explique por qué la gráfica de esta función debe tener al menos una intersección con el eje x.

58. Forme dos funciones f y g diferentes, de tal modo que el dominio de $F(x) = f \circ g$ sea $[-2, 0) \cup (0, 2]$.

2.7 Funciones inversas

Introducción Recuerde que una función f es una regla de correspondencia, que asigna a cada valor x en su dominio X, un solo valor, o valor único, y, en su contradominio. Esta regla no excluye que el mismo número y esté asociado con varios valores *diferentes* de x. Por ejemplo, para $f(x) = x^2 + 1$, el valor $y = 5$ se presenta con $x = -2$, o bien con $x = 2$. Por otra parte, para la función $g(x) = x^3$, el valor $y = 64$ sólo se presenta cuando $x = 4$. En realidad, para cada valor de y en el contradominio de $g(x) = x^3$, sólo corresponde un valor de x en el dominio. A las funciones de esta última clase se les asigna un nombre especial.

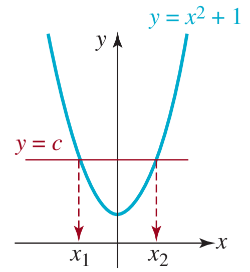
FUNCIÓN UNO A UNO

Se dice que una función f es **uno a uno** o **biunívoca** si cada número en el contradominio de f está asociado con exactamente un número en su dominio X.

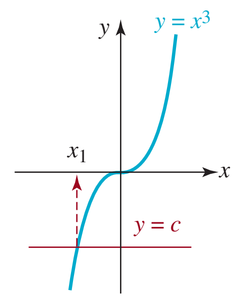
Prueba de la recta horizontal La interpretación geométrica de lo anterior es que una recta horizontal ($y =$ constante) puede cruzar la gráfica de una función uno a uno cuando mucho en un punto. Además, si *toda* línea horizontal que cruza la gráfica de una función lo hace cuando mucho en un punto, necesariamente la función es uno a uno. Una función *no es* uno a uno si *alguna* recta horizontal cruza su gráfica más de una vez.

EJEMPLO 1 Prueba de la recta horizontal

Las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x^3$, así como una recta horizontal $y = c$ que interseca las gráficas de f y g, se ven en la FIGURA 2.7.1. La figura 2.7.1*a*) indica que hay dos números, x_1 y x_2, en el dominio de f, para los que $f(x_1) = f(x_2) = c$. Al inspeccionar la figura 2.7.1*b*) se ve que para toda recta horizontal $y = c$ que cruza la gráfica, sólo hay un número x_1 en el dominio de g, tal que $g(x_1) = c$. Por consiguiente, la función f no es uno a uno, mientras que la función g sí lo es. ■



a) No uno a uno



b) Uno a uno

FIGURA 2.7.1 Dos tipos de funciones del ejemplo 1

Una función uno a uno se puede definir de varias maneras. Con base en la descripción anterior, la siguiente afirmación tiene sentido:

Una función f es **uno a uno** *si, y sólo si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$ para toda x_1 y x_2 en el dominio de f.* (1)

Enunciada en forma negativa, (1) indica que una función f *no es* uno a uno si se pueden encontrar números x_1 y x_2 diferentes (esto es, $x_1 \neq x_2$) en el dominio de f tales que $f(x_1) = f(x_2)$. El lector verá este enunciado del concepto de función uno a uno en el capítulo 5 cuando deba resolver ciertas clases de ecuaciones.

Considere que (1) es una forma de determinar si una función f es biunívoca, cuando no se cuenta con una gráfica.

EJEMPLO 2 Comprobación de funciones uno a uno

a) La función es $f(x) = x^4 - 8x + 6$. Ahora bien, $0 \neq 2$, pero observe que $f(0) = f(2) = 6$. Por consiguiente, f no es uno a uno.

b) La función es $f(x) = \dfrac{1}{2x - 3}$, y sean x_1 y x_2 números en el dominio de f. Si suponemos que $f(x_1) = f(x_2)$, esto es, que $\dfrac{1}{2x_1 - 3} = \dfrac{1}{2x_2 - 3}$, entonces, al sacar el recíproco de ambos lados se ve que

$$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \quad \text{implica que} \quad 2x_1 = 2x_2 \quad \text{o sea que} \quad x_1 = x_2.$$

De acuerdo con (1), se llega a la conclusión que f es uno a uno. ■

Precaución: El símbolo f^{-1} *no* representa al recíproco $1/f$. El número -1 **no es** un exponente.

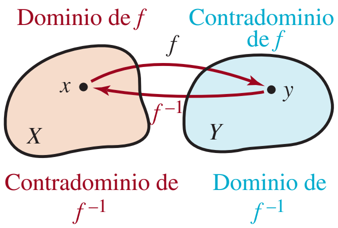


FIGURA 2.7.2 Funciones f y f^{-1}

□ Inversa de una función uno a uno

Supongamos que f es una función uno a uno cuyo dominio es X y contradominio Y. Debido a que todo número y en Y corresponde precisamente a un número x en X, la función f en realidad debe determinar una función "reversa" f^{-1}, cuyo dominio es Y y su contradominio es X. Como se ve en la **FIGURA 2.7.2**, f y f^{-1} deben satisfacer

$$f(x) = y \quad \text{y} \quad f^{-1}(y) = x. \tag{2}$$

En realidad, las ecuaciones en (2) son las composiciones de las funciones f y f^{-1}:

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x. \tag{3}$$

A la función f^{-1} se le llama **inversa** de f, o **función inversa** de f. De acuerdo con la convención que cada elemento del dominio se represente con el símbolo x, la primera ecuación de (3) se reacomoda en la forma $f(f^{-1}(x)) = x$. Resumiremos los resultados en (3).

FUNCIÓN INVERSA

Sea f una función uno a uno con dominio X y contradominio Y. La **inversa** de f es la función f^{-1} cuyo dominio es Y y contradominio es X, para los cuales

$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en } Y, \tag{4}$$

y

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en } X. \tag{5}$$

Naturalmente, si una función f no es uno a uno, no tiene función inversa.

EJEMPLO 3 Verificar la inversa

Verifique que la inversa de la función inyectiva $f(x) = \frac{1}{2}x + 7$ es $g(x) = 2x - 14$.

Solución Primero observe que el dominio y el contradominio de ambas funciones es el conjunto entero de números reales $(-\infty, \infty)$. Ahora podemos usar (4) y (5).

Primero vemos en (4) que

$$f(g(x)) = f(2x - 14) = \tfrac{1}{2}(2x - 14) + 7 = x - 7 + 7 = x$$

Para cada número real x. De manera similar, en (5)

$$g(f(x)) = g(\tfrac{1}{2}x + 7) = 2(\tfrac{1}{2}x + 7) - 14 = x + 14 - 14 = x$$

Para cada número real x. Esto demuestra que $g = f^{-1}$. ■

□ Propiedades

Antes de examinar realmente los métodos para determinar la inversa de una función f uno a uno, primero mencionaremos algunas propiedades importantes de f y de su inversa f^{-1}.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES INVERSAS

i) Dominio de f^{-1} = contradominio de f.
ii) Contradominio de f^{-1} = dominio de f.
iii) $y = f(x)$ equivale a $x = f^{-1}(y)$.
iv) Una función inversa f^{-1} es uno a uno.
v) La inversa de f^{-1} es f; esto es, $(f^{-1})^{-1} = f$.
vi) La inversa de f es única.

$\square$ Primer método para determinar f^{-1}

Describiremos dos maneras de determinar la inversa de una función uno a uno f. Ambos métodos requieren resolver una ecuación; el primer método comienza con la definición (4).

EJEMPLO 4 Inversa de una función

a) Determinar la inversa de $f(x) = \dfrac{1}{2x - 3}$. ***b***) Determinar el dominio y el contradominio de f^{-1}. Determinar el contradominio de f.

Solución

a) Ya demostramos, en el inciso *b*) del ejemplo 2, que f es uno a uno. Para determinar la inversa de f usando (4), debemos sustituir a $f^{-1}(x)$ siempre que x aparezca en f, y a continuación igualar a x la expresión $f(f^{-1}(x))$:

de esta ecuación, despejar $f^{-1}(x)$

$$f(f^{-1}(x)) = \boxed{\frac{1}{2f^{-1}(x) - 3} = x}$$

Se calcula el recíproco de ambos lados de la ecuación en el interior del cuadro:

$$2f^{-1}(x) - 3 = \frac{1}{x}$$
$$2f^{-1}(x) = 3 + \frac{1}{x} = \frac{3x + 1}{x}. \quad \leftarrow \text{denominador común}$$

Se dividen entre 2 ambos lados de la última ecuación, para llegar a la inversa de f:

$$f^{-1}(x) = \frac{3x + 1}{2x}.$$

b) Al examinar f se ve que su dominio es el conjunto de números reales, excepto $\frac{3}{2}$, esto es, $\{x \mid x \neq \frac{3}{2}\}$. Además, en la inversa que acabamos de determinar se ve que el dominio de f^{-1} es $\{x \mid x \neq 0\}$. Como contradominio de f^{-1} = dominio de f, entonces se ve que el contradominio de f^{-1} es $\{y \mid y \neq \frac{3}{2}\}$. De acuerdo con el dominio de f^{-1} = contradominio de f también descubrimos que el contradominio de f es $\{y \mid y \neq 0\}$. ■

$\square$ Segundo método para determinar f^{-1}

La inversa de una función f se puede determinar de un modo distinto. Si f^{-1} es la inversa de f, entonces $x = f^{-1}(y)$. Por consiguiente, sólo se deben hacer las dos cosas siguientes:

- Despejar el símbolo x de $y = f(x)$ en función de y (si es posible). Con esto se obtiene $x = f^{-1}(y)$.
- Cambiar la definición de la variable x a y, y de la variable y a x. Con esto se obtiene $y = f^{-1}(x)$.

EJEMPLO 5 Inversa de una función

Determinar la inversa de $f(x) = x^3$.

Solución En el ejemplo 1 vimos que esta función es uno a uno. Para comenzar, la ecuación se expresa en la forma $y = x^3$. Entonces, al despejar x se obtiene $x = y^{1/3}$. A continuación cambiamos la definición de las variables para obtener $y = x^{1/3}$. Por consiguiente, $f^{-1}(x) = x^{1/3}$, lo que es equivalente a $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. ■

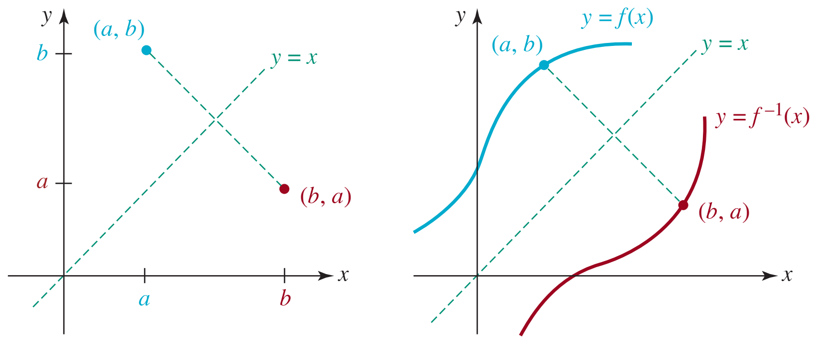
A veces se dificulta determinar la inversa de una función uno a uno $y = f(x)$, y otras veces es imposible. Por ejemplo, se puede demostrar que la función $f(x) = x^3 + x + 3$ es uno a uno, y por lo tanto tiene inversa f^{-1}, pero despejar x de la ecuación $y = x^3 + x + 3$ es difícil para todos (incluso el profesor). Sin embargo, como f sólo implica potencias enteras positivas de

x, su dominio es $(-\infty, \infty)$. Si el lector investiga gráficamente a f, verá que su contradominio también es $(-\infty, \infty)$. En consecuencia, el dominio y el contradominio de f^{-1} son $(-\infty, \infty)$. Aun cuando no conociéramos f^{-1} en forma explícita, tiene mucho sentido hablar de valores como $f^{-1}(3)$ y $f^{-1}(5)$. En el caso de $f^{-1}(3)$, nótese que $f(0) = 3$. Eso quiere decir que $f^{-1}(3) = 0$. ¿Podrá el lector calcular el valor de $f^{-1}(5)$?

□ Gráficas de f y f^{-1} Suponga que (a, b) representa cualquier punto en la gráfica de una función uno a uno f. Entonces, $f(a) = b$, y

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$$

implica que (b, a) es un punto en la gráfica de f^{-1}. Como se ve en la FIGURA 2.7.3a), los puntos (a, b) y (b, a) son reflexiones entre sí, en la recta $y = x$. Eso quiere decir que la recta $y = x$ es la mediatriz del segmento de recta que va de (a, b) a (b, a). Como cada punto en una gráfica es la reflexión de un punto correspondiente en la otra, en la figura 2.7.3*b*) se ve que las gráficas de f^{-1} y f son **reflexiones** entre sí en la recta $y = x$. También se dice que las gráficas de f^{-1} y f son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

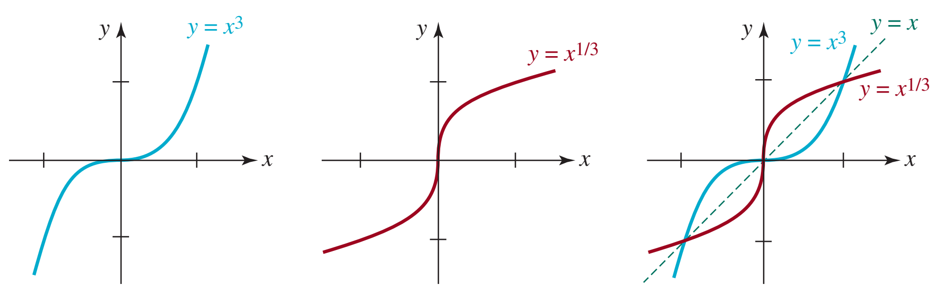


a) *b*)

FIGURA 2.7.3 Las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones en la recta $y = x$.

EJEMPLO 6 Gráficas de f y f^{-1}

En el ejemplo 5 se vio que la inversa de $y = x^3$ es $y = x^{1/3}$. En las FIGURAS 2.7.4a) y 2.7.4*b*) se muestran las gráficas de esas funciones; en la figura 2.7.4*c*) las gráficas se sobreponen en el mismo sistema coordenado para ilustrar que son reflexiones entre sí en la recta $y = x$.



a) *b*) *c*)

FIGURA 2.7.4 Gráficas de f y f^{-1} del ejemplo 6 ■

Toda función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, es uno a uno.

EJEMPLO 7 Inversa de una función

Determinar la inversa de la función lineal $f(x) = 5x - 7$.

Solución Como la gráfica de $y = 5x - 7$ es una recta no horizontal, de acuerdo con la prueba de la recta horizontal se ve que f es una función uno a uno. Para determinar f^{-1} se resuelve $y = 5x - 7$ para x.

$$5x = y + 7 \qquad \text{implica que} \qquad x = \frac{1}{5}y + \frac{7}{5}.$$

Al intercambiar los nombres de las variables en la última ecuación se obtiene $y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$. Por consiguiente, $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$. Las gráficas de f y f^{-1} se comparan en la FIGURA 2.7.5. ■

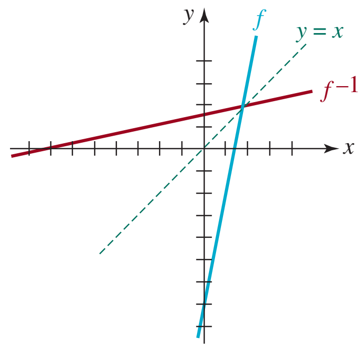


FIGURA 2.7.5 Gráficas de f y f^{-1} en el ejemplo 7

Toda función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, no es uno a uno.

□ Dominios restringidos

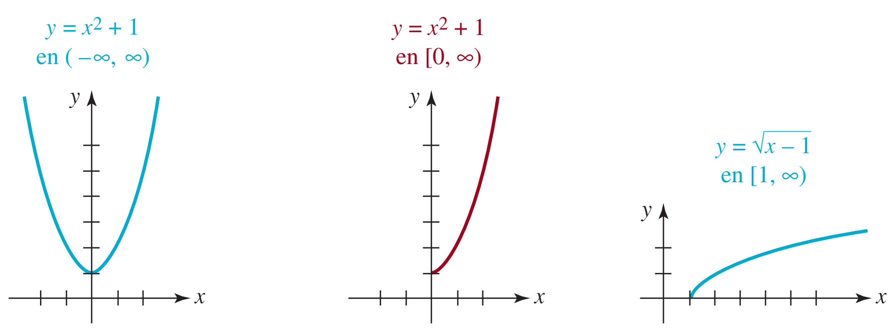
En el caso de una función f que no es uno a uno, se puede restringir su dominio de tal manera que la nueva función, que consista en f definida en este dominio restringido, sea uno a uno, y entonces tenga una inversa. En la mayor parte de los casos se quiere restringir el dominio para que la nueva función conserve su contradominio original. En el siguiente ejemplo se ilustra este concepto.

EJEMPLO 8 Dominio restringido

En el ejemplo 1 demostramos gráficamente que la función cuadrática $f(x) = x^2 + 1$ no es uno a uno. El dominio de f es $(-\infty, \infty)$, y como se ve en la FIGURA 2.7.6*a*), el contradominio es $[1, \infty)$. Ahora bien, si $f(x) = x^2 + 1$ sólo se define en el intervalo $[0, \infty)$, se ven dos cosas en la figura 2.7.6*b*): el contradominio de f se conserva, y $f(x) = x^2 + 1$ se confina al dominio $[0, \infty)$ y pasa la prueba de la recta horizontal; en otras palabras, es uno a uno. La inversa de esta nueva función uno a uno se obtiene en la forma acostumbrada. Al resolver $y = x^2 + 1$ se ve que

$$x^2 = y - 1 \qquad \text{y} \qquad x = \pm\sqrt{y - 1} \qquad \text{y entonces} \qquad y = \pm\sqrt{x - 1}.$$

El signo algebraico adecuado en la última ecuación se determina a partir del hecho de que el dominio y el contradominio de f^{-1} son $[1, \infty)$ y $[0, \infty)$, respectivamente. Eso lleva a seleccionar a $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$ como inversa de f. Vea la figura 2.7.6*c*).



a) No es una función uno a uno   *b*) Función uno a uno   *c*) Inversa de la función del inciso *b*)

FIGURA 2.7.6 Función inversa del ejemplo 8 ■

2.7 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

En los problemas 1 a 6 se muestra la gráfica de una función f. Aplique la prueba de la recta horizontal para determinar si f es uno a uno.

1.

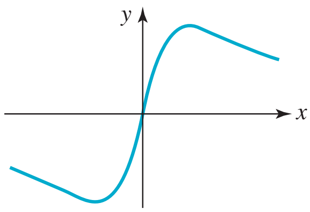


FIGURA 2.7.7 Gráfica del problema 1

2.

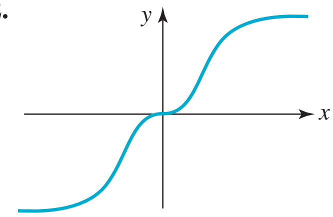


FIGURA 2.7.8 Gráfica del problema 2

3.

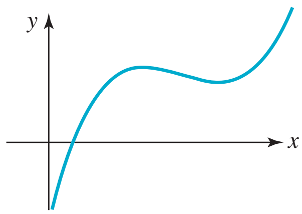


FIGURA 2.7.9 Gráfica del problema 3

4.

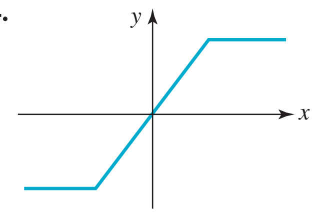


FIGURA 2.7.10 Gráfica del problema 4

5.

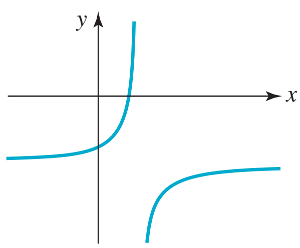


FIGURA 2.7.11 Gráfica del problema 5

6.

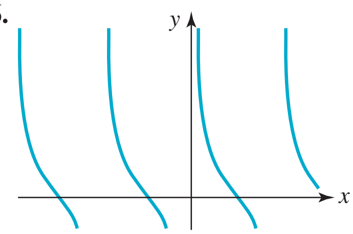


FIGURA 2.7.12 Gráfica del problema 6

En los problemas 7 a 10 trace la gráfica de la función definida en intervalos f para determinar si es uno a uno.

7. $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} -x - 1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0 \\ x^2 - x, & x \geq 0 \end{cases}$

En los problemas 11 a 14 proceda como en el ejemplo 2*a*) para demostrar que la función dada f *no es* uno a uno.

11. $f(x) = x^2 - 6x$

12. $f(x) = (x - 2)(x + 1)$

13. $f(x) = \dfrac{x^2}{4x^2 + 1}$

14. $f(x) = |x + 10|$

En los problemas 15 a 18 proceda como en el ejemplo 2*b*) para demostrar que la función dada f *sí es* uno a uno.

15. $f(x) = \dfrac{2}{5x + 8}$

16. $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x - 1}$

17. $f(x) = \sqrt{4 - x}$

18. $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

En los problemas 19 a 24, proceda como en el ejemplo 3 y verifique que la inversa de la función inyectiva f es la función g, demostrando que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$.

19. $f(x) = x + 5; \quad g(x) = x - 5$

20. $f(x) = 5x - 10; \quad g(x) = \frac{1}{5}x + 2$

21. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}; \quad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

22. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{3}x + 9}\,; \; g(x) = 3x^3 - 27$

23. $f(x) = \dfrac{1}{x - 4}; \quad g(x) = \dfrac{1}{x} + 4$

24. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x + 1}; \; g(x) = \dfrac{x + 3}{1 - x}$

En los problemas 25 y 26, la función f es uno a uno. Sin determinar f^{-1}, calcule su dominio y su contradominio.

25. $f(x) = 4 + \sqrt{x}$

26. $f(x) = 5 - \sqrt{x + 8}$

En los problemas 27 y 28, la función f es uno a uno. Se indican el dominio y el contradominio de f. Determine f^{-1} y defina su dominio y su contradominio.

27. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}, \quad x > 0, y > 0$

28. $f(x) = 2 + \dfrac{3}{\sqrt{x}}, \quad x > 0, y > 2$

En los problemas 29 a 34, la función f es uno a uno. Determine f^{-1}. Trace la gráfica de f y f^{-1} en los mismos ejes coordenados.

29. $f(x) = -2x + 6$

30. $f(x) = -2x + 1$

31. $f(x) = x^3 + 2$

32. $f(x) = 1 - x^3$

33. $f(x) = 2 - \sqrt{x}$

34. $f(x) = \sqrt{x - 7}$

En los problemas 35 a 38, la función f es uno a uno. Determine f^{-1}. Proceda como en el ejemplo 4*b*) y determine el dominio y el contradominio de f^{-1}. A continuación determine el contradominio de f.

35. $f(x) = \dfrac{1}{2x - 1}$

36. $f(x) = \dfrac{2}{5x + 8}$

37. $f(x) = \dfrac{7x}{2x - 3}$

38. $f(x) = \dfrac{1 - x}{x - 2}$

En los problemas 39 a 42, la función f es uno a uno. Sin determinar f^{-1}, calcule el punto de la gráfica de f^{-1} que corresponde al valor indicado de x en el dominio de f.

39. $f(x) = 2x^3 + 2x; \quad x = 2$

40. $f(x) = 8x - 3; \quad x = 5$

41. $f(x) = x + \sqrt{x}; \quad x = 9$

42. $f(x) = \dfrac{4x}{x + 1}; \quad x = \dfrac{1}{2}$

En los problemas 43 y 44, trace la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f.

43.

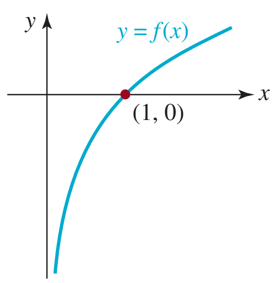


FIGURA 2.7.13 Gráfica del problema 43

44.

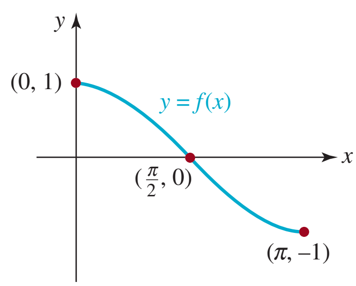


FIGURA 2.7.14 Gráfica del problema 44

En los problemas 45 y 46, trace la gráfica de f a partir de la gráfica de f^{-1}.

45.

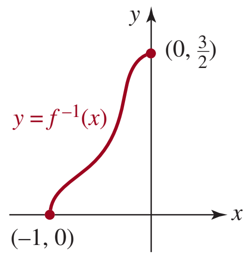


FIGURA 2.7.15 Gráfica del problema 45

46.

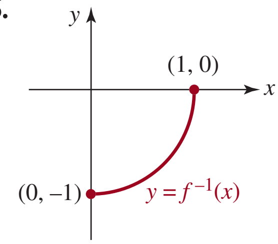


FIGURA 2.7.16 Gráfica del problema 46

En los problemas 47 a 50, la función f no es uno a uno en el dominio indicado, pero es uno a uno en el dominio restringido (el segundo intervalo). Determine la inversa de la función uno a uno e indique su dominio. Trace la gráfica de f en el dominio restringido, y la gráfica de f^{-1} en los mismos ejes coordenados.

47. $f(x) = 4x^2 + 2, (-\infty, \infty); \quad [0, \infty)$

48. $f(x) = (3 - 2x)^2, (-\infty, \infty); \quad [\frac{3}{2}, \infty)$

49. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}, [-2, 2]; \quad [0, 2]$

50. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, [-1, 1]; \quad [0, 1]$

En los problemas 51 y 52 verifique que $f(f^{-1}(x)) = x$ y que $f^{-1}(f(x)) = x$.

51. $f(x) = 5x - 10, \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + 2$

52. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}, \quad f^{-1}(x) = \dfrac{1 - x}{x}$

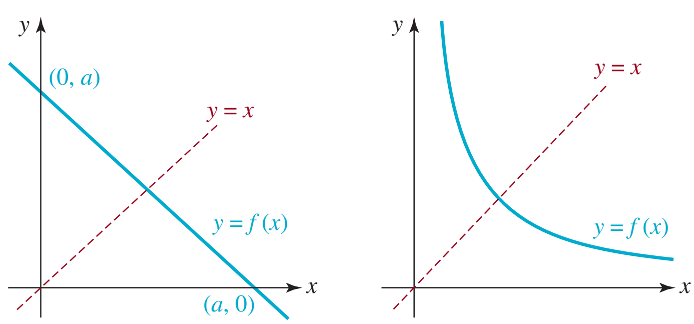
Problemas para discusión

53. Suponga que f es una función continua creciente (o decreciente) para toda x de su dominio. Explique por qué f necesariamente es uno a uno.

54. Explique por qué la gráfica de una función uno a uno f puede tener cuando mucho una intersección con el eje x.

55. La función $f(x) = |2x - 4|$ no es uno a uno. ¿Cómo se debe restringir el dominio de f para que la nueva función tenga una inversa? Determine f^{-1} e indique cuáles son su dominio y su contradominio. Trace la gráfica de f en el dominio restringido, y la gráfica de f^{-1} en los mismos ejes coordenados.

56. ¿Qué propiedad tienen en común las funciones uno a uno $y = f(x)$ de las **FIGURAS 2.7.17*a*)** y 2.7.17*b*)? Determine dos funciones explícitas más que tengan esta misma propiedad. Sea muy explícito acerca de qué tiene que ver esta propiedad con f^{-1}.



a) *b*)

FIGURA 2.7.17 Gráficas del problema 56

2.8 Traducción de palabras a funciones

Introducción En cálculo habrá casos en los que se espera que usted traduzca las palabras que describen un problema a símbolos matemáticos, para desarrollar o deducir una *ecuación* o una *función*.

En esta sección nos concentraremos en los problemas con funciones. Comenzaremos con una descripción verbal acerca del producto de dos números.

EJEMPLO 1 Producto de dos números

La suma de dos números no negativos es 15. Expresar el producto de uno con el cuadrado del otro como función de uno de los números.

Solución Primero, representaremos los dos números con los símbolos x y y, recordando que "no negativo" quiere decir que $x \geq 0$ y $y \geq 0$. La primera frase dice que $x + y = 15$; ésta *no es* la función que buscamos. La segunda frase describe la función que deseamos; se llama "el producto". Representemos "el producto" por el símbolo P. Ahora bien, P es el producto de uno de los números, digamos x, por el cuadrado del otro, esto es, por y^2.

$$P = xy^2. \tag{1}$$

No, todavía no terminamos, porque se supone que P es una "función de *uno* de los números". Ahora aprovecharemos que los números x y y se relacionan por $x + y = 15$. De esta última ecuación sustituimos $y = 15 - x$ en la ecuación (1), para obtener el resultado que deseamos:

$$P(x) = x(15 - x)^2. \tag{2}$$ ■

A continuación se presenta un resumen simbólico del análisis del problema del ejemplo 1.

$$\text{La } \overbrace{\text{suma de } \overbrace{\text{dos números no negativos}}^{\text{sean los números } x \geq 0 \text{ y } y \geq 0} \text{ es 15}}^{x + y = 15}\text{. Expresar el } \overbrace{\text{producto}}^{P} \text{ con}$$

$$\overbrace{\text{el}}^{x} \ \overbrace{\text{cuadrado del otro}}^{y^2} \text{ como función de } \overbrace{\text{uno de los números}}^{\text{usar } x}\text{.}$$

Observe que la segunda frase es vaga, porque no dice cuál número se eleva al cuadrado. Eso quiere decir que, en realidad, eso no importa; la ecuación (1) también podría escribirse como $P = yx^2$. También, podríamos haber usado $x = 15 - y$ en (1) para llegar a $P(y) = (15 - y)y^2$. En un ambiente de cálculo no hubiera importado si trabajáramos con $P(x)$ o con $P(y)$, porque al determinar *uno* de los números se determina el otro automáticamente, con la ecuación $x + y = 15$. Esta última ecuación se suele llamar **restricción**. Una restricción no sólo define la relación entre las variables x y y, sino con frecuencia establece un límite a la forma en que pueden variar x y y. Como verá en el ejemplo siguiente, la restricción ayuda a determinar el dominio de la función que acabamos de construir.

EJEMPLO 2 Continuación del ejemplo 1

¿Cuál es el dominio de la función $P(x)$ en (2)?

Solución Sin conocer el contexto del planteo del problema en el ejemplo 1, habría que llegar a la conclusión que de acuerdo con la descripción de la página 50, en la sección 2.1, el dominio de

$$P(x) = x(15 - x)^2 = 225x - 30x^2 + x^3$$

es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$. *Pero* en el contexto del problema original, los números deberían ser no negativos. De acuerdo con los requisitos que $x \geq 0$ *y que* $y = 15 -$

$x \geq 0$, se obtienen $x \geq 0$ y $x \leq 15$, lo que quiere decir que x debe satisfacer la desigualdad simultánea $0 \leq x \leq 15$. Si empleamos la notación de intervalos, el dominio de la función producto P de (2) es el intervalo cerrado $[0, 15]$. ■

Otra forma de ver la conclusión del ejemplo 2 es la siguiente: la restricción $x + y = 15$ establece que $y = 15 - x$. Así, *si* x pudiera ser mayor que 15 (digamos que $x = 17.5$), entonces $y = 15 - x$ sería un número negativo, lo cual contradice la hipótesis inicial que $y \geq 0$.

□ **Problemas de optimización** Durante el resto de esta sección se examinarán "problemas con palabras" que se tomaron directamente de un texto de cálculo. Esos problemas, que se llaman también "problemas de optimización" o "problemas aplicados de máximo y mínimo" constan de dos partes, la "parte de precálculo" donde usted establece la función por optimizar, y la "parte de cálculo", donde se efectúan las operaciones específicas de cálculo, sobre la función que se acaba de formular, para determinar su valor máximo o mínimo. La parte de cálculo se suele identificar con palabras como "máximo (o mínimo)", "lo más grande posible", "determinar las dimensiones" y otras parecidas. Por ejemplo, el enunciado real del ejemplo 1, tal como aparece en un texto de cálculo es:

> *Calcular dos números no negativos cuya suma sea* 15, *tales que el producto de uno por el cuadrado del otro sea máximo.*

Para muchos alumnos, la gran dificultad está en separar las palabras que definen la función por optimizar, de todas las palabras que contiene el enunciado del problema.

Antes de proseguir con ejemplos, se pide al lector leer las *Notas para el salón de clase*, al final de esta sección.

Tome nota ▸

El ejemplo que sigue describe un problema geométrico que pide determinar un "rectángulo más grande". Recuerde que no esperamos que resuelva todo el problema tratando de calcular realmente el "rectángulo más grande", pues eso lo haría en un curso de cálculo. En este momento su única tarea es escoger las palabras, como vimos en (3), que indiquen cuál es la función, para formarla entonces usando las variables introducidas. En cálculo, la función por optimizar se llama **función objetivo**.

EJEMPLO 3 Rectángulo máximo

Determinar la función objetivo en el siguiente problema de cálculo:

> *Un rectángulo tiene dos vértices en el eje x y dos vértices en el semicírculo cuya ecuación es* $y = \sqrt{25 - x^2}$. *Vea la* **FIGURA 2.8.1a)**. *Determinar las dimensiones del rectángulo máximo.*

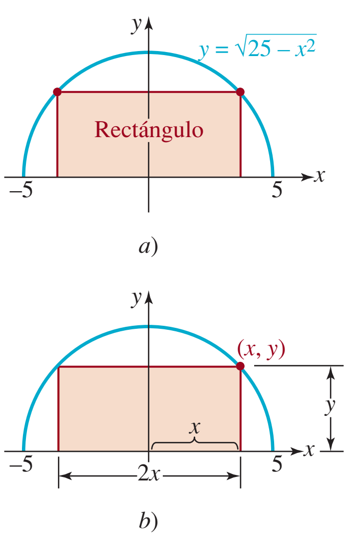


FIGURA 2.8.1 Rectángulo del ejemplo 3

Solución En cálculo, las palabras "rectángulo máximo" indican que se busca *el* rectángulo, de los muchos que pueden trazarse en el semicírculo, que tenga el *área* máxima. Por consiguiente, la función que se debe construir es el área A del rectángulo. Si (x, y), $x > 0$, $y > 0$ representa el vértice del rectángulo que está en el círculo y en el primer cuadrante, entonces, como se ve en la figura 2.8.1*b*), el área A es longitud × ancho, es decir

$$A = (2x) \times y = 2xy. \tag{4}$$

En este problema, la restricción es la ecuación $y = \sqrt{25 - x^2}$, del semicírculo. Usaremos la ecuación de restricción para eliminar y en (4) y obtener el área del rectángulo, es decir, la función objetivo,

$$A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}, \tag{5}$$

con lo que se termina la "parte de precálculo" del problema.

El segundo paso sería el de los procedimientos de cálculo para determinar el valor de x con el que la función objetivo $A(x)$ asume su valor máximo. ■

Si tuviéramos que examinar la función $A(x)$ fuera del contexto del problema, en el ejemplo 3, su dominio hubiera sido $[-5, 5]$. Como supusimos que $x > 0$, el dominio de $A(x)$ en la ecuación (4) en realidad es el intervalo abierto $(0, 5)$. Pero en cálculo usaríamos el intervalo cerrado $[0, 5]$, aun cuando $x = 0$ y $x = 5$ harían que el área fuera $A(0) = 0$ y $A(5) = 0$, respectivamente. No se preocupe el lector por este último detalle técnico.

EJEMPLO 4 Cerca de longitud mínima

Determinar la función objetivo del siguiente problema de cálculo:

Un ranchero pretende delimitar un terreno rectangular que tenga 1 000 m^2 de superficie. El terreno será cercado y dividido en dos partes iguales, con una cerca adicional, paralela a dos lados. Calcular las dimensiones del terreno que requieran la cantidad mínima de cerca.

Solución El esquema debe ser un rectángulo con una recta en su mitad, similar a lo que se ve en la **FIGURA 2.8.2**. Como muestra la figura, sea $x > 0$ la longitud del terreno rectangular, y sea $y > 0$ su ancho. La función que se busca es la “cantidad de cerca”. Si el símbolo F representa esta cantidad, la suma de las longitudes de las *cinco* partes, dos horizontales y tres verticales, de la cerca, es

$$F = 2x + 3y. \tag{6}$$

Sin embargo, el terreno cercado debe tener un área de 1 000 m^2, así que x y y deben relacionarse con la restricción $xy = 1\,000$. De acuerdo con esta última ecuación, se obtiene $y = 1\,000/x$, que se puede usar para eliminar y en (6). Por lo tanto, la cantidad de cerca F en función de x es $F(x) = 2x + 3(1\,000/x)$, es decir,

$$F(x) = 2x + \frac{3\,000}{x}. \tag{7}$$

Ya que x representa una dimensión física que satisface a $xy = 1\,000$, la conclusión es que x es positivo. Pero además de ésa, x no tiene otra restricción. Así, a diferencia del ejemplo anterior, la función objetivo (7) no está definida en un intervalo cerrado. El dominio de $f(x)$ es $(0, \infty)$. ■

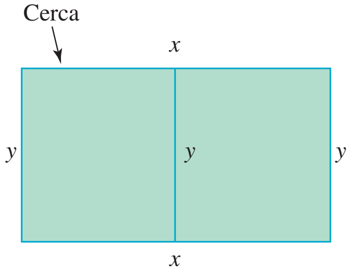


FIGURA 2.8.2 Terreno rectangular del ejemplo 4

Como se puede ver en la gráfica de (7), en la **FIGURA 2.8.3**, F tiene un mínimo en algún valor de x, por ejemplo $x = c$. Con una calculadora graficadora o una computadora se puede aproximar c y $F(c)$, pero con cálculo se pueden determinar sus valores exactos.

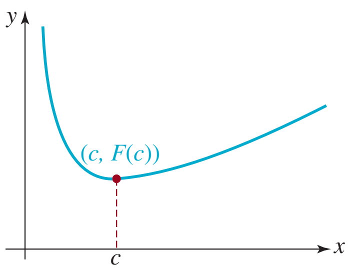


FIGURA 2.8.3 En el ejemplo 4, $F(c)$ es el valor mínimo de F para $x > 0$

Si en un problema intervienen triángulos, se debe estudiar con cuidado y determinar si se van a aplicar el teorema de Pitágoras, triángulos semejantes o trigonometría.

EJEMPLO 5 Escalera más corta

Determinar la función objetivo del siguiente problema de cálculo:

Un muro de 10 pies *está a* 5 pies *de un edificio. Calcular la longitud de la escalera más corta, apoyada en el muro, que vaya del suelo hasta el edificio.*

Solución Las palabras “escalera más corta” indican que se necesita una función que describa la longitud de la escalera. Sea L esa longitud. Con x y y definidos en la **FIGURA 2.8.4**, se ve que hay dos triángulos rectángulos, que el triángulo mayor tiene tres lados cuyas longitudes

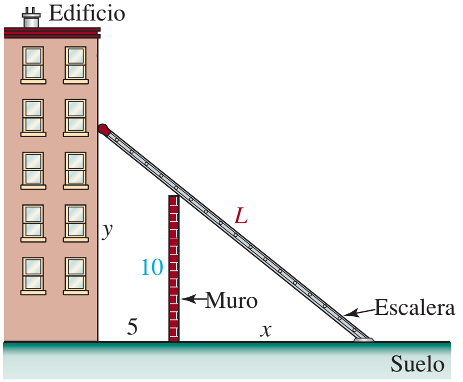


FIGURA 2.8.4 Escalera del ejemplo 5

son L, y y $x + 5$, y el triángulo menor tiene dos lados cuyas longitudes son x y 10. Ahora bien, la escalera es la hipotenusa del triángulo rectángulo mayor, así que de acuerdo con el teorema de Pitágoras,

$$L^2 = (x + 5)^2 + y^2. \tag{8}$$

Los triángulos rectángulos de la figura 2.8.4 son semejantes, porque ambos tienen un ángulo recto y comparten el ángulo agudo que forma la escalera con el piso. Entonces aprovecharemos que las relaciones de los lados correspondientes son iguales en triángulos correspondientes. Eso nos permite escribir

$$\frac{y}{x+5} = \frac{10}{x} \qquad \text{de modo que} \qquad y = \frac{10(x+5)}{x}.$$

Este último resultado se usa en (8),

$$\begin{aligned} L^2 &= (x+5)^2 + \left(\frac{10(x+5)}{x}\right)^2 \\ &= (x+5)^2\left(1 + \frac{100}{x^2}\right) && \leftarrow \text{se factoriza } (x+5)^2 \\ &= (x+5)^2\left(\frac{x^2+100}{x^2}\right) && \leftarrow \text{denominador común} \end{aligned}$$

Se saca la raíz cuadrada para obtener L en función de x:

$$L(x) = \frac{x+5}{x}\sqrt{x^2+100}. \qquad \leftarrow \begin{array}{l}\text{la raíz cuadrada de un producto es}\\ \text{el producto de las raíces cuadradas de los factores}\end{array}$$

El dominio de la función objetivo $L(x)$ es $(0, \infty)$. ■

EJEMPLO 6 Punto más cercano

Determinar la función objetivo en el siguiente problema de cálculo:

Encontrar el punto, en el primer cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 1$, que esté más cercano al punto $(2, 4)$.

Solución Sea (x, y) el punto, en el primer cuadrante del círculo, que está más cercano a $(2, 4)$, y sea d la distancia desde (x, y) hasta $(2, 4)$. Vea la **FIGURA 2.8.5**. Entonces, de acuerdo con la fórmula de la distancia, ecuación (2) de la sección 1.3,

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20}. \tag{9}$$

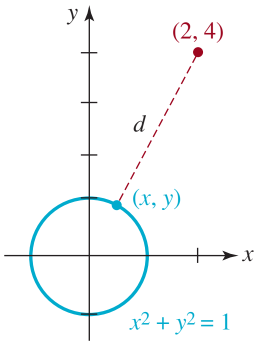


FIGURA 2.8.5 Distancia d en el ejemplo 6

En este problema, la restricción es la ecuación del círculo $x^2 + y^2 = 1$. Con ella se puede sustituir de inmediato $x^2 + y^2$ en (9), por el número 1. Además, usando la restricción para escribir $y = \sqrt{1 - x^2}$ podemos eliminar y en (9). Así, la distancia d en función de x es:

$$d(x) = \sqrt{21 - 4x - 8\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (10)$$

Como (x, y) es un punto del primer cuadrante del círculo, la variable x puede ir de 0 a 1, esto es, el dominio de la función objetivo en (10) es el intervalo cerrado $[0, 1]$. ■

NOTAS PARA EL SALÓN DE CLASE

Cuando en un texto de cálculo se llega a las secciones dedicadas a problemas de palabras, con frecuencia se reacciona con quejas, ambivalencia y desgano. Si bien no garantizamos nada, las siguientes sugerencias podrían ayudarle a resolver los problemas de los ejercicios 2.8.

- Trate al menos de tener una actitud positiva. Trate de ser esmerado y organizado.
- Lea lentamente el problema. A continuación lea el problema varias veces más.
- Ponga atención a palabras como “máximo”, “mínimo”, “más cercano”, etc., porque pueden ser una pista sobre la naturaleza de la función que se busca. Por ejemplo, si un problema pide “el más próximo”, entonces, con mayor probabilidad, la función que usted trata de encontrar implica una *distancia*; si en un problema se pide “cantidad mínima de material”, la función que se busca puede ser *superficie*. Vea los problemas 35 y 42, en los ejercicios 2.8.
- Cuando sea posible, trace una curva o una figura, e identifique los datos en su esquema. Haga que su esquema sea sencillo.
- Introduzca variables, y note toda restricción o relación entre las variables (como por ejemplo $x + y = 15$, en el ejemplo 1).
- Identifique el dominio de la función que acaba de construir. Tenga en cuenta que si el problema menciona “dimensiones”, las variables que representen esas cantidades deben ser no negativas.

2.8 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-8.

En los problemas 1 a 26, proceda como en el ejemplo 1, y traduzca las palabras a una función adecuada. Indique el dominio de la función.

1. El producto de dos números positivos es 50. Exprese su suma como función de uno de los números.
2. Exprese la suma de un número distinto de cero y de su recíproco en función del número.
3. La suma de dos números no negativos es 1. Exprese la suma del cuadrado de uno, más el doble del cuadrado del otro, en función de uno de los números.
4. Sean m y n dos enteros positivos. La suma de dos números no negativos es S. Exprese el producto de la m-ésima potencia de uno por la n-ésima potencia del otro en función de uno de los números.
5. El perímetro de un rectángulo es 200 pulgadas. Exprese el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.
6. La superficie de un rectángulo es de 400 pulgadas^2. Exprese el perímetro del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.
7. Exprese el área del rectángulo sombreada de la **FIGURA 2.8.6** en función de x.
8. Exprese la longitud del segmento de recta que contiene al punto $(2, 4)$, como se ve en la **FIGURA 2.8.7**, en función de x.

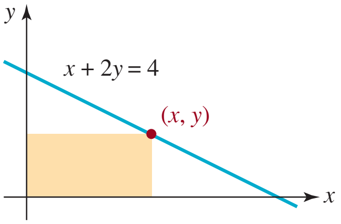


FIGURA 2.8.6 Rectángulo del problema 7

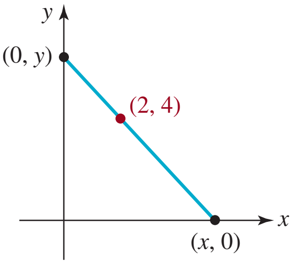


FIGURA 2.8.7 Segmento de recta del problema 8

9. Exprese la distancia desde un punto (x, y) en la gráfica de $x + y = 1$, al punto $(2, 3)$, como función de x.
10. Exprese la distancia desde un punto (x, y) en la gráfica de $y = 4 - x^2$, al punto $(0, 1)$, en función de x.
11. Exprese el perímetro de un cuadrado en función de su área A.
12. Exprese el área de un círculo en función de su diámetro d.
13. Exprese el diámetro de un círculo en función de su circunferencia C.
14. Exprese el volumen de un cubo en función del área A de su base.
15. Exprese el área de un triángulo equilátero en función de su altura h.
16. Exprese el área de un triángulo equilátero en función de la longitud s de uno de sus lados.
17. Un alambre de longitud x se dobla en forma de un círculo. Exprese el área del círculo en función de x.
18. Un alambre de longitud L se corta a x unidades de un extremo. Un trozo del alambre se dobla formando un cuadrado, y la otra parte se dobla para formar un círculo. Exprese la suma de las áreas en función de x.
19. Se planta un árbol a 30 pies de la base de un poste de alumbrado, que tiene 25 pies de altura. Exprese la longitud de la sombra del árbol en función de su altura.
20. El armazón de una cometa está formado por seis trozos de plástico ligero. El marco exterior consta de cuatro piezas ya cortadas; dos tienen 2 pies de longitud y dos tienen 3 pies de longitud. Exprese el área de la cometa en función de x, donde $2x$ es la longitud de la pieza transversal que se indica en la FIGURA 2.8.8.

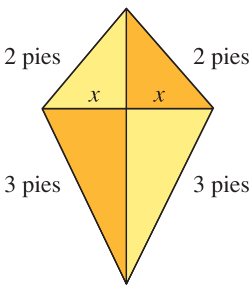


FIGURA 2.8.8 Cometa para el problema 20

21. Una empresa desea construir una caja rectangular abierta, con 450 pulgadas^3 de volumen, de tal modo que la longitud de su base sea el triple de su ancho. Exprese la superficie de la caja en función del ancho.
22. Un tanque cónico, con su vértice hacia abajo, tiene 5 pies de radio y 15 pies de altura. Al tanque se bombea agua. Exprese el volumen del agua en función de su profundidad. [*Sugerencia:* El volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Aunque el tanque es un objeto tridimensional, examine su corte transversal, como triángulo de dos dimensiones.]
23. El automóvil A pasa por el punto O dirigiéndose hacia el este a una velocidad constante de 40 mi/h; el automóvil B pasa por el mismo punto 1 hora después, con rumbo al norte a una velocidad constante de 60 mi/h. Exprese la distancia entre los vehículos, en función del tiempo t, contando t a partir de cuando el automóvil B pasa por el punto O.
24. En el momento $t = 0$ (expresado en horas), dos aviones tienen una separación vertical de 1 milla, y se rebasan con direcciones opuestas. Si los aviones vuelan horizontalmente con velocidades de 500 mi/h y 550 mi/h, exprese la distancia horizontal entre ellos en función de t. [*Sugerencia:* Distancia = velocidad × tiempo.]
25. La alberca de la FIGURA 2.8.9 tiene 3 pies de profundidad en el extremo bajo, y 8 pies de profundidad en el extremo hondo; tiene 40 pies de longitud y 30 pies de ancho (de los extremos); el fondo forma un plano inclinado. Se bombea agua a la alberca. Exprese el volumen del agua en la alberca en función de la altura h del agua sobre el fondo, en el lado hondo. [*Sugerencia:* El volumen será una función definida en intervalo, y su dominio será $0 \leq h \leq 8$.]

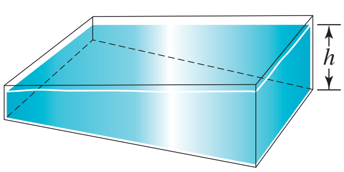


FIGURA 2.8.9 Alberca del problema 25

26. El reglamento del servicio postal para paquetería estipula que la longitud más el perímetro del extremo de un paquete no debe ser mayor que 108 pulgadas. Exprese el volumen del paquete en función del ancho x, como se indica en la FIGURA 2.8.10.

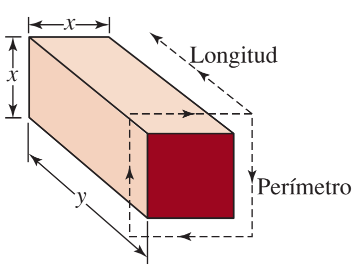


FIGURA 2.8.10 Paquete del problema 26

En los problemas 27 a 48 proceda como en los ejemplos 3 a 5, y defina la función objetivo del problema de cálculo determinado. Indique el dominio de la función objetivo, pero ***no*** trate de resolver el problema.

27. Determine un número que sea mayor que su cuadrado en la mayor cantidad posible.
28. De todos los rectángulos que tienen 20 pulgadas de perímetro, indique cuál es el que tiene la diagonal más corta.

29. Un terreno rectangular se va a cercar para limitar tres partes iguales, con dos cercas divisorias paralelas a dos lados. Si el área por encerrar es de 4 000 m^2, calcule las dimensiones del terreno que requieran la mínima cantidad de cerca.

30 Un terreno rectangular se va a cercar para limitar tres partes iguales, con dos cercas divisorias paralelas a dos lados. Si la cerca total que se va a usar es de 8 000 m, calcule las dimensiones del terreno que tenga la máxima área.

31. Un ranchero desea construir un corral rectangular, de 128 000 pies^2 de área, con uno de sus lados a lo largo de un río recto. El cercado a lo largo del río cuesta \$1.50 por pie, mientras que a lo largo de los otros tres lados, cercar cuesta \$2.50 por pie. Calcule las dimensiones del corral, para que el costo de la construcción sea mínimo. [*Sugerencia:* A lo largo del río, el costo de x pies de cerca es de $1.50x$.]

32. Se va a encerrar un patio rectangular con una cerca, adosándola a una casa cuya longitud es de 40 pies. Vea la **FIGURA 2.8.11**. La cantidad de cerca que se va a usar es de 160 pies. Calcule las dimensiones del patio para que quede encerrada el área máxima.

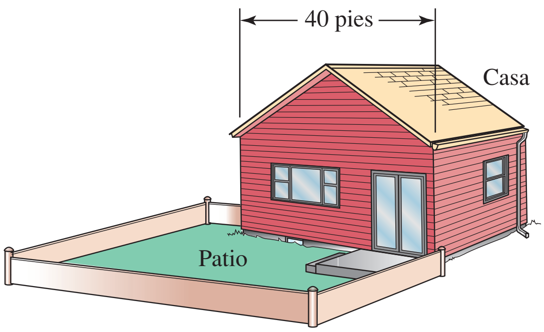


FIGURA 2.8.11 Casa y patio del problema 32

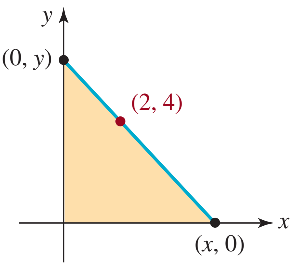


FIGURA 2.8.12 Segmento de recta del problema 34

33. Entre todos los rectángulos que tienen el mismo perímetro p, demuestre que el que tiene el área máxima es un cuadrado. (En este caso, p representa una constante.)

34. Determine los vértices $(x, 0)$ y $(0, y)$, de la región triangular sombreada de la **FIGURA 2.8.12** para que su área sea mínima.

35. ***a***) Se va a formar una caja rectangular abierta con base cuadrada, y 32 000 cm^3 de volumen. Calcule las dimensiones de la caja que requieran la cantidad mínima de material. Vea la **FIGURA 2.8.13**.

b) Si la caja rectangular del inciso *a*) es cerrada, calcule las dimensiones que requieran la cantidad mínima de material.

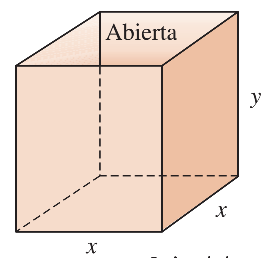


FIGURA 2.8.13 Caja del problema 35

36. Se va a construir una caja rectangular cerrada con base cuadrada. El material para la tapa cuesta \$2 por pie cuadrado, mientras que el material para las caras restantes cuesta \$1 por pie cuadrado. Si el costo total para construir cada caja es de \$36, calcule las dimensiones de la caja con mayor volumen que pueda fabricarse.

37. Un canalón pluvial se fabrica con corte transversal rectangular con una pieza metálica de 1 pie × 20 pies, doblando hacia arriba cantidades iguales en el lado de 1 pie. Vea la **FIGURA 2.8.14**. ¿Cómo se puede doblar el metal en cada lado para que la capacidad del canalón sea máxima? [*Sugerencia:* Capacidad = volumen.]

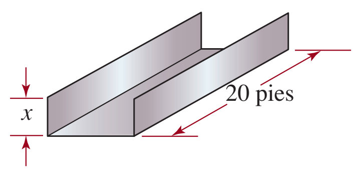


FIGURA 2.8.14 Canalón pluvial del problema 37

38. Una ventana Norman consiste en un rectángulo rematado por un semicírculo, como indica la **FIGURA 2.8.15**. Si el perímetro total de la ventana es de 10 m, calcule las dimensiones de la ventana que tenga el área máxima.

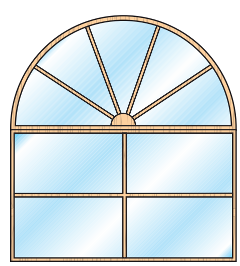


FIGURA 2.8.15 Ventana Norman del problema 38

39. Una página impresa tendrá márgenes de 2 pulgadas, en blanco, en los lados, y márgenes de 1 pulgada, en blanco, en las partes superior e inferior. El área de la parte impresa es de 32 pulg^2. Calcule las dimensiones de la página, para usar la cantidad mínima de papel.

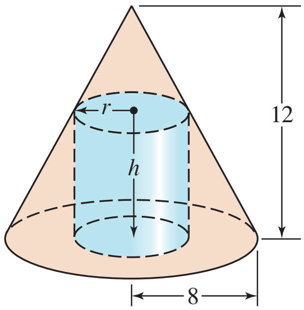


FIGURA 2.8.16 Cilindro inscrito del problema 40

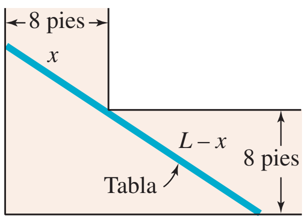
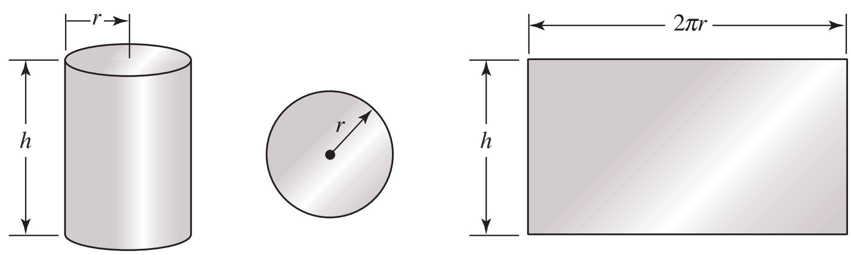


FIGURA 2.8.17 Tabla del problema 41

40. Calcule las dimensiones del cilindro circular recto que tenga el máximo volumen, y que se pueda inscribir en un cono circular recto de 8 pulgadas de radio y 12 pulgadas de altura. Vea la FIGURA 2.8.16.

41. Determine la longitud L máxima de una tabla delgada, que pueda extenderse horizontalmente a lo largo de la esquina en ángulo recto de la FIGURA 2.8.17. [*Sugerencia:* Use triángulos semejantes.]

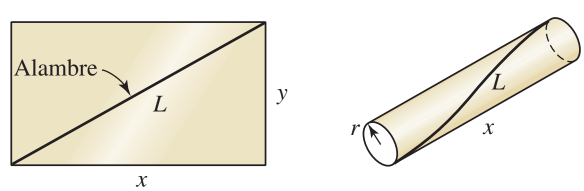
42. Se va a fabricar una lata de jugo, con forma de cilindro circular recto, para contener un volumen de 32 pulg^3. Vea la FIGURA 2.8.18. Calcule las dimensiones de la lata para que en su construcción se use la mínima cantidad de material. [*Sugerencia:* Material = superficie total de la lata = superficie de la tapa + superficie del fondo + superficie lateral. Si se quitan las tapas superior e inferior, y el cilindro se corta recto en su lado y se aplana, el resultado es el rectángulo que se ve en la figura 2.8.18*c*).]



a) Cilindro circular *b*) Tapa y fondo circulares *c*) El lado es rectangular

FIGURA 2.8.18 Lata de jugo del problema 42

43. El lado de un cilindro se va a fabricar con un rectángulo de lámina de plástico. Como el material plástico no puede soportarse a sí mismo, se incrusta un alambre delgado y rígido, en el plástico, como se ve en la FIGURA 2.8.19a). Calcule las dimensiones del cilindro que tenga el volumen máximo y se pueda construir, si la longitud L del alambre es fija. [*Sugerencia:* Hay dos restricciones en este problema. En la figura 2.8.19*b*), la circunferencia de un extremo circular del cilindro es y.]



a) Hoja rectangular de material plástico *b*) Lado del cilindro

FIGURA 2.8.19 Cilindro del problema 43

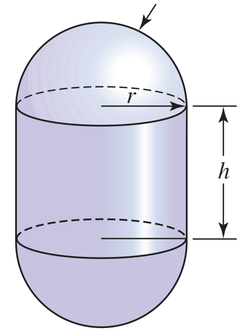


FIGURA 2.8.20 Modelo de la cápsula del problema 44


Cápsula

44. Muchas medicinas se encierran en cápsulas, como se ve en la foto adjunta. Suponga que se forma una cápsula pegando dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto, como se ve en la FIGURA 2.8.20. Si el volumen total de la cápsula debe ser de 0.007 pulg^3, calcule las dimensiones de ella para que en su construcción se use la cantidad mínima de material. [*Sugerencia:* El volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$, y su superficie es $4\pi r^2$.]

45. Un canalón de agua de 20 pies de longitud tiene sus extremos en forma de triángulo isósceles, con lados de 4 pies de longitud. Vea la FIGURA 2.8.21. Determine la dimensión del lado superior del triángulo para que el volumen del canalón sea máximo. [*Sugerencia:* La tapa y el fondo de un cilindro recto son iguales, pero podrían ser triángulos, pentágonos, trapezoides, etc. El volumen de un cilindro recto es el área de la base × altura.]

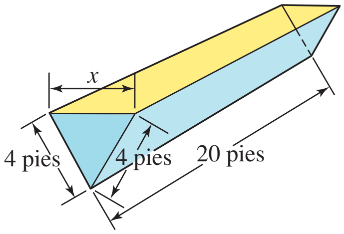


FIGURA 2.8.21 Canalón de agua del problema 45

46. Algunas aves vuelan con más lentitud sobre agua que sobre tierra. Un pájaro vuela a 6 km/h constante sobre agua, y a 10 km/h sobre tierra. Con la información de la **FIGURA 2.8.22**, determine la trayectoria que debe seguir el ave para que su vuelo tenga un tiempo mínimo total, entre la orilla de una isla y su nido en la orilla de otra isla. [*Sugerencia:* Distancia = velocidad × tiempo.]

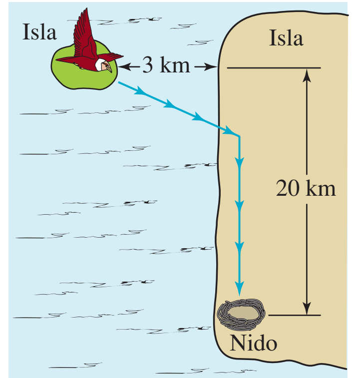


FIGURA 2.8.22 Ave del problema 46

47. En una carrera, se requiere que una mujer que nade desde un muelle flotante A hasta la playa y sin parar desde la playa a otro muelle flotante C. Las distancias se muestran en la **FIGURA 2.8.23**. Ella estima que puede nadar desde el muelle A hasta la playa con una velocidad constante de 3 millas/h y desde la playa hasta el muelle C con una velocidad de 2 millas/h. ¿Dónde deberá tocar la playa a fin de minimizar el tiempo de nadar de A a C?

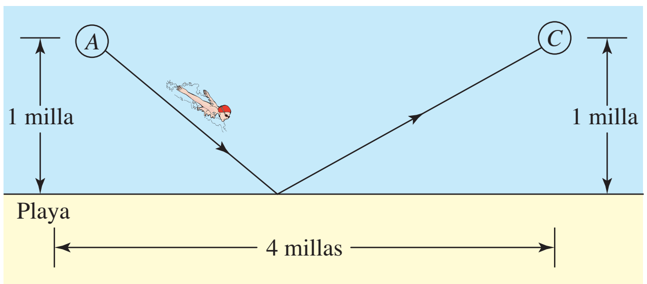


FIGURA 2.8.23 La nadadora del problema 47

48. Dos astas de bandera son aseguradas con alambres en un punto entre dos polos. Vea la **FIGURA 2.8.24**. ¿Dónde debe ser localizado el punto para minimizar la cantidad de alambre que se utilizará?

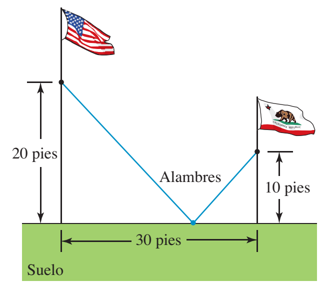


FIGURA 2.8.24 Astas del problema 48

Para discusión

49. En el problema 19 ¿qué sucede con la longitud de la sombra del árbol, cuando su altura se acerca a 25 pies?

50. En un libro de ingeniería, se dice que el área del octágono de la **FIGURA 2.8.25** es $A = 3.31r^2$. Demuestre que en realidad esta fórmula es un cálculo aproximado del área. Calcule el área A exacta del octágono, en función de r.

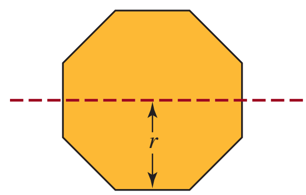


FIGURA 2.8.25 Octágono del problema 50

2.9 El problema de la recta tangente

Avance DE CÁLCULO

□ **Introducción** En un curso de cálculo estudiará usted muchos temas diferentes, pero en general, el tema "cálculo" se divide en dos campos amplios, pero relacionados, llamados **cálculo diferencial** y **cálculo integral**. La descripción de cada uno de esos campos comienza, en forma invariable, con un problema motivador acerca de la gráfica de una función. En el caso del cálculo diferencial, la motivación es el problema

De la determinación de una recta tangente a una función f,

mientras que el cálculo integral se motiva con el problema del

Cálculo del área bajo la gráfica de una función f.

Examinaremos el primer problema en esta sección; el segundo se describirá en la sección 3.7.

☐ Recta tangente a una gráfica

La palabra *tangente* proviene del verbo latino *tangere*, que quiere decir “tocar”. El lector recordará, del estudio de la geometría plana, que una tangente a un círculo es una línea (recta) L que corta, o toca al círculo, en exactamente un punto P. Vea la **FIGURA 2.9.1**. No es muy fácil definir una recta tangente a la gráfica de una función f. La idea de *tocar* implica la noción de una recta tangente a la gráfica de una función, no así la idea de *cruzar la gráfica en un punto*.[2]

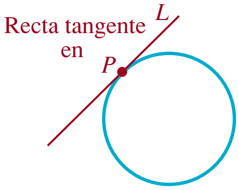


FIGURA 2.9.1 Recta tangente L toca el círculo en el punto P

Suponga que $y = f(x)$ es una función continua. Si, como se ve en la **FIGURA 2.9.2**, f posee una recta tangente L a su gráfica en un punto P, entonces, ¿cuál es la ecuación de esta recta? Para contestar esta pregunta se necesitan las coordenadas de P, y la pendiente $m_{\tan}$ de L. En cuanto a las coordenadas de P no hay dificultad, porque un punto en la gráfica de una función f se obtiene especificando un valor de x en el dominio de f. Las coordenadas del punto de tangencia en $x = a$ son entonces $(a, f(a))$. Como método para aproximar la pendiente $m_{\tan}$, se pueden calcular con facilidad las pendientes m_{sec} de *rectas secantes* que pasen por el punto P y cualquier otro punto Q en la gráfica. Vea la **FIGURA 2.9.3**.

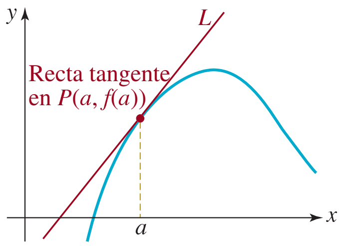


FIGURA 2.9.2 Recta tangente L a una gráfica, en el punto P

☐ Pendiente de las rectas secantes

Si las coordenadas de P son $(a, f(a))$, y si las coordenadas de Q son $(a + h, f(a + h))$, entonces, como se ve en la **FIGURA 2.9.4**, la pendiente de la recta secante que pasa por P y Q es

$$m_{\text{sec}} = \frac{\text{subida}}{\text{recorrido horizontal}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

o

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{1}$$

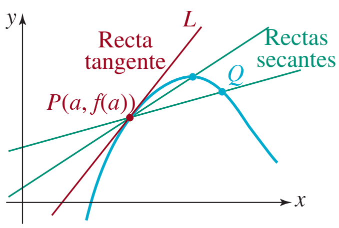


FIGURA 2.9.3 Pendientes de rectas secantes para aproximar la pendiente $m_{\tan}$ de L

La expresión del lado derecho de la igualdad en (1) se llama **cociente diferencial**. Cuando se hace que h tome valores que se acerquen cada vez más a cero, esto es, cuando $h \to 0$, el conjunto de puntos $Q(a + h, f(a + h))$ se mueve por la curva acercándose cada vez más al punto $P(a, f(a))$. En forma intuitiva se espera que las rectas secantes tiendan hacia la recta tangente L, y que $m_{\text{sec}} \to m_{\tan}$ a medida que $h \to 0$. Con base en el concepto de límite, que se presentó en la sección 1.5, escribiremos $m_{\tan} = \lim_{h\to 0} m_{\text{sec}}$, o lo que es lo mismo, de acuerdo con (1),

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \tag{2}$$

siempre y cuando exista el límite. Igual que con los problemas que se presentaron en la sección 1.5, nótese que el límite en (2) tiene la forma indeterminada 0/0, cuando $h \to 0$.

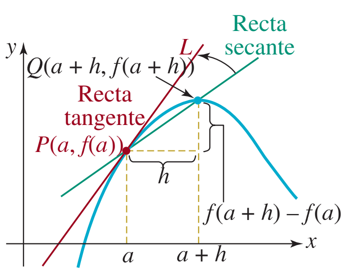


FIGURA 2.9.4 Rectas secantes que se convierten en la recta tangente L cuando $h \to 0$

No ahondaremos en detalles teóricos acerca de cuándo existe o no el límite (2); esa discusión pertenece propiamente a un curso de cálculo. Entonces, para simplificar la descripción, omitiremos la frase “siempre y cuando exista el límite”. Para este curso basta sólo tener en cuenta que puede ser que el límite (2) no exista para ciertos valores de a.

Es muy probable que al principio del curso de cálculo se le pida calcular el límite de un cociente diferencial como (2). El cálculo de (2) es, en esencia, un *proceso de cuatro pasos*, y en tres de ellos sólo se hacen matemáticas de precálculo: álgebra y trigonometría. Los detalles de las manipulaciones algebraicas o trigonométricas en los tres primeros pasos serán la meta principal del lector. Si se hacen con exactitud, el cuarto paso, el de cálculo, podrá ser la parte más fácil del problema. En una preparación para el cálculo recomendamos a usted que sea capaz de hacer el cálculo de (2) con funciones donde intervengan

repase $(a + b)^n$ para $n = 2$ y 3 ▶

- potencias enteras positivas de x, como x^n para $n = 1, 2$ y 3,

repase la suma de fracciones simbólicas ▶

- división de funciones, como $\dfrac{1}{x}$ y $\dfrac{x}{x+1}$, y

repase la racionalización de numeradores y denominadores ▶

- radicales, como $\sqrt{x}$.

Vea los problemas 1 a 10 en los ejercicios 2.9.

---

[2] Dejaremos para un curso de cálculo la discusión de muchas sutilezas y cuestiones que rodean al problema de la recta tangente.

EJEMPLO 1 El proceso de cuatro pasos

Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$ en $x = 1$.

Solución Primero se calcula el cociente diferencial en (2), con $a = 1$.

i) El paso inicial es el cálculo de $f(a + h)$. Como las funciones pueden ser complicadas, en este paso ayuda imaginar que x, siempre que aparezca en la función $f(x)$, es un conjunto de paréntesis ( ). Para la función dada escribimos $f(\quad) = (\quad)^2 + 2$. La idea es sustituir $1 + h$ en esos paréntesis y hacer las operaciones algebraicas necesarias:

$$\begin{aligned} f(1 + h) &= (1 + h)^2 + 2 \\ &= (1 + 2h + h^2) + 2 \\ &= 3 + 2h + h^2. \end{aligned}$$

ii) El cálculo de la diferencia $f(a + h) - f(a)$ es el paso más importante. Es imperativo simplificar este paso todo lo posible. Un consejo: en muchos de los problemas que se le pedirá resolver en cálculo, podrá sacar a h como factor común en la diferencia $f(a + h) - f(a)$. Para comenzar, calcule $f(a)$, que en este caso es $f(1) = 1^2 + 2 = 3$. A continuación podrá usar el resultado del paso anterior:

$$\begin{aligned} f(1 + h) - f(1) &= 3 + 2h + h^2 - 3 \\ &= 2h + h^2 \\ &= h(2 + h). \qquad \leftarrow \text{se sacó } h \text{ como factor común} \end{aligned}$$

iii) El cálculo del cociente diferencial $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ ya es directo. De nuevo, use los resultados del paso anterior:

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{h(2 + h)}{h} = 2 + h. \qquad \leftarrow \text{se cancelan las } h$$

iv) Ahora ya es fácil el paso de cálculo. De acuerdo con (2),

del renglón anterior *iii*)

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} (2 + h) = 2.$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$ en (1, 3) es 2. ■

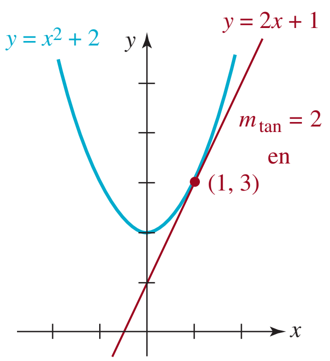


FIGURA 2.9.5 Recta tangente del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Ecuación de la recta tangente

Determinar la ecuación de la recta tangente cuya pendiente se encontró en el ejemplo 1.

Solución Conocemos un punto (1, 3), y una pendiente, $m_{\tan} = 2$, y entonces, de la ecuación punto-pendiente de una recta, se ve que

$$y - 3 = 2(x - 1) \qquad \text{es decir} \qquad y = 2x + 1.$$

Note que esta última ecuación está de acuerdo con las intersecciones de y y x con los ejes coordenados de la línea roja en la **FIGURA 2.9.5**. ■

La derivada

Al revisar la figura 2.9.5, imagine que hay rectas tangentes en diversos puntos de la gráfica de $f(x) = x^2 + 2$. En esta función en particular se sabe que hay una recta tangente en cada punto de su gráfica. Las rectas tangentes a la izquierda del eje de las ordenadas tienen pendiente negativa; la recta tangente en (0, 2) tiene pendiente cero, y las líneas tangentes a la derecha del eje de las ordenadas tienen pendiente positiva (como se ve en el ejemplo 1). En otras palabras, para una función f, el valor de $m_{\tan}$ en un punto $(a, f(a))$ depende de la elección del número a. En general, hay cuando mucho *un* valor de $m_{\tan}$ para cada número a en el dominio de una función f. Más específicamente, $m_{\tan}$ es a su vez una *función* con un dominio que es un subconjunto del dominio de la función f. Además, suele ser posible obtener la fórmula de la *función de la pendiente*. Esto se hace calculando el límite del cociente diferencial $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cuando $h \to 0$. A continuación sustituimos un valor de x *después* de haber calculado el límite. La función de la pendiente derivada de esta forma de f se dice que es la derivada de f y se representa por el símbolo f' (y no por $m_{\tan}$).

LA DERIVADA

La **derivada** de una función $y = f(x)$ es la función f' definida por

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{3}$$

EJEMPLO 3 Regreso al ejemplo 1

Determinar la derivada de $f(x) = x^2 + 2$.

Solución Procederemos exactamente como en el ejemplo 1, pero determinaremos $f(x + h)$ en lugar de $f(1 + h)$. En los tres primeros casos se calcula el cociente diferencial; en los pasos *ii*) y *iii*) se usan los resultados del paso anterior. En el paso *iv*) se determina el límite del cociente diferencial.

$$\begin{aligned}
&i)\ f(x+h) = (x+h)^2 + 2 = x^2 + 2xh + h^2 + 2\\
&ii)\ f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 + 2 - (x^2 + 2)\\
&\qquad = x^2 + 2xh + h^2 + 2 - x^2 - 2\\
&\qquad = 2xh + h^2\\
&\qquad = h(2x + h)\\
&iii)\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h \quad \leftarrow \text{se simplifican las } h
\end{aligned}$$

iv) De acuerdo con (3), la derivada de f es el límite del resultado en *iii*), cuando $h \to 0$. Durante el proceso de reducción cada vez mayor de h, se mantiene fija x. Por consiguiente,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x.$$

Ahora tenemos dos funciones; de $f(x) = x^2 + 2$ hemos obtenido la derivada $f'(x) = 2x$. Cuando se evalúa en un número x, la función f da la ordenada de un punto en la gráfica, y la función derivada f' da la pendiente de la tangente en ese punto. Ya vimos en el ejemplo 1 que $f(1) = 3$ y $f'(1) = 2$. ■

Con ayuda de la derivada $f'(x) = 2x$ se pueden determinar pendientes en otros puntos de la gráfica de $f(x) = x^2 + 2$. Por ejemplo,

$$\text{en } x = 0, \quad \begin{cases} f(0) = 2 & \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (0, 2)\\ f'(0) = 0 & \leftarrow \text{la pendiente de la recta tangente en } (0, 2) \text{ es } m = 0 \end{cases}$$

$$\text{en } x = -3, \quad \begin{cases} f(-3) = 11 & \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (-3, 11)\\ f'(-3) = -6 & \leftarrow \text{la pendiente de la recta tangente en } (-3, 11) \text{ es } m = -6 \end{cases}$$

El hecho que $f'(0) = 0$ quiere decir que la recta tangente es horizontal en (0, 2).

EJEMPLO 4 Derivada de una función

Calcular la derivada de $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$.

Solución

i) La función es $f(\quad) = 2(\quad)^3 + 4(\quad) + 5$ y entonces

$$f(x + h) = 2(x + h)^3 - 4(x + h) + 5.$$

En este caso las operaciones algebraicas son un poco más complicadas que las del ejemplo anterior. Usaremos el desarrollo del binomio $(a + b)^3$ y la ley distributiva. Entonces

◀ Vea (7) en la página 36.

$$\begin{aligned} f(x + h) &= 2(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - 4(x + h) + 5 \\ &= 2x^3 + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - 4x - 4h + 5 \quad \leftarrow \text{dos aplicaciones de la ley distributiva} \end{aligned}$$

ii) Como ya lo dijimos, en este paso se busca un factor de h:

$$\begin{aligned} f(x + h) - f(x) &= 2x^3 + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - 4x \\ &\qquad - 4h + 5 - (2x^3 - 4x + 5) \\ &= 2x^3 + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - 4x \\ &\qquad - 4h + 5 - 2x^3 + 4x - 5 \quad \leftarrow \text{los términos en color suman 0} \\ &= 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - 4h \\ &= h(6x^2 + 6xh + 2h^2 - 4) \quad \leftarrow \text{sacar } h \text{ como factor común} \end{aligned}$$

iii) Usaremos el último resultado:

$$\begin{aligned} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \frac{h(6x^2 + 6xh + 2h^2 - 4)}{h} \quad \leftarrow \text{se cancelan las } h \\ &= 6x^2 + 6xh + 2h^2 - 4 \end{aligned}$$

iv) Según (3) y el paso anterior, la derivada de f es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}(6x^2 + 6xh + 2h^2 - 4) = 6x^2 - 4.$$

■

EJEMPLO 5 Ecuación de la recta tangente

Encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 2/x$, en $x = 2$.

Solución Comenzaremos determinando la derivada de f. En el segundo de los cuatro pasos tendremos que combinar dos fracciones simbólicas mediante un común denominador.

$$i)\ f(x + h) = \frac{2}{x + h}$$

$$\begin{aligned} ii)\ f(x + h) - f(x) &= \frac{2}{x + h} - \frac{2}{x} \\ &= \frac{2}{x + h}\frac{x}{x} - \frac{2}{x}\frac{x + h}{x + h} \quad \leftarrow \text{el común denominador es } x(x + h) \\ &= \frac{2x - 2x - 2h}{x(x + h)} \quad \leftarrow 2x - 2x = 0 \\ &= \frac{-2h}{x(x + h)} \quad \leftarrow \text{está el factor de } h \end{aligned}$$

iii) El último resultado se divide entre h, o con más precisión, entre $\dfrac{h}{1}$. Se invierte y se multiplica por $\dfrac{1}{h}$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{-2h}{x(x+h)}}{\dfrac{h}{1}} = \frac{-2h}{x(x+h)}\,\frac{1}{h} = \frac{-2}{x(x+h)} \quad \leftarrow \text{se cancelan las } h$$

iv) De (3), la derivada de f es

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{x(x+h)} = \frac{-2}{x^2}.$$

Ahora podemos encontrar la ecuación de la recta tangente en el punto que corresponde a $x = 2$. De $f(2) = 2/2 = 1$, se obtiene el punto de tangencia (2, 1). Entonces, de la derivada $f'(x) = -2/x^2$ se ve que $f'(2) = -2/4$, por lo que la pendiente de la recta tangente en (2, 1) es $-\frac{1}{2}$. De acuerdo con la ecuación punto-pendiente de una recta, la ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = -\tfrac{1}{2}(x-2) \qquad \text{o sea que} \qquad y = -\tfrac{1}{2}x + 2.$$

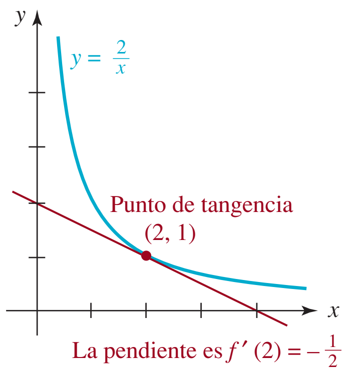


FIGURA 2.9.6 Recta tangente del ejemplo 5

La gráfica de $y = 2/x$ es la gráfica de $y = 1/x$ estirada verticalmente (vea la figura 2.2.1*e*). En la **FIGURA 2.9.6** la recta tangente en (2, 1) se muestra en rojo. ■

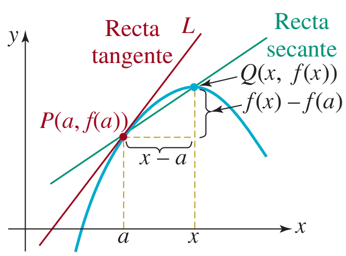


FIGURA 2.9.7 Recta secante y recta tangente en $(a, f(a))$

□ **Nota final** Hay una definición alternativa de la derivada. Si hacemos que $x = a + h$ en (2), entonces $h = x - a$. En consecuencia, la pendiente de la recta secante que pasa por $P(a, f(a))$ y $Q(x, f(x))$, como se ve en la **FIGURA 2.9.7**, es $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Cuando $h \to 0$, se debe cumplir que $x \to a$, y entonces la derivada (3) toma la forma

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \tag{4}$$

EJEMPLO 6 Uso de la ecuación (4)

Usar la ecuación (4) para calcular la derivada de $f(x) = 4x^2 - 5x + 9$.

Solución Usaremos el proceso de cuatro pasos, exactamente como en los ejemplos 3 y 4. Los pasos algebraicos son un poco diferentes; el análogo del consejo en *ii*) es buscar el factor $x - a$ en la diferencia $f(x) - f(a)$. Con frecuencia, en el paso *ii*) se necesitará sacar como factor común la diferencia de dos cuadrados, diferencia de dos cubos, etcétera.

Repase (1) y (2) de la sección 1.5. ▶

i) $f(a) = 4a^2 - 5a + 9$

ii)
$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= 4x^2 - 5x + 9 - (4a^2 - 5a + 9)\\ &= 4x^2 - 5x + 9 - 4a^2 + 5a - 9\\ &= 4x^2 - 5x - 4a^2 + 5a && \leftarrow \text{reagrupar términos como preparación para factorizar}\\ &= 4x^2 - 4a^2 - 5x + 5a\\ &= 4(x^2 - a^2) - 5(x - a) && \leftarrow \text{el primer término es la diferencia de dos cuadrados}\\ &= 4(x-a)(x+a) - 5(x-a) && \leftarrow \text{observe el factor de } x - a\\ &= (x-a)[4(x+a) - 5]\\ &= (x-a)(4x + 4a - 5) \end{aligned}$$

$$iii)\quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{(x-a)(4x+4a-5)}{x-a} \qquad \leftarrow \text{cancelar } x-a$$
$$= 4x + 4a - 5$$

iv) En el proceso de llegar al límite indicado en la ecuación (4), a se mantiene fijo. Entonces

$$f'(a) = \lim_{x \to a}(4x + 4a - 5) = 8a - 5. \qquad \leftarrow \text{el límite de } 4x \text{ cuando } x \to a \text{ es } 4a$$ ■

Como podemos ver en la ecuación (4) y en el último renglón del ejemplo 6, la derivada proviene de una función del símbolo a, y no de x, esto es, $f'(a) = 8a - 5$. En consecuencia, (4) no se usa con tanta frecuencia como (3) para calcular una derivada. Vea los problemas 33 a 40 en los ejercicios 2.9. Sin embargo, la ecuación (4) es importante, porque su uso conviene en algunos aspectos teóricos del cálculo diferencial.

2.9 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-8.

En los problemas 1 a 10 proceda como en el ejemplo 1.

a) Calcule el cociente diferencial $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ del valor indicado de a.

b) Entonces, si se le pide, calcule $m_{\tan} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

c) Use el resultado del inciso *b*) para deducir una ecuación de la recta tangente en el punto de tangencia.

1. $f(x) = x^2 - 6, a = 3$

2. $f(x) = -3x^2 + 10, a = -1$

3. $f(x) = x^2 - 3x, a = 1$

4. $f(x) = -x^2 + 5x - 3, a = -2$

5. $f(x) = -2x^3 + x, a = 2$

6. $f(x) = 8x^3 - 4, a = \frac{1}{2}$

7. $f(x) = \dfrac{1}{2x}, a = -1$

8. $f(x) = \dfrac{4}{x-1}, a = 2$

9. $f(x) = \sqrt{x}, a = 4$

10. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, a = 1$

En los problemas 11 a 26 proceda como en los ejemplos 3 y 4.

a) Calcule el cociente diferencial $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ de la función indicada.

b) Entonces, si se le pide, calcule la derivada $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

11. $f(x) = 10$

12. $f(x) = -3x + 8$

13. $f(x) = -4x^2$

14. $f(x) = x^2 - x$

15. $f(x) = 3x^2 - x + 7$

16. $f(x) = 2x^2 + x - 1$

17. $f(x) = x^3 + 5x - 4$

18. $f(x) = 2x^3 + x^2$

19. $f(x) = \dfrac{1}{4-x}$

20. $f(x) = \dfrac{3}{2x-4}$

21. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

22. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+5}$

23. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

24. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

25. $f(x) = 2\sqrt{x}$

26. $f(x) = \sqrt{2x+1}$

En los problemas 27 a 32 use las derivadas adecuadas que obtuvo en los problemas 11 a 26. Para la función dada, determine el punto de tangencia y la pendiente de la recta tangente del valor indicado de x. Deduzca la ecuación de la recta tangente en ese punto.

27. $f(x) = 3x^2 - x + 7, \quad x = 2$

28. $f(x) = x^2 - x, \quad x = 3$

29. $f(x) = x^3 + 5x - 4, \quad x = 1$

30. $f(x) = 2x^3 + x^2, \quad x = -\frac{1}{2}$

31. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad x = \frac{1}{2}$

32. $f(x) = \dfrac{3}{2x - 4}; \quad x = -1$

En los problemas 33 a 40 proceda como en el ejemplo 6.

a) Calcule el cociente diferencial $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ de la función indicada.

b) Entonces, si se le pide, calcule la derivada $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

33. $f(x) = 3x^2 + 1$

34. $f(x) = x^2 - 8x - 3$

35. $f(x) = 10x^3$

36. $f(x) = x^4$

37. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

38. $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x}$

39. $f(x) = \sqrt{7x}$

40. $f(x) = -\sqrt{x + 9}$

Para discusión

41. Use la ecuación (3) o (4) para calcular la derivada de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$. Determine los puntos de la gráfica de f en los que $f'(x) = 0$. Describa una interpretación geométrica de sus resultados.

42. Use la ecuación (3) o (4) para calcular la derivada de $f(x) = x^{1/3}$. [*Sugerencia:* Recuerde, de la sección 1.5, que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.]

43. ¿Cuál es la recta tangente a la gráfica de una función lineal $f(x) = ax + b$?

44. Si $f'(x) > 0$ para toda x en un intervalo, entonces, ¿qué se puede decir acerca de f en el intervalo? Si $f'(x) < 0$ para toda x en un intervalo, ¿qué se puede decir acerca de f en el intervalo? [*Sugerencia:* Trace una gráfica.]

45. Si f es una función par y (x, y) está en la gráfica de f, entonces $(-x, y)$ también está en la gráfica de f. ¿Cómo se relacionan las pendientes de las tangentes en (x, y) y $(-x, y)$?

46. Si f es una función impar, y (x, y) está en la gráfica de f, entonces $(-x, -y)$ también está en la gráfica de f. ¿Cómo se relacionan las rectas pendientes de las tangentes en (x, y) y $(-x, -y)$?

47. Se tiene un semicírculo cuya ecuación es $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Explique cómo se puede encontrar la derivada $f'(x)$ usando sólo la propiedad geométrica que el radio de un círculo es perpendicular a la tangente en un punto (x, y) del círculo.

48. Se tiene un semicírculo cuya ecuación es $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Use la ecuación (3) para determinar la derivada $f'(x)$, y compare su resultado con el del problema 47.

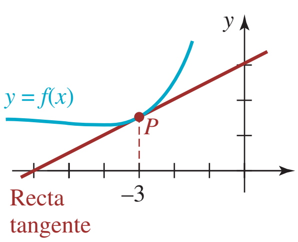


FIGURA 2.9.8 Gráfica del problema 49

49. Busque la ecuación de la línea de tangente que se muestra en color rojo en la **FIGURA 2.9.8** de la gráfica de $y = f(x)$ en el punto P. ¿Qué son $f(-3)$ y $f'(-3)$?

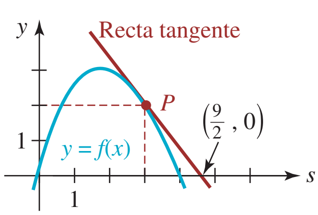


FIGURA 2.9.9 Gráfica del problema 50

50. Busque la ecuación de la línea de tangente que se muestra en color rojo en la **FIGURA 2.9.9** de la gráfica de $y = f(x)$ en el punto P. ¿Qué es $f'(3)$? ¿Cuál es el punto de intersección y de la línea de tangente?

CAPÍTULO 2

Ejercicios de repaso

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-8.

En los problemas 1 a 20, llene los espacios en blanco.

1. Si $f(x) = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2 + 2}$, entonces $(\frac{1}{2}, \_\_\_\_\_\_)$ es un punto en la gráfica de f.

2. Si $f(x) = \dfrac{Ax}{10x - 2}$ y $f(2) = 3$, entonces $A =$ ______.

3. El dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5 - x}}$ es ______.

4. El contradominio de la función $f(x) = |x| - 10$ es ______.

5. Los ceros de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ son ______.

6. Si la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y, $f(-x) =$ ______.

7. Las rectas $2x - 5y = 1$ y $kx + 3y + 3 = 0$ son paralelas si $k =$ ______.

8. Las intersecciones con los ejes coordenados de la recta $-4x + 3y - 48 = 0$ son _____.

9. La gráfica de una función lineal en la cual $f(-2) = 0$ y $f(0) = -3$ tiene la pendiente $m =$ _____.

10. Una ecuación de una recta que pasa por $(1, 2)$ y es perpendicular a $y = 3x - 5$, es ________.

11. Las intersecciones con los ejes coordenados de la parábola $f(x) = x^2 - 2x - 1$ son __________.

12. El contradominio de la función $f(x) = -x^2 + 6x - 21$ es ________.

13. La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, en la cual $f(0) = 7$, y cuya única intersección con el eje x es $(-2, 0)$, es $f(x) =$ _______.

14. Si $f(x) = x + 2$ y $g(x) = x^2 - 2x$, entonces $(f \circ g)(-1) =$ ________.

15. El vértice de la gráfica de $f(x) = x^2$ es $(0, 0)$. Por consiguiente, el vértice de la gráfica de $y = -5(x - 10)^2 + 2$ está en _________.

16. Si $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 4}$ es la inversa de una función uno a uno f, sin determinar f determine el dominio de f: _________ y el contradominio de f: ___________.

17. La intersección con el eje x de una función uno a uno f es $(5, 0)$, por lo que la intersección con el eje y de f^{-1} es ________.

18. La inversa de $f(x) = \dfrac{x - 5}{2x + 1}$ es $f^{-1} =$ ______.

19. El punto $(a, 16a)$ está en la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3, & x < 0 \\ x^3, & 0 \le x \le 1 \\ x^2 + 64, & x > 1 \end{cases}$$

para $a =$ _____.

20. Para $f(x) = [\![x + 2]\!] - 4$, $f(-5.3) =$ ______.

En los problemas 21 a 40 conteste cierto o falso.

21. Los puntos $(0, 3)$, $(2, 2)$ y $(6, 0)$ son colineales. _______

22. La gráfica de una función sólo puede tener una intersección con el eje y. _________

23. Si f es una función tal que $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$. _________

24. Ninguna función no cero f puede ser simétrica con respecto al eje x. ________

25. El dominio de $f(x) = (x - 1)^{1/3}$ es $(-\infty, \infty)$. _______

26. Si $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{x + 2}$, entonces el dominio de g/f es $[-2, \infty)$. ________

27. Una función f es uno a uno si nunca asume el mismo valor dos veces. _______

28. Dos rectas con pendientes positivas no pueden ser perpendiculares. _____

29. La ecuación de una recta vertical que pasa por $(2, -5)$ es $x = 2$. _________

30. Un punto de intersección de las gráficas de f y f^{-1} debe estar en la recta $y = x$. ________
31. La función uno a uno $f(x) = 1/x$ tiene la propiedad que $f = f^{-1}$. ________
32. La función $f(x) = 2x^2 + 16x - 2$ decrece en el intervalo $[-7, -5]$. ________
33. Ninguna función par puede ser uno a uno. ________
34. Todas las funciones impares son uno a uno. ________
35. Si una función f es uno a uno, entonces $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. ________
36. Si f es una función creciente en un intervalo que contiene a $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. ________
37. La función $f(x) = |x| - 1$ es decreciente en el intervalo $[0, \infty)$. ________
38. Para composición de funciones, $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.
39. Si la intersección de la gráfica de una función con el eje y es $(0, 1)$, la intersección con el eje y para la gráfica de $y = 4 - 3f(x)$ es $(0, 1)$. ________
40. Para toda función f, $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. ________

En los problemas 41 y 42 identifique dos funciones, f y g, tales que $h = f \circ g$.

41. $h(x) = \dfrac{(3x - 5)^2}{x^2}$

42. $h(x) = 4(x + 1) - \sqrt{x + 1}$

43. Escriba la ecuación de cada función nueva si la gráfica de $f(x) = x^3 - 2$ es
a) desplazada 3 unidades hacia la izquierda.
b) desplazada 5 unidades hacia abajo.
c) desplazada 1 unidad hacia la derecha, y 2 unidades hacia arriba.
d) reflejada en el eje x.
e) reflejada en el eje y.
f) estirada verticalmente un factor de 3.

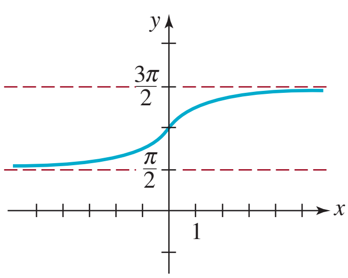


FIGURA 2.E.1 Gráfica del problema 44

44. La FIGURA 2.E.1 muestra la gráfica de una función f cuyo dominio es $(-\infty, \infty)$. Trace la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = f(x) - \pi$

b) $y = f(x - 2)$

c) $y = f(x + 3) + \dfrac{\pi}{2}$

d) $y = -f(x)$

e) $y = f(-x)$

f) $y = 2f(x)$

En los problemas 45 y 46, use la gráfica de la función uno a uno f de la figura 2.E.1.

45. Describa el dominio y el contradominio de f^{-1}.
46. Trace la gráfica de f^{-1}.
47. Exprese $y = x - |x| + |x - 1|$ como función definida en intervalos. Trace la gráfica de la función.
48. Trace la gráfica de la función $y = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$. Indique los números para los que la función es discontinua.

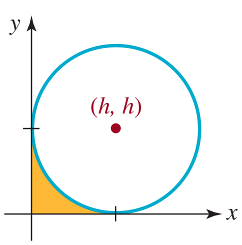


FIGURA 2.E.2 Círculo del problema 53

En los problemas 49 y 50, examine la gráfica de la función f e indique el dominio de la función g.

49. $f(x) = x^2 - 6x + 10, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$

50. $f(x) = -x^2 + 7x - 6, \quad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 7x - 6}}$

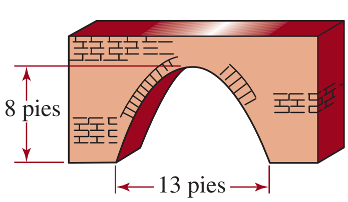


FIGURA 2.E.3 Arco del problema 54

En los problemas 51 y 52, la función dada f es uno a uno. Determine f^{-1}.

51. $f(x) = (x + 1)^3$

52. $f(x) = x + \sqrt{x}$

53. Exprese el área de la región sombreada de la FIGURA 2.E.2 en función de h.
54. Determine la función cuadrática que describa al arco parabólico de la FIGURA 2.E.3.

55. El diámetro d de un cubo es la distancia entre vértices opuestos, como se ve en la FIGURA 2.E.4. Exprese el diámetro d en función de la longitud s de un lado del cubo; primero exprese la longitud y de la diagonal de la figura 2.R.4, en función de s.

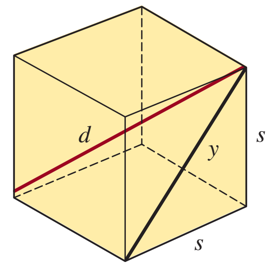


FIGURA 2.E.4 Cubo del problema 55

56. Un cilindro circular de altura h se inscribe en una esfera de radio 1, como se ve en la FIGURA 2.E.5. Exprese el volumen del cilindro en función de h.

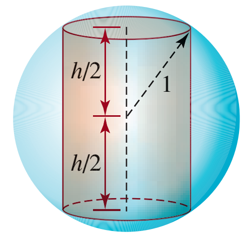


FIGURA 2.E.5 Cilindro inscrito del problema 56

57. Un diamante de béisbol es un cuadrado que tiene 90 pies por lado. Vea la FIGURA 2.E.6. Cuando un jugador logra un hit *home run*, trota en torno al diamante con una velocidad de 6 pies/s.

a) Cuando el jugador trota entre el *plato* y la primera base, exprese su distancia al *plato* en función del tiempo t, donde $t = 0$ corresponde al momento en que dejó el *plato*; esto es, $0 \leq t \leq 15$.

b) Cuando el jugador trota entre el *plato* y la primera base, exprese su distancia a la segunda base, en función del tiempo t, donde $0 \leq t \leq 15$.

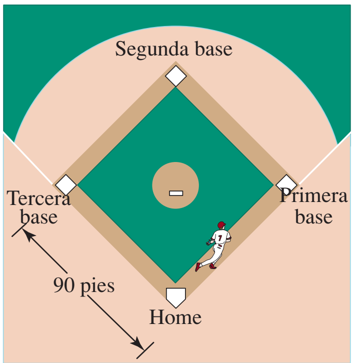


FIGURA 2.E.6 Jugador de béisbol en el problema 57

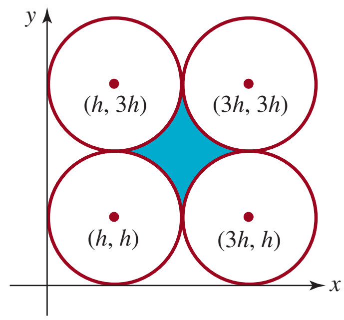


FIGURA 2.E.7 Círculos del problema 58

58. Vea los cuatro círculos de la FIGURA 2.E.7. Exprese el área de la región sombreada entre ellos, en función de h.

En los problemas 59 a 62, determine la función objetivo del problema de cálculo que se indica. *No* trate de resolver el problema.

59. Calcule el valor mínimo de la suma de 20 veces un número positivo, y 5 veces el recíproco de ese número.

60. Un ranchero quiere usar 100 m de cerca para hacer un cercado diagonal que una dos muros existentes, que se encuentran y forman un ángulo recto. ¿Cómo debe hacer para que el área encerrada por los muros y la cerca sea máxima?

61. El campo de atletismo que se ve en el contorno negro de la FIGURA 2.E.8 debe consistir en dos partes paralelas, rectas, y dos semicirculares. La longitud de la pista debe ser de 2 km. Calcule el diseño de la pista para que el terreno rectangular encerrado por ella sea máximo.

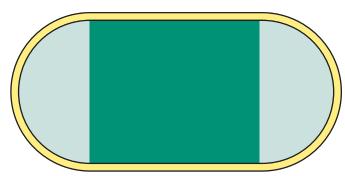


FIGURA 2.E.8 Campo de atletismo del problema 61

62. Se va a construir un oleoducto desde una refinería, cruzando una ciénaga, para llegar a los tanques de almacenamiento. Vea la FIGURA 2.E.9. El costo de construcción es de \$25 000 por milla en la ciénaga, y \$20 000 por milla en tierra firme. ¿Cómo se debe trazar el oleoducto para que el costo de construcción sea mínimo?

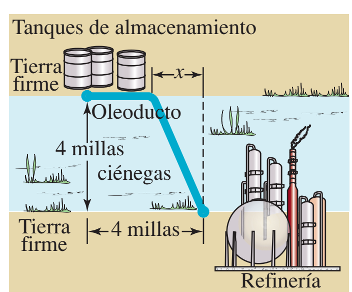


FIGURA 2.E.9 Oleoducto del problema 62

En los problemas 63 a 66, determine $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ de la función indicada.

Deduzca una ecuación de la tangente en el valor indicado de x.

63. $f(x) = -3x^2 + 16x + 12, \quad x = 2$

64. $f(x) = x^3 - x^2, \quad x = -1$

65. $f(x) = \dfrac{-1}{2x^2}, \quad x = \frac{1}{2}$

66. $f(x) = x + 4\sqrt{x}, \quad x = 4$

Contenido del capítulo

3.1 Funciones polinomiales

3.2 División de funciones polinomiales

3.3 Raíces y factores de funciones polinomiales

3.4 Raíces reales de funciones polinomiales

3.5 Funciones racionales

3.6 Fracciones parciales

3.7 Avance DE CÁLCULO El problema del área

Capítulo 3 Ejercicios de repaso

Funciones polinomiales y funciones racionales

3

3.1 Funciones polinomiales

☐ **Introducción** En el capítulo 2 graficamos funciones como $y = 3$, $y = 2x - 1$, $y = 5x^2 - 2x + 4$ y $y = x^3$. Esas funciones, en las que la variable x está elevada a una *potencia entera no negativa*, son ejemplos de un tipo más general de función, llamado **función polinomial**. En esta sección, nuestra meta es presentar algunos lineamientos generales para graficar esas funciones. Primero, presentaremos la definición formal de una función polinomial (o polinómica).

FUNCIÓN POLINOMIAL

Una **función polinomial** $y = f(x)$ es una función que tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad (1)$$

en donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots a_2, a_1$ y a_0 son constantes reales, y n es un entero no negativo.

El **dominio** de toda función polinomial f es el conjunto de todos los números reales $(-\infty, \infty)$.

Las siguientes funciones *no* son funciones polinomiales:

$$y = 5x^2 - 3\overset{\text{no es un entero no negativo}}{x^{-1}} \quad \text{y} \quad y = 2\overset{\text{no es un entero no negativo}}{x^{1/2}} - 4.$$

La función

$$\overbrace{y = 8x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 6x + 4}^{\text{potencias enteras no negativas}}$$

es polinomial, y en ella se interpreta que el número 4 es el coeficiente de x^0. Como 0 es un entero no negativo, una función constante como $y = 3$ es un polinomio, porque es lo mismo que $y = 3x^0$.

☐ **Grado** Las funciones polinomiales se clasifican por su grado. La mayor potencia de x de un polinomio se llama **grado**. Entonces, si $a_n \neq 0$, se dice que $f(x)$ en la ecuación (1) tiene el **grado n**. El número a_n en (1) se llama **coeficiente principal** y a_0 se llama **término constante** de la función polinomial. Por ejemplo,

$$f(x) = \underset{\text{coeficiente principal}}{3}x^{\overset{\text{grado}}{5}} - 4x^3 - 3x + \underset{\text{término constante}}{8},$$

es un polinomio de grado 5. Ya hemos estudiado polinomios especiales en las secciones 2.3 y 2.4. Los polinomios de grados $n = 0$, $n = 1$ y $n = 2$ son, respectivamente,

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = a_0, & \textbf{función constante} \\ f(x) = a_1 x + a_0, & \textbf{función lineal} \end{array}\right\} \text{Sección 2.3}$$
$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad \textbf{función cuadrática}\} \text{ Sección 2.4}$$

A su vez, los polinomios de grados $n = 3$, $n = 4$ y $n = 5$ se llaman, respectivamente, **funciones cúbicas**, **de cuarto orden** y **de quinto orden**. La función constante $f(x) = 0$ se llama **polinomio nulo**.

□ Gráficas

Recordemos que la gráfica de una función constante $f(x) = a_0$ es una **recta horizontal**; la gráfica de una función lineal $f(x) = a_1 x + a_0$ es una **recta con pendiente** $\boldsymbol{m = a_1}$, y la gráfica de una función cuadrática $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ es una **parábola**. Vea las secciones 2.3 y 2.4. Esas declaraciones descriptivas no pueden continuar para gráficas de funciones polinomiales de grado mayor. ¿Cuál es la forma de la gráfica de una función polinomial de quinto grado? Sucede que la gráfica de una función polinomial de grado $n \geq 3$ puede tener varias formas posibles. En general, para graficar una función polinomial f de grado $n \geq 3$ se necesita el cálculo, o bien usar una herramienta graficadora. Sin embargo, veremos en la descripción siguiente que al determinar

- desplazamiento,
- comportamiento en los extremos,
- simetría,
- intersecciones y
- comportamiento local

de la función, en algunos casos se puede bosquejar rápidamente una gráfica razonable de una función polinomial de mayor grado, y al mismo tiempo reducir al mínimo el graficado de puntos. Antes de explicar cada uno de estos conceptos regresaremos a la noción de la función potencia, que presentamos primero en la sección 2.2.

□ Función potencia

Un caso especial de la función potencia (vea la sección 2.2) es la **función polinomial de un solo término** o **monomial**,

$$f(x) = x^n, \qquad n \text{ entero positivo.} \tag{2}$$

Las gráficas de f de grados $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 se ven en la **FIGURA 3.1.1**. Lo interesante acerca de (2) es que todas las gráficas con n impar son básicamente iguales. Las características notables son que las gráficas son simétricas respecto al origen, y se aplanan cada vez más cerca del origen a medida que aumenta el grado n. Vea las figuras 3.1.1*a*) a 3.1.1*c*). Una observación parecida es válida en el caso de las gráficas de (2), de n par, excepto, naturalmente, que las gráficas son simétricas con respecto al eje y. Vea las figuras 3.3.1*d*) a 3.1.1*f*).

□ Gráficas desplazadas

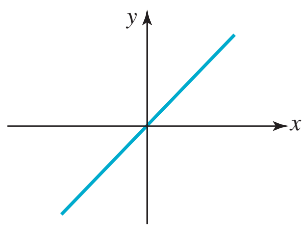
Recuerde, de la sección 2.2, que para $c > 0$, las gráficas de las funciones polinomiales de la forma

$$y = ax^n + c, \qquad y = ax^n - c$$

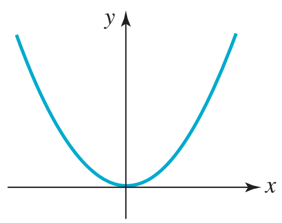
y

$$y = a(x + c)^n, \qquad y = a(x - c)^n$$

se pueden obtener con desplazamientos verticales y horizontales de la gráfica de $y = ax^n$. También, si el primer coeficiente a es positivo, la gráfica de $y = ax^n$ es un estiramiento vertical de la gráfica del polinomio básico de un solo término $f(x) = x^n$, o bien una compresión vertical de ella. Cuando a es negativo, también se produce una reflexión en el eje x.



a) $n = 1, f(x) = x$ *b)* $n = 3, f(x) = x^3$ *c)* $n = 5, f(x) = x^5$



d) $n = 2, f(x) = x^2$ *e)* $n = 4, f(x) = x^4$ *f)* $n = 6, f(x) = x^6$

FIGURA 3.1.1 Breve catálogo de la función potencia $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots, 6$

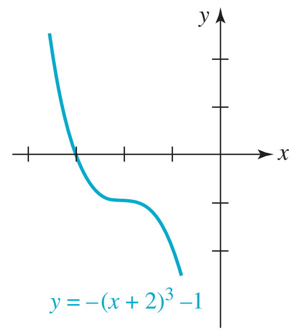


FIGURA 3.1.2 Gráfica reflejada y desplazada del ejemplo 1

EJEMPLO 1 Gráficas de funciones polinomiales desplazadas

La gráfica de $y = -(x + 2)^3 - 1$ es la de $f(x) = x^3$ reflejada en el eje x, desplazada 2 unidades hacia la izquierda y después desplazada verticalmente 1 unidad hacia abajo. Primero repase la figura 3.1.1*b*), y después vea la **FIGURA 3.1.2**. ■

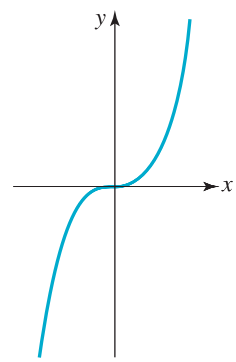


FIGURA 3.1.3 Gráfica misterio #1

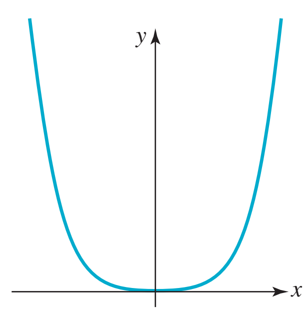


FIGURA 3.1.4 Gráfica misterio #2

□ Comportamiento en los extremos

Es importante conocer la forma de una función polinomial con un solo término, $f(x) = x^n$, por otra razón. Primero, examine las gráficas generadas por computadora de las **FIGURAS 3.1.3** y **3.1.4**. Aunque la primera se parece a las gráficas de las figuras 3.1.1*b*) y 3.1.1*c*) y la segunda se asemeja a las de la figura 3.1.1*d*) a *f*), las funciones que se grafican en estas dos figuras *no son* alguna función potencia $f(x) = x^n$ impares, ni $f(x) = x^n$ pares. Por ahora no indicaremos qué funciones específicas son, pero baste decir que ambas fueron graficadas en el intervalo $[-1\,000, 1\,000]$. De lo que se trata es esto: la función cuya gráfica aparece en la figura 3.1.3 podría ser casi *cualquier* función polinomial

$$f(x) = a_n x^n \boxed{+ a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0} \tag{3}$$

con $a_n > 0$, de grado *n impar*, $n = 3, 5, \ldots$ cuando se grafica en $[-1\,000, 1\,000]$. De igual modo, la gráfica de la figura 3.1.4 podría ser la de cualquier función polinomial (1) con $a_n > 0$, de grado *n par*, $n = 2, 4, \ldots$ cuando se grafica en un intervalo grande en torno al origen. Como indica el siguiente teorema, los términos encerrados en el rectángulo de color, en (3), son irrelevantes cuando se considera globalmente una gráfica de una función polinomial, esto es, cuando $|x|$ es grande. La forma en que se comporta una función polinomial f cuando $|x|$ es muy grande se llama **comportamiento en los extremos**.

COMPORTAMIENTO EN LOS EXTREMOS

Para $|x|$ muy grande, esto es, cuando $x \to -\infty$ y $x \to \infty$, la gráfica de una función polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, se asemeja a la gráfica de $y = a_n x^n$.

Para saber por qué la gráfica de una función polinomial como $f(x) = -2x^3 + 4x^2 + 5$ se parece a la gráfica del polinomio $y = -2x^3$, de un solo término, cuando $|x|$ es grande, se factoriza la mayor potencia de x, esto es, x^3:

los dos términos se vuelven despreciables cuando $|x|$ es grande

$$f(x) = x^3\left(-2 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^3}\right). \tag{4}$$

Si se deja que $|x|$ crezca sin límite, tanto $4/x$ como $5/x^3$ se pueden hacer tan cercanos a 0 como se quiera. Así, cuando $|x|$ es grande, los valores de la función f en (4) se aproximan mucho a los valores de $y = -2x^3$.

Sólo puede haber cuatro tipos de comportamiento en los extremos de una función polinomial f. Aunque dos de esos comportamientos ya se ilustraron en las figuras 3.1.3 y 3.1.4, los incluimos de nuevo en el resumen gráfico de la figura 3.1.5. Para interpretar las flechas de la **FIGURA 3.1.5**, examine la figura 3.1.5*a*). La posición y la dirección de la flecha izquierda (la flecha izquierda apunta hacia abajo) indican que cuando $x \to -\infty$, los valores de $f(x)$ son negativos y de gran magnitud. Dicho de otra manera, la gráfica se dirige hacia abajo cuando $x \to -\infty$. De igual modo, la posición y la dirección de la flecha derecha (la flecha derecha apunta hacia arriba) indican que la gráfica se dirige hacia arriba cuando $x \to \infty$.

Resumen gráfico del comportamiento en los extremos de funciones polinomiales

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

n entero positivo impar

n entero positivo par

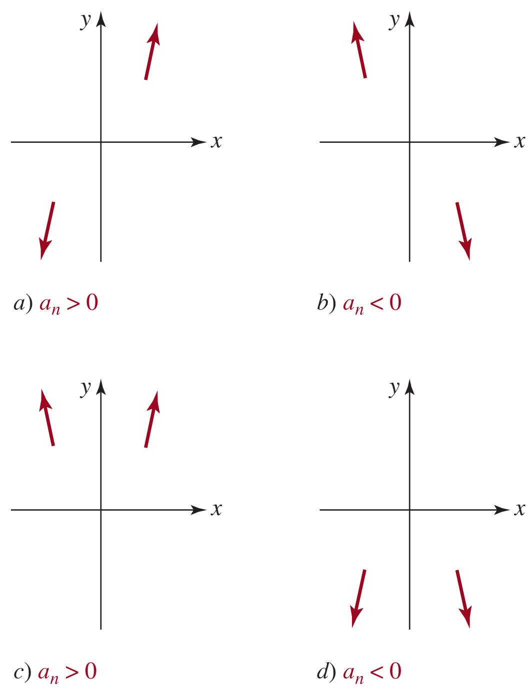


FIGURA 3.1.5 El comportamiento en los extremos de un polinomio f depende de su grado n y del signo de su primer coeficiente, a_n

Los huecos entre las flechas de la figura 3.1.5 corresponden a cierto intervalo en torno al origen. En esos huecos, la gráfica de f tiene **comportamiento local**, en otras palabras, muestra las características de una función polinomial de determinado grado. Este comportamiento local incluye las intersecciones con los ejes coordenados de la gráfica, el comportamiento de la gráfica en las intersecciones con el eje x, los puntos críticos de la gráfica y la simetría observable de ella (si es que la tiene). En una función polinomial f un **punto crítico** es un punto $(c, f(c))$ en el que f cambia de dirección; esto es, la función f cambia de creciente a decreciente, o viceversa. La gráfica de una función polinomial de grado n puede tener hasta $n - 1$ puntos críticos. En cálculo, un punto crítico se llama **extremo relativo** o **extremo local**. Un extremo local puede ser un **máximo** o un **mínimo**. Si $(c, f(c))$ es un punto crítico o un extremo local, entonces, en una cercanía de $x = c$, la función $f(c)$ tiene el valor *máximo* (máximo local) o *mínimo* (mínimo local). En un máximo local $(c, f(c))$, la gráfica de un polinomio f debe cambiar de creciente inmediatamente a la izquierda de $x = c$, a decreciente inmediatamente a la derecha de $x = c$, mientras que en un mínimo local $(c, f(c))$ la función f cambia de decreciente a creciente. Estos conceptos se ilustrarán en el ejemplo 2.

□ **Simetría** Es fácil indicar, por inspección, las funciones polinomiales cuyas gráficas tienen simetría con respecto al eje y o al origen. Las palabras "par" e "impar" en las funciones tienen un significado especial para las funciones polinomiales. Recuerde que una función par es aquella en la cual $f(-x) = f(x)$, y que una función impar es una en la que $f(-x) = -f(x)$. Estas dos condiciones son válidas para las funciones polinomiales en las que todas las potencias de x son enteros pares y enteros impares, respectivamente. Por ejemplo,

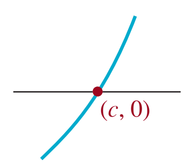
$$\underbrace{f(x) = \overbrace{5x^4 - 7x^2}^{\text{potencias pares}}}_{\text{función par}} \qquad \underbrace{f(x) = \overbrace{10x^5 + 7x^3 + 4x}^{\text{potencias impares}}}_{\text{función impar}} \qquad \underbrace{f(x) = \overbrace{-3x^7 + 2x^4 + x^3 + 2}^{\text{potencias diversas}}}_{\text{ni par ni impar}}$$

Una función como $f(x) = 3x^6 - x^4 + 6$ es par, porque las potencias obvias son enteros pares; el término constante 6 es, en realidad, $6x^0$, y 0 es entero par no negativo.

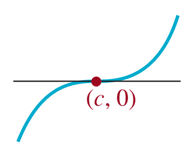
□ **Intersecciones** La gráfica de toda función polinomial f cruza el eje y, porque $x = 0$ está en el dominio de la función. El punto de cruce con el eje y es $(0, f(0))$. Recuerde que un número c es una **raíz** de una función f si $f(c) = 0$. En esta descripción supondremos que c es una raíz real. Si $x - c$ es un factor de una función polinomial f, es decir, si $f(x) = (x - c)q(x)$, donde $q(x)$ es otro polinomio, entonces es claro que $f(c) = 0$ y que el punto correspondiente de la gráfica es $(c, 0)$. Entonces, las raíces reales de una función polinomial son las coordenadas x de las intersecciones con el eje x de su gráfica con el eje x. Si $(x - c)^m$ es un factor de f, donde $m > 1$ es un entero positivo, y si $(x - c)^{m+1}$ *no es* un factor de f, se dice entonces que es una **raíz repetida**, o con mayor propiedad, una **raíz de multiplicidad *m***. Por ejemplo, $f(x) = x^2 - 10x + 25$ equivale a $f(x) = (x - 5)^2$. Por consiguiente, 5 es una raíz repetida, o una raíz de multiplicidad 2. Cuando $m = 1$, c es una **raíz simple**. Por ejemplo, $-\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ son raíces simples de $f(x) = 6x^2 - x - 1$, porque f se puede expresar como $f(x) = 6(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2})$. El comportamiento de la gráfica de f en un cruce con el eje x $(c, 0)$, depende de que c sea una raíz simple o una raíz de multiplicidad $m > 1$, donde m es un entero par o impar.

- Si c es una raíz simple, la gráfica de f atraviesa directamente el eje x en $(c, 0)$. Vea la FIGURA 3.1.6*a*).
- Si c es una raíz de multiplicidad impar $m = 3, 5, \ldots$, la gráfica de f atraviesa el eje x, pero está aplanada en $(c, 0)$. Vea la figura 3.1.6*b*).
- Si c es una raíz de multiplicidad par $m = 2, 4, \ldots$, la gráfica de f es tangente al eje x, o lo toca, en $(c, 0)$. Vea la figura 3.1.6*c*).

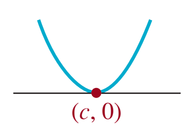
En el caso en que c sea una raíz simple, o una raíz de multiplicidad impar, $m = 3, 5, \ldots$ $f(x)$ cambia de signo *en* $(c, 0)$, mientras que si c es una raíz de multiplicidad par, $m = 2, 4, \ldots$, $f(x)$ no cambia de signo de $(c, 0)$. Observe que, dependiendo del signo del primer coeficiente de la función polinomial, las gráficas de la figura 3.1.6 se podrían reflejar en el eje x. Por



a) Raíz simple



b) Raíz de multiplicidad impar $m = 3, 5, \ldots$



c) Raíz de multiplicidad par $m = 2, 4, \ldots$

FIGURA 3.1.6 Intersecciones de una función polinomial $f(x)$ con el eje x

ejemplo, en una raíz de multiplicidad par la gráfica de f podría ser tangente al eje x, desde abajo de ese eje.

EJEMPLO 2 Gráfica de una función polinomial

Graficar $f(x) = x^3 - 9x$.

Solución Veamos algo que se debe entender para bosquejar la gráfica de f:

Comportamiento en los extremos: Si no se tienen en cuenta todos los términos, salvo el primero, se ve que la gráfica de f se parece a la de $y = x^3$ para $|x|$ grande. Esto es, la gráfica baja hacia la izquierda cuando $x \to -\infty$, y sube hacia la derecha cuando $x \to \infty$, como se ve en la figura 3.1.5*a*).

Simetría: Como todas las potencias son enteros impares, f es una función impar. La gráfica de f es simétrica respecto al origen.

Intersecciones: $f(0) = 0$, y entonces el cruce con el eje y es (0, 0). Al igualar $f(x) = 0$ se ve que se debe resolver $x^3 - 9x = 0$. Esto se factoriza

$$x\overset{\substack{\text{diferencia de cuadrados}\\ \downarrow}}{(x^2 - 9)} = 0 \quad \text{o sea} \quad x(x - 3)(x + 3) = 0$$

se ve que las raíces de f son $x = 0$ y $x = \pm 3$. Los cruces con el eje x están en (0, 0), $(-3, 0)$ y (3, 0).

Gráfica: De izquierda a derecha, la gráfica sube (f es creciente) desde el tercer cuadrante y pasa por $(-3, 0)$, porque -3 es una raíz simple. Aunque la gráfica sube al pasar por esta intersección, debe regresar hacia abajo (f decreciente) en algún punto del segundo cuadrante, para poder atravesar (0, 0). Como la gráfica es simétrica con respecto al origen, su comportamiento es exactamente el contrario en los cuadrantes primero y cuarto. Vea la **FIGURA 3.1.7**. ■

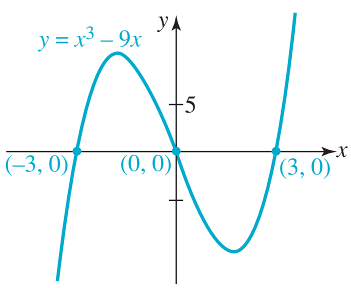


FIGURA 3.1.7 Gráfica de la función del ejemplo 2

En el ejemplo 2, la gráfica de f tiene dos puntos críticos. En el intervalo $[-3, 0]$ hay un máximo local, y en el intervalo $[0, 3]$ hay un mínimo local. No tratamos de localizar con precisión esos puntos; eso es algo que, en general, necesitaría las técnicas del cálculo. Lo mejor que podemos hacer con las matemáticas de precálculo, para refinar la gráfica, es recurrir a graficar puntos adicionales en los intervalos de interés. Por cierto, $f(x) = x^3 - 9x$ es la función del intervalo $[-1\,000, 1\,000]$ cuya gráfica se ve en la figura 3.1.3.

EJEMPLO 3 Gráfica de una función polinomial

Graficar $f(x) = (1 - x)(x + 1)^2$.

Solución Se hace la multiplicación y resulta $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$.

Comportamiento en los extremos: Vemos, en el renglón anterior, que la gráfica de f se parece a la gráfica de $y = -x^3$ para $|x|$ grande, justo lo contrario del comportamiento en los extremos de la función del ejemplo 2. Vea la figura 3.1.5*b*).

Simetría: Como se ve de $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$, hay potencias pares e impares de x. Por consiguiente, f ni es par ni impar; su gráfica no posee simetría respecto al eje y o al origen.

Intersecciones: $f(0) = 1$, y entonces la intersección con el eje y está en (0, 1). En la forma factorizada de $f(x)$ del enunciado se ve que las intersecciones con el eje x están en $(-1, 0)$ y en (1, 0).

Gráfica: De izquierda a derecha, la gráfica baja (f decreciente) desde el segundo cuadrante y entonces, como -1 es una raíz de multiplicidad 2, la gráfica es tangente al eje x en $(-1, 0)$. Entonces la gráfica sube (f es creciente) conforme pasa a través de la intersección con el eje y (0, 1). En algún punto del intervalo $[-1, 1]$, la gráfica se va hacia abajo (f decreciente) y, como 1 es una raíz simple, atraviesa el eje x en (1, 0), dirigiéndose hacia abajo, en el cuarto cuadrante. Vea la **FIGURA 3.1.8**. ■

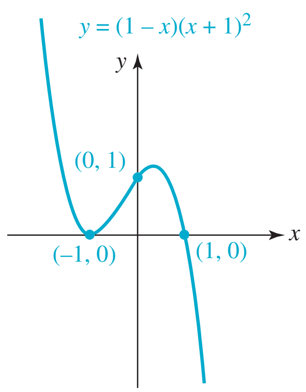


FIGURA 3.1.8 Gráfica de la función del ejemplo 3

En el ejemplo 3 de nuevo hay dos puntos críticos. Debe quedar en claro que el punto $(-1, 0)$ es un punto crítico (f cambia de decreciente a creciente en -1) y $f(-1) = 0$ es un mínimo relativo de f. También hay un punto crítico (f cambia de creciente a decreciente en ese punto) en el intervalo $[-1, 1]$ y el valor de la función en este punto es un máximo relativo de f.

EJEMPLO 4 Raíces de multiplicidad dos

Graficar $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$.

Solución Antes de seguir, obsérvese que el lado derecho de f es un cuadrado perfecto. Esto es, $f(x) = (x^2 - 2)^2$. Como $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, de acuerdo con las leyes de los exponentes se puede escribir

$$f(x) = (x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2. \tag{5}$$

Comportamiento en los extremos: Al inspeccionar $f(x)$ se ve que su gráfica se parece a la de $y = x^4$ ante $|x|$ grandes. Esto es, la gráfica sube hacia la izquierda cuando $x \to -\infty$ y sube hacia la derecha cuando $x \to \infty$, como se ve en la figura 3.1.5*c*).

Simetría: Como $f(x)$ sólo contiene potencias pares de x, es una función par, y entonces su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

Intersecciones: $f(0) = 4$, por lo que la intersección con el eje y está en $(0, 4)$. Por inspección de (5) se ve que las intersecciones con el eje x están en $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$.

Gráfica: De izquierda a derecha, la gráfica baja desde el segundo cuadrante y entonces, como $-\sqrt{2}$ es una raíz de multiplicidad 2, la gráfica toca al eje x en $(-\sqrt{2}, 0)$. Después, la gráfica sube desde aquí hasta la intersección con el eje y en $(0, 4)$. Después, se aplica la simetría respecto al eje y para completar la gráfica en el primer cuadrante. Vea la **FIGURA 3.1.9**. ■

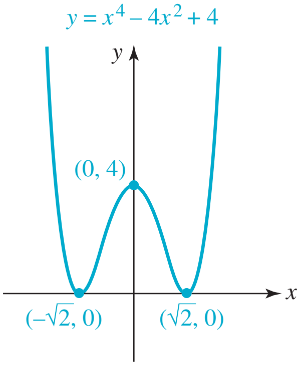


FIGURA 3.1.9 Gráfica de la función del ejemplo 4

En el ejemplo 4, la gráfica de f tiene tres puntos críticos. De acuerdo con la multiplicidad par de la raíz, y de la simetría respecto al eje y, se puede deducir que las intersecciones con el eje x en $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$ son puntos críticos, y $f(-\sqrt{2}) = 0$ y $f(\sqrt{2}) = 0$ son mínimos locales, y que la intersección con el eje y en $(0, 4)$ es un punto crítico y $f(0) = 4$ es un máximo local.

EJEMPLO 5 Raíz de multiplicidad tres

Graficar $f(x) = -(x + 4)(x - 2)^3$.

Solución

Comportamiento en los extremos: Por inspección de f se ve que su gráfica se parece a la gráfica de $y = -x^4$ para grandes valores de $|x|$. Este comportamiento de f en la frontera se ve en la figura 3.1.5*d*).

Simetría: La función f ni es par ni es impar. Se demuestra, en forma directa, que $f(-x) \neq f(x)$, y que $f(-x) \neq -f(x)$.

Intersecciones: $f(0) = (-4)(-2)^3 = 32$, así que el cruce con el eje y está en $(0, 32)$. Se ve, en la forma factorizada de $f(x)$, que los cruces con el eje x están en $(-4, 0)$ y $(2, 0)$.

Gráfica: De izquierda a derecha, la gráfica sube desde el tercer cuadrante y entonces, como -4 es una raíz simple, atraviesa directamente el eje x en $(-4, 0)$. En algún lugar del intervalo $[-4, 0]$, la función f debe cambiar de creciente a decreciente, para que su gráfica pase por la intersección con el eje y en $(0, 32)$. Después de que pasa por ese punto, la gráfica de esta función continúa decreciendo, pero como 2 es una raíz de orden tres, la gráfica se aplana al pasar por $(2, 0)$, y va hacia abajo en el cuarto cuadrante. Vea la **FIGURA 3.1.10**. ■

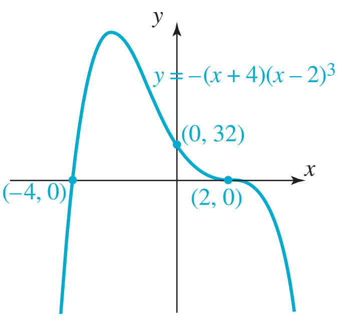


FIGURA 3.1.10 Gráfica de la función del ejemplo 5

Note que, en el ejemplo 5, como f es de grado 4, su gráfica podría tener hasta tres puntos críticos. Pero como se ve en la figura 3.1.10, esa gráfica sólo posee un punto crítico, y ese punto es un máximo local.

EJEMPLO 6 Raíces de multiplicidad dos y tres

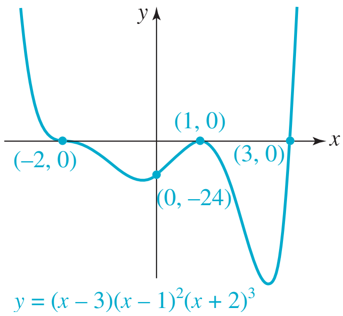


FIGURA 3.1.11 Gráfica de la función del ejemplo 6

Graficar $f(x) = (x - 3)(x - 1)^2(x + 2)^2$.

Solución La función f es de grado 6, por lo que su comportamiento en los extremos se parece a la gráfica de $y = x^6$ para $|x|$ grande. Vea la figura 3.1.5*c*). También, la función f ni es par ni es impar; su gráfica no tiene simetría respecto al eje y ni al origen. La intersección con el eje y está en $(0, f(0)) = (0, -24)$. De acuerdo con los factores de f se ve que las intersecciones con el eje x de la gráfica están en $(-2, 0)$, $(1, 0)$ y $(3, 0)$. Como -2 es una raíz de multiplicidad 3, la gráfica de f se aplana al pasar por $(-2, 0)$. Debido a que 1 es una raíz de multiplicidad 2, la gráfica de f es tangente al eje x en $(1, 0)$. Como 3 es una raíz simple, la gráfica de f atraviesa directamente al eje x en $(3, 0)$. Agrupando todas estas propiedades se obtiene la gráfica de la **FIGURA 3.1.11**. ■

En el ejemplo 6, en vista de que la función f es de grado 6, su gráfica podría tener hasta cinco puntos críticos. Pero como se ve en la figura 3.1.11, sólo hay tres puntos críticos. Dos de ellos son mínimos locales, y el restante, que es $(1, 0)$, el valor de la función $f(1) = 0$ es un máximo local.

☐ Teorema del valor intermedio

Una función polinomial f es una función continua. Tenga presente que eso quiere decir que la gráfica de $y = f(x)$ no tiene interrupciones, huecos ni agujeros en ella. El siguiente resultado es una consecuencia directa de la continuidad.

> **TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO**
>
> Supongamos que $y = f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si $f(a) \neq f(b)$ para $a < b$, y si N es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número c en el intervalo abierto (a, b) para el cual $f(c) = N$.

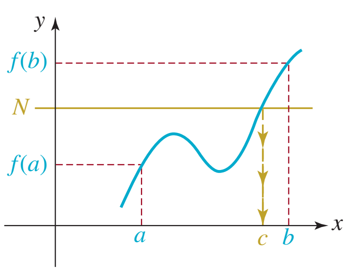
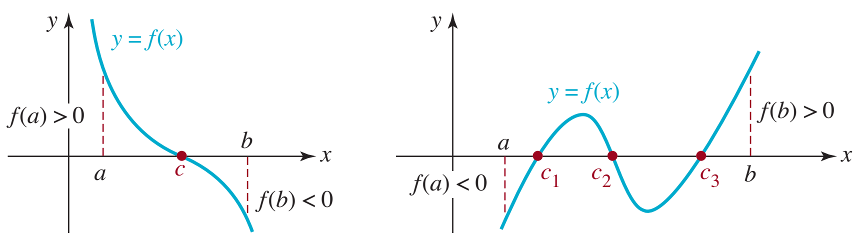


FIGURA 3.1.12 $f(x)$ toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$

Como se ve en la **FIGURA 3.1.12**, el teorema del valor intermedio sólo establece que $f(x)$ asume todos los valores entre los números $f(a)$ y $f(b)$. En particular, si los valores de la función $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, entonces si $N = 0$, se puede decir que hay al menos un número en (a, b) para el cual $f(c) = 0$. En otras palabras, si $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, o $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces $f(x)$ tiene al menos una raíz c en el intervalo (a, b). La factibilidad de esta conclusión se ilustra en la **FIGURA 3.1.13**.



a) Una raíz c en (a, b) *b*) Tres raíces c_1, c_2, c_3 en (a, b)

FIGURA 3.1.13 Ubicación de las raíces usando el teorema del valor intermedio

EJEMPLO 7 Uso del teorema del valor intermedio

Se tiene la función $f(x) = x^3 + x - 1$. Como f es continua en el intervalo $[-1, 1]$,

$$f(-1) = -3 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1) = 1 > 0,$$

y 0 satisface $-3 < 0 < 1$, de acuerdo con el teorema del valor intermedio se sabe que la gráfica de f debe cruzar la recta $y = 0$ (el eje x). Con más precisión, existe un número real c en el intervalo abierto $(-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$. ■

3.1 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-9.

En los problemas 1 a 8 proceda como en el ejemplo 1 y use las transformaciones para bosquejar la gráfica de la función polinomial indicada.

1. $y = x^3 - 3$

2. $y = -(x + 2)^3$

3. $y = (x - 2)^3 + 2$

4. $y = 3 - (x + 2)^3$

5. $y = (x - 5)^4$

6. $y = x^4 - 1$

7. $y = 1 - (x - 1)^4$

8. $y = 4 + (x + 1)^4$

En los problemas 9 a 12 determine si la función polinomial indicada *f* es par, impar o ni par ni impar. No haga la gráfica.

9. $f(x) = -2x^3 + 4x$

10. $f(x) = x^6 - 5x^2 + 7$

11. $f(x) = x^5 + 4x^3 + 9x + 1$

12. $f(x) = x^3(x + 2)(x - 2)$

En los problemas 13 a 18 indique a qué función polinomial de *a*) a *f*) corresponde cada gráfica.

a) $f(x) = x^2(x - 1)^2$

b) $f(x) = -x^3(x - 1)$

c) $f(x) = x^3(x - 1)^3$

d) $f(x) = -x(x - 1)^3$

e) $f(x) = -x^2(x - 1)$

f) $f(x) = x^3(x - 1)^2$

13.

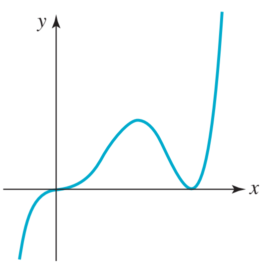


FIGURA 3.1.14 Gráfica del problema 13

14.

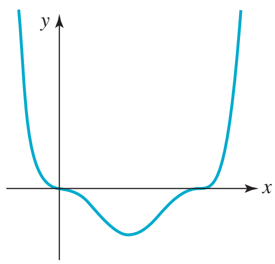


FIGURA 3.1.15 Gráfica del problema 14

15.

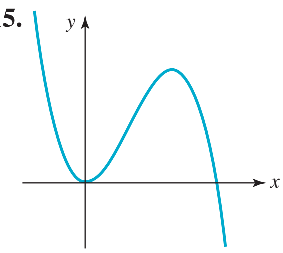


FIGURA 3.1.16 Gráfica del problema 15

16.

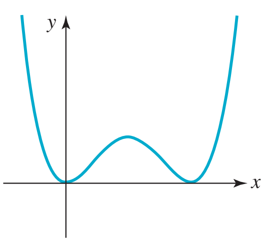


FIGURA 3.1.17 Gráfica del problema 16

17.

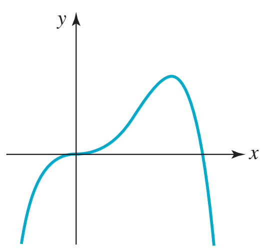


FIGURA 3.1.18 Gráfica del problema 17

18.

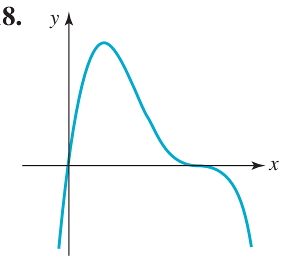


FIGURA 3.1.19 Gráfica del problema 18

En los problemas 19 a 22, construya una función polinomial *f* que tenga las propiedades dadas. No hay ninguna respuesta única.

19. *f* es de grado 4, su gráfica es simétrica con respecto al eje *y*, y el punto de intersección *y* es $(0, -6)$.

20. *f* es de grado 5, 0 es un cero de multiplicidad 3, su gráfica es simétrica con respecto al origen.

21. *f* tiene cuatro ceros reales, 1 es un cero sencillo, -3 es un cero de multiplicidad 2, se comportan como $y = -7x^4$ para valores grandes de $|x|$.

22. *f* es de grado 6, tiene cuatro ceros reales, 2 es un cero de multiplicidad 3, se comportan como $y = 2x^6$ para valores grandes de $|x|$, $f(0) = 8$.

En los problemas 23 a 44 proceda como en el ejemplo 2 y trace la gráfica de la función polinomial f indicada.

23. $f(x) = x^3 - 4x$
24. $f(x) = 9x - x^3$
25. $f(x) = -x^3 + x^2 + 6x$
26. $f(x) = x^3 + 7x^2 + 12x$
27. $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$
28. $f(x) = (2 - x)(x + 2)(x + 1)$
29. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$
30. $f(x) = x^2(x - 2)^2$
31. $f(x) = (x^2 - x)(x^2 - 5x + 6)$
32. $f(x) = x^2(x^2 + 3x + 2)$
33. $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 9)$
34. $f(x) = x^4 + 5x^2 - 6$
35. $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$
36. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$
37. $f(x) = x^4 + 3x^3$
38. $f(x) = x(x - 2)^3$
39. $f(x) = x^5 - 4x^3$
40. $f(x) = (x - 2)^5 - (x - 2)^3$
41. $f(x) = 3x(x + 1)^2(x - 1)^2$
42. $f(x) = (x + 1)^2(x - 1)^3$
43. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2(x + 2)^3(x - 2)^2$
44. $f(x) = x(x + 1)^2(x - 2)(x - 3)$

45. La gráfica de $f(x) = x^3 - 3x$ se ve en la **FIGURA 3.1.20**.
   a) Use la figura para obtener la gráfica de $g(x) = f(x) + 2$.
   b) Usando sólo la gráfica que obtuvo en el inciso *a*), escriba la ecuación, en forma *factorizada*, de $g(x)$. Entonces compruebe, multiplicando los factores, que su ecuación de $g(x)$ es igual que $f(x) + 2 = x^3 - 3x + 2$.

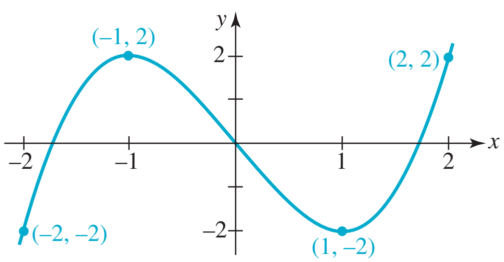


FIGURA 3.1.20 Gráfica del problema 45

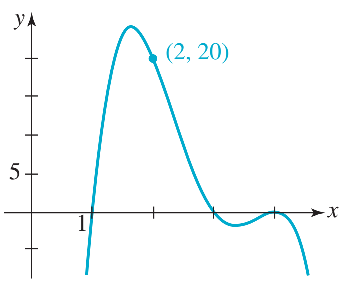


FIGURA 3.1.21 Gráfica del problema 46

46. Deduzca una función polinomial f del menor grado posible, cuya gráfica sea consistente con la de la **FIGURA 3.1.21**.

47. Calcule el valor de k tal que $(2, 0)$ sea un cruce de la gráfica con el eje de las x. La función es $f(x) = kx^5 - x^2 + 5x + 8$.

48. Calcule los valores de k_1 y k_2 tales que las intersecciones con el eje x de la gráfica de $f(x) = k_1x^4 - k_2x^3 + x - 4$ estén en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

49. Calcule el valor de k tal que el cruce con el eje y de la gráfica de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 14x - 3k$ esté en $(0, 10)$.

50. Se tiene la función polinomial $f(x) = (x - 2)^{n+1}(x + 5)$, donde n es un entero positivo. ¿Para qué valores de n la gráfica de f toca, pero no cruza, al eje x en $(2, 0)$?

51. Se tiene la función polinomial $f(x) = (x - 1)^{n+2}(x + 1)$, donde n es un entero positivo. ¿Para qué valores de n la gráfica de f cruza al eje x en $(1, 0)$?

52. Se tiene la función polinomial $f(x) = (x - 5)^{2m}(x + 1)^{2n-1}$, donde m y n son enteros positivos.
   a) ¿Para qué valores de m la gráfica de f cruza al eje x en $(5, 0)$?
   b) ¿Para qué valores de n la gráfica de f cruza al eje x en $(-1, 0)$?

En los problemas 53 y 54 aplique el teorema del valor intermedio para determinar si hay una raíz en la función f dada en los intervalos indicados. No trace la gráfica.

53. $f(x) = 60x^3 - 13x^2 - 145x - 28$; $[-2, -1], [-1, 0], [0, 1], [1, 2]$

54. $f(x) = 8x^4 - 23x^3 + 23x^2 - 26x + 15$; $[-1, 0], [0, 1], [1, 2], [2, 3]$

Problemas diversos relacionados con el cálculo

55. Construcción de una caja Se puede hacer una caja abierta con una pieza rectangular de cartón, quitando un cuadrado de longitud x de cada esquina, y doblando los lados hacia arriba. Vea la FIGURA 3.1.22. Si el cartón mide 30 cm por 40 cm, demuestre que el volumen de la caja resultante se determina mediante

$$V(x) = x(30 - 2x)(40 - 2x).$$

Trace la gráfica de $V(x)$ de $x > 0$. ¿Cuál es el dominio de la función V?

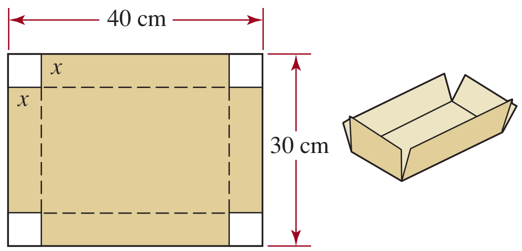


FIGURA 3.1.22 Caja del problema 55

56. Otra caja Para conservar su forma, la caja del problema 55 necesita cinta adhesiva, o algún sujetador para las esquinas. Una caja abierta que se mantiene firme puede hacerse sacando un cuadrado de longitud x de cada esquina de una pieza rectangular de cartón, cortando la línea llena y doblando en las líneas interrumpidas, que se ven en la FIGURA 3.1.23. Deduzca una función polinomial $V(x)$ que exprese el volumen de la caja resultante, si el cartón original mide 30 cm por 40 cm. Trace la gráfica de $V(x)$ de $x > 0$.

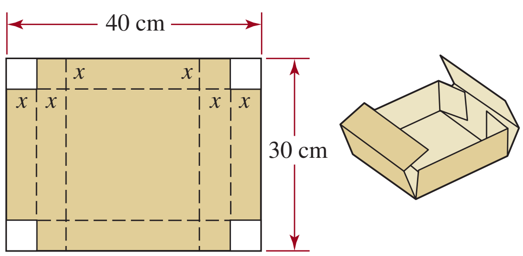


FIGURA 3.1.23 Caja del problema 56

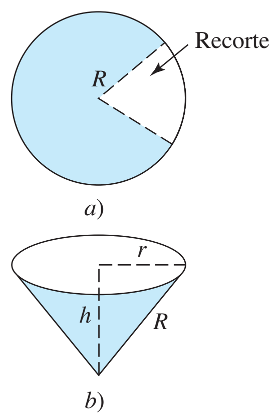


FIGURA 3.1.24 Copa del problema 57

57. Hacer una copa Una copa cónica está hecha de una pieza circular de papel de un radio R, recortando un sector circular y luego juntando las orillas rayadas como se muestra en la FIGURA 3.1.24. Busque una función polinomial $V(h)$ que dé el volumen de la copa cónica en términos de su altura.

58. Reloj de arena Un chorro de arena fluye desde la mitad superior del reloj cónico que se muestra en la FIGURA 3.1.25 hacia la mitad inferior con velocidad constante. Busque una función polinomial $V(h)$ que dé el volumen de la pila de arena del fondo. Suponga que la parte superior de la pila sea plana. [*Sugerencia:* Use triángulos similares.]

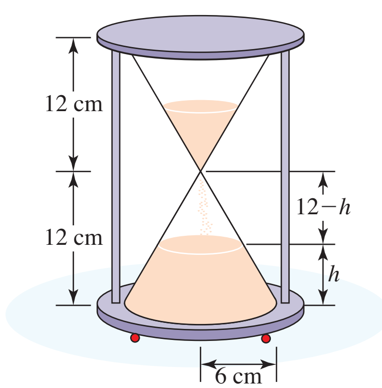


FIGURA 3.1.25 Reloj de arena del problema 58

Para discusión

59. Examine la figura 3.1.5. A continuación, explique si pueden existir funciones polinomiales cúbicas que no tengan raíces reales.

60. Suponga que una función polinomial f tiene tres raíces, -3, 2 y 4, y que el comportamiento en los extremos de su gráfica baja hacia la izquierda cuando $x \to -\infty$, y baja hacia la derecha cuando $x \to \infty$. Explique cuáles serían las ecuaciones posibles de f.

Problemas para calculadora o computadora

En los problemas 61 y 62, use una función graficadora para examinar la gráfica de la función polinomial indicada en los intervalos que se indican.

61. $f(x) = -(x - 8)(x + 10)^2$; $[-15, 15], [-100, 100], [-1\,000, 1\,000]$

62. $f(x) = (x - 5)^2(x + 5)^2$; $[-10, 10], [-100, 100], [-1\,000, 1\,000]$

3.2 División de funciones polinomiales

Introducción Si $p > 0$ y $s > 0$ son enteros tales que $p \geq s$, entonces p/s se llama **fracción impropia**. Si se divide p entre s se obtienen números únicos, q y r, que satisfacen

$$\frac{p}{s} = q + \frac{r}{s} \qquad \text{o} \qquad p = sq + r, \tag{1}$$

donde $0 \leq r < s$. El número p se llama **dividendo**, s es el **divisor**, q es el **cociente** y r es el **residuo**. Por ejemplo, se tiene la fracción impropia $\frac{1\,052}{23}$. Al hacer la división aritmética se obtiene

$$\begin{array}{rrl} & 45 & \leftarrow \text{cociente} \\ \text{divisor} \rightarrow \; 23 & \overline{)1\,052} & \leftarrow \text{dividendo} \\ & \underline{92} & \leftarrow \text{se resta} \\ & 132 & \\ & \underline{115} & \\ & 17. & \leftarrow \text{residuo} \end{array} \tag{2}$$

El resultado de (2) se puede escribir en la forma $\frac{1\,052}{23} = 45 + \frac{17}{23}$, donde $\frac{17}{23}$ es una **fracción propia**, porque el numerador es menor que el denominador; en otras palabras, la fracción es menor que 1. Si multiplicamos este resultado por el divisor 23, obtendremos la forma especial de escritura del dividendo p, ilustrada en la segunda ecuación de (1):

$$1\,052 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{divisor}}}{23} \cdot \overset{\substack{\text{cociente} \\ \downarrow}}{45} + \overset{\substack{\text{residuo} \\ \downarrow}}{17}. \tag{3}$$

División de polinomios El método para dividir dos funciones polinomiales $f(x)$ y $d(x)$ se parece a la división de enteros positivos. Si el grado de un polinomio $f(x)$ es mayor o igual que el grado del polinomio $d(x)$, entonces $f(x)/d(x)$ se llama también **fracción impropia**. Un resultado análogo a (1) se llama **algoritmo de división** de polinomios.

ALGORITMO DE DIVISIÓN

Sean $f(x)$ y $d(x) \neq 0$ polinomios, donde el grado de $f(x)$ es mayor o igual al grado de $d(x)$. Entonces, existen polinomios únicos, $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)} \qquad \text{o} \qquad f(x) = d(x)q(x) + r(x), \tag{4}$$

en donde $r(x)$ tiene grado menor que el grado de $d(x)$.

El polinomio $f(x)$ se llama **dividendo**, $d(x)$ es el **divisor**, $q(x)$ es el **cociente** y $r(x)$ es el **residuo**. Como $r(x)$ tiene grado menor que el de $d(x)$, la expresión racional $r(x)/d(x)$ se llama **fracción propia**.

Observe, en (4), que cuando $r(x) = 0$, entonces $f(x) = d(x)q(x)$, por lo que el divisor $d(x)$ es un factor de $f(x)$. En este caso se dice que $f(x)$ es **divisible** entre $d(x)$ o, en terminología antigua, que $d(x)$ **divide exactamente** a $f(x)$.

EJEMPLO 1 División de dos polinomios

Usar la división para calcular el cociente de $q(x)$ y el residuo $r(x)$ cuando el polinomio $f(x) = 3x^3 - x^2 - 2x + 6$ entre el polinomio $d(x) = x^2 + 1$.

Solución Por división,

$$\begin{array}{rrl} & 3x \;\; - 1 & \leftarrow \text{cociente} \\ \text{divisor} \rightarrow \quad x^2 + 1 & \overline{)\,3x^3 - \quad x^2 - 2x + 6} & \leftarrow \text{dividendo} \\ & \underline{3x^3 + 0x^2 + 3x} \quad\;\; & \leftarrow \text{se resta} \\ & -x^2 - 5x + 6 & \\ & \underline{-x^2 + 0x - 1} & \\ & -5x + 7 & \leftarrow \text{residuo} \end{array} \tag{5}$$

El resultado de la división (5) se puede escribir como sigue:

$$\frac{3x^3 - x^2 - 2x + 6}{x^2 + 1} = 3x - 1 + \frac{-5x + 7}{x^2 + 1}.$$

Si se multiplican ambos lados de la última ecuación por el divisor $x^2 + 1$, se obtiene la segunda forma de (4):

$$3x^3 - x^2 - 2x + 6 = (x^2 + 1)(3x - 1) + (-5x + 7). \tag{6}$$ ■

Si el divisor $d(x)$ es un polinomio lineal $x - c$, entonces, de acuerdo con el algoritmo de división, el grado del residuo r es 0; esto es, r es una constante. Así, (4) se transforma en

$$f(x) = (x - c)q(x) + r. \tag{7}$$

Cuando se sustituye el número $x = c$ en (7), se descubre una forma alternativa de evaluar una función polinomial:

$$f(c) = (\overset{\overset{0}{\downarrow}}{c - c})q(c) + r = r.$$

Al resultado anterior se le llama **teorema del residuo**.

TEOREMA DEL RESIDUO

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre un polinomio lineal $x = c$, el residuo r es el valor de $f(x)$ en $x = c$; esto es, $f(c) = r$.

EJEMPLO 2 Cálculo del residuo

Aplicar el teorema del residuo para calcular r cuando $f(x) = 4x^3 - x^2 + 4$ se divide entre $x - 2$.

Solución Según el teorema del residuo, el residuo r es el valor de la función f evaluada en $x = 2$.

$$r = f(2) = 4(2)^3 - (2)^2 + 4 = 32. \tag{8}$$ ■

El ejemplo 2, en donde se determina un residuo r calculando el valor de una función $f(c)$, es más interesante que importante. Lo que *sí es* importante es el problema inverso: determinar el valor de la función $f(c)$ calculando el residuo r por división de f entre $x - c$. Los dos ejemplos que siguen ilustran este concepto.

EJEMPLO 3 Evaluación por división

Aplicar el teorema del residuo para determinar $f(c)$ para $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 10$, cuando $c = -3$.

Solución El valor $f(-3)$ es el residuo cuando $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 10$ se divide entre $x - (-3) = x + 3$. Para fines de la división, se deben tener en cuenta los términos faltantes en x^4 y x^2, escribiendo el dividendo como sigue:

$$f(x) = x^5 + 0x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 2x - 10.$$

Entonces,

$$\begin{array}{r|l} & x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 15x + 47 \\ \hline x+3 & x^5 + 0x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 2x - 10 \\ & \underline{x^5 + 3x^4} \\ & -3x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 2x - 10 \\ & \underline{-3x^4 - 9x^3} \\ & 5x^3 + 0x^2 + 2x - 10 \\ & \underline{5x^3 + 15x^2} \\ & -15x^2 + 2x - 10 \\ & \underline{-15x^2 - 45x} \\ & 47x - 10 \\ & \underline{47x + 141} \\ & -151 \end{array} \tag{9}$$

El residuo r en la división es el valor de la función f en $x = -3$; esto es, $f(-3) = -151$. ■

□ **División sintética** Después de resolver el ejemplo 3 es lógico preguntar por qué se querría calcular el valor de una función polinomial f por división. La respuesta es: no nos ocuparíamos de hacerlo, si no existiera la **división sintética**. La división sintética es un método abreviado para dividir un polinomio $f(x)$ entre un polinomio *lineal* $x - c$; no se requiere escribir las diversas potencias de la variable x, sino sólo los coeficientes de esas potencias en el dividendo $f(x)$ (que debe incluir todos los coeficientes 0). También es una forma muy eficiente y rápida de evaluar $f(c)$, porque en el proceso sólo se utilizan las operaciones aritméticas de multiplicación y suma. No intervienen elevaciones a potencia, como 2^3 ni 2^2 en la ecuación (8). A continuación presentamos la misma división de (9), en forma sintética:

$$\begin{array}{r|rrrrrl} -3 & 1 & 0 & -4 & 0 & 2 & -10 \\ & & -3 & 9 & -15 & 45 & -141 \\ \hline & 1 & -3 & 5 & -15 & 47 & \boxed{-151 = r = f(-3)} \end{array} \tag{10}$$

Recuerde que el renglón inferior de números en (10) es el de los coeficientes de las diversas potencias de x en el cociente $q(x)$ cuando $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 10$ se divide entre $x + 3$. El lector debe comparar lo anterior con el cociente que obtuvo por división en (9).

EJEMPLO 4 Uso de la división sintética para evaluar una función

Aplicar el teorema del residuo para determinar $f(c)$, para

$$f(x) = -3x^6 + 4x^5 + x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 9$$

cuando $c = 2$.

Solución Usaremos división sintética para determinar el residuo r en la división de f entre $x - 2$. Comenzaremos escribiendo todos los coeficientes en $f(x)$, incluyendo 0, el coeficiente de x. En

$$\begin{array}{r|rrrrrrl} 2 & -3 & 4 & 1 & -8 & -6 & 0 & 9 \\ & & -6 & -4 & -6 & -28 & -68 & -136 \\ \hline & -3 & -2 & -3 & -14 & -34 & -68 & \boxed{-127 = r} \end{array}$$

se ve que $f(2) = -127$. ■

EJEMPLO 5 Uso de la división sintética para evaluar una función

Usar división sintética para evaluar $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 15$ en $x = 5$.

Solución Según la división sintética

$$\begin{array}{r|rrrl} 5 & 1 & -7 & 13 & -15 \\ & & 5 & -10 & 15 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

se ve que $f(5) = 0$. ■

El resultado del ejemplo 5, $f(5) = 0$, muestra que 5 es una raíz de la función dada f. Es más, hemos encontrado también que f es divisible entre el polinomio lineal $x - 5$. Visto de otra manera, $x - 5$ es un factor de f. La división sintética muestra que $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 15$ equivale a

$$f(x) = (x - 5)(x^2 - 2x + 3).$$

En la siguiente sección investigaremos más el uso del algoritmo de la división y del teorema del residuo, como ayuda para determinar raíces y factores de una función polinomial.

3.2 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-10.

En los problemas 1 a 10 use la división larga para determinar el cociente $q(x)$ y el residuo $r(x)$ cuando el polinomio $f(x)$ se divide entre el polinomio indicado $d(x)$. En cada caso, escriba la respuesta en la forma $f(x) = d(x)q(x) + r(x)$.

1. $f(x) = 8x^2 + 4x - 7; \quad d(x) = x^2$
2. $f(x) = x^2 + 2x - 3; \quad d(x) = x^2 + 1$
3. $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 4x + 1; \quad d(x) = x^2 + x - 1$
4. $f(x) = 14x^3 - 12x^2 + 6; \quad d(x) = x^2 - 1$
5. $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 5; \quad d(x) = (x + 2)^2$
6. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1; \quad d(x) = (2x + 1)^2$
7. $f(x) = 27x^3 + x - 2; \quad d(x) = 3x^2 - x$
8. $f(x) = x^4 + 8; \quad d(x) = x^3 + 2x - 1$
9. $f(x) = 6x^5 + 4x^4 + x^3; \quad d(x) = x^3 - 2$
10. $f(x) = 5x^6 - x^5 + 10x^4 + 3x^2 - 2x + 4; \quad d(x) = x^2 + x - 1$

En los problemas 11 a 16 proceda como en el ejemplo 2 y aplique el teorema del residuo para determinar r cuando $f(x)$ se divide entre el polinomio lineal indicado.

11. $f(x) = 2x^2 - 4x + 6; \quad x - 2$
12. $f(x) = 3x^2 + 7x - 1; \quad x + 3$
13. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 2; \quad x - \frac{1}{2}$

14. $f(x) = 5x^3 + x^2 - 4x - 6; \quad x + 1$
15. $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 5; \quad x - 3$
16. $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + x - 1; \quad x + \frac{3}{2}$

En los problemas 17 a 22, proceda como en el ejemplo 3 y use el teorema del residuo para calcular $f(c)$ con el valor indicado de c.

17. $f(x) = 4x^2 - 10x + 6; \quad c = 2$
18. $f(x) = 6x^2 + 4x - 2; \quad c = \frac{1}{4}$
19. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 6; \quad c = -5$
20. $f(x) = 15x^3 + 17x^2 - 30; \quad c = \frac{1}{5}$
21. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 20; \quad c = \frac{1}{2}$
22. $f(x) = 14x^4 - 60x^3 + 49x^2 - 21x + 19; \quad c = 1$

En los problemas 23 a 32, use la división sintética para calcular el cociente $q(x)$ y el residuo $r(x)$ cuando se divide $f(x)$ entre el polinomio lineal indicado.

23. $f(x) = 2x^2 - x + 5; \quad x - 2$
24. $f(x) = 4x^2 - 8x + 6; \quad x - \frac{1}{2}$
25. $f(x) = x^3 - x^2 + 2; \quad x + 3$
26. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 4; \quad x - 7$
27. $f(x) = x^4 + 16; \quad x - 2$
28. $f(x) = 4x^4 + 3x^3 - x^2 - 5x - 6; \quad x + 3$
29. $f(x) = x^5 + 56x^2 - 4; \quad x + 4$
30. $f(x) = 2x^6 + 3x^3 - 4x^2 - 1; \quad x + 1$
31. $f(x) = x^3 - (2 + \sqrt{3})x^2 + 3\sqrt{3}x - 3; \quad x - \sqrt{3}$
32. $f(x) = x^8 - 3^8; \quad x - 3$

En los problemas 33 a 38 use la división sintética y el teorema del residuo para calcular $f(c)$ para el valor indicado de c.

33. $f(x) = 4x^2 - 2x + 9; \quad c = -3$
34. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 27; \quad c = \frac{1}{2}$
35. $f(x) = 14x^4 - 60x^3 + 49x^2 - 21x + 19; \quad c = 1$
36. $f(x) = 3x^5 + x^2 - 16; \quad c = -2$
37. $f(x) = 2x^6 - 3x^5 + x^4 - 2x + 1; \quad c = 4$
38. $f(x) = x^7 - 3x^5 + 2x^3 - x + 10; \quad c = 5$

En los problemas 39 y 40 use la división larga para determinar el valor de k tal que $f(x)$ sea divisible entre $d(x)$.

39. $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + kx - 4; \quad d(x) = x^2 - 1$
40. $f(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 + kx^2 + 9x - 5; \quad d(x) = x^2 - x + 1$

En los problemas 41 y 42 use la división sintética para calcular el valor de k tal que $f(x)$ sea divisible entre $d(x)$.

41. $f(x) = kx^4 + 2x^2 + 9k; \quad d(x) = x - 1$
42. $f(x) = x^3 + kx^2 - 2kx + 4; \quad d(x) = x + 2$
43. Determine el valor de k tal que el residuo de la división de $f(x) = 3x^2 - 4kx + 1$ entre $d(x) = x + 3$ sea $r = -20$.
44. Cuando $f(x) = x^2 - 3x - 1$ se divide entre $x - c$, el residuo es $r = 3$. Determine c.

3.3 Raíces y factores de funciones polinomiales

Introducción En la sección 2.1 vimos que una raíz de una función f es un número c para el cual $f(c) = 0$. Una raíz de una función f puede ser un número *real* o uno *complejo*. Recuerde que un **número complejo** tiene la forma

$$z = a + bi, \quad \text{en el que} \quad i^2 = -1,$$

y a y b son números reales. Al número a se le llama **parte real** de z, y a b se le llama **parte imaginaria** de z. El símbolo i se llama **unidad imaginaria** y se acostumbra definirlo como $i = \sqrt{-1}$. Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces $\bar{z} = a - bi$ se llama su **conjugado**. Así, la sencilla función polinomial $f(x) = x^2 + 1$ tiene dos raíces complejas, porque las soluciones de $x^2 + 1 = 0$ son $\pm\sqrt{-1}$, esto es, son i y $-i$.

En esta sección exploraremos la relación entre las raíces de una función polinomial f, la operación de división y los factores de f.

EJEMPLO 1 Raíz real

Se tiene la función polinomial $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 6x - 1$. El número real $\frac{1}{2}$ es una raíz de la función, ya que

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{1}{2}\right) &= 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 - 9\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 6\left(\tfrac{1}{2}\right) - 1 \\ &= 2\left(\tfrac{1}{8}\right) - \tfrac{9}{4} + 3 - 1 \\ &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{9}{4} + \tfrac{8}{4} = 0. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Raíz compleja

Para la función polinomial $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$, el número complejo $1 + i$ es una de sus raíces. Para comprobarlo usaremos el desarrollo del binomio $(a + b)^3$ y el hecho que $i^2 = -1$, y que $i^3 = -i$.

◀ Vea (7) en la sección 1.5.

$$\begin{aligned} f(1 + i) &= (1 + i)^3 - 5(1 + i)^2 + 8(1 + i) - 6 \\ &= (1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 + i^3) - 5(1^2 + 2i + i^2) + 8(1 + i) - 6 \\ &= (-2 + 2i) - 5(2i) + (2 + 8i) \\ &= (-2 + 2) + (10 - 10)i = 0 + 0i = 0. \end{aligned}$$

■

Teorema del factor Ahora ya podemos relacionar la noción de una raíz de una función polinomial f, con la división de polinomios. De acuerdo con el teorema del residuo, cuando $f(x)$ se divide entre el polinomio lineal $x - c$, el residuo es $r = f(c)$. Si c es una raíz de f, entonces $f(c) = 0$ implica que $r = 0$. Por la forma del algoritmo de la división que se presentó en (4), sección 3.2, se puede escribir f como

$$f(x) = (x - c)q(x). \tag{1}$$

Así, si c es una raíz de una función polinomial f, entonces $x - c$ es un factor de $f(x)$. Al revés, si $x - c$ es un factor de $f(x)$, entonces f tiene la forma de la ecuación (1). En este caso, de inmediato se ve que $f(c) = (c - c)q(c) = 0$. Estos resultados se resumen en el siguiente **teorema del factor**.

TEOREMA DEL FACTOR

Un número c es una raíz de una función polinomial f si, y sólo si, $x - c$ es un factor de $f(x)$.

Si una función polinomial f es de grado n, y si $(x - c)^m$, $m \leq n$, es un factor de $f(x)$, entonces se dice que c es una **raíz de multiplicidad *m*.** Cuando $m = 1$, c es una **raíz simple**. Lo que es lo mismo, se dice que el número c es una **raíz de multiplicidad *m*** de la ecuación $f(x) = 0$. Ya hemos examinado el significado gráfico de raíces reales repetidos de una función polinomial f, en la sección 3.1. Vea la figura 3.1.6.

EJEMPLO 3 Factores de un polinomio

Determinar si

a) $x + 1$ es un factor de $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x - 1$,
b) $x - 2$ es un factor de $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$.

Solución Usaremos división sintética para dividir $f(x)$ entre el término lineal indicado.

a) De la división

$$\begin{array}{r|rrrrl} -1 & 1 & 0 & -5 & 6 & -1 \\ & & -1 & 1 & 4 & -10 \\ \hline & 1 & -1 & -4 & 10 & \boxed{-11 = r = f(-1)} \end{array}$$

se ve que $f(-1) = -11$, por lo que -1 no es una raíz de f. La conclusión es que $x - (-1) = x + 1$ no es un factor de $f(x)$.

b) De la división

$$\begin{array}{r|rrrl} 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0 = r = f(2)} \end{array}$$

se ve que $f(2) = 0$. Eso quiere decir que 2 es una raíz, y que $x - 2$ es un factor de $f(x)$. En la división se observa que el cociente es $q(x) = x^2 - x - 2$, y entonces $f(x) = (x - 2)(x^2 - x - 2)$. ■

Cantidad de raíces En el ejemplo 6 de la sección 3.1 se graficó la función polinomial

$$f(x) = (x - 3)(x - 1)^2(x + 2)^3. \tag{2}$$

El número 3 es una raíz de multiplicidad uno, o una raíz simple de f; el número 1 es una raíz de multiplicidad dos, y -2 es una raíz de multiplicidad tres. Aunque la función f tiene tres raíces *distintas* (diferentes entre sí), es decir, que f tiene *seis raíces*, porque se cuentan las multiplicidades de cada raíz. Por consiguiente, para la función f en (2), la cantidad de raíces es $1 + 2 + 3 = 6$. La pregunta *cuántas raíces tiene una función polinomial f* se contesta a continuación.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Una función polinomial f de grado $n > 0$ tiene cuando menos una raíz.

El teorema anterior lo demostró por primera vez el matemático alemán **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), en 1799, y se considera una de las grandes aportaciones en la historia de las matemáticas. En su primera lectura, este teorema no parece decir mucho, pero cuando se combina con el teorema del factor, el teorema fundamental del álgebra indica que:

$$\textit{Toda función polinomial } f \textit{ de grado } n > 0 \textit{ tiene exactamente } n \textit{ raíces.} \tag{3}$$

Naturalmente, si una raíz está repetida, por tener multiplicidad k, se cuenta k veces esa raíz. Para demostrar (3), de acuerdo con el teorema fundamental del álgebra f tiene una raíz (llamémoslo c_1). Según el teorema del factor, se puede escribir

$$f(x) = (x - c_1)q_1(x), \tag{4}$$

siendo q_1 una función polinomial de grado $n - 1$. Si $n - 1 \neq 0$, entonces, con un procedimiento igual, se sabe que q_1 debe tener una raíz (llamémoslo c_2), y entonces (4) se convierte en

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)q_2(x),$$

en donde q_2 es una función polinomial de grado $n - 2$. Si $n - 2 \neq 0$, se continúa y se llega a

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)q_3(x), \tag{5}$$

y así sucesivamente. Al final se llega a una factorización de $f(x)$ con n factores lineales, y el último factor $q_n(x)$ es de grado 0. En otras palabras, $q_n(x) = a_n$, en donde a_n es constante. Hemos llegado a la **factorización completa** de $f(x)$. Tenga en cuenta que algunas, o todas, de las raíces $c_1, \ldots, c_n$ de (6) pueden ser números complejos $a + ib$, donde $b \neq 0$.

TEOREMA DE LA FACTORIZACIÓN COMPLETA

Sean $c_1, c_2, \ldots, c_n$ las n raíces (no necesariamente distintas) de la función polinomial de grado $n > 0$:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Entonces, $f(x)$ se puede escribir como un producto de n factores lineales

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n). \tag{6}$$

En el caso de una función polinomial de segundo grado, o cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde los coeficientes a, b y c son números reales, las raíces c_1 y c_2 de f se pueden determinar con la fórmula cuadrática o fórmula general:

$$c_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{7}$$

Los resultados en (7) relatan toda la historia acerca de las raíces de la función cuadrática: las raíces son reales y distintas cuando $b^2 - 4ac > 0$; son reales con multiplicidad dos cuando $b^2 - 4ac = 0$, y son complejos y distintos cuando $b^2 - 4ac < 0$. Como consecuencia de (6), la factorización completa de una función polinomial cuadrática es

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2). \tag{8}$$

EJEMPLO 4 Regreso al ejemplo 1

En el ejemplo 1 demostramos que $\frac{1}{2}$ es una raíz de $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 6x - 1$. Por consiguiente, $x - \frac{1}{2}$ es un factor de $f(x)$, y ahora sabemos que $f(x)$ tiene tres raíces. La división sintética

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & -9 & 6 & -1 \\ & & 1 & -4 & 1 \\ \hline & 2 & -8 & 2 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

demuestra de nuevo que $\frac{1}{2}$ es una raíz de $f(x)$ (el residuo 0 es el valor de $f(\frac{1}{2})$) y, además, nos da el cociente $q(x)$ obtenido en la división de $f(x)$ entre $x - \frac{1}{2}$; esto es, $f(x) = (x - \frac{1}{2})(2x^2 - 8x + 2)$. Como se indica en (8), ya se puede factorizar el cociente cuadrático $q(x) = 2x^2 - 8x + 2$, cuyas raíces de $2x^2 - 8x + 2 = 0$ se determinan mediante la fórmula cuadrática:

$$\downarrow \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(2)(2)}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{4(2 \pm \sqrt{3})}{4} = 2 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Entonces, las raíces restantes de $f(x)$ son los números irracionales $2 + \sqrt{3}$ y $2 - \sqrt{3}$. Si el primer coeficiente es $a_3 = 2$, entonces, de acuerdo con (8), la factorización completa de $f(x)$ es

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x - \tfrac{1}{2})(x - (2 + \sqrt{3}))(x - (2 - \sqrt{3})) \\ &= 2(x - \tfrac{1}{2})(x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 Uso de la división sintética

Determinar la factorización completa de

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 62x + 26$$

si 1 es una raíz de f con multiplicidad 2.

Solución Sabemos que $x - 1$ es un factor de $f(x)$; entonces, con la división

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -12 & 47 & -62 & 26 \\ & & 1 & -11 & 36 & -26 \\ \hline & 1 & -11 & 36 & -26 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

se ve que $$f(x) = (x - 1)(x^3 - 11x^2 + 36x - 26).$$

Debido a que 1 es una raíz de multiplicidad dos, $x - 1$ debe ser también un factor del cociente $q(x) = x^3 - 11x^2 + 36x - 26$. Con la división

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -11 & 36 & -26 \\ & & 1 & -10 & 26 \\ \hline & 1 & -10 & 26 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

la conclusión es que $q(x)$ se puede expresar como $q(x) = (x - 1)(x^2 - 10x + 26)$. Por consiguiente,

$$f(x) = (x - 1)^2(x^2 - 10x + 26).$$

Las dos raíces que restan se determinan resolviendo $x^2 - 10x + 26 = 0$ con la fórmula cuadrática, que son los números complejos $5 + i$ y $5 - i$. Como el primer coeficiente es $a_4 = 1$, la factorización completa de $f(x)$ es

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 1)^2(x - (5 + i))(x - (5 - i)) \\ &= (x - 1)^2(x - 5 - i)(x - 5 + i). \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Factorización lineal completa

Encontrar una función polinomial f de grado tres cuyas raíces sean 1, -4 y 5, tal que su gráfica tenga el cruce con el eje de las ordenadas en (0, 5).

Solución En razón de que se tienen tres raíces, 1, -4 y 5, se ve que $x - 1$, $x + 4$ y $x - 5$ son factores de f. Sin embargo, la función polinomial que se busca *no es*

$$f(x) = (x - 1)(x + 4)(x - 5). \tag{9}$$

La razón es que todo múltiplo constante distinto de cero de f es un polinomio diferente con las mismas raíces. También obsérvese que la función (9) da como resultado $f(0) = 20$, pero lo que se quiere es que $f(0) = 5$. Por consiguiente, se debe suponer que f tiene la forma

$$f(x) = a(x - 1)(x + 4)(x - 5), \tag{10}$$

en donde a es una constante real. Con (10), $f(0) = 5$ resulta

$$f(0) = a(0 - 1)(0 + 4)(0 - 5) = 20a = 5$$

y entonces $a = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. La función que se busca es, entonces

$$f(x) = \tfrac{1}{4}(x - 1)(x + 4)(x - 5).$$

En la introducción dijimos que las raíces complejas de $f(x) = x^2 + 1$ son i y $-i$. En el ejemplo 5, las raíces complejas son $5 + i$ y $5 - i$. En cada caso, las raíces complejas de la función polinomial son pares conjugados. En otras palabras, una raíz compleja es el conjugado del otro. Eso no es una coincidencia; las raíces complejas de los polinomios con coeficientes *reales* aparecen *siempre* en pares conjugados.

TEOREMA DE LAS RAÍCES COMPLEJAS

Sea $f(x)$ una función polinomial de grado $n > 1$ con coeficientes reales. Si z es una raíz compleja de $f(x)$, entonces el conjugado $\bar{z}$ también es una raíz de $f(x)$.

EJEMPLO 7 Regreso al ejemplo 2

En el ejemplo 2 se demostró que $1 + i$ es una raíz compleja de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$. Como los coeficientes de f son números reales, la conclusión es que otra raíz es el conjugado de $1 + i$, es decir, $1 - i$. Con ello se conocen dos factores de $f(x)$, $x - (1 + i)$ y $x - (1 - i)$. Al multiplicar se obtiene

$$(x - 1 - i)(x - 1 + i) = x^2 - 2x + 2.$$

Así, se puede escribir

$$f(x) = (x - 1 - i)(x - 1 + i)q(x) = (x^2 - 2x + 2)q(x).$$

La función $q(x)$ se determina mediante la *división larga* de $f(x)$ entre $x^2 - 2x + 2$. (No se puede hacer la división sintética, porque no se está dividiendo entre un factor lineal.) Entonces,

$$\begin{array}{r@{}l}
 & x - 3 \\
x^2 - 2x + 2 \,\big) & \overline{x^3 - 5x^2 + 8x - 6} \\
 & \underline{x^3 - 2x^2 + 2x\phantom{{}-6}} \\
 & -3x^2 + 6x - 6 \\
 & \underline{-3x^2 + 6x - 6} \\
 & \phantom{x^3 - 3x^2 + 6x - {}} 0
\end{array}$$

y se ve que la factorización completa de $f(x)$ es

$$f(x) = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x - 3).$$

Las tres raíces de $f(x)$ son $1 + i$, $1 - i$ y 3.

3.3 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-10.

En los problemas 1 a 6 determine si el número real indicado es una raíz de la función polinomial f. En caso de serlo, determine todas las demás raíces y a continuación presente la factorización completa de $f(x)$.

1. 1; $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$

2. $\frac{1}{2}$; $f(x) = 2x^3 - x^2 + 32x - 16$

3. 5; $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x + 5$

4. 3; $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$

5. $-\frac{2}{3}$; $f(x) = 3x^3 - 10x^2 - 2x + 4$

6. -2; $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 20$

En los problemas 7 a 10 compruebe que cada uno de los números indicados sean raíces de la función polinomial f. Determine todas las demás raíces y a continuación indique la factorización completa de $f(x)$.

7. $-3, 5$; $f(x) = 4x^4 - 8x^3 - 61x^2 + 2x + 15$

8. $\frac{1}{4}, \frac{3}{2}$; $f(x) = 8x^4 - 30x^3 + 23x^2 + 8x - 3$

9. $1, -\frac{1}{3}$ (multiplicidad 2); $f(x) = 9x^4 + 69x^3 - 29x^2 - 41x - 8$

10. $-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$; $f(x) = 3x^4 + x^3 - 17x^2 - 5x + 10$

En los problemas 11 a 16 use la división sintética para determinar si el polinomio lineal indicado es un factor de la función polinomial f. En caso de serlo, determine todas las demás raíces, e indique la factorización completa de $f(x)$.

11. $x - 5$; $f(x) = 2x^2 + 6x - 25$

12. $x + \frac{1}{2}$; $f(x) = 10x^2 - 27x + 11$

13. $x - 1$; $f(x) = x^3 + x - 2$

14. $x + \frac{1}{2}$; $f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 1$

15. $x - \frac{1}{3}$; $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 8x - 2$

16. $x - 2$; $f(x) = x^3 - 6x^2 - 16x + 48$

En los problemas 17 a 20 use la división para demostrar que el polinomio indicado es un factor de la función polinomial f. Calcule todas las demás raíces e indique la factorización completa de $f(x)$.

17. $(x - 1)(x - 2)$; $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 12x + 8$

18. $x(3x - 1)$; $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x$

19. $(x - 1)^2$; $f(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 3$

20. $(x + 3)^2$; $f(x) = x^4 - 4x^3 - 22x^2 + 84x + 261$

En los problemas 21 a 26 verifique que el número complejo indicado sea una raíz de la función polinomial f. Proceda como en el ejemplo 7 para determinar todas las demás raíces, y a continuación indique la factorización completa de $f(x)$.

21. $2i$; $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 12x - 20$

22. $\frac{1}{2}i$; $f(x) = 12x^3 + 8x^2 + 3x + 2$

23. $-1 + i$; $f(x) = 5x^3 + 12x^2 + 14x + 4$

24. $-i$; $f(x) = 4x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x + 5$

25. $1 + 2i$; $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 18x - 45$

26. $1 + i$; $f(x) = 6x^4 - 11x^3 + 9x^2 + 4x - 2$

En los problemas 27 a 32, determine la función polinomial f, con coeficientes reales, del grado indicado, que posea las raíces indicadas.

27. grado 4; $2, 1, -3$ (multiplicidad 2)

28. grado 5; $-4i, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ (multiplicidad 2)

29. grado 5; $3 + i, 0$ (multiplicidad 3)

30. grado 4; $5\ i, 2 - 3i$

31. grado 2; $1 - 6i$

32. grado 2; $4 + 3i$

En los problemas 33 a 36 determine las raíces de la función polinomial f. Indique la multiplicidad de cada raíz.

33. $f(x) = x(4x - 5)^2(2x - 1)^3$

34. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2$

35. $f(x) = (9x^2 - 4)^2$

36. $f(x) = (x^2 + 25)(x^2 - 5x + 4)^2$

En los problemas 37 y 38 determine el o los valores de k tales que el número indicado sea una raíz de $f(x)$. A continuación indique la factorización completa de $f(x)$.

37. $3;\ f(x) = 2x^3 - 2x^2 + k$

38. $1;\ f(x) = x^3 + 5x^2 - k^2x + k$

En los problemas 39 y 40 deduzca la función polinomial f que tenga el grado indicado y cuya gráfica está en la figura.

39. grado 3

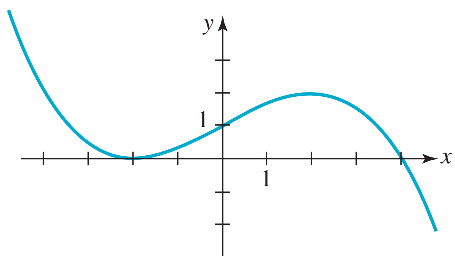


FIGURA 3.3.1 Gráfica del problema 39

40. grado 5

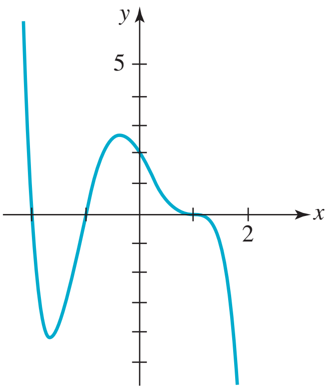


FIGURA 3.3.2 Gráfica del problema 40

Para discusión

41. Explique lo siguiente:

a) ¿Para cuáles valores enteros positivos de n es $x - 1$ un factor de $f(x) = x^n - 1$?

b) ¿Para cuáles valores enteros positivos de n es $x + 1$ un factor de $f(x) = x^n + 1$?

42. Suponga que $f(x)$ es una función polinomial de grado tres, con coeficientes reales. ¿Por qué $f(x)$ no puede tener tres raíces complejas? Dicho de otro modo, ¿por qué al menos una raíz de una función polinomial cúbica debe ser un número real? ¿Se puede generalizar este resultado?

43. ¿Cuál es el grado más pequeño que puede tener una función polinomial $f(x)$ con coeficientes reales, para que $1 + i$ sea una raíz compleja de multiplicidad dos? ¿Y de multiplicidad tres?

44. Sea $z = a + bi$. Demuestre que $z + \bar{z}$ y que $z\bar{z}$ son números reales.

45. Sea $z = a + bi$. Con los resultados del problema 44 demuestre que

$$f(x) = (x - z)(x - \bar{z})$$

es un función polinomial con coeficientes reales.

3.4 Raíces reales de funciones polinomiales

Introducción En la sección anterior vimos que, como consecuencia del teorema fundamental del álgebra, una función polinomial f de grado n tiene n raíces cuando se cuentan las multiplicidades de las raíces. También vimos que una raíz de una función polinomial puede ser un número real o un número complejo. En esta sección limitaremos nuestra atención a las *raíces reales* de funciones polinomiales con coeficientes reales.

Raíces reales Si una función polinomial f de grado $n > 0$ tiene m raíces reales $c_1, c_2, \ldots, c_m$ (no necesariamente diferentes), entonces, por el teorema del factor, cada uno de los polinomios lineales $x - c_1, x - c_2, \ldots\ x - c_m$ son factores de $f(x)$. Esto es,

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_m)q(x),$$

en donde $q(x)$ es un polinomio. Entonces n, el grado de f, debe ser mayor que, o quizá igual a m, la cantidad de raíces reales, cuando cada uno se cuenta de acuerdo con su multiplicidad. En palabras un poco diferentes, esto se dice así:

CANTIDAD DE RAÍCES REALES

Una función polinomial f de grado $n > 0$ tiene cuando mucho n raíces reales (no necesariamente distintas).

Ahora resumiremos algo de lo que se refiere a las raíces reales de una función polinomial f de grado n:

- f puede no tener raíces reales.

Por ejemplo, la función polinomial de cuarto grado $f(x) = x^4 + 9$ no tiene raíces reales, porque no existe número real alguno x que satisfaga $x^4 + 9 = 0$, es decir, $x^4 = -9$.

- f puede tener m raíces reales, donde $m < n$.

Por ejemplo, la función polinomial de tercer grado $f(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$ tiene una raíz real.

- f puede tener n raíces reales.

Por ejemplo, al factorizar la función polinomial de tercer grado $f(x) = x^3 - x$ en la forma $f(x) = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1)$, se ve que tiene tres raíces reales.

- f tiene cuando menos una raíz real cuando n es impar.

Es una consecuencia de que las raíces complejas de una función polinomial f con coeficientes reales deban aparecer como pares conjugados. Así, si hubiera que escribir una función polinomial cúbica arbitraria, como $f(x) = x^3 + x + 1$, ya sabríamos que f no puede tener tan sólo una raíz compleja, ni puede tener tres raíces complejas. Dicho de otro modo, $f(x) = x^3 + x + 1$ tiene exactamente una raíz real, o tiene exactamente tres raíces reales.

- Si los coeficientes de $f(x)$ son positivos, y el término constante $a_0 \neq 0$, entonces todas las raíces reales de f deben ser negativas.

Determinación de raíces reales Una cosa es hablar de la existencia de raíces reales y complejas de una función polinomial, y un problema totalmente diferente es determinar esas raíces. El problema de encontrar una *fórmula* que exprese las raíces de una función polinomial f general, de grado n, en términos de sus coeficientes ha confundido a los matemáticos durante siglos. En las secciones 2.4 y 3.3 vimos que, en el caso de una función polinomial de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$, en la que los coeficientes a, b y c son números reales, se pueden determinar las raíces c_1 y c_2 aplicando la fórmula cuadrática.

El problema de determinar raíces de funciones polinomiales de tercer grado, o cúbicas, fue resuelto en el siglo XVI, por el trabajo pionero de **Niccolo Fontana**, matemático italiano (1499-1557), llamado Tartaglia, "el tartamudo". Alrededor de 1540, otro matemático italiano, **Lodovico Ferrari** (1522-1565), descubrió una fórmula algebraica para determinar las raíces de funciones polinomiales de cuarto grado, o cuárticas. Como esas fórmulas son complicadas y difíciles de usar, casi nunca se describen en los cursos elementales.

Nadie, durante los siguientes 284 años, descubrió alguna fórmula para determinar raíces de funciones polinomiales generales, de grados cinco y mayores… ¡por una buena razón! En 1824, a los 22 años, **Niels Henrik Abel**, matemático noruego (1802-1829), demostró que es imposible llegar a esas fórmulas que definan las raíces de todos los polinomios generales de grados $n \geq 5$, en términos de sus coeficientes.

Niels Henrik Abel

Raíces racionales Las raíces reales de una función polinomial son números racionales o irracionales. Un número racional es un número que tiene la forma p/s, donde p y s son enteros, y $s \neq 0$. Un número irracional es uno que no es racional. Por ejemplo, $\frac{1}{4}$ y -9 son números racionales, pero $\sqrt{2}$ y π son irracionales; esto es, ni $\sqrt{2}$ ni π se pueden escribir en forma de una fracción p/s, donde p y s son enteros. Entonces, ¿cómo se determinan raíces reales de funciones polinomiales de grado $n > 2$? Las malas noticias son que en el caso de raíces reales irracionales *podríamos* tener que contentarnos con usar una gráfica exacta para de un "vistazo" indicar su lugar en el eje x, y a continuación usar uno de los muchos y complicados métodos para *aproximar* la raíz, que se han inventado a lo largo de los años. La buena noticia es que siempre se pueden determinar las raíces reales racionales de *cualquier* función polinomial con coeficientes racionales. Ya vimos que la división sintética es un método adecuado para determinar si cierto número c es una raíz de una función polinomial $f(x)$. Cuando el residuo, en la división de $f(x)$ entre $x - c$, es $r = 0$, se ha encontrado una raíz de la función polinomial f, porque $r = f(c) = 0$. Por ejemplo, $\frac{2}{3}$ es una raíz de $f(x) = 18x^3 - 15x^2 + 14x - 8$, porque

$$
\begin{array}{c|rrrr}
\frac{2}{3} & 18 & -15 & 14 & -8 \\
 & & 12 & -2 & 8 \\
\hline
 & 18 & -3 & 12 & \boxed{0 = r}.
\end{array}
$$

Entonces, de acuerdo con el teorema del factor, tanto $x - \frac{2}{3}$ como el cociente $18x^2 - 3x + 12$ son factores de f, y se puede escribir la función polinomial como el producto

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x - \tfrac{2}{3})(18x^2 - 3x + 12) \qquad \leftarrow \text{Se saca 3 como factor común de una función polinomial cuadrática} \\
&= (x - \tfrac{2}{3})(3)(6x^2 - x + 4) \\
&= (3x - 2)(6x^2 - x + 4).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Como se describió en la sección anterior, si se puede factorizar el polinomio hasta que el factor restante sea un polinomio cuadrático, se pueden entonces determinar las raíces restantes con la fórmula cuadrática. En este ejemplo, la factorización de las ecuaciones (1) es todo lo que se puede avanzar usando números reales, porque las raíces del factor cuadrático $6x^2 - x + 4$ son complejos (verifíquelo). Pero la multiplicación indicada en (1) ilustra algo importante acerca de las raíces reales. El primer coeficiente, 18, y el término constante, -8, de $f(x)$ se obtienen con los productos

$$\underbrace{(3x - \overbrace{2)(6x^2 - x + 4}^{-8})}_{18}.$$

Vemos entonces que el denominador 3 de la raíz racional $\frac{2}{3}$ es un *factor* del primer coeficiente, 18, de $f(x) = 18x^3 - 15x^2 + 14x - 8$, y que el numerador 2 de la raíz racional es un factor del término constante -8.

Este ejemplo ilustra el siguiente principio general para determinar las raíces racionales de una función polinomial. Lea con cuidado el siguiente teorema; los coeficientes de f no sólo son números reales; deben ser *enteros*.

TEOREMA DE LAS RAÍCES RACIONALES

Sea p/s un número racional en sus términos más simples, y además una raíz de la función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

en donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ son enteros, y $a_n \neq 0$. Entonces, p es un factor entero del término constante a_0 y s es un factor entero del primer coeficiente a_n.

El teorema de las raíces racionales merece ser leído varias veces. Nótese que el teorema *no* asegura que una función polinomial f, con coeficientes enteros, *deba* tener una raíz racional; más bien afirma que *si* una función polinomial f con coeficientes enteros tiene una raíz racional p/s, entonces necesariamente

$$\frac{p}{s}. \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{es un factor entero de } a_0 \\ \leftarrow \text{es un factor entero de } a_n \end{matrix}$$

Formando todos los cocientes posibles de cada factor entero a_0 con cada factor entero de a_n se puede formar una lista de raíces racionales *potenciales* de f.

EJEMPLO 1 Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$.

Solución Se identifican el término constante $a_0 = -2$ y el primer coeficiente $a_4 = 3$, y a continuación se hace una lista de todos los factores enteros de a_0 y a_4, respectivamente:

$$\begin{aligned} p&: \pm 1, \pm 2, \\ s&: \pm 1, \pm 3. \end{aligned}$$

Ahora se forma una lista de todas las raíces racionales posibles p/s, dividiendo todos los factores de p entre ± 1 y ± 3:

$$\frac{p}{s}: \pm 1, \pm 2, \pm \tfrac{1}{3}, \pm \tfrac{2}{3}. \tag{2}$$

Sabemos que la función polinomial f dada, de cuarto grado, tiene cuatro raíces; si alguno de ellos es un número real y es racional, debe estar en la lista (2).

Para determinar cuál de los números en (2) son raíces, si es que las hay, podríamos hacer una sustitución directa en $f(x)$. Sin embargo, la división sintética suele ser un método más eficiente para evaluar $f(x)$. Comenzaremos probando -1:

$$\begin{array}{r|rrrrl} -1 & 3 & -10 & -3 & 8 & -2 \\ & & -3 & 13 & -10 & 2 \\ \hline & 3 & -13 & 10 & -2 & \boxed{0 = r}. \end{array} \tag{3}$$

El residuo cero indica que $r = f(-1) = 0$, y así -1 es una raíz de f. Por consiguiente, $x - (-1) = x + 1$ es un factor de f. Usando el cociente determinado en (3) se puede escribir

$$f(x) = (x + 1)(3x^3 - 13x^2 + 10x - 2). \tag{4}$$

En la ecuación (4) se ve que cualquier otra raíz racional de f debe ser una raíz del cociente $3x^3 - 13x^2 + 10x - 2$. Como este último polinomio tiene grado menor, será más fácil aplicar la división sintética en él que en $f(x)$ para llegar a la siguiente raíz racional. En este punto del proceso, el lector debería comprobar si la raíz que se acaba de encontrar es una raíz repetida. Eso se hace determinando si la raíz que se encontró también es una raíz del cociente. Una comprobación rápida, usando división sintética, demuestra que -1 *no es* una raíz repetida de f, porque no es una raíz de $3x^3 - 13x^2 + 10x - 2$. Entonces se prosigue determinando si el número 1 es una raíz racional de f. En realidad *no* lo es, porque la división

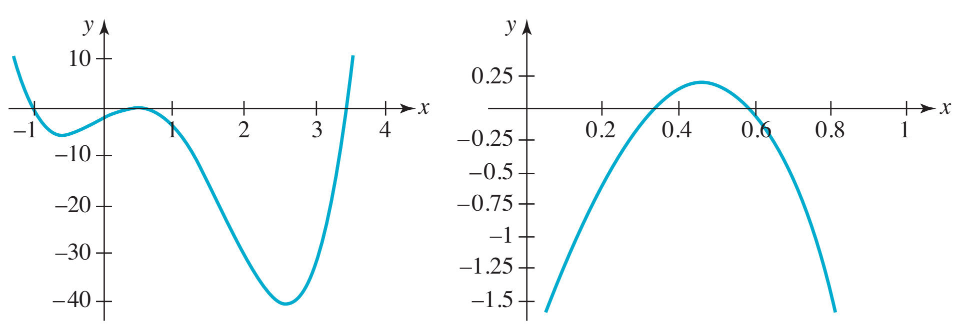
$$\begin{array}{r|rrrl} 1 & 3 & -13 & 10 & -2 \quad \leftarrow \text{coeficientes del cociente} \\ & & 3 & -10 & 0 \\ \hline & 3 & -10 & 0 & \boxed{-2 = r} \end{array} \tag{5}$$

indica que el residuo es $r = -2 \neq 0$. Al revisar $\frac{1}{3}$ se tiene que

$$\begin{array}{r|rrrl} \frac{1}{3} & 3 & -13 & 10 & -2 \\ & & 1 & -4 & 2 \\ \hline & 3 & -12 & 6 & \boxed{0 = r}. \end{array} \tag{6}$$

Por consiguiente, $\frac{1}{3}$ sí es una raíz. En este momento podemos dejar de usar la división sintética, porque (6) indica que el factor que resta de f es el polinomio cuadrático $3x^2 - 12x + 6$. De acuerdo con la fórmula cuadrática se llega a que las raíces reales que restan son $2 + \sqrt{2}$ y $2 - \sqrt{2}$. Por consiguiente, el polinomio dado f tiene dos raíces racionales, -1 y $\frac{1}{3}$, y dos raíces irracionales, $2 + \sqrt{2}$ y $2 - \sqrt{2}$. ■

Si el lector tiene acceso a computadoras, su selección de los números racionales que se van a probar en el ejemplo 1 podrá motivarse con una gráfica de la función $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$. Con ayuda de una función graficadora se obtienen las gráficas de la **FIGURA 3.4.1**. En la figura 3.4.1*a*), parece que f tiene al menos tres raíces reales. Pero al "acercarse" a la grá-



a) Gráfica de f en el intervalo [–1, 4] *b*) Acercamiento de la gráfica, en el intervalo [0, 1]

FIGURA 3.4.1 Gráfica de la función f del ejemplo 1 fica en el intervalo [0, 1], figura 3.4.1*b*), se ve que en realidad f tiene cuatro raíces reales: una negativa y tres positivas. Así, una vez determinada una raíz racional negativa de f, se pueden desechar todos los demás números negativos de la primera lista como raíces potenciales.

EJEMPLO 2 Factorización completa

Como la función f del ejemplo 1 es de grado 4, y hemos determinado cuatro raíces reales, se puede indicar su factorización completa. Usando el primer coeficiente $a_4 = 3$, entonces, de (6) en la sección 3.3,

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x+1)(x-\tfrac{1}{3})(x-(2-\sqrt{2}))(x-(2+\sqrt{2})) \\ &= 3(x+1)(x-\tfrac{1}{3})(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2}). \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 3 Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de $f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$.

Solución En este caso, el término constante es $a_0 = 4$, y el primer coeficiente es $a_4 = 1$. Los factores enteros de a_0 y a_4 son, respectivamente:

$$\begin{aligned} &p\colon\ \pm 1, \pm 2, \pm 4, \\ &s\colon\ \pm 1. \end{aligned}$$

La lista de todas las raíces racionales posibles p/s es:

$$\frac{p}{s}\colon\ \pm 1, \pm 2, \pm 4.$$

Como todos los coeficientes de f son positivos, la sustitución de un número positivo de la lista anterior en $f(x)$ no podrá hacer que $f(x) = 0$. Así, los únicos números que son raíces racionales potenciales son -1, -2 y -4. Mediante la división sintética

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ & & -1 & -3 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 2 & \boxed{2 = r} \end{array}$$

se comprueba que -1 no es una raíz. Sin embargo, de

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ & & -2 & -4 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 2 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

se ve que -2 es una raíz. Ahora se investiga si -2 es una raíz repetida. Usando los coeficientes del cociente,

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ & & -2 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

entonces -2 es una raíz de multiplicidad 2. Hasta ahora se ha demostrado que

$$f(x) = (x+2)^2(x^2+1).$$

Como las raíces de $x^2 + 1$ son los complejos conjugados i y $-i$, se puede llegar a la conclusión que -2 es la única raíz real de $f(x)$. ■

EJEMPLO 4 Sin raíces racionales

Se tiene la función polinomial $f(x) = x^5 - 4x - 1$. Las únicas raíces racionales posibles son -1 y 1, y es fácil ver que ni $f(-1)$ ni $f(1)$ son raíces. Entonces, f tiene raíces no racionales. Como f tiene grado impar, tiene al menos una raíz real, y entonces esa raíz debe ser un número irracional. Con ayuda de una función graficadora se obtuvo la gráfica de la **FIGURA 3.4.2**. Note que, en la figura, la gráfica a la derecha de $x = 2$ no puede regresar hacia abajo, *así como tampoco* la gráfica a la izquierda de $x = -2$ no puede regresar hacia arriba y entonces cruzar al eje x cinco veces, porque esa forma de la gráfica sería inconsistente con el comportamiento de f en los extremos. Por lo tanto, se puede decir que la función f posee tres raíces reales irracionales y dos raíces complejas conjugadas. Lo mejor que se puede hacer en este caso es aproximar esas raíces. Con un programa computarizado de álgebra, como *Mathematica*, se pueden aproximar las raíces reales y complejas. Se ve que esas aproximaciones son -1.34, -0.25, 1.47, $0.061 + 1.42i$ y $0.061 - 1.42i$. ■

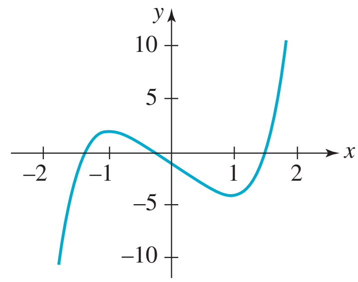


FIGURA 3.4.2 Gráfica de f del ejemplo 4

Aunque en el teorema de las raíces racionales se requiere que los coeficientes de una función polinomial f sean enteros, en algunos casos ese teorema se puede aplicar a una función polinomial con algunos coeficientes reales *no enteros*. En el siguiente ejemplo se ilustra este concepto.

EJEMPLO 5 Coeficientes no enteros

Determinar las raíces racionales de $f(x) = \frac{5}{6}x^4 - \frac{23}{12}x^3 + \frac{10}{3}x^2 - 3x - \frac{3}{4}$.

Solución Si se multiplica f por el mínimo común denominador, 12, de todos los coeficientes racionales, se obtiene una nueva función g, con coeficientes enteros:

$$g(x) = 10x^4 - 23x^3 + 40x^2 - 36x - 9.$$

En otras palabras, $g(x) = 12f(x)$. Si c es una raíz de la función g, entonces c también es una raíz de f, porque $g(c) = 0 = 12\,f(c)$ implica que $f(c) = 0$. Después de hacer las operaciones numéricas en la lista de las raíces racionales potenciales,

$$\frac{p}{s}\colon \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 9,\ \pm\tfrac{1}{2},\ \pm\tfrac{3}{2},\ \pm\tfrac{9}{2},\ \pm\tfrac{1}{5},\ \pm\tfrac{3}{5},\ \pm\tfrac{9}{5},\ \pm\tfrac{1}{10},\ \pm\tfrac{3}{10},\ \pm\tfrac{9}{10},$$

se ve que $-\frac{1}{5}$ y $\frac{3}{2}$ son raíces de g, y por consiguiente son raíces de f. ■

3.4 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-10.

En los problemas 1 a 20 determine todas las raíces racionales del polinomio f.

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$

2. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$

3. $f(x) = x^3 - 8x - 3$

4. $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 17x + 10$

5. $f(x) = 4x^4 - 7x^2 + 5x - 1$

6. $f(x) = 8x^4 - 2x^3 + 15x^2 - 4x - 2$

7. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 14x + 21$

8. $f(x) = 3x^4 + 5x^2 + 1$

9. $f(x) = 6x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 8x + 3$

10. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x - 3$

11. $f(x) = x^4 + 6x^3 - 7x$

12. $f(x) = x^5 - 2x^2 - 12x$

13. $f(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x$

14. $f(x) = 128x^6 - 2$

15. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{17}{4}x - 3$

16. $f(x) = 0.2x^3 - x + 0.8$

17. $f(x) = 2.5x^3 + x^2 + 0.6x + 0.1$

18. $f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$

19. $f(x) = 6x^4 + 2x^3 - \frac{11}{6}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$

20. $f(x) = x^4 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

En los problemas 21 a 30, determine todas las raíces reales del polinomio f. A continuación factorice $f(x)$ usando sólo números reales.

21. $f(x) = 8x^3 + 5x^2 - 11x + 3$
22. $f(x) = 6x^3 + 23x^2 + 3x - 14$
23. $f(x) = 10x^4 - 33x^3 + 66x - 40$
24. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 24x + 144$
25. $f(x) = x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 5x + 20$
26. $f(x) = 18x^5 + 75x^4 + 47x^3 - 52x^2 - 11x + 3$
27. $f(x) = 4x^5 - 8x^4 - 24x^3 + 40x^2 - 12x$
28. $f(x) = 6x^5 + 11x^4 - 3x^3 - 2x^2$
29. $f(x) = 16x^5 - 24x^4 + 25x^3 + 39x^2 - 23x + 3$
30. $f(x) = x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64$

En los problemas 31 a 36, encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.

31. $2x^3 + 3x^2 + 5x + 2 = 0$
32. $x^3 - 3x^2 = -4$
33. $2x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 25x - 6 = 0$
34. $9x^4 + 21x^3 + 22x^2 + 2x - 4 = 0$
35. $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$
36. $8x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 6x - 1 = 0$

En los problemas 37 y 38, deduzca una función polinomial f, del grado indicado, con coeficientes enteros y que tenga las raíces racionales indicadas.

37. grado 4; $-4, \frac{1}{3}, 1, 3$
38. grado 5; $-2, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$, 1 (multiplicidad dos)
39. Use el teorema del valor intermedio (vea la sección 3.1) para demostrar que la función polinomial $f(x) = 4x^3 - 11x^2 + 14x - 6$ tiene una raíz en el intervalo $[0, 1]$. Determine la raíz.
40. Haga una lista de todas las raíces racionales posibles de

$$f(x) = 24x^3 - 14x^2 + 36x + 105.$$

pero no haga la prueba con ellas.

En los problemas 41 y 42, determine la función polinomial cúbica f que satisfaga las condiciones indicadas.

41. raíces racionales 1 y 2, $f(0) = 1$ y $f(-1) = 4$
42. raíz racional $\frac{1}{2}$, raíces irracionales $1 + \sqrt{3}$ y $1 - \sqrt{3}$; el coeficiente de x es 2.

Problemas diversos relacionados con el cálculo

43. **Construcción de una caja** Se va a hacer una caja sin tapa a partir de una pieza cuadrada de cartón, cortando piezas cuadradas en cada esquina, y después doblando los lados hacia arriba. Vea la FIGURA 3.4.3. La longitud de un lado del cartón es 10 pulgadas. Calcule la longitud del lado de los cuadrados que se quitaron en las esquinas, si el volumen de la caja debe ser de 48 pulg^3.

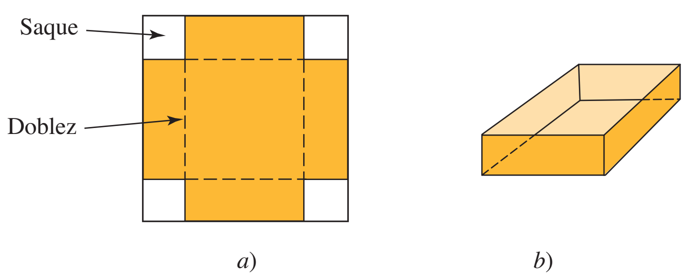


FIGURA 3.4.3 Caja del problema 43

44. **Flexión de una viga** Una viga en voladizo tiene 20 pies de longitud, y se carga con 600 lb en su extremo derecho; se flexiona una cantidad $d(x) = \frac{1}{16\,000}(60x^2 - x^3)$, donde d se expresa en pulgadas y x en pies. Vea la FIGURA 3.4.4. Calcule x cuando la flexión es de 0.1215 pulg. También cuando la flexión es de 1 pulgada.

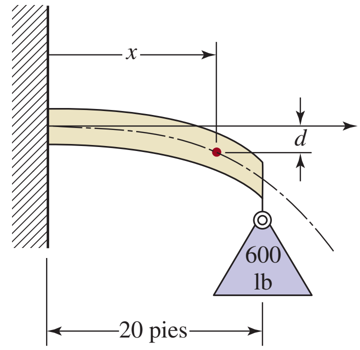


FIGURA 3.4.4 Caja del problema 44

Para discusión

45. Explique: ¿Cuál es el número máximo de veces que las gráficas de las funciones polinomiales dadas se puedan intercruzar?

a) $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,\;\; g(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$

b) $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,\;\; g(x) = x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$

46. Considere la función polinomial $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, donde los coeficientes $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son enteros pares distintos de cero. Explique por qué -1 y 1 no pueden ser raíces de $f(x)$.

47. Si el coeficiente principal de una función polinomial f con coeficientes íntegros es 1, ¿qué se puede decir sobre los posibles ceros reales de f?

48. Si k es un número primo (un número entero positivo mayor a 1 cuyos únicos factores de número entero son él mismo y 1) tal como $k > 2$, ¿cuáles son los posibles ceros racionales de $f(x) = 6x^4 - 9x^2 + k$?

49. *a)* El número real $\sqrt{2}$ es un cero de la función polinomial $f(x) = x^2 - 2$. ¿Cómo se demuestra en esta sección que $\sqrt{2}$ es irracional?

b) Use la idea implicada en la parte *a)* para comprobar que el número real $1 + \sqrt{2}$ es irracional.

50. Sin hacer trabajo alguno, explique por qué la función polinomial

$$f(x) = 4x^{10} + 9x^6 + 5x^4 + 13x^2 + 3$$

no tiene ceros reales.

3.5 Funciones racionales

Introducción Muchas funciones se forman a partir de funciones polinomiales, con operaciones aritméticas y composición de funciones (vea la sección 2.6). En esta sección se formará una clase de funciones, con el cociente de dos funciones polinomiales.

FUNCIÓN RACIONAL

Una **función racional** $y = f(x)$ es una función que tiene la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

en donde P y Q son funciones polinomiales.

Por ejemplo, las siguientes funciones son racionales:

$$y = \frac{x}{x^2 + 5}, \qquad y = \frac{\overset{\text{polinomio}}{\overset{\downarrow}{x^3 - x + 7}}}{\underset{\text{polinomio}}{\underset{\uparrow}{x + 3}}}, \qquad y = \frac{1}{x}.$$

La función

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1} \quad \leftarrow \text{no es un polinomio}$$

no es una función racional. En (1), no se puede permitir que el denominador sea cero. Entonces, el **dominio** de una función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ es el conjunto de todos los números reales, *excepto* aquellos números en los cuales el denominador $Q(x)$ sea cero. Por ejemplo, el dominio de la función racional $f(x) = (2x^3 - 1)/(x^2 - 9)$ es $\{x \mid x \neq -3, x \neq 3\}$, o bien $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$. No es necesario decir que tampoco se permite que el denominador sea el polinomio nulo, $Q(x) = 0$.

□ Gráficas

Es un poco más complicado graficar una función racional f que una función polinomial, porque además de poner atención en

- las intersecciones con los ejes,
- la simetría y
- el desplazamiento o reflexión o estiramiento de gráficas conocidas,

también se deben vigilar

- el dominio de f y
- los grados de $P(x)$ y $Q(x)$.

Estos dos últimos temas son importantes para determinar si una gráfica de una función racional tiene *asíntotas*.

La intersección con el eje y está en el punto $(0, f(0))$, siempre que el número 0 esté en el dominio de f. Por ejemplo, la gráfica de la función racional $f(x) = (1 - x)/x$ no cruza el eje y, porque $f(0)$ no está definida. Si los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes, entonces las intersecciones con el eje x en la gráfica de la función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ son los puntos cuyas abscisas son las raíces reales del numerador $P(x)$. En otras palabras, la única forma en que $f(x) = P(x)/Q(x) = 0$ es hacer que $P(x) = 0$. La gráfica de una función racional f es simétrica con respecto al eje y si $f(-x) = f(x)$, y simétrica con respecto al origen si $f(-x) = -f(x)$. Como es fácil localizar una función polinomial par o impar (vea la página 131), una forma fácil de determinar la simetría de la gráfica de una función racional es la siguiente. Se considera que $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes.

- El cociente de dos funciones pares es par. (2)
- El cociente de dos funciones impares es par. (3)
- El cociente de una función par y una impar es impar. (4)

Vea el problema 48, en los ejercicios 3.5.

Ya hemos visto las gráficas de dos funciones racionales simples, $y = 1/x$ y $y = 1/x^2$, en las figuras 2.2.1*e*) y 2.2.1*f*). Se pide al lector que repase ahora esas gráficas. Observe que $P(x) = 1$ es una función par, y que $Q(x) = x$ es una función impar, por lo que $y = 1/x$ es una función impar, de acuerdo con (4). Por otra parte, $P(x) = 1$ es una función par, así como $Q(x) = x^2$, por lo que $y = 1/x^2$ es una función impar, de acuerdo con (2).

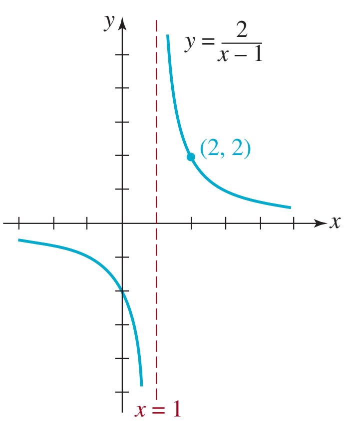


FIGURA 3.5.1 Gráfica de la función del ejemplo 1

EJEMPLO 1 Función recíproca desplazada

Graficar la función $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$.

Solución La gráfica no tiene simetría, porque $Q(x) = x - 1$ no es función par ni impar. Como $f(0) = -2$, la intersección con el eje y está en $(0, -2)$. Como $P(x) = 2$ nunca es 0, no hay intersecciones con el eje x. También, el lector debe reconocer que la gráfica de esta función racional es la de la función recíproca $y = 1/x$, estirada verticalmente en un factor de 2, y trasladada 1 unidad hacia la derecha. El punto $(1, 1)$ está en la gráfica de $y = 1/x$; en la **FIGURA 3.5.1**, después del estiramiento vertical y el desplazamiento horizontal, el punto correspondiente en la gráfica de $y = 2/(x - 1)$ es $(2, 2)$.

La recta vertical $x = 1$, y la recta horizontal $y = 0$ (la ecuación del eje x) tienen especial importancia en esta gráfica.

La línea interrumpida vertical $x = 1$ de la figura 3.5.1, es el eje y de la figura 2.2.1*e*), desplazado 1 unidad hacia la derecha. Aunque el número 1 no está en el dominio de la función dada, se puede evaluar f en valores de x *cercanos* a 1. Por ejemplo, se puede verificar que

x	0.999	1.001
$f(x)$	$-2\,000$	$2\,000$

(5)

Esta tabla muestra que en el caso de valores de x cercanos a 1, los valores correspondientes de la función $f(x)$ tienen valor absoluto grande. Por otra parte, en el de valores de x cuando $|x|$ es grande, los valores correspondientes de la función $f(x)$ son cercanos a cero. Por ejemplo, el lector puede comprobar que

x	-999	$1\,001$
$f(x)$	-0.002	0.002

(6)

Desde el punto de vista geométrico, cuando x tiende a 1, la gráfica de la función tiende a la recta vertical $x = 1$, y cuando $|x|$ aumenta sin límite, la gráfica de la función tiende a la recta horizontal $y = 0$. ■

□ Asíntotas

Recordemos, de la sección 1.5, que para indicar que x se acerca a un número a se usa la notación

- $x \to a^-$, para decir que x tiende a a desde la *izquierda*, esto es, a través de números que son menores que a;
- $x \to a^+$, para decir que x tiende a a desde la *derecha*, esto es, a través de números que son mayores que a, y
- $x \to a$, para decir que x tiende a a desde la *izquierda* y también desde la *derecha*.

También se usan los símbolos de infinito, así como la notación

- $x \to -\infty$ para indicar que x se vuelve *no acotado en la dirección negativa*, y
- $x \to \infty$ para indicar que x se vuelve *no acotado en la dirección positiva*.

Se dan interpretaciones parecidas a los símbolos $f(x) \to -\infty$ y $f(x) \to \infty$. Estas notaciones son una forma cómoda de describir el comportamiento de una función ya sea cerca de un número $x = a$, o cuando x aumenta hacia la derecha o disminuye hacia la izquierda. Así, en el ejemplo 1 se ve que, de acuerdo con (5) y la figura 3.5.1,

$$f(x) \to -\infty \text{ cuando } x \to 1^- \qquad \text{y} \qquad f(x) \to \infty \text{ cuando } x \to 1^+.$$

En palabras, la notación del renglón anterior quiere decir que los valores de la función decrecen sin límite cuando x tiende a 1 desde la izquierda, y que los valores de la función crecen sin límite cuando x tiende a 1 desde la derecha. De acuerdo con (6) y la figura 3.5.1, también debe quedar claro que

$$f(x) \to 0 \text{ cuando } x \to -\infty \qquad \text{y} \qquad f(x) \to 0 \text{ cuando } x \to \infty.$$

En la figura 3.5.1, la recta vertical cuya ecuación es $x = 1$ se llama **asíntota vertical** de la gráfica de f, y la recta horizontal cuya ecuación es $y = 0$ se llama **asíntota horizontal** de la gráfica de f.

En esta sección examinaremos tres tipos de asíntotas, que corresponden a los tres tipos de rectas que estudiamos en la sección 2.3: *rectas verticales*, *rectas horizontales* y *rectas inclinadas* (u oblicuas). La característica de cualquier asíntota es que la gráfica de una función f debe acercarse, o tender, a la recta.

ASÍNTOTA VERTICAL

Se dice que una recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de una función f, si se cumple al menos una de las seis condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} &f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to a^-, \qquad &f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a^-,\\ &f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to a^+, \qquad &f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a^+,\\ &f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to a, \qquad &f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a. \end{aligned} \tag{7}$$

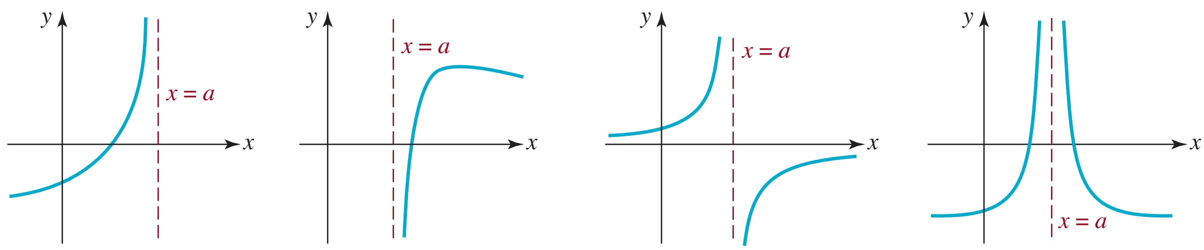
La **FIGURA 3.5.2** ilustra cuatro de las posibilidades que indica (7) sobre el comportamiento no acotado de una función f cerca de una asíntota vertical $x = a$. Si la función tiene la *misma clase de comportamiento no acotado desde ambos lados de* $x = a$, se expresa ya sea como

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a, \tag{8}$$

o bien como

$$f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to a. \tag{9}$$

En la figura 3.5.2*d*) se ve que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^-$ y que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^+$; por consiguiente, se escribe $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a$.



a) $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^-$ *b*) $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^+$ *c*) $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^-$; $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^+$ *d*) $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a$

FIGURA 3.5.2 La recta $x = a$ es una asíntota vertical

Si $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una *función racional* $f(x) = P(x)/Q(x)$, entonces, los valores de la función $f(x)$ se vuelven no acotados cuando x tiende a a desde *ambos lados*, esto es, desde la derecha ($x \to a^+$) *y también* desde la izquierda ($x \to a^-$). Las gráficas de las figuras 3.5.2*c*) y 3.5.2*d*) (o la reflexión de esas gráficas en el eje x) son gráficas típicas de una función racional con una sola asíntota vertical. Como se ve en esas figuras, una función racional con una asíntota vertical es una **función discontinua**. Hay una interrupción infinita en cada gráfica, en $x = a$. Como se ve en las figuras 3.5.2*c*) y 3.5.2*d*), una sola asíntota vertical divide al plano xy en dos regiones, y dentro de cada región hay una sola parte, o **rama**, de la gráfica de la función racional f.

ASÍNTOTA HORIZONTAL

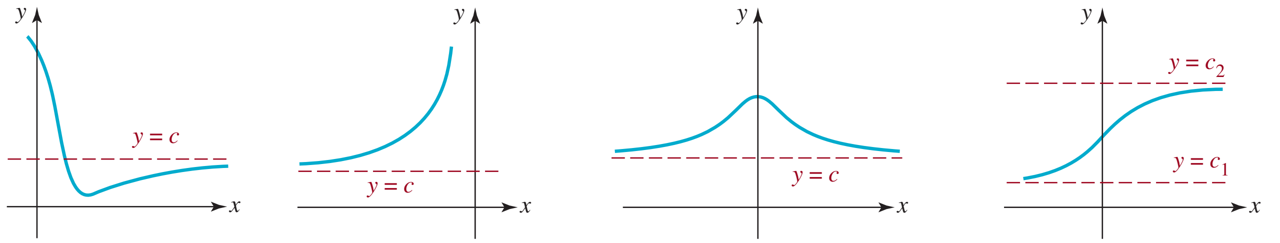
Se dice que una recta $y = c$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de una función f, si

$$f(x) \to c \text{ cuando } x \to -\infty \qquad \text{o si} \qquad f(x) \to c \text{ cuando } x \to \infty. \tag{10}$$

En la **FIGURA 3.5.3** hemos ilustrado algunas asíntotas horizontales típicas. Se ve que, junto con la figura 3.5.3*d*), en general la gráfica de una función puede tener cuando mucho *dos* asíntotas horizontales, pero que la gráfica de una *función racional* ($f(x) = P(x)/Q(x)$ puede tener *una*, cuando mucho. Si la gráfica de una función racional f tiene una asíntota horizontal $y = c$, entonces, como se ve en la figura 3.5.3*c*),

◀ No se olvide de esto.

$$f(x) \to c \text{ cuando } x \to -\infty \qquad \text{y} \qquad f(x) \to c \text{ cuando } x \to \infty.$$



a) $f(x) \to c$ cuando $x \to \infty$ *b*) $f(x) \to c$ cuando $x \to -\infty$ *c*) $f(x) \to c$ cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to c$ cuando $x \to \infty$ *d*) $f(x) \to c_1$ cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to c_2$ cuando $x \to \infty$

FIGURA 3.5.3 La recta $y = c$ es una asíntota horizontal en *a*), *b*) y *c*)

El último renglón es una descripción matemática del comportamiento en los extremos de la gráfica de una función racional con asíntota horizontal. También, la gráfica de una función *nunca* puede cruzar una asíntota vertical; pero, como se ve en la figura 3.5.3*a*), una gráfica sí puede cruzar una asíntota horizontal.

ASÍNTOTA OBLICUA

Se dice que una recta $y = mx + b$, $m \neq 0$, es una **asíntota inclinada**, o **asíntota oblicua**, de la gráfica de una función f, si

$$f(x) \to mx + b \text{ cuando } x \to -\infty$$

o bien $$f(x) \to mx + b \text{ cuando } x \to \infty. \tag{11}$$

◀ Una asíntota inclinada también se llama **asíntota oblicua**.

La notación en (11) quiere decir que la gráfica de f tiene una asíntota oblicua siempre que los valores de la función $f(x)$ se acercan cada vez más a los valores de y en la recta $y = mx + b$, cuando el valor absoluto de x crece. Otra forma de enunciar (11) es: una recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua de la gráfica de f, si la distancia vertical $d(x)$ entre los puntos con la misma abscisa, en las dos gráficas, satisface

$$d(x) = f(x) - (mx + b) \to 0 \text{ cuando } x \to -\infty \text{ o cuando } x \to \infty.$$

Vea la **FIGURA 3.5.4**. Se nota que si una gráfica de una función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ posee una asíntota oblicua, puede tener asíntotas verticales, pero *no puede* tener una asíntota horizontal.

Desde el punto de vista práctico, las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de una función racional f se pueden determinar por inspección. Entonces, para fines de esta descripción, supongamos que

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \; a_n \neq 0, \; b_m \neq 0, \tag{12}$$

representa una función racional general.

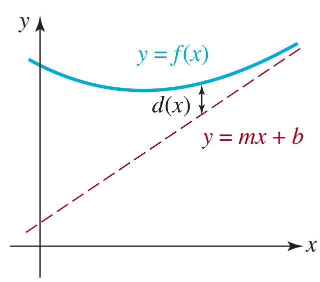


FIGURA 3.5.4 La asíntota oblicua es $y = mx + b$

☐ **Determinación de asíntotas verticales** Supongamos que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ en (12) no tienen factores comunes. En ese caso:

- Si a es un número real tal que $Q(a) = 0$, la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

Debido a que $Q(x)$ es un polinomio de grado m, puede tener hasta m raíces reales, y entonces la gráfica de una función racional f puede tener hasta m asíntotas verticales. Si la gráfica de una función racional f tiene, por ejemplo, k asíntotas verticales ($k \leq m$), entonces las k rectas verticales dividen al plano xy en $k + 1$ regiones. Por lo tanto, la gráfica de esta función racional tendría $k + 1$ ramas.

EJEMPLO 2 Asíntotas verticales

a) Por inspección de la función racional $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 4}$ se ve que el denominador $Q(x) = x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) = 0$ en $x = -2$ y en $x = 2$. Son las ecuaciones de las asíntotas verticales de la gráfica de f. Esta gráfica tiene tres ramas: una a la izquierda de la recta $x = -2$, una entre las rectas $x = -2$ y $x = 2$, y una a la derecha de la recta $x = 2$.

b) La gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 4}$ no tiene asíntotas verticales, porque $Q(x) = x^2 + x + 4 \neq 0$ para todos los números reales. ■

□ Determinación de las asíntotas horizontales

Cuando describimos el comportamiento en los extremos, de un polinomio $P(x)$ de grado n, hicimos notar que $P(x)$ se comporta como $y = a_n x^n$, esto es, $P(x) \approx a_n x^n$, para valores absolutos grandes de x. En consecuencia, se ve en

$$f(x) = \frac{a_n x^n \boxed{+ a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}}{b_m x^m \boxed{+ b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}}$$

las potencias menores de x son irrelevantes cuando $x \to \pm\infty$

que $f(x)$ se comporta como $y = \dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ porque $f(x) \approx \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m} = \dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ para $x \to \pm\infty$. Por lo tanto:

$$\text{Si } n = m, \qquad f(x) \approx \frac{a_n}{b_m}x^{\overset{0}{\overbrace{n-n}}} \to \frac{a_n}{b_m} \quad \text{cuando} \quad x \to \pm\infty. \tag{13}$$

$$\text{Si } n < m, \qquad f(x) \approx \frac{a_n}{b_m}x^{\overset{\text{negativa}}{\overbrace{n-m}}} = \frac{a_n}{b_m}\frac{1}{x^{m-n}} \to 0 \qquad \text{cuando } x \to \pm\infty. \tag{14}$$

$$\text{Si } n > m, \qquad f(x) \approx \frac{a_n}{b_m}x^{\overset{\text{positiva}}{\overbrace{n-m}}} \to \infty \qquad \text{cuando } x \to \pm\infty. \tag{15}$$

De acuerdo con (13), (14) y (15), sacamos en claro las tres propiedades siguientes de las asíntotas horizontales de la gráfica de $f(x) = P(x)/Q(x)$:

- Si el grado de $P(x)$ = grado de $Q(x)$, entonces $y = a_n/b_m$ (el cociente de los primeros coeficientes) es una asíntota horizontal. (16)
- Si el grado de $P(x)$ < grado de $Q(x)$, entonces $y = 0$ es una asíntota horizontal. (17)
- Si el grado de $P(x)$ > grado de $Q(x)$, entonces la gráfica de f *no* tiene asíntota horizontal. (18)

EJEMPLO 3 Asíntotas horizontales

Determinar si la gráfica de cada una de las funciones racionales tiene una asíntota horizontal

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 1}{8x^2 + x}$ ***b***) $f(x) = \dfrac{4x^3 + 7x + 8}{2x^4 + 3x^2 - x + 6}$ ***c***) $f(x) = \dfrac{5x^3 + x^2 + 1}{2x + 3}$

Solución

a) Ya que el grado del numerador $3x^2 + 4x - 1$ es igual al grado del denominador $8x^2 + x$ (ambos grados son 2), de acuerdo con (13):

$$f(x) \approx \frac{3}{8}x^{2-2} = \frac{3}{8} \quad \text{cuando} \quad x \to \pm\infty.$$

Como se resume en (16), $y = \frac{3}{8}$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

b) En vista de que el grado del numerador $4x^3 + 7x + 8$ es 3, y que el grado del denominador $2x^4 + 3x^2 - x + 6$ es 4 (y $3 < 4$), de acuerdo con (14),

$$f(x) \approx \frac{4}{2}x^{3-4} = \frac{2}{x} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad x \to \pm\infty.$$

Como se resume en (17), $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

c) Como el grado del numerador $5x^3 + x^2 - 1$ es 3, y el grado del denominador $2x + 3$ es 1 (y $3 > 1$), de acuerdo con (15):

$$f(x) \approx \frac{5}{2}x^{3-1} = \frac{5}{2}x^2 \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to \pm\infty.$$

Como se indica en (18), la gráfica de f no tiene asíntota horizontal. ■

En los ejemplos de graficado que siguen supondremos que $P(x)$ y $Q(x)$ en (12) no tienen factores comunes.

EJEMPLO 4 Gráfica de una función racional

Graficar la función $f(x) = \dfrac{3 - x}{x + 2}$.

Solución Algo de lo que se debe buscar para trazar la gráfica de f es lo siguiente:

Simetría: No tiene simetría. $P(x) = 3 - x$ y $Q(x) = x + 2$ no son pares ni impares.

Intersecciones: $f(0) = \frac{3}{2}$ y entonces la intersección con el eje y está en $(0, \frac{3}{2})$. Al igualar $P(x) = 0$, o $3 - x = 0$, se ve que 3 es una raíz de P. La única intersección con el eje x está en $(3, 0)$.

Asíntotas verticales: Al igualar $Q(x) = 0$ o $x + 2 = 0$, se obtiene $x = -2$. La recta $x = -2$ es una asíntota vertical.

Ramas: Como sólo hay una sola asíntota vertical, la gráfica de f consiste en dos ramas distintas, una a la izquierda de $x = -2$ y una a la derecha de $x = -2$.

Asíntota horizontal: El grado de P y el grado de Q son iguales (a 1), y entonces la gráfica de f tiene una asíntota horizontal. Al reacomodar a f en la forma $f(x) = \dfrac{-x + 3}{x + 2}$ se ve que la relación de los primeros coeficientes es $-1/1 = -1$.

De acuerdo con (16), la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal.

Gráfica: Se trazan las asíntotas vertical y horizontal usando líneas interrumpidas. La rama derecha de la gráfica de f se traza pasando por las intersecciones con los ejes $(0, \frac{3}{2})$ y $(3, 0)$, de tal manera que tienda a ambas asíntotas. La rama izquierda se traza *abajo* de la asíntota horizontal $y = -1$. Si la dibujáramos arriba de la asíntota horizontal, debería estar cerca de la asíntota horizontal desde arriba y cerca de la asíntota vertical desde la izquierda. Para hacerlo, la rama de la gráfica debería cruzar el eje x, pero como no hay más intersecciones con el eje x, eso es imposible. Vea la FIGURA 3.5.5. ■

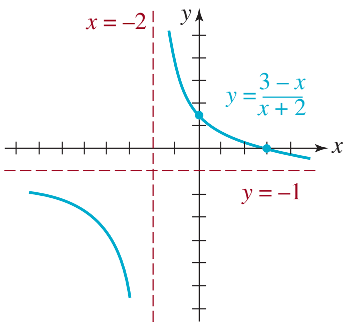


FIGURA 3.5.5 Gráfica de la función del ejemplo 4

EJEMPLO 5 Ejemplo 4 con transformaciones

A veces pueden ser útiles la división entre polinomios y las transformaciones rígidas para graficar funciones racionales. Nótese que si se hace la división en la función f del ejemplo 4, se ve que

$$f(x) = \frac{3 - x}{x + 2} \quad \text{es lo mismo que} \quad f(x) = -1 + \frac{5}{x + 2}.$$

Entonces, comenzando con la gráfica de $y = 1/x$, la estiramos verticalmente en un factor de 5. A continuación, desplazamos la gráfica de $y = 5/x$ dos unidades hacia la izquierda. Por último, desplazamos $y = 5/(x + 2)$ una unidad verticalmente hacia abajo. El lector debe verificar que el resultado neto es la gráfica de la figura 3.5.5. ■

EJEMPLO 6 Gráfica de una función racional

Graficar la función $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$.

Solución

Simetría: Ya que $P(x) = x$ es impar, y $Q(x) = 1 - x^2$ es par, el cociente $P(x)/Q(x)$ es impar. La gráfica de f es simétrica con respecto al origen.

Intersecciones: $f(0) = 0$, y entonces la intersección con el eje y está en $(0, 0)$. Al igualar $P(x) = x = 0$ se obtiene $x = 0$. Por lo anterior, las únicas intersecciones con los ejes están en $(0, 0)$.

Asíntotas verticales: Al igualar $Q(x) = 0$, o $1 - x^2 = 0$, se obtienen $x = -1$ y $x = 1$. Las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.

Ramas: Como hay dos asíntotas verticales, la gráfica de f consiste en tres ramas distintas, una a la izquierda de la recta $x = -1$, una entre las rectas $x = -1$ y $x = 1$, y una a la derecha de la recta $x = 1$.

Asíntota horizontal: Como el grado del numerador x es 1, y el grado del denominador $1 - x^2$ es 2 (y $1 < 2$), de acuerdo con (14) y (17), $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

La gráfica: Se puede trazar la gráfica de $x \geq 0$ y a continuación aplicar la simetría para obtener la parte restante de la gráfica de $x < 0$. Comenzaremos trazando las asíntotas verticales con líneas interrumpidas. El medio ramal de la gráfica de f en el intervalo $[0, 1)$ se traza comenzando en $(0, 0)$. La función f debe crecer, porque $P(x) = x > 0$, y $Q(x) = 1 - x^2 > 0$ indican que $f(x) > 0$ para $0 < x < 1$. Eso implica que cerca de la asíntota vertical $x = 1$, $f(x) \to \infty$ cuando $x \to 1^-$. La rama de la gráfica para $x > 1$ se traza abajo de la asíntota horizontal $y = 0$, porque $P(x) = x > 0$ y $Q(x) = 1 - x^2 < 0$ implica que $f(x) < 0$. Entonces, $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 1^+$ y $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. El resto de la gráfica, para $x < 0$, se obtiene reflejando la gráfica para $x > 0$ en el origen. Vea la FIGURA 3.5.6. ■

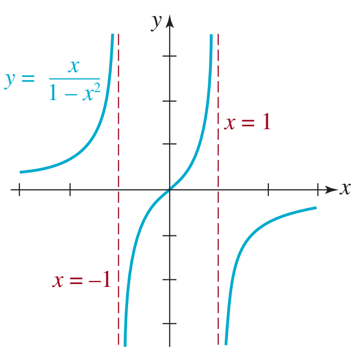


FIGURA 3.5.6 Gráfica de la función del ejemplo 6

EJEMPLO 7 Gráfica de una función racional

Graficar la función $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

Solución La función f se parece a la función del ejemplo 6, porque f es una función impar, (0, 0) es el único cruce de esta gráfica con los ejes, y su gráfica tiene la asíntota horizontal $y = 0$. Sin embargo, obsérvese que como $1 + x^2 > 0$ para todos los números reales, no hay asíntotas verticales, y entonces no hay ramas; la gráfica es una curva continua. Para $x \geq 0$, la gráfica pasa por (0, 0) y entonces debe crecer, porque $f(x) > 0$ para $x > 0$. También, f debe llegar a un máximo local para luego decrecer, a fin de satisfacer la condición $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Como se vio en la sección 3.1, el lugar exacto de este máximo local se puede obtener con las técnicas del cálculo. Por último, se refleja la parte de la gráfica para $x > 0$ respecto al origen. Esa gráfica debe verse algo así como la de la **FIGURA 3.5.7**. ■

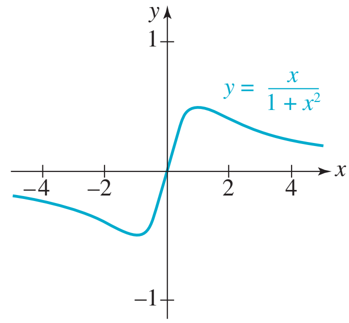


FIGURA 3.5.7 Gráfica de la función del ejemplo 7

□ Determinación de asíntotas oblicuas

Supongamos de nuevo que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ en (12) no tienen factores comunes. En ese caso, se puede reconocer la existencia de una asíntota oblicua como sigue:

- Si el grado de $P(x)$ es precisamente uno más que el grado de $Q(x)$; esto es, si el grado de $Q(x)$ es m y el grado de $P(x)$ es $m + 1$, entonces la gráfica de f tiene una asíntota oblicua o inclinada.

La asíntota oblicua se determina por simple división entre polinomios. Al dividir $P(x)$ entre $Q(x)$ se obtiene un cociente que es un polinomio lineal $mx + b$, y un polinomio residuo $R(x)$:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{mx + b}_{\text{cociente}} + \underbrace{\frac{R(x)}{Q(x)}}_{\text{residuo}}. \tag{19}$$

Como el grado de $R(x)$ debe ser menor que el grado del divisor $Q(x)$, entonces $R(x)/Q(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to \infty$, y en consecuencia

$$f(x) \to mx + b \text{ cuando } x \to -\infty \qquad \text{y} \qquad f(x) \to mx + b \text{ cuando } x \to \infty.$$

En otras palabras, una ecuación de la asíntota oblicua es $y = mx + b$, donde $mx + b$ es el cociente de (19).

Si el denominador $Q(x)$ es un polinomio *lineal*, se puede aplicar entonces la división sintética.

EJEMPLO 8 Gráfica con una asíntota oblicua

Graficar la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 5}$.

Solución

Simetría: No hay simetría. $P(x) = x^2 - x - 6$ y $Q(x) = x - 5$ no son pares ni son impares.

Intersecciones: $f(0) = \frac{6}{5}$, y entonces la intersección con el eje y está en $(0, \frac{6}{5})$. Al igualar $P(x) = 0$, es decir, $x^2 - x - 6 = 0$, o $(x + 2)(x - 3) = 0$ se ve que -2 y 3 son raíces de $P(x)$. Las intersecciones con el eje x están en $(-2, 0)$ y en $(3, 0)$.

Asíntotas verticales: Si se iguala $Q(x) = 0$, o $x - 5 = 0$, el resultado es $x = 5$. La recta $x = 5$ es una asíntota vertical.

Ramas: La gráfica de f consta de dos ramas, una a la izquierda de $x = 5$ y una a la derecha de $x = 5$.

Asíntota horizontal: No hay.

Asíntota oblicua: Como el grado de $P(x) = x^2 - x - 6$ (que es 2) es exactamente una unidad más grande que el grado de $Q(x) = x - 5$ (que es 1), la gráfica de $f(x)$ tiene una asíntota oblicua. Para determinarla se divide $P(x)$ entre $Q(x)$. Debido a que $Q(x)$ es un polinomio lineal, se puede aplicar la división sintética:

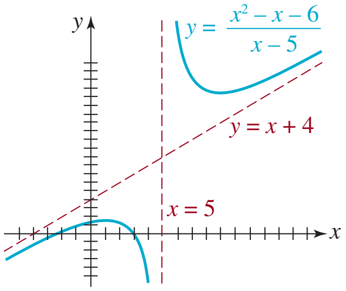


FIGURA 3.5.8 Gráfica de la función del ejemplo 8

$$\begin{array}{r|rrr} 5 & 1 & -1 & -6 \\ & & 5 & 20 \\ \hline & 1 & 4 & \boxed{14}. \end{array}$$

Recuerde que esta notación quiere decir que

$$\frac{x^2 - x - 6}{x - 5} = \underbrace{x + 4}_{y\,=\,x\,+\,4 \text{ es la asíntota oblicua}} + \frac{14}{x - 5}.$$

Note de nuevo que $14/(x - 5) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$. Por consiguiente, la recta $y = x + 4$ es una asíntota inclinada.

La gráfica: Con la información anterior se obtiene la gráfica de la **FIGURA 3.5.8**. Las asíntotas son las líneas interrumpidas de la figura. ■

EJEMPLO 9 Gráfica con una asíntota oblicua

Por inspección debe verse que la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{x^3 - 8x + 12}{x^2 + 1}$ tiene una asíntota oblicua, pero no tiene asíntotas verticales. Como el denominador es un polinomio cuadrático, recurrimos a la división, para obtener

$$\frac{x^3 - 8x + 12}{x^2 + 1} = x + \frac{-9x + 12}{x^2 + 1}.$$

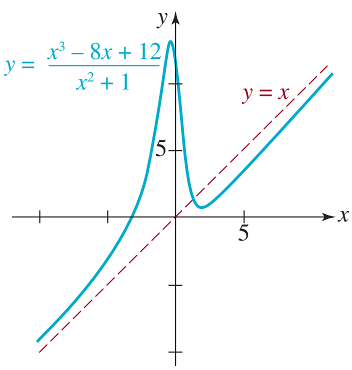


FIGURA 3.5.9 Gráfica de la función del ejemplo 9

La asíntota oblicua es la recta $y = x$. La gráfica no tiene simetría. La intersección con el eje y está en $(0, 12)$. La carencia de asíntotas verticales indica que la función f es continua; su gráfica consiste en una curva ininterrumpida. Como el numerador es un polinomio de grado impar, al menos tiene una raíz real. Ya que $x^3 - 8x + 12 = 0$ no tiene raíces racionales, se usan técnicas de aproximación, o de graficación, para demostrar que la ecuación sólo tiene una raíz irracional real. Por lo anterior, la intersección con el eje x está aproximadamente en $(-3.4, 0)$. La gráfica de f se ve en la **FIGURA 3.5.9**. Observe que la gráfica de f cruza a la asíntota oblicua. ■

□ Nota final: Gráfica con un agujero

En la descripción de las asíntotas de funciones racionales supusimos que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ en (1) no tienen factores comunes. Ahora sabemos que si a es un número real tal que $Q(a) = 0$ y $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de f. Como Q es un polinomio, entonces, de acuerdo con el teorema del factor, $Q(x) = (x - a)q(x)$. La hipótesis de que el numerador P y el denominador Q no tienen factores comunes indica que $x - a$ no es un factor de P, y entonces $P(a) \neq 0$. Cuando $P(a) = 0$ y $Q(a) = 0$, entonces *$x = a$ podría no ser* una asíntota vertical. Por ejemplo, cuando a es una *raíz simple* tanto de P como de Q, entonces *$x = a$ no es* una asíntota vertical de la gráfica de $f(x) = P(x)/Q(x)$. Para verlo, de acuerdo con el teorema del factor, si $P(a) = 0$ y $Q(a) = 0$, entonces $x - a$ es un factor común de P y Q:

$$P(x) = (x - a)p(x) \qquad \text{y} \qquad Q(x) = (x - a)q(x),$$

donde p y q son polinomios tales que $p(a) \neq 0$ y $q(a) \neq 0$. Después de simplificar

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x - a)p(x)}{(x - a)q(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad x \neq a,$$

se ve que $f(x)$ es indefinida en a, pero los valores de la función $f(x)$ no crecen o decrecen sin límite cuando $x \to a^-$ o cuando $x \to a^+$, porque $q(x)$ no tiende a 0. Por ejemplo, en la sección 2.5 vimos que la gráfica de la función racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2, \quad x \neq 2,$$

básicamente es una recta. Pero como $f(2)$ no está definida, no hay punto $(2, f(2))$ en la curva. En su lugar, hay un **agujero** en la gráfica en el punto (2, 4). Vea la figura 2.5.5*a*).

EJEMPLO 10 Gráfica con un agujero

Graficar la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$.

Solución Aunque $x^2 - 1 = 0$ para $x = -1$ y $x = 1$, sólo $x = 1$ es una asíntota vertical. Nótese que el numerador $P(x)$ y el denominador $Q(x)$ tienen el factor común $x + 1$, que se anula siempre que $x \neq -1$:

la igualdad es cierta para $x \neq -1$
↓
$$f(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-3}{x-1}. \qquad (20)$$

Así vemos que, de acuerdo con (20), no hay interrupción infinita en la gráfica en $x = -1$. Se hace la gráfica de $y = \dfrac{x-3}{x-1}$, $x \neq -1$, observando que la intersección con el eje y está en (0, 3), una intersección con el eje x es (3, 0), una asíntota vertical es $x = 1$ y una asíntota horizontal es $y = 1$. La gráfica de esta función tiene dos ramas, pero la rama a la izquierda de la asíntota vertical $x = 1$ tiene un agujero en ella, que corresponde al punto $(-1, 2)$. Vea la **FIGURA 3.5.10**. ■

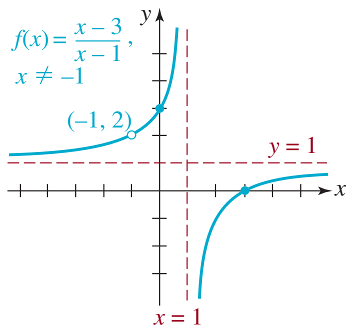
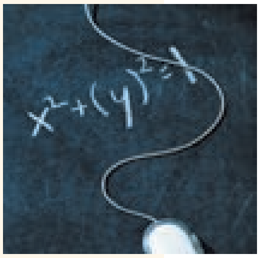


FIGURA 3.5.10 Gráfica de la función del ejemplo 10

NOTAS PARA EL SALÓN DE CLASE



Cuando se les pregunta si alguna vez han oído la afirmación "*una asíntota es una recta a la que la gráfica se aproxima, pero no cruza*", una cantidad sorprendente de alumnos levantan la mano. Primero, debemos aclarar que la afirmación es falsa: una gráfica *puede* cruzar una asíntota horizontal y *también* una asíntota oblicua. Una gráfica nunca *puede* cruzar una asíntota *vertical* $x = a$, porque en forma inherente la función es indefinida en $x = a$. Hasta se pueden determinar los puntos donde una gráfica cruza a una asíntota horizontal o una oblicua. Por ejemplo, la función racional $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$ tiene la asíntota horizontal $y = 1$. La determinación de si la gráfica de f cruza a la recta horizontal $y = 1$, equivale a preguntar si $y = 1$ está en el contradominio de la función f. Si se iguala $f(x)$ a 1, esto es,

$$\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 1$$

implica que $\qquad x^2 + 2x = x^2 - 1 \quad$ y $\quad x = -\frac{1}{2}$.

Como $x = -\frac{1}{2}$ está en el dominio de f, la gráfica de f cruza a la asíntota horizontal en $\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$. Obsérvese, en el ejemplo 9, que se puede determinar el punto en el que la asíntota inclinada cruza a la gráfica de $y = x$, resolviendo $f(x) = x$. El lector debe verificar que el punto de intersección es $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Vea los problemas 31 a 36 de los ejercicios 3.5.

3.5 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-10.

En los problemas 1 y 2 use una calculadora para llenar la tabla de la función racional $f(x) = \dfrac{2x}{x - 3}$.

1. $x = 3$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

x	3.1	3.01	3.001	3.0001	3.00001
$f(x)$					
x	2.9	2.99	2.999	2.9999	2.99999
$f(x)$					

2. $y = 2$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

x	10	100	1 000	10 000	100 000
$f(x)$					
x	-10	-100	$-1\,000$	$-10\,000$	$-100\,000$
$f(x)$					

En los problemas 3 a 22 determine las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de la función racional indicada. Determine las intersecciones con los ejes de la gráfica. Trace un bosquejo de la gráfica de f.

3. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

4. $f(x) = \dfrac{4}{x + 3}$

5. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

6. $f(x) = \dfrac{x}{2x - 5}$

7. $f(x) = \dfrac{4x - 9}{2x + 3}$

8. $f(x) = \dfrac{2x + 4}{x - 2}$

9. $f(x) = \dfrac{1 - x}{x + 1}$

10. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x}$

11. $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^2}$

12. $f(x) = \dfrac{4}{(x + 2)^3}$

13. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

14. $f(x) = \dfrac{8}{x^4}$

15. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

16. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

17. $f(x) = \dfrac{1}{x(x - 2)}$

18. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 8}$

19. $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2}$

20. $f(x) = \dfrac{16}{x^2 + 4}$

21. $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 8}{(x - 1)^2}$

22. $f(x) = \dfrac{x(x - 5)}{x^2 - 9}$

En los problemas 23 a 30, determine las asíntotas verticales y oblicuas de la gráfica de la función racional indicada. Determine las intersecciones con los ejes de la gráfica. Trace esa gráfica.

23. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x}$

24. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x}$

25. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 2}$

26. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 2}$

27. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$

28. $f(x) = \dfrac{-(x - 1)^2}{x + 2}$

29. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - x}$

30. $f(x) = \dfrac{5x(x + 1)(x - 4)}{x^2 + 1}$

En los problemas 31 a 34, determine el punto donde la gráfica de f cruza su asíntota horizontal. Trace la gráfica de f.

31. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 + 3}$

32. $f(x) = \dfrac{(x - 3)^2}{x^2 - 5x}$

33. $f(x) = \dfrac{4x(x - 2)}{(x - 3)(x + 4)}$

34. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + x + 1}$

En los problemas 35 y 36 determine el punto donde la gráfica de f cruza su asíntota oblicua. Use una función de graficación para obtener la gráfica de f y la asíntota oblicua, en el mismo plano coordenado.

35. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + 1}$

36. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 4}{x^2}$

En los problemas 37 a 40, determine una función racional que satisfaga las condiciones indicadas. No hay una respuesta única.

37. asíntota vertical: $x = 2$
asíntota horizontal: $y = 1$
cruce con el eje x en $(5, 0)$

38. asíntota vertical: $x = 1$
asíntota horizontal: $y = -2$
cruce con el eje y en $(0, -1)$

39. asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 2$
asíntota horizontal: $y = 3$
cruce con el eje x en: $(3, 0)$

40. asíntota vertical: $x = 4$
asíntota inclinada: $y = x + 2$

En los problemas 41 a 44, determine las asíntotas y todos los agujeros que haya en la gráfica de la función racional indicada. Determine las intersecciones con los ejes de la gráfica. Trace esa gráfica.

41. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

42. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$

43. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x(x^2 + 4x + 3)}$

44. $f(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

Aplicaciones diversas

45. Resistores en paralelo Un resistor de 5 ohms y un resistor variable se conectan en paralelo como se ve en la **FIGURA 3.5.11**. La resistencia R que resulta (en ohms) se relaciona con la resistencia r (en ohms) del resistor variable, mediante la ecuación

$$R = \frac{5r}{5 + r}.$$

Trace la gráfica de R en función de r, para $r > 0$. ¿Cuál es la resistencia R que resulta cuando r se vuelve muy grande?

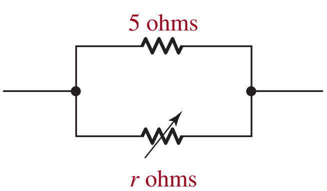


FIGURA 3.5.11 Resistores paralelos del problema 45

46. Potencia La potencia eléctrica P producida por cierta fuente se determina con

$$P = \frac{E^2 r}{R^2 + 2Rr + r^2},$$

en donde E es el voltaje de la fuente, R es la resistencia de la fuente y r es la resistencia en el circuito. Trace la gráfica de P en función de r, usando los valores $E = 5$ volts y $R = 1$ ohm.

47. Intensidad de iluminación La intensidad de iluminación debida a una fuente luminosa, en cualquier punto, es directamente proporcional a la intensidad de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente. Si hay dos fuentes con intensidades de 16 unidades y 2 unidades, y están a 100 cm de distancia, como se ve en la **FIGURA 3.5.12**, la intensidad de iluminación I en cualquier punto p entre ellas se calcula con

$$I(x) = \frac{16}{x^2} + \frac{2}{(100 - x)^2},$$

en donde x es la distancia a la fuente de 16 unidades. Trace la gráfica de $I(x)$ en el intervalo (0, 100). Describa el comportamiento de $I(x)$ cuando $x \to 0^+$. Descríbalo cuando $x \to 100^-$.

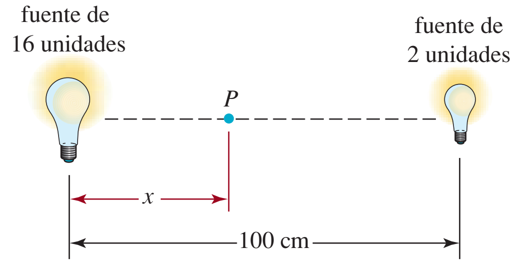


FIGURA 3.5.12 Dos fuentes luminosas del problema 47

Para discusión

48. Suponga que $f(x) = P(x)/Q(x)$. Demuestre las reglas de simetría (2), (3) y (4) en el caso de funciones racionales.

49. Forme una función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ cuya gráfica cruce dos veces su asíntota oblicua.

50. Si estudió la sección 1.5, explique cómo se pueden usar los temas de esa sección y de la sección 3.2 para ayudar a determinar el límite: $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x - 1}$.

3.6 Fracciones parciales

☐ **Introducción** Cuando se suman dos funciones racionales, por ejemplo $f(x) = \dfrac{2}{x+5}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$, los términos se combinan mediante un denominador común (o común denominador):

$$\frac{2}{x+5} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+5}\left(\frac{x+1}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}\left(\frac{x+5}{x+5}\right). \tag{1}$$

Si se suman los numeradores en el lado derecho de (1), se obtiene la expresión racional única

$$\frac{3x + 7}{(x + 5)(x + 1)}. \tag{2}$$

En un procedimiento importante en el estudio del cálculo integral se necesita poder invertir el proceso. En otras palabras, se debe comenzar con una expresión racional como la (2), para *descomponerla* en fracciones más sencillas, $2/(x + 5)$ y $1/(x + 1)$, llamadas **fracciones parciales**.

□ Fracciones parciales

El proceso algebraico para descomponer una expresión racional como la (2) en fracciones parciales se llama **descomposición en fracciones parciales**. Por comodidad supondremos que la función racional $P(x)/Q(x)$, $Q(x) \neq 0$ es una **fracción propia** o una **expresión racional propia**; esto es, que el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. También supondremos una vez más que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes.

En la descripción que sigue, examinaremos cuatro casos de descomposición de $P(x)/Q(x)$ en fracciones parciales. Esos casos dependen de los factores en el denominador $Q(x)$. Cuando el polinomio $Q(x)$ se factoriza como producto de $(ax + b)^n$ por $(ax^2 + bx + c)^m$, $n = 1, 2. . .$, $m = 1, 2, . . .$, donde los coeficientes a, b y c son números reales, y el polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ es **irreducible** sobre los números reales (esto es, no se factoriza usando números reales), la expresión racional $P(x)/Q(x)$ se puede descomponer en una suma de fracciones parciales de la forma

$$\frac{C_k}{(ax + b)^k} \qquad \text{y} \qquad \frac{A_k x + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}.$$

CASO 1: $Q(x)$ sólo contiene factores lineales no repetidos

Enunciaremos, sin demostrarlo, lo siguiente acerca del álgebra. Si se puede factorizar por completo el denominador en factores lineales,

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_nx + b_n),$$

en donde todos los $a_ix + b_i$, $i = 1, 2, . . . , n$ son distintos (es decir, no hay dos factores iguales), entonces se pueden determinar constantes reales únicas $C_1, C_2, . . .\ C_n$ tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C_1}{a_1x + b_1} + \frac{C_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{C_n}{a_nx + b_n}. \tag{3}$$

En la práctica, usaremos las letras $A, B, C, . . .$, en lugar de los coeficientes con subíndice C_1, $C_2, C_3, . . .$ El ejemplo siguiente ilustra este primer caso.

EJEMPLO 1 Factores lineales distintos

Para descomponer $\dfrac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)}$ en fracciones parciales individuales, supondremos, con base en la forma de (3), que la función racional se puede escribir en la forma

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3}. \tag{4}$$

Ahora eliminamos las fracciones en (4). Eso se puede hacer ya sea combinando los términos del lado derecho de la igualdad, sobre cuando menos un denominador común e igualando los numeradores, o bien, sólo multiplicando ambos lados de la igualdad por el denominador $(x - 1)(x + 3)$ en el lado izquierdo. Por cualquiera de esas formas se llega a

$$2x + 1 = A(x + 3) + B(x - 1). \tag{5}$$

Se hacen las multiplicaciones en el lado derecho de (5), y se agrupa por potencias de x. Así se obtiene

$$2x + 1 = A(x + 3) + B(x - 1) = (A + B)x + (3A - B). \tag{6}$$

Cada una de las ecuaciones (5) y (6) es una identidad, lo cual significa que la igualdad es cierta para *todos* los valores reales de x. En consecuencia, los coeficientes de x en el lado izquierdo de (6) deben ser iguales a los coeficientes de las potencias correspondientes de x, en el lado derecho; esto es,

igual

$$2x + 1x^0 = (A + B)x + (3A - B)x^0.$$

igual

El resultado es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, A y B:

$$\begin{aligned} 2 &= A + B \\ 1 &= 3A - B. \end{aligned} \tag{7}$$

Estas ecuaciones se suman y se obtiene $3 = 4A$, por lo que $A = \frac{3}{4}$. Ese valor se sustituye en cualquier ecuación en (7), y entonces se obtiene $B = \frac{5}{4}$. Por consiguiente, la descomposición que se busca es

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{\frac{3}{4}}{x - 1} + \frac{\frac{5}{4}}{x + 3}.$$

Se alienta al lector a verificar el resultado anterior combinando los términos en el lado derecho de la última ecuación, mediante un denominador común. ■

□ **Un truco valioso** Si el denominador contiene, digamos, tres factores lineales como en $\dfrac{4x^2 - x + 1}{(x - 1)(x + 3)(x - 6)}$, entonces la descomposición en fracciones parciales se verá así:

$$\frac{4x^2 - x + 1}{(x - 1)(x + 3)(x - 6)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 6}.$$

Si se siguen los mismos pasos que en el ejemplo 1, veríamos que el análogo de (7) ahora son tres ecuaciones con tres incógnitas, A, B y C. El asunto es el siguiente: mientras más factores lineales haya en el denominador, el sistema de ecuaciones lineales que habrá que resolver será mayor. Hay un procedimiento algebraico que vale la pena aprender, porque puede acortar algo de los pasos algebraicos. Para ilustrarlo, regresemos a la identidad (5). Como la igualdad es cierta para todo valor de x, es válida para $x = 1$ y $x = -3$, que son *las raíces del denominador*. Igualando $x = 1$ en la parte (5) se obtiene $3 = 4A$, de donde de inmediato $A = \frac{3}{4}$. De igual modo, haciendo que $x = -3$ en (5) se obtiene $-5 = (-4)B$, o sea $B = \frac{5}{4}$.

CASO 2: $Q(x)$ contiene factores lineales repetidos

Si el denominador $Q(x)$ contiene un factor lineal repetido $(ax + b)^n$, $n > 1$, entonces se pueden determinar constantes reales únicas, $C_1, C_2, \ldots\ C_n$, tales que la descomposición de $P(x)/Q(x)$ en fracciones parciales contenga los términos

$$\frac{C_1}{ax + b} + \frac{C_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(ax + b)^n}. \tag{8}$$

EJEMPLO 2 Factores lineales repetidos

Para descomponer $\dfrac{6x-1}{x^3(2x-1)}$ en fracciones parciales, se ve primero que el denominador consiste en el factor lineal x repetido, y el factor lineal $2x - 1$ no repetido. Con base en las formas de las ecuaciones (3) y (8), supondremos que

$$\frac{6x-1}{x^3(2x-1)} = \overbrace{\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3}}^{\text{de acuerdo con el caso 2}} + \overbrace{\frac{D}{2x-1}}^{\text{de acuerdo con el caso 1}}. \tag{9}$$

La ecuación (9) se multiplica por $x^3(2x - 1)$, para eliminar las fracciones; el resultado es

$$6x - 1 = Ax^2(2x-1) + Bx(2x-1) + C(2x-1) + Dx^3 \tag{10}$$

o sea
$$6x - 1 = (2A + D)x^3 + (-A + 2B)x^2 + (-B + 2C)x - C. \tag{11}$$

Ahora las raíces del denominador en la expresión original son $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$. Si entonces hacemos que $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$ en (10), veremos que $C = 1$ y $D = 16$. Como el denominador de la expresión original sólo tiene dos raíces distintas, se pueden calcular A y B igualando los correspondientes coeficientes de x^3 y x^2 en (11):

$$0 = 2A + D, \qquad 0 = -A + 2B.$$

Los coeficientes de x^3 y x^2 del lado izquierdo de (11) son 0, ambos.

El valor conocido de D se usa en la primera ecuación y el resultado es $A = -D/2 = -8$. Entonces, la segunda produce $B = A/2 = -4$. La descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{6x-1}{x^3(2x-1)} = -\frac{8}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{16}{2x-1}.$$

CASO 3: $Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreducibles y no repetidos

Si el denominador $Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreducibles no repetidos $a_ix^2 + b_ix + c_i$, se pueden encontrar constantes reales únicas $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots B_n$ tales que la descomposición de $P(x)/Q(x)$ en fracciones parciales contenga los términos

$$\frac{A_1x + B_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_2x + B_2}{a_2x^2 + b_2x + c_2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{a_nx^2 + b_nx + c_n}. \tag{12}$$

EJEMPLO 3 Factores cuadráticos irreducibles

Para descomponer $\dfrac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}$ en fracciones parciales, primero se ve que los polinomios cuadráticos $x^2 + 1$ y $x^2 + 2x + 3$ son irreducibles sobre los números reales. Entonces, de acuerdo con (12), supondremos que

Use la fórmula cuadrática. Para cualquier factor usted determinará que $b^2 - 4ac < 0$.

$$\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}.$$

Después de eliminar las fracciones en el renglón anterior, se ve que

$$\begin{aligned} 4x &= (Ax+B)(x^2+2x+3) + (Cx+D)(x^2+1) \\ &= (A+B)x^3 + (2A+B+D)x^2 + (3A+2B+C)x + (3B+D). \end{aligned}$$

Como el denominador de la fracción original no tiene raíces reales, no hay más recurso que formar un sistema de ecuaciones comparando los coeficientes de todas las potencias de x:

$$\begin{aligned} 0 &= A + C \\ 0 &= 2A + B + D \\ 4 &= 3A + 2B + C \\ 0 &= 3B + D. \end{aligned}$$

Se pueden eliminar C y D de las ecuaciones segunda y tercera al usar $C = -A$ y $D = -3B$:

$$\begin{aligned} 0 &= A - B \\ 2 &= A + B. \end{aligned}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones más simple se obtienen $A = 1$ y $B = 1$. Por consiguiente, $C = -1$ y $D = -3$. La descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} = \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{x+3}{x^2+2x+3}.$$

CASO 4: $Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreducibles repetidos
Si el denominador $Q(x)$ contiene un factor cuadrático irreducible repetido $(ax^2 + bx + c)^n$, $n > 1$, entonces se pueden encontrar constantes reales únicas $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ tales que la descomposición de $P(x)/Q(x)$ en fracciones parciales contenga los términos

$$\frac{A_1x + B}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}. \qquad (13)$$

EJEMPLO 4 Factor cuadrático repetido

Descomponer $\dfrac{x^2}{(x^2+4)^2}$ en fracciones parciales.

Solución El denominador sólo contiene el factor cuadrático irreducible repetido $x^2 + 4$. Como indica (13), supondremos una descomposición con la forma

$$\frac{x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}.$$

Al eliminar las fracciones multiplicando ambos lados de la anterior igualdad por $(x^2 + 4)^2$ se obtiene

$$x^2 = (Ax+B)(x^2+4) + Cx + D. \qquad (14)$$

Como en el ejemplo 3, el denominador de la fracción original no tiene raíces reales, y entonces se debe resolver un sistema de cuatro ecuaciones, para A, B, C y D. Para ello se reescribe la ecuación (14) como sigue:

$$0x^3 + 1x^2 + 0x + 0x^0 = Ax^3 + Bx^2 + (4A + C)x + (4B + D)x^0$$

y se comparan los coeficientes de potencias iguales (se igualan los colores) para obtener

$$\begin{aligned} 0 &= A \\ 1 &= B \\ 0 &= 4A + C \\ 0 &= 4B + D. \end{aligned}$$

De acuerdo con este sistema, se ve que $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ y $D = -4$. La descomposición en fracciones parciales que se necesitaba es, entonces

$$\frac{x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{x^2+4} - \frac{4}{(x^2+4)^2}.$$

EJEMPLO 5 Combinación de casos

Determinar la forma de la descomposición de $\dfrac{x^2 + 3x + 5}{(x - 5)(x + 2)^2(x^2 + 1)^2}$.

Solución El denominador contiene un solo factor lineal, $x - 5$, un factor lineal repetido, $x + 2$, y un factor cuadrático irreducible repetido, $x^2 + 1$. De acuerdo con los casos 1, 2 y 4, la forma supuesta de la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x + 3}{(x - 5)(x + 2)^2(x^2 + 1)^2} = \overbrace{\frac{A}{x - 5}}^{\text{Caso 1}} + \overbrace{\frac{B}{x + 2} + \frac{C}{(x + 2)^2}}^{\text{Caso 2}} + \overbrace{\frac{Dx + E}{x^2 + 1} + \frac{Fx + G}{(x^2 + 1)^2}}^{\text{Caso 4}}$$

NOTAS PARA EL SALÓN DE CLASE

En toda la descripción anterior supusimos que el grado del numerador $P(x)$ era menor que el grado del denominador $Q(x)$. Sin embargo, si el grado de $P(x)$ es mayor o igual al grado de $Q(x)$, entonces $P(x)/Q(x)$ es una **fracción impropia**. Todavía se puede hacer descomposición de ella en fracciones parciales, pero el proceso comienza dividiendo los polinomios hasta que se llegue a un cociente polinomial y a una fracción propia. Por ejemplo, por división se obtiene

$$\overset{\text{fracción impropia}\ \downarrow}{\frac{x^3 + x - 1}{x^2 - 3x}} = x + 3 + \overset{\downarrow\ \text{fracción propia}}{\frac{10x - 1}{x(x - 3)}}.$$

Entonces, usando el caso 1, se termina el problema con la descomposición del término de fracción propia, en la última igualdad.

$$\frac{x^3 + x - 1}{x^2 - 3x} = x + 3 + \frac{10x - 1}{x(x - 3)} = x + 3 + \frac{\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{29}{3}}{x - 3}.$$

Vea los problemas 25 a 30 en los ejercicios 3.6.

3.6 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-11.

En los problemas 1 a 24 haga la descomposición de la expresión racional indicada, en fracciones parciales.

1. $\dfrac{1}{x(x + 2)}$

2. $\dfrac{2}{x(4x - 1)}$

3. $\dfrac{-9x + 27}{x^2 - 4x - 5}$

4. $\dfrac{-5x + 18}{x^2 + 2x - 63}$

5. $\dfrac{2x^2 - x}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}$

6. $\dfrac{1}{x(x - 2)(2x - 1)}$

7. $\dfrac{3x}{x^2 - 16}$

8. $\dfrac{10x - 5}{25x^2 - 1}$

9. $\dfrac{5x - 6}{(x - 3)^2}$

10. $\dfrac{5x^2 - 25x + 28}{x^2(x - 7)}$

11. $\dfrac{1}{x^2(x+2)^2}$

12. $\dfrac{-4x+6}{(x-2)^2(x-1)^2}$

13. $\dfrac{3x-1}{x^3(x-1)(x+3)}$

14. $\dfrac{x^2-x}{x(x+4)^3}$

15. $\dfrac{6x^2-7x+11}{(x-1)(x^2+9)}$

16. $\dfrac{2x+10}{2x^3+x}$

17. $\dfrac{4x^2+4x-6}{(2x-3)(x^2-x+1)}$

18. $\dfrac{2x^2-x+7}{(x-6)(x^2+x+5)}$

19. $\dfrac{t+8}{t^4-1}$

20. $\dfrac{y^2+1}{y^3-1}$

21. $\dfrac{x^3}{(x^2+2)(x^2+1)}$

22. $\dfrac{x-15}{(x^2+2x+5)(x^2+6x+10)}$

23. $\dfrac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}$

24. $\dfrac{2x^2}{(x-2)(x^2+4)^2}$

En los problemas 25 a 30, use primero la división entre los polinomios, y después descomponga en fracciones parciales.

25. $\dfrac{x^5}{x^2-1}$

26. $\dfrac{(x+2)^2}{x(x+3)}$

27. $\dfrac{x^2-4x+1}{2x^2+5x+2}$

28. $\dfrac{x^4+3x}{x^2+2x+1}$

29. $\dfrac{x^6}{x^3-2x^2+x-2}$

30. $\dfrac{x^3+x^2-x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$

3.7 El problema del área

Avance DE CÁLCULO

Introducción Como se vio en la sección 2.9, el problema motivador fundamental del cálculo diferencial, *Encontrar una recta tangente a la gráfica de una función f*, se contesta con la noción de la **derivada** de la función. El cálculo diferencial es el estudio de las propiedades y las aplicaciones de la derivada de una función $y = f(x)$. Por otra parte, el cálculo integral es el estudio de las propiedades y las aplicaciones de la **integral definida** de una función $y = f(x)$. Como se mencionó en la sección 2.9, el problema histórico que conduce al concepto de la integral definida es *Calcular el área bajo la gráfica de una función f*. En esta sección examinaremos el problema del área.

Área bajo una gráfica En toda la descripción que sigue supondremos que $y = f(x)$ es una función continua y no negativa en un intervalo $[a, b]$. Recuerde que, en las secciones anteriores, varias veces se ha mencionado el concepto de continuidad; en este caso, la gráfica de f no tiene interrupciones, huecos ni agujeros en ningún lugar en ella, dentro del intervalo $[a, b]$. El requisito que f sea no negativa, esto es, que $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, quiere decir que ninguna parte de su gráfica, dentro del intervalo, esté abajo del eje x. Entonces, en forma específica,

*Por **área bajo una gráfica** se entiende el área A de la región en el plano limitada por la gráfica de f, las rectas $x = a$ y $x = b$, y el eje x.*

Vea la **FIGURA 3.7.1**.

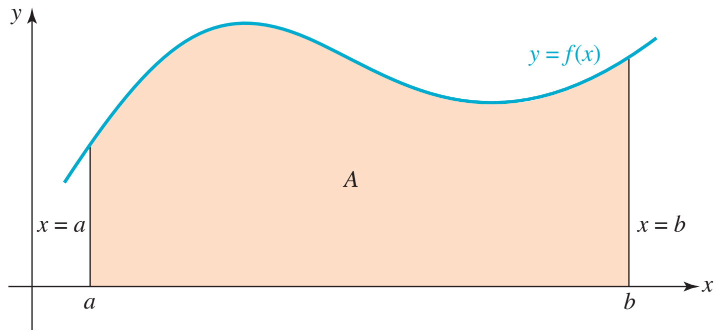


FIGURA 3.7.1 Área A bajo una gráfica

Para poder contestar cuál es el valor *exacto* de A comenzaremos presentando un método de *aproximación* sistemática de A. La idea básica simplemente es: formar rectángulos en todo el intervalo $[a, b]$ y usar la suma de sus áreas como aproximación de A.

☐ Aproximación del área

Un procedimiento sistemático posible para aproximar el valor del área A bajo una gráfica es el siguiente, resumido.

i) Subdividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, en donde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

de modo que cada subintervalo tenga el mismo ancho $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. A esto se le llama hacer una **partición regular** del intervalo $[a, b]$.

ii) Elegir un número x_k^* en cada uno de los n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, y formar los n productos $f(x_k^*)\,\Delta x$. Como el área de un rectángulo es *base* × *altura*, $f(x_k^*)\,\Delta x$ es el área del rectángulo cuya altura es $f(x_k^*)$ y su base o ancho es Δx, que se formó en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Los n números $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_n^*$ se llaman **puntos de muestra**. Vea la FIGURA 3.7.2.

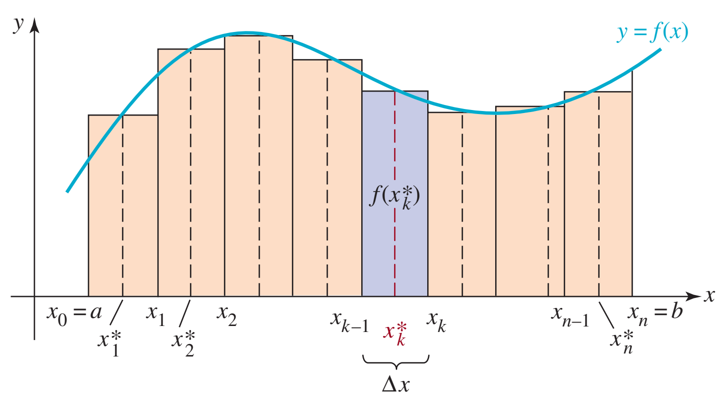


FIGURA 3.7.2 n rectángulos de base o ancho Δx y altura $f(x_k^*)$

iii) La suma de las áreas de los n rectángulos representa una aproximación al valor del área,

$$A \approx f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x. \tag{1}$$

Para simplificar los cálculos a mano, los puntos de muestra x_k^*, $k = 1, 2, \ldots, n$ se escogen generalmente en el extremo derecho o el extremo izquierdo de cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

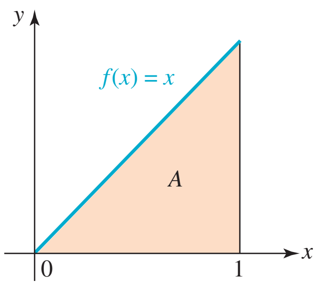


FIGURA 3.7.3 Área A del ejemplo 1

EJEMPLO 1 Área de una región triangular

Aproximar el área A bajo la gráfica de $f(x) = x$ en el intervalo $[0, 1]$, usando cuatro subintervalos de igual ancho, y escogiendo

a) x_k^* como el extremo izquierdo de cada subintervalo, y
b) x_k^* como el extremo derecho de cada subintervalo.

Vea la **FIGURA 3.7.3**.

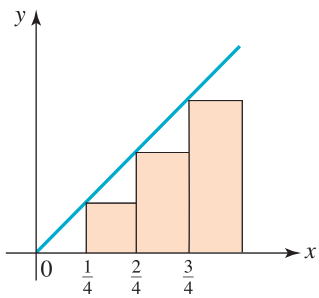
Solución Al dividir $[0, 1]$ en cuatro subintervalos, el ancho de cada uno de ellos es $\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$.

a) Si x_k^* es el extremo izquierdo de cada uno de los cuatro subintervalos, entonces $x_1^* = 0$, $x_2^* = \frac{1}{4}$, $x_3^* = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ y $x_4^* = \frac{3}{4}$. Vea la **FIGURA 3.7.4a)**. De acuerdo con (1),

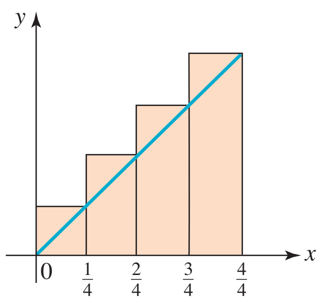
$$\begin{aligned} A &\approx f(0)\tfrac{1}{4} + f(\tfrac{1}{4})\tfrac{1}{4} + f(\tfrac{1}{2})\tfrac{1}{4} + f(\tfrac{3}{4})\tfrac{1}{4} \\ &= 0\cdot\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{4} \\ &= \tfrac{3}{8} = 0.375. \end{aligned}$$

b) Si x_k^* es el extremo derecho de cada uno de los cuatro subintervalos, entonces $x_1^* = \frac{1}{4}$, $x_2^* = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $x_3^* = \frac{3}{4}$ y $x_4^* = \frac{4}{4} = 1$. Vea la figura 3.7.4*b*). Entonces, de acuerdo con (1),

$$\begin{aligned} A &\approx f(\tfrac{1}{4})\tfrac{1}{4} + f(\tfrac{1}{2})\tfrac{1}{4} + f(\tfrac{3}{4})\tfrac{1}{4} + f(1)\tfrac{1}{4} \\ &= \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{4} + 1\cdot\tfrac{1}{4} \\ &= \tfrac{5}{8} = 0.625. \end{aligned}$$ ■



a) Usando los extremos izquierdos



b) Usando los extremos derechos

FIGURA 3.7.4 Aproximación del área A del ejemplo 1

Como se puede ver en las figuras 3.7.4*a*) y 3.7.4*b*), el valor obtenido en el inciso *a*) del ejemplo 1 subestima el área A, mientras que el valor en el inciso *b*) lo sobreestima, es decir, $0.375 < A < 0.625$. Podemos comparar estas aproximaciones con el área real. Como el área bajo la gráfica de $f(x) = x$ en el intervalo $[0, 1]$ es el área de un triángulo rectángulo de base $= 1$ y altura $= 1$, el área exacta es $A = \frac{1}{2}\cdot$ base $\cdot$ altura $= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2} = 0.5$.

No hay razón especial alguna para que los puntos de muestra x_k^*, $x = 1, 2, \ldots, n$ sean los extremos izquierdos y después los extremos derechos de los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, excepto por la *comodidad*. Podríamos haber escogido a x_k^* al azar en cada subintervalo. En el problema 3, de los ejercicios 3.7, se le pedirá aproximar el área del ejemplo 1 usando los puntos medios de cada subintervalo.

De manera intuitiva, se obtendrán mejores aproximaciones del área A de (1) con un mayor número de rectángulos bajo una gráfica. Por supuesto, a costa de que debemos hacer más cálculos.

EJEMPLO 2 Área bajo una parábola

Aproximar el área A bajo la gráfica de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$ usando ocho subintervalos de igual ancho, y escogiendo a

a) x_k^* como el extremo izquierdo de cada subintervalo, y
b) x_k^* como el extremo derecho de cada subintervalo.

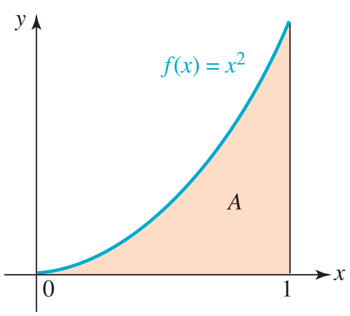


FIGURA 3.7.5 Área A del ejemplo 2

Vea la **FIGURA 3.7.5**.

Solución Se divide $[0, 1]$ en ocho subintervalos, y el ancho de cada uno de ellos es $\Delta x = \frac{1-0}{8} = \frac{1}{8}$.

a) Si x_k^* es el extremo izquierdo de cada uno de los ocho subintervalos, entonces

$$x_1^* = 0,\ x_2^* = \tfrac{1}{8},\ x_3^* = \tfrac{2}{8} = \tfrac{1}{4},\ x_4^* = \tfrac{3}{8},\ x_5^* = \tfrac{4}{8} = \tfrac{1}{2},\ x_6^* = \tfrac{5}{8},\ x_7^* = \tfrac{6}{8} = \tfrac{3}{4},\ x_8^* = \tfrac{7}{8}.$$

Vea la **FIGURA 3.7.6*a*)**. De acuerdo con (1),

$$\begin{aligned}A &\approx f(0)\cdot\tfrac{1}{8}+f(\tfrac{1}{8})\cdot\tfrac{1}{8}+f(\tfrac{1}{4})\cdot\tfrac{1}{8}+f(\tfrac{3}{8})\cdot\tfrac{1}{8}+f(\tfrac{1}{2})\cdot\tfrac{1}{8}+f(\tfrac{5}{8})\cdot\tfrac{1}{8}+f(\tfrac{3}{4})\cdot\tfrac{1}{8}+f(\tfrac{7}{8})\cdot\tfrac{1}{8}\\ &= 0\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{64}\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{9}{64}\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{25}{64}\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{9}{16}\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{49}{64}\cdot\tfrac{1}{8}\\ &= \tfrac{35}{128} = 0.2734375.\end{aligned}$$

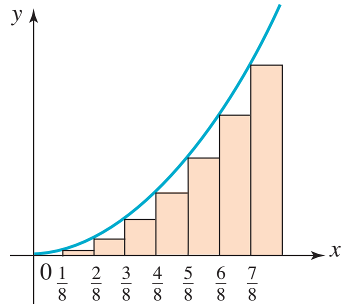
b) Si x_k^* es el extremo derecho de cada uno de los cuatro subintervalos, entonces

$$x_1^*=\tfrac{1}{8},\; x_2^*=\tfrac{2}{8}=\tfrac{1}{4},\; x_3^*=\tfrac{3}{8},\; x_4^*=\tfrac{4}{8}=\tfrac{1}{2},\; x_5^*=\tfrac{5}{8},\; x_6^*=\tfrac{6}{8}=\tfrac{3}{4},\; x_7^*=\tfrac{7}{8},\; x_8^*=\tfrac{8}{8}=1.$$

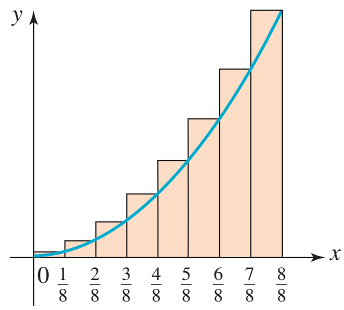
Vea la figura 3.7.6*b*). Entonces, de acuerdo con (1),

$$\begin{aligned}A &\approx f(\tfrac{1}{8})\cdot\tfrac{1}{8}+f(\tfrac{1}{4})\cdot\tfrac{1}{8}+f(\tfrac{3}{8})\cdot\tfrac{1}{8}+f(\tfrac{1}{2})\cdot\tfrac{1}{8}+f(\tfrac{5}{8})\cdot\tfrac{1}{8}+f(\tfrac{3}{4})\cdot\tfrac{1}{8}+f(\tfrac{7}{8})\cdot\tfrac{1}{8}+f(1)\cdot\tfrac{1}{8}\\ &= \tfrac{1}{64}\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{9}{64}\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{25}{64}\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{9}{16}\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{49}{64}\cdot\tfrac{1}{8}+1\cdot\tfrac{1}{8}\\ &= \tfrac{51}{128} = 0.3984375.\end{aligned}$$

Vemos, en la figura 3.7.6*a*), que el área de los siete rectángulos subestima A del ejemplo 2, mientras que los ocho rectángulos de la figura 3.7.6*b*) la sobreestima. De acuerdo con los cálculos del ejemplo 2, se puede escribir $0.2734375 < A < 0.3984375$. Pero aquí corresponde hacer una observación. No suponga que, al usar los extremos izquierdos y después los extremos derechos de los subintervalos para x_k^* *siempre* se obtiene un estimación baja y después una alta del área A bajo la gráfica de f en $[a, b]$. Eso pasó en los ejemplos 1 y 2 sólo porque en ambos casos la función f era creciente en el intervalo $[0, 1]$.



a) Usando extremos izquierdos



b) Usando extremos derechos

FIGURA 3.7.6 Aproximación del área A del ejemplo 2

Notación de sumatoria

Escribir sumas como en (1) puede ser algo muy tedioso. Para facilitar la descripción del problema del área en cálculo se usa una notación especial para la suma. Suponga que a_k representa un número real que depende de un entero k. La suma de n números reales de esa clase, a_k, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, se representa con el símbolo $\sum_{k=1}^{n} a_k$, esto es,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n. \tag{2}$$

Debido a que Σ es la letra griega sigma mayúscula, a la ecuación (2) se le llama **notación de sumatoria**, o **notación de suma**. Al entero k se le llama **índice de suma** y toma valores enteros consecutivos, comenzando con $k = 1$ y terminando con $k = n$. Por ejemplo, la suma de los primeros 100 enteros positivos elevados al cuadrado,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 98^2 + 99^2 + 100^2,$$

se puede escribir, en forma compacta, como

la suma termina con este número

$$\sum_{k=1}^{100} k^2.$$

la suma comienza con este número

Con la notación sigma, la suma de las áreas en (1) se puede expresar como

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x.$$

Área Parecería que se puede reducir el error inherente al método de aproximar un área A bajo una gráfica, sumando áreas de rectángulos y usando cada vez más rectángulos $(n \to \infty)$ de ancho decreciente $\left(\Delta x = \dfrac{b-a}{n} \to 0\right)$. Así, los 32 rectángulos de la FIGURA 3.7.7 deberían dar una mejor aproximación al área A de la figura 3.7.1 que los ocho rectángulos de la figura 3.7.2. En realidad, ése es el caso. Se puede demostrar que cuando f es continua en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo, el área A bajo la gráfica de la función $y = f(x)$ en el intervalo se determina con el límite

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x. \tag{3}$$

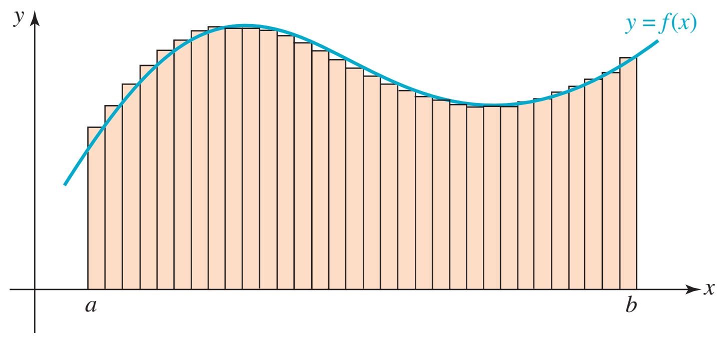


FIGURA 3.7.7 Uso de más rectángulos para mejorar la aproximación del área A

El límite (3) existe, independientemente de cómo se escojan los puntos de muestra x_1^*, x_2^*, $x_3^*, \ldots, x_n^*$ en los subintervalos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$. Así, en (3) cada punto de muestra x_k^* se podría escoger, por ejemplo, en el extremo derecho de cada subintervalo. Como en términos generales no podemos manejar los límites de la clase que se indica en (3), dejaremos ese aspecto del problema del área para un curso de cálculo. Pero si el lector quiere dedicar tiempo para resolver los problemas 15 a 22, entonces los problemas 23 y 24 le permitirán tener un ligero sabor de lo que es calcular el área A mediante el proceso de límite que se ve en (3).

Al comenzar dijimos que el problema del área es el motivador para definir la integral. El lector se preguntará: ¿Y qué es una integral definida? A partir de la ecuación (3), sólo se necesita dar un pequeño salto para llegar al concepto de la integral definida.

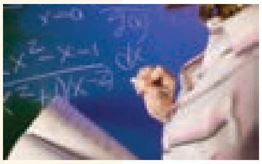
INTEGRAL DEFINIDA

Sea la función f continua en $[a, b]$. La **integral definida** de f, de $x = a$ a $x = b$ se representa por $\int_a^b f(x)dx$, y es

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x. \tag{4}$$

El símbolo integral, $\int$, en (4), como lo usó **Wilhelm Gottfried Leibniz** (a quien se considera coinventor del cálculo, junto con **Isaac Newton**), sólo es una S alargada, que representa la palabra “suma”.

NOTAS PARA EL SALÓN DE CLASE



i) Si leyó con prisa, podría llegar a creer que la fórmula (4) es la misma que la (3). En cierto sentido eso es correcto; sin embargo, la (4) es un concepto más general (observe que no se requiere que f sea no negativa en el intervalo [a, b]). Así, una *integral definida no necesita ser un área*. También, en su ambiente más general, se eliminan hasta las condiciones de continuidad de f y el uso de una partición regular para definir la integral definida. Entonces, ¿qué es una integral definida? Por ahora acepte que una integral definida no es más que un número real que puede ser negativo, cero o positivo. Cuando se imponen las condiciones de continuidad y de no negatividad a $y = f(x)$ en el intervalo [a, b], entonces, el área bajo la gráfica es $A = \int_a^b f(x)dx$. También, el lector debe tener en cuenta que las interpretaciones de derivada e integral definida son mucho más amplias que tan sólo ser pendientes de tangentes y de áreas bajo gráficas. Al avanzar en sus cursos de matemáticas, ciencias e ingenierías, verá usted muchas y variadas aplicaciones de la derivada y la integral definida.

ii) En este capítulo trabajamos principalmente con funciones polinomiales, que son las bases constructivas fundamentales de una clase llamada **funciones algebraicas**. En la sección 3.5 vimos que una función racional es el cociente de dos polinomios. En general, una función algebraica f implica una cantidad finita de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíces de funciones polinomiales. Así

$$y = 2x^2 - 5x, \; y = \sqrt[3]{x^2}, \; y = x^4 + \sqrt{x^2 + 5} \;\text{ y }\; y = \frac{\sqrt{x}}{x^3 - 2x^2 + 7}$$

son funciones algebraicas. En realidad, todas las funciones de los capítulos 2 y 3 son funciones algebraicas. Al iniciar el capítulo siguiente veremos funciones que pertenecen a una clase diferente, llamadas **funciones trascendentes**. Una función trascendente f se define como una que *no es algebraica*. Las seis funciones trigonométricas (capítulo 4) y las funciones exponenciales y logarítmicas (capítulo 5) son ejemplos de funciones trascendentes.

3.7 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-11.

En los problemas 1 a 4, la función f y el intervalo son del ejemplo 1.

1. Aproxime el área A, esta vez con ocho subintervalos de ancho igual, y escoja x_k^* como el extremo izquierdo de cada subintervalo. Trace los ocho rectángulos.

2. Aproxime el área A, pero esta vez use ocho subintervalos de ancho igual, y escoja x_k^* como el extremo derecho de cada subintervalo. Trace los ocho rectángulos.

3. Aproxime el área A, pero esta vez use cuatro subintervalos de ancho igual, pero escoja a x_k^* como el punto medio de cada subintervalo. Trace los cuatro rectángulos.

4. Compare la aproximación que obtuvo en el problema 3, con el área exacta $A = 0.5$. Explique por qué no es de sorprender el resultado del problema 3.

5. Calcule el área aproximada bajo la gráfica de $f(x) = x + 2$ en el intervalo $[-1, 2]$, usando seis subintervalos de ancho igual, y escoja:

a) x_k^* como extremo izquierdo de cada subintervalo, y

b) x_k^* como extremo derecho de cada subintervalo.

6. Repita el problema 5, usando doce subintervalos de ancho igual.

7. Aproxime el área bajo la gráfica de $f(x) = -x^2 + 5x$ en el intervalo $[0, 5]$, usando cinco subintervalos de ancho igual y escogiendo:

a) x_k^* como extremo izquierdo de cada subintervalo, y

b) x_k^* como extremo derecho de cada subintervalo.

8. Repita el problema 7, usando diez subintervalos de ancho igual.

9. Aproxime el área bajo la gráfica de $f(x) = -x^2 + 5x$ en el intervalo $[0, 5]$, usando cinco subintervalos de ancho igual y escogiendo a x_k^* como los puntos medios de cada subintervalo.

10. Calcule el área aproximada bajo la gráfica de $f(x) = -x^3 + 2x^2$ en el intervalo $[0, 2]$, usando diez subintervalos de ancho igual, y escogiendo a x_k^* como el extremo derecho de cada subintervalo.

11. Calcule dos aproximaciones diferentes del área A bajo la gráfica de $y = f(x)$ en el intervalo $[1, 4]$, como se ve en la FIGURA 3.7.8.

12. Calcule dos aproximaciones diferentes del área A bajo la gráfica de $y = f(x)$ en el intervalo que se indica en la FIGURA 3.7.9.

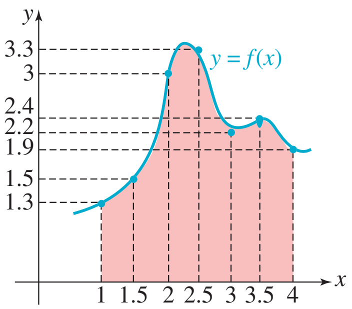


FIGURA 3.7.8 Gráfica del problema 11

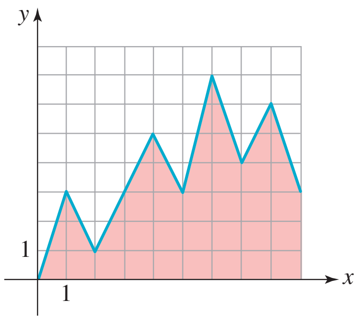


FIGURA 3.7.9 Gráfica del problema 12

Aplicaciones diversas

13. Terreno junto al lago Suponga que un corredor de bienes raíces desea calcular el área de un terreno de forma irregular, que está limitado entre un tramo de 1 milla de longitud, de una carretera recta, y la orilla de un lago. Las medidas (en pies) de las distancias perpendiculares de la carretera al lago se toman a intervalos iguales, a lo largo de la carretera, como se muestra en la FIGURA 3.7.10. Calcule dos aproximaciones diferentes del área del terreno. Exprese su resultado en acres; 1 acre = 43 560 pies^2.

14. Para los peces El estanque de forma irregular de la FIGURA 3.7.11 se llena hasta una profundidad uniforme de 4 pies. Calcule aproximadamente los galones de agua que hay en el estanque. Las medidas están en pies, y la distancia vertical entre las mediciones horizontales es de 1.86 pies. Hay 7.48 galones en 1 pie cúbico de agua. [*Sugerencia:* El volumen es igual al área de la superficie × profundidad.]

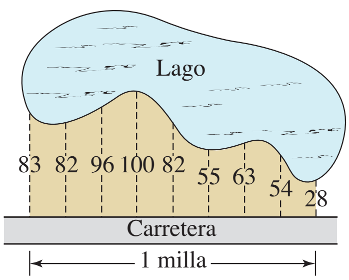


FIGURA 3.7.10 Terreno del problema 13

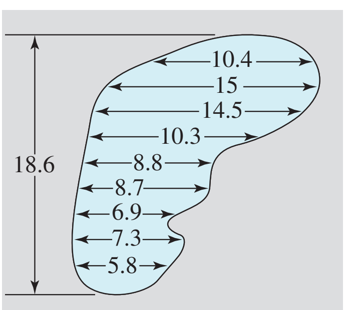


FIGURA 3.7.11 Estanque del problema 14

Para discusión

Si c representa una constante, esto es, algo independiente del índice k de suma, entonces $\sum_{k=1}^{n} c$ quiere decir $c + c + c + \cdots + c$. Como en esta suma hay n ces, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc. \tag{5}$$

En los problemas 15 y 16 use (5) para calcular el valor numérico de la suma indicada.

15. $\sum_{k=1}^{75} 6$

16. $\sum_{k=1}^{25} 10$

La suma de los primeros n enteros positivos se puede escribir como $\sum_{k=1}^{n} k$. Si esta suma se representa por S, entonces

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n \tag{6}$$

También se puede escribir como

$$S = n + (n - 1) + \cdots + 3 + 2 + 1. \tag{7}$$

Si se suman (6) y (7), entonces

$$2S = \underbrace{(n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \cdots + (n + 1)}_{n \text{ términos de } n\,+\,1} = n(n + 1).$$

Al despejar S se obtiene $S = \frac{1}{2}n(n + 1)$, o sea

$$\sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{2}n(n + 1). \tag{8}$$

En los problemas 17 y 18 use (8) para calcular el valor numérico de la suma dada.

17. $\sum_{k=1}^{50} k$

18. $\sum_{k=1}^{1\,000} k$

A continuación presentamos dos propiedades de la notación de sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k, \quad c \text{ una constante} \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k. \tag{10}$$

En los problemas 19 a 22 use (5) y (8) a (10) para determinar el valor numérico de la suma dada.

19. $\sum_{k=1}^{20} 2k$

20. $\sum_{k=1}^{15} (-6k)$

21. $\sum_{k=1}^{10} (4k + 5)$

22. $\sum_{k=1}^{20} (4k - 3)$

En los problemas 23 y 24, use los resultados de (5) y (8) a (10), y la definición de límite de un área en (3) para calcular el valor exacto del área A. En cada caso, divida (“*particione*”) el intervalo dado en n subintervalos de ancho $\Delta x = (b - a)/n$ y use x_k^* como el extremo derecho de cada subintervalo.

23. A es el área bajo la gráfica de $f(x) = 2x + 1$ en el intervalo $[0, 4]$.
24. A es el área bajo la gráfica de $f(x) = -3x + 12$ en el intervalo $[1, 3]$.
25. Examine el trapezoide de la **FIGURA 3.7.12**.
   a) Explique cómo se puede calcular el área A aproximada usando (1) de esta sección.
   b) Entre fórmulas conocidas de áreas, encuentre una que exprese a A en función de h_1, h_2 y b.

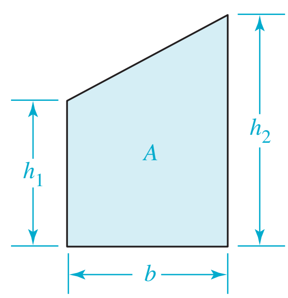


FIGURA 3.7.12 Trapezoide del problema 25

CAPÍTULO 3 Ejercicios de repaso

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-12.

En los problemas 1 a 16 llene los espacios en blanco.

1. La gráfica de la función polinomial $f(x) = x^3(x - 1)^2(x - 5)$ es tangente al eje x en __________ y atraviesa el eje x en __________.
2. Una función polinomial de tercer grado cuyas raíces son 1 y $3i$ es __________.

3. El comportamiento en los extremos de la gráfica $f(x) = x^2(x + 3)(x - 5)$ en la frontera se parece a la gráfica de la función de potencias $f(x) =$ __________.

4. La función polinomial $f(x) = x^4 - 3x^3 + 17x^2 - 2x + 2$ tiene __________ (cuántas) raíces racionales posibles.

5. Para $f(x) = kx^2(x - 2)(x - 3)$, $f(-1) = 8$, si $k =$ __________.

6. La intersección con el eje y de la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{2x + 8}{x^2 - 5x + 4}$ está en __________.

7. Las asíntotas verticales de la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{2x + 8}{x^2 - 5x + 4}$ son __________.

8. Las intersecciones con el eje x de la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{4 - 2x^3}$ están en __________.

9. La asíntota horizontal de la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{4 - 2x^3}$ es __________.

10. Una función racional cuya gráfica tiene como asíntota horizontal $y = 1$ y su intersección con el eje x está en $(3, 0)$ es __________.

11. La gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{x^n}{x^3 + 1}$, donde n es un entero no negativo, tiene la asíntota horizontal $y = 0$ cuando $n =$ ______.

12. La gráfica de la función polinomial $f(x) = 3x^5 - 4x^2 + 5x - 2$ tiene cuando mucho __________ puntos críticos.

13. Si i es un cero de

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$$

otros tres ceros son __________.

14. La función racional $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ tiene (cuántas) asíntotas.

15. Suponga que, cuando una función polinomial f de grado 5 es dividida entre $x - 3$, obtenemos

$$\frac{f(x)}{x - 3} = q(x) + \frac{7}{x - 3}.$$

El grado del cociente $q(x)$ es __________.

16. Si f es la función polinomial del problema 15, entonces $f(3) =$ __________.

En los problemas 17 a 34 conteste cierto o falso.

17. $f(x) = 2x^3 - 8x^{-2} + 5$ no es un polinomio. __________

18. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ es una función racional. __________

19. La gráfica de una función polinomial no puede tener agujeros. __________

20. Una función polinomial de grado 4 tiene exactamente cuatro raíces reales. __________

21. Cuando un polinomio de grado mayor que 1 se divide entre $x - 1$, el residuo siempre es una constante. __________

22. Si los coeficientes a, b, c y d del polinomio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ son enteros positivos, entonces f no tiene raíces positivas reales. __________

23. La ecuación polinomial $2x^7 = 1 - x$ tiene una solución en el intervalo $[0, 1]$. __________

24. La gráfica de la función racional $f(x) = (x^2 + 1)/x$ tiene una asíntota oblicua. _________

25. La gráfica de la función polinomial $f(x) = 4x^6 + 3x^2$ es simétrica con respecto al eje y. _________

26. La gráfica de una función polinomial que es una función impar debe pasar por el origen. _________

27. Una asíntota es una recta a la que tiende la gráfica de una función, pero que nunca la cruza. _________

28. El punto $(\frac{1}{3}, \frac{7}{4})$ está en la gráfica de $f(x) = \dfrac{2x + 4}{3 - x}$. ______

29. La gráfica de una función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ tiene una asíntota oblicua cuando el grado de P es mayor que el grado de Q. _________

30. Si $3 - 4i$ es una raíz de un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales, entonces $3 + 4i$ también es una raíz de $f(x)$. _________

31. Una función polinomial debe tener cuando menos una raíz racional. _________

32. La gráfica de $f(x) = x^4 + 5x^2 + 2$ no cruza el eje x. _________

33. Si $(-1, 6)$ y $(4, -2)$ son dos puntos en la gráfica de una función polinomial f, entonces f tiene por lo menos un cero en el intervalo abierto $(-1, 4)$. _________

34. Si el comportamiento final de una función polinomial f es que su gráfica suba para valores grandes de $|x|$, entonces el grado de f debe ser un número entero par positivo. _________

En los problemas 35 y 36 use la división entre polinomios para determinar $f(x)/d(x)$.

35. $f(x) = 6x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 4, \quad d(x) = 2x^2 - 1$

36. $f(x) = 15x^4 - 2x^3 + 8x + 6, \quad d(x) = 5x^3 + x + 2$

En los problemas 37 y 38 use la división sintética para determinar $f(x)/d(x)$.

37. $f(x) = 7x^4 - 6x^2 + 9x + 3, \quad d(x) = x - 2$

38. $f(x) = 4x^3 + 7x^2 - 8x, \quad d(x) = x + 1$

39. Sin hacer realmente la división, determine el residuo cuando $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 9$ se divide entre $d(x) = x + 3$.

40. Aplique la división sintética y el teorema del residuo para determinar $f(c)$ de

$$f(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 1$$

cuando $c = 2$.

41. Determine los valores del entero positivo n tales que $f(x) = x^n + c^n$ sea divisible entre $d(x) = x + c$.

42. Suponga que

$$f(x) = 36x^{98} - 40x^{25} + 18x^{14} - 3x^7 + 40x^4 + 5x^2 - x + 2$$

se divide entre $d(x) = x - 1$. ¿Cuál es el residuo?

43. Indique cuáles son todas las raíces racionales posibles de la siguiente función, pero no lo pruebe.

$$f(x) = 8x^4 + 19x^3 + 31x^2 + 38x - 15.$$

44. Determine la factorización completa de $f(x) = 12x^3 + 16x^2 + 7x + 1$.

En los problemas 45 y 46, verifique que cada uno de los números indicados sea una raíz del polinomio $f(x)$. Determine todas las demás raíces, y a continuación indique la factorización completa de $f(x)$.

45. $2; \quad f(x) = (x - 3)^3 + 1$

46. $-1; \quad f(x) = (x + 2)^4 - 1$

En los problemas 47 a 50, calcule un valor real de k tal que satisfaga la condición indicada.

47. El residuo de la división de $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + kx - 1$ entre $g(x) = x - 4$ sea $r = 5$.
48. $x + \frac{1}{2}$ sea un factor de $f(x) = 8x^2 - 4kx + 9$.
49. $x - k$ sea un factor de $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x - 12$.
50. La gráfica de $f(x) = \dfrac{x - k}{x^2 + 5x + 6}$ tenga un agujero en $x = k$.

En los problemas 51 a 54 determine la descomposición fraccional parcial de la expresión racional indicada, en fracciones parciales.

51. $\dfrac{2x - 1}{x(x^2 + 2x - 3)}$

52. $\dfrac{1}{x^4(x^2 + 5)}$

53. $\dfrac{x^2}{(x^2 + 4)^2}$

54. $\dfrac{x^5 - x^4 + 2x^3 + 5x - 1}{(x - 1)^2}$

En los problemas 55 y 56, deduzca una función polinomial f del grado indicado, cuya gráfica sea la que muestra la figura.

55. quinto grado

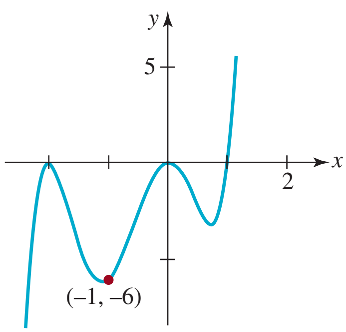


FIGURA 3.E.1 Gráfica del problema 55

56. sexto grado

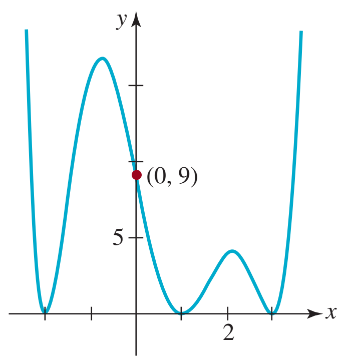


FIGURA 3.E.2 Gráfica del problema 56

En los problemas 57 y 58, busque una función racional f cuya gráfica se da en la figura.

57.

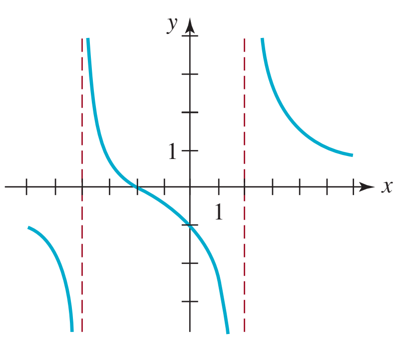


FIGURA 3.E.3 Gráfica del problema 57

58.

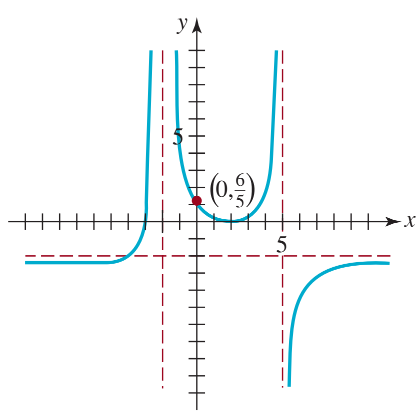


FIGURA 3.E.4 Gráfica del problema 58

En los problemas 59 a 68 haga corresponder la función racional indicada con una de las gráficas *a*) a *j*).

a)

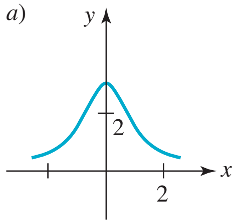


FIGURA 3.E.5

b)

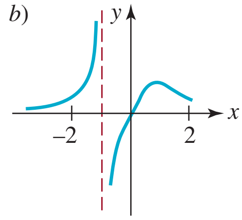


FIGURA 3.E.6

c)

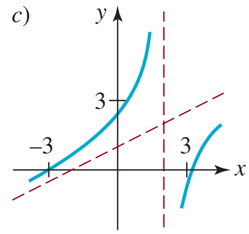


FIGURA 3.E.7

d)

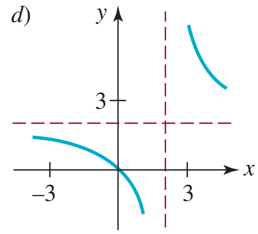


FIGURA 3.E.8

e)

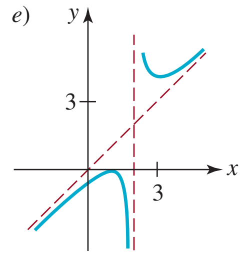


FIGURA 3.E. 9

f)

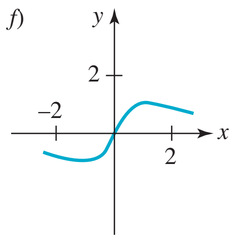


FIGURA 3.E.10

g)

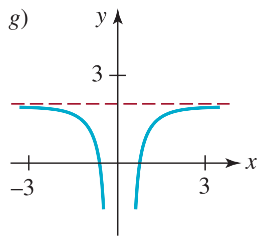


FIGURA 3.E.11

h)

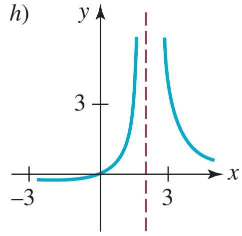


FIGURA 3.E.12

i)

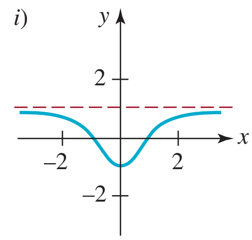


FIGURA 3.E.13

j)

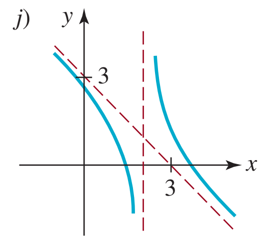


FIGURA 3.E.14

59. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

60. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

61. $f(x) = \dfrac{2x}{x - 2}$

62. $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2}$

63. $f(x) = \dfrac{x}{(x - 2)^2}$

64. $f(x) = \dfrac{(x - 1)^2}{x - 2}$

65. $f(x) = \dfrac{x^2 - 10}{2x - 4}$

66. $f(x) = \dfrac{-x^2 + 5x - 5}{x - 2}$

67. $f(x) = \dfrac{2x}{x^3 + 1}$

68. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 1}$

En los problemas 69 y 70, determine las asíntotas de la gráfica de la función racional indicada. Determine las intersecciones con los ejes de la gráfica. Trace la gráfica de *f*.

69. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + 2x - 8}$

70. $f(x) = \dfrac{-x^3 + 2x^2 + 9}{x^2}$

Contenido del capítulo

4.1 Ángulos y su medición

4.2 Las funciones seno y coseno

4.3 Gráficas de las funciones seno y coseno

4.4 Otras funciones trigonométricas

4.5 Identidades especiales

4.6 Ecuaciones trigonométricas

4.7 Funciones trigonométricas inversas

4.8 Movimiento armónico simple

4.9 Trigonometría del triángulo rectángulo

4.10 Ley de los senos y ley de los cosenos

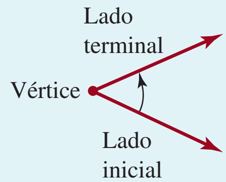
4.11 Avance DE CÁLCULO Regreso al concepto de límite

Capítulo 4 Ejercicios de repaso

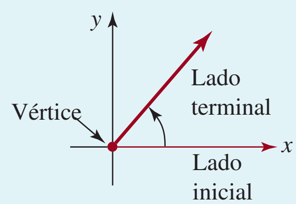
Funciones trigonométricas

4

4.1 Ángulos y su medición



a) Dos medios rayos



b) Posición normal

FIGURA 4.1.1 Lados inicial y terminal de un ángulo

Introducción Comenzamos nuestro estudio de la trigonometría con la descripción de los ángulos y dos métodos para medirlos: en grados y en radianes. Como veremos en la sección 4.2, la medida de un ángulo en radianes es lo que nos permite definir funciones trigonométricas en conjuntos de números reales.

Ángulos Un **ángulo** se forma con dos rayos o semirrectas, que tienen un extremo común llamado **vértice**. A un rayo lo llamaremos **lado inicial** del ángulo, y al otro, **lado terminal**. Es útil imaginar al ángulo como formado por una rotación, desde el lado inicial hasta el lado terminal, como se ve en la FIGURA 4.1.1*a*). El ángulo se puede poner en un plano cartesiano con su vértice en el origen y su lado inicial que coincida con el eje positivo de las x, como se ve en la figura 4.1.1*b*). En ese caso se dice que el ángulo está en su **posición normal** o estándar.

Medición en grados La medición de un ángulo en **grados** se basa en la asignación de 360 grados (se escribe 360°) al ángulo formado por una rotación completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, como se indica en la FIGURA 4.1.2. Entonces, otros ángulos se miden en función de un ángulo de 360°, y un ángulo de 1° es el que se forma por $\frac{1}{360}$ de una rotación completa. Si la rotación es contraria a la de las manecillas del reloj, la medida será *positiva*; si es en el sentido de las manecillas del reloj, la medida será *negativa*. Por ejemplo, el ángulo de la FIGURA 4.1.3*a*) se obtiene con un cuarto de rotación completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y es

$$\tfrac{1}{4}(360°) = 90°.$$

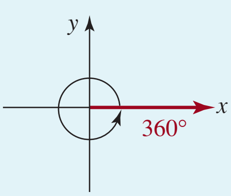
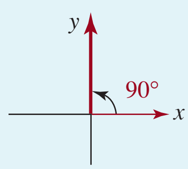
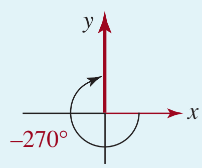


FIGURA 4.1.2 Ángulo de 360 grados



a) Ángulo de 90°



b) Ángulo de –270°

FIGURA 4.1.3 *a*) Medida positiva; *b*) medida negativa

También se ve en la figura 4.1.3*b*) el ángulo formado por tres cuartos de rotación completa en sentido de las manecillas del reloj. Este ángulo mide:

$$\tfrac{3}{4}(-360°) = -270°.$$

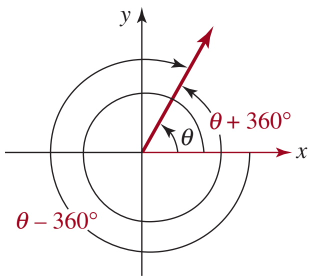


FIGURA 4.1.4 Tres ángulos coterminales

Ángulos coterminales Una comparación de la figura 4.1.3*a*) con la figura 4.1.3*b*) demuestra que el lado terminal de un ángulo de 90° coincide con el lado terminal de un ángulo de −270°. Cuando dos ángulos en la posición normal tienen los mismos lados terminales se dice que los ángulos son **coterminales**. Por ejemplo, los ángulos θ, $\theta + 360°$ y $\theta - 360°$ que se ven en la FIGURA 4.1.4 son coterminales. De hecho, la suma de cualquier múltiplo entero de 360° a un ángulo dado da como resultado un ángulo coterminal. Al revés, dos ángulos coterminales cualesquiera tienen medidas en grados que difieren por un múltiplo entero de 360°.

EJEMPLO 1 Ángulos y ángulos coterminales

En el caso de un ángulo de 960°,

***a*)** Ubicar el lado terminal y trazar el ángulo.
***b*)** Determinar un ángulo coterminal entre 0° y 360°.
***c*)** Determinar un ángulo coterminal entre −360° y 0°.

Solución

***a*)** Primero se determina cuántas rotaciones completas se dan para formar este ángulo. Al dividir 960 entre 360 se obtiene un cociente de 2, y un residuo de 240; esto es,

$$960 = 2(360) + 240.$$

Entonces, este ángulo se forma dando dos rotaciones en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y haciendo después $\frac{240}{360} = \frac{2}{3}$ de otra rotación. Como se ve en la FIGURA 4.1.5*a*), el lado terminal de 960° está en el tercer cuadrante.

***b*)** La figura 4.1.5*b*) muestra que el ángulo de 240° es coterminal con un ángulo de 960°.

***c*)** La figura 4.1.5*c*) muestra que el ángulo de −120° es coterminal con un ángulo de 960°.

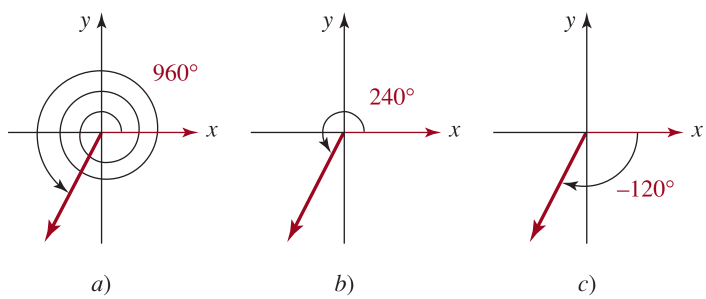


FIGURA 4.1.5 Los ángulos en *b*) y en *c*) son coterminales con el ángulo en *a*).

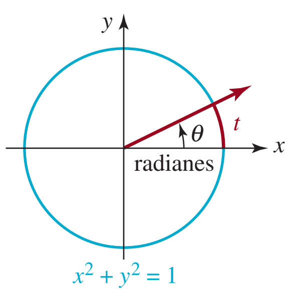


FIGURA 4.1.6 Ángulo de *t* radianes

Medida en radianes En el cálculo, la unidad más cómoda para medir ángulos es el radián. La medida de un ángulo en radianes se basa en la longitud de un arco del círculo unitario

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Como ya sabemos, un ángulo θ en posición normal se puede considerar como formado por la rotación del lado inicial, desde el eje positivo de x hasta el lado terminal. Como se ve en la FIGURA 4.1.6, el lado inicial de θ recorre una distancia t a lo largo de la circunferencia del círculo unitario. Se dice que la medida de θ es ***t* radianes**.

En radianes se usa la misma convención que con la medida en grados: un ángulo formado por una rotación contraria a las manecillas del reloj se considera positivo, mientras que un ángulo formado por una rotación en el sentido de las manecillas del reloj es negativo. Como la circunferencia del círculo unitario es 2π, un ángulo formado por una rotación en contra de las manecillas del reloj es 2π radianes. En la FIGURA 4.1.7 se han ilustrado ángulos de $\pi/2$, $-\pi/2$, π y 3π radianes, respectivamente. De acuerdo con las figuras 4.1.7*c*) y 4.1.7*d*), un ángulo de

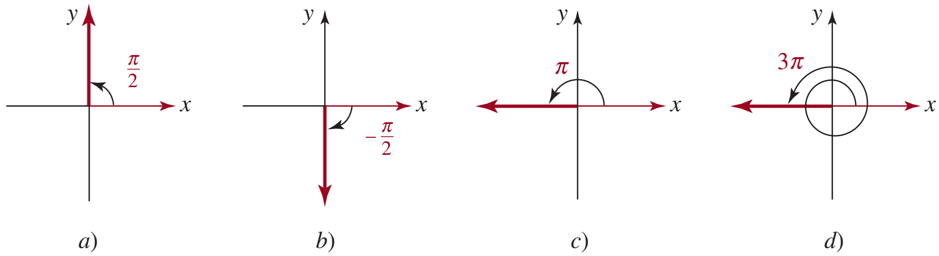


FIGURA 4.1.7 Ángulos expresados en radianes

π radianes es coterminal con uno de 3π radianes. En general, la suma de cualquier múltiplo entero de 2π radianes a un ángulo expresado en radianes da como resultado un ángulo coterminal. Al revés, dos ángulos coterminales cualesquiera expresados en radianes diferirán en un múltiplo entero de 2π.

EJEMPLO 2 Ángulo coterminal

Determinar un ángulo entre 0 y 2π radianes, que sea coterminal con $\theta = 11\pi/4$ radianes. Trazar el ángulo.

Solución Como $2\pi < 11\pi/4 < 3\pi$, se resta el equivalente de una rotación, o sea 2π radianes, para obtener

$$\frac{11\pi}{4} - 2\pi = \frac{11\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

También, una alternativa es proceder como en el inciso *a*) del ejemplo 1, y dividir: $11\pi/4 = 2\pi + 3\pi/4$. Entonces, un ángulo de $3\pi/4$ radianes es coterminal con θ, como vemos en la FIGURA 4.1.8.

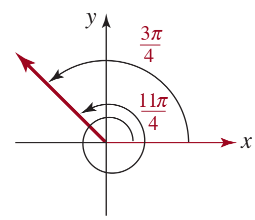


FIGURA 4.1.8 Ángulos coterminales del ejemplo 2

Fórmulas de conversión

Si bien muchas calculadoras científicas tienen teclas que convierten mediciones entre grados y radianes, hay una forma fácil de recordar la relación entre las dos medidas. Como la circunferencia de un círculo unitario es 2π, una rotación completa mide 2π radianes, y también 360°. Por consiguiente, $360° = 2\pi$ radianes, o

$$180° = \pi \text{ radianes.} \tag{1}$$

Si (1) se interpreta como $180\,(1°) = \pi$ (1 radián), entonces se obtienen las dos fórmulas siguientes para convertir entre grados y radianes.

CONVERSIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANES

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ radián} \tag{2}$$

$$1 \text{ radián} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \tag{3}$$

Con una calculadora se hacen las divisiones en (2) y (3), y se llega a

$$1° \approx 0.0174533 \text{ radián} \qquad \text{y} \qquad 1 \text{ radián} \approx 57.29578°.$$

EJEMPLO 3 Conversión entre grados y radianes

Convertir

a) 20° a radianes, ***b***) $7\pi/6$ radianes a grados, ***c***) 2 radianes a grados.

Solución

a) Para convertir grados en radianes se usa la ecuación (2):

$$20° = 20(1°) = 20 \cdot \left(\frac{\pi}{180} \text{ radián}\right) = \frac{\pi}{9} \text{ radián.}$$

b) Para convertir radianes en grados, se usa la ecuación (3):

$$\frac{7\pi}{6} \text{ radianes} = \frac{7\pi}{6} \cdot (1 \text{ radián}) = \frac{7\pi}{6}\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 210°.$$

c) De nuevo se usa (3):

$$2 \text{ radianes} = 2 \cdot (1 \text{ radián}) = 2 \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = \left(\frac{360}{\pi}\right)^{\circ} \approx 114.59°.$$ ■

La tabla que sigue muestra las medidas de los ángulos de uso más frecuente, expresadas en radianes y en grados.

TABLA 4.1

Grados	0	30	45	60	90	180
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

El lector recordará que, en geometría, a un ángulo de 90° se le llama **ángulo recto**, y a un ángulo de 180° se le llama **ángulo recto doble**. En radianes, $\pi/2$ es un ángulo recto, y π es un ángulo recto doble. Un **ángulo agudo** mide entre 0° y 90° (o entre 0 y $\pi/2$ radianes), y un **ángulo obtuso** mide entre 90° y 180° (o entre $\pi/2$ y π radianes). Se dice que dos ángulos agudos son **complementarios** si suman 90° (o $\pi/2$ radianes). Dos ángulos positivos son **suplementarios** si suman 180° (o π radianes). Un triángulo que contiene un ángulo recto se llama **triángulo rectángulo**. Las longitudes a, b y c de los lados de un triángulo rectángulo satisfacen la relación pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$, donde c es la longitud del lado opuesto al ángulo recto (la hipotenusa); los otros dos lados, a y b, son los catetos.

EJEMPLO 4 Ángulos complementarios y suplementarios

a) Calcular el ángulo que es complementario de $\theta = 74.23°$.
b) Calcular el ángulo que es suplementario de $\phi = \pi/3$ radianes.

Solución

a) Como dos ángulos son complementarios si suman 90°, se ve que el ángulo que es complementario de $\theta = 74.23°$ es

$$90° - \theta = 90° - 74.23° = 15.77°.$$

b) Como dos ángulos son suplementarios si suman π radianes, se ve que el ángulo que es suplementario de $\phi = \pi/3$ radianes es

$$\pi - \phi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ radianes.}$$ ■

Longitud de arco

Un ángulo θ con su vértice en el centro de un círculo de radio r se llama **ángulo central**. La región dentro del círculo contenida en el ángulo central θ se llama **sector**. Como se ve en la FIGURA 4.1.9, la longitud del arco del círculo abarcado (subtendido, o cortado) por el ángulo θ se representa con s. Cuando se mide en radianes, el ángulo central θ corresponde a $\theta/2\pi$ de una rotación completa. Por consiguiente, el arco abarcado por θ es $\theta/2\pi$ de la circunferencia del círculo. Así, la longitud s del arco es

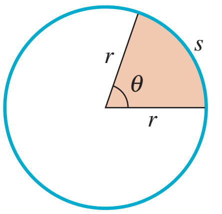


FIGURA 4.1.9 Longitud de arco s, determinada por un ángulo central θ

$$s = \frac{\theta}{2\pi}(2\pi r) = r\theta,$$

siempre que θ se exprese en radianes. Este resultado se resume como sigue:

FÓRMULA DE LA LONGITUD DEL ARCO

Un ángulo central de θ radianes en un círculo de radio r abarca un arco de longitud

$$s = r\theta. \tag{4}$$

Mediante la ecuación (4) se puede expresar la medida θ en radianes de un ángulo central, en un círculo, en función de la longitud del arco abarcado s y del radio r del círculo:

$$\theta \text{ (en radianes)} = \frac{s}{r}. \tag{5}$$

En la ecuación (5) se puede usar cualquier unidad conveniente de longitud, en s y r, pero debe ser la misma para *ambas* cantidades. Así,

$$\theta \text{ (en radianes)} = \frac{s \text{ (unidades de longitud)}}{r \text{ (unidades de longitud)}}$$

parece ser una cantidad "adimensional". Es la razón por la que a veces se omite la palabra *radianes* cuando un ángulo se expresa en radianes.

EJEMPLO 5 Cálculo de la longitud del arco

Calcular la longitud del arco abarcado por un ángulo central de: ***a)*** 2 radianes en un círculo de 6 pulgadas de radio, ***b)*** 30° en un círculo de 12 pies de radio.

Con frecuencia, los alumnos aplican la fórmula de la longitud del arco en forma incorrecta, porque usan grados. Recuerde que $s = r\theta$ sólo es válida si θ se expresa en radianes.

Solución

a) De acuerdo con la fórmula (4) de la longitud del arco, con $\theta = 2$ radianes, y $r = 6$ pulgadas, $s = r\theta = 2 \cdot 6 = 12$. Entonces, la longitud del arco es de 12 pulgadas.

b) Primero se debe expresar 30° en radianes. Recordamos que $30° = \pi/6$ radianes. Entonces, de la fórmula (4) de la longitud del arco, $s = r\theta = (12)(\pi/6) = 2\pi$. Entonces, la longitud del arco es 2π pies, o 6.28 pies. ■

Según la ecuación (5), un arco de longitud r en un círculo de radio r abarcará un ángulo de $r/r = 1$ radián. La FIGURA 4.1.10 ilustra un ángulo de 1 radián en un círculo de radio r. Ya hemos visto, en la fórmula (3) de conversión, que un ángulo de 1 radián es de aproximadamente 57°.

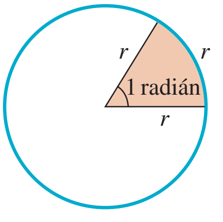


FIGURA 4.1.10 La longitud de arco de radio r abarca un ángulo de 1 radián

4.1 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-12.

En los problemas 1 a 16, trace el ángulo indicado en la posición normal. Tenga en cuenta que cuando no hay símbolo de grados (°) en una medida angular, quiere decir que el ángulo está expresado en radianes.

1. $60°$ **2.** $-120°$ **3.** $135°$ **4.** $150°$
5. $1\,140°$ **6.** $-315°$ **7.** $-240°$ **8.** $-210°$
9. $\frac{\pi}{3}$ **10.** $\frac{5\pi}{4}$ **11.** $\frac{7\pi}{6}$ **12.** $-\frac{2\pi}{3}$
13. $-\frac{\pi}{6}$ **14.** -3π **15.** 3 **16.** 4

En los problemas 17 a 24, convierta los grados en radianes.

17. $10°$ **18.** $15°$ **19.** $45°$ **20.** $215°$
21. $270°$ **22.** $-120°$ **23.** $-230°$ **24.** $540°$

En los problemas 25 a 32, convierta los radianes en grados.

25. $\frac{2\pi}{9}$ **26.** $\frac{11\pi}{6}$ **27.** $\frac{2\pi}{3}$ **28.** $\frac{5\pi}{12}$
29. $\frac{5\pi}{4}$ **30.** 7π **31.** 3.1 **32.** 12

En los problemas 33 a 36, calcule el ángulo coterminal de cada ángulo indicado ***a)*** entre 0° y 360°, y ***b)*** entre $-360°$ y 0°.

33. $875°$ **34.** $400°$ **35.** $-610°$ **36.** $-150°$

En los problemas 37 a 42, calcule el ángulo coterminal de cada ángulo indicado ***a)*** entre 0 y 2π radianes, y ***b)*** entre -2π y 0 radianes.

37. $-\frac{9\pi}{4}$ **38.** $\frac{17\pi}{2}$
39. 5.3π **40.** $-\frac{9\pi}{5}$
41. -4 **42.** 7.5

En los problemas 43 a 50, calcule un ángulo que sea ***a)*** complementario y ***b)*** suplementario del ángulo indicado, o diga por qué no puede calcularse ese ángulo.

43. $48.25°$ **44.** $93°$ **45.** $98.4°$ **46.** $63.08°$
47. $\frac{\pi}{4}$ **48.** $\frac{\pi}{6}$ **49.** $\frac{2\pi}{3}$ **50.** $\frac{5\pi}{6}$

51. Calcule las medidas, en grados y en radianes, del ángulo formado por ***a)*** tres quintas partes de una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y ***b)*** cinco y un octavo rotaciones en el sentido de las manecillas del reloj.
52. Calcule las medidas, en grados y en radianes, del ángulo obtuso formado por las manecillas de un reloj ***a)*** a las 8:00, ***b)*** a la 1:00 y ***c)*** a las 7:30.
53. Calcule las medidas, en grados y en radianes, del ángulo que recorre la manecilla de las horas de un reloj en 2 horas.
54. Conteste la pregunta del problema 53 del minutero.

55. La Tierra gira sobre su eje una vez cada 24 horas. ¿Cuánto tarda en girar un ángulo de ***a***) 240° y ***b***) $\pi/6$ radianes?

56. El planeta Mercurio completa una rotación sobre su eje cada 59 días. ¿Qué ángulo (medido en grados) gira en ***a***) 1 día terrestre, ***b***) 1 hora y ***c***) 1 minuto?

57. Calcule la longitud del arco abarcada por un ángulo central de 3 radianes, en un círculo de ***a***) radio 3 y ***b***) radio 5.

58. Calcule la longitud del arco abarcado por un ángulo central de 30° en un círculo de ***a***) radio 2 y ***b***) radio 4.

59. Calcule el ángulo central θ en un círculo de radio 5, si θ subtiende un arco de longitud de 7.5. Exprese θ en ***a***) radianes y ***b***) grados.

60. Calcule el ángulo central θ en un círculo de radio 1 si θ subtiende un arco de $\pi/3$ de longitud. Exprese θ en ***a***) radianes y ***b***) grados.

61. Demuestre que el área A de un sector formado por un ángulo central de θ radianes en un círculo de radio r es $A = \frac{1}{2}r^2\theta$. [*Sugerencia:* Use la propiedad geométrica de proporcionalidad: la relación del área A de un sector circular entre el área total πr^2 del círculo es igual a la relación del ángulo central θ entre el ángulo de una revolución completa, 2π.]

62. ¿Cuál es el área de la banda circular roja de la **FIGURA 4.1.11**, si θ se expresa ***a***) en radianes y ***b***) en grados? [*Sugerencia:* Use el resultado del problema 61.]

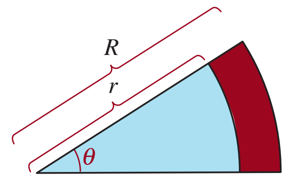


FIGURA 4.1.11 Banda circular del problema 62

En los problemas 63 y 64, haga las conversiones indicadas usando la notación "grados, minutos, segundos" (DMS en las calculadoras, de ***D****egrees*, ***M****inutes*, ***S****econds*) y que **un grado** se puede dividir en 60 partes iguales llamadas **minutos** (se escribe $1° = 60'$), y un minuto se puede dividir en 60 partes iguales llamadas **segundos** (se escribe $1' = 60''$). Por lo anterior, $1' = \left(\frac{1}{60}\right)°$ y $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3\,600}\right)°$. Por ejemplo, $37°15'55'' = 37° + 15' + 55'' = 37° + \left(\frac{15}{60}\right)° + \left(\frac{55}{3\,600}\right)° = 37.2653°$ en grados decimales.

63. Convierta en grados decimales: ***a***) $5°10'$ ***b***) $10°25'$ ***c***) $10°39'17''$ ***d***) $143°7'2''$

64. Convierta en grados, minutos y segundos: ***a***) 210.78° ***b***) 15.45° ***c***) 30.81° ***d***) 110.5°

Aplicaciones diversas

65. Navegación marítima Una milla náutica, o milla marina, se define como la longitud del arco abarcado, en la superficie de la Tierra, por un ángulo central que mide 1 minuto. Si el diámetro de la Tierra es de 7 927 millas terrestres, calcule cuántas millas terrestres hay en una milla náutica.

66. Circunferencia de la Tierra Alrededor de 230 a.C., Eratóstenes calculó la circunferencia de la Tierra con las siguientes observaciones. A mediodía del día más largo del año, el Sol estaba directamente arriba de Siene (ahora Aswan), mientras que estaba inclinado 7.2° de la vertical en Alejandría. Creía que las dos ciudades estaban en el mismo meridiano, y supuso que los rayos del Sol son paralelos. Así, llegó a la conclusión que el arco de Siene a Alejandría era subtendido por un ángulo central de 7.2°. Vea la **FIGURA 4.1.12**. En esos días, la distancia medida de Siene a Alejandría era de 5 000 estadios. Si

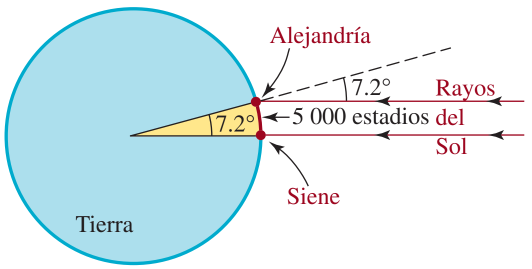


FIGURA 4.1.12 La Tierra del problema 66

un estadio = 559 pies, calcule la circunferencia de la Tierra en ***a***) estadios y ***b***) millas. Demuestre que los datos de Eratóstenes llegan a un resultado dentro de 7% del valor correcto, si el diámetro de la Tierra, con aproximación de cientos de millas, es de 7 900 millas.

67. Péndulo de reloj Un péndulo de reloj tiene 1.3 m de longitud, y oscila describiendo un arco de 15 cm. Calcule ***a***) el ángulo central y ***b***) el área del sector que barre el péndulo en una oscilación. [*Sugerencia:* Para contestar el inciso ***b***), use el resultado del problema 61.]

68. Movimiento circular de un yoyo Un yoyo se hace girar en torno a un círculo en el extremo de su cordón de 100 cm. ***a***) Si hace 6 revoluciones en 4 segundos, calcule su rapidez de giro (es la magnitud de su **velocidad angular**), en radianes por segundo. ***b***) Calcule la rapidez lineal (es la magnitud de su **velocidad lineal**) a la que viaja el yoyo, en centímetros por segundo.

69. Más yoyos Si hay un nudo en el cordón del yoyo del problema 68, a 40 cm del yoyo, calcule ***a***) la rapidez angular del nudo y ***b***) la rapidez lineal.

70. Movimiento circular de un neumático Si un automóvil con neumáticos de 26 pulgadas de diámetro viaja a 55 millas por hora, calcule ***a***) la cantidad de revoluciones por minuto de sus neumáticos y ***b***) la rapidez angular de los neumáticos, en radianes por minuto.

4.2 Las funciones seno y coseno

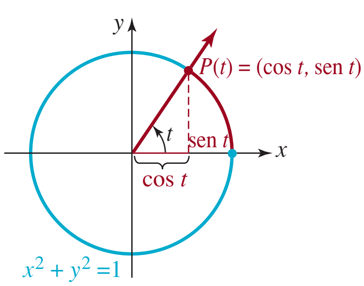


FIGURA 4.2.1 Las coordenadas de $P(t)$ son (cos t, sen t)

Introducción En su forma original, las funciones trigonométricas se definieron usando ángulos en triángulos rectángulos. Un método más moderno, que se usa en cálculo, es definir las funciones trigonométricas en conjuntos de números reales. Como veremos, los ángulos expresados en radianes son la clave para llegar a estas definiciones.

Seno y coseno A cada número real t corresponde un ángulo de t radianes en su posición normal. Como se ve en la FIGURA 4.2.1, se representa con $P(t)$ el punto de intersección del lado terminal del ángulo t con el círculo unitario. Las coordenadas x y y de este punto indican los valores de las dos funciones trigonométricas básicas. La ordenada o coordenada y de $P(t)$ se llama **seno de *t***, mientras que la abscisa o coordenada x de $P(t)$ se llama **coseno de *t***.

FUNCIONES SENO Y COSENO

Sean t cualquier número real y $P(t) = (x, y)$ el punto de intersección del círculo unitario con el lado terminal del ángulo de t radianes en su posición normal. Entonces, el **seno de *t***, representado por sen t, y el **coseno de *t***, representado por cos t, son

$$\operatorname{sen} t = y \tag{1}$$

y

$$\cos t = x. \tag{2}$$

Debido a que a cada número real t corresponde un punto único $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, acabamos de definir dos funciones, las funciones seno y coseno, y cada una tiene como dominio el conjunto R de los números reales. Debido al papel que juega el círculo unitario en esta definición, a veces se llaman **funciones circulares** a las funciones trigonométricas.

Hay varias propiedades de las funciones seno y coseno que son consecuencia de que $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ esté en el círculo unitario. Por ejemplo, las coordenadas de $P(t)$ deben satisfacer la ecuación de ese círculo

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{3}$$

Al sustituir $x = \cos t$ y $y = \text{sen}\, t$ se obtiene una importante relación entre el seno y el coseno, llamada **identidad pitagórica**

$$(\cos t)^2 + (\text{sen}\, t)^2 = 1.$$

En adelante seguiremos dos prácticas normales para expresar esta identidad: $(\cos t)^2$ y $(\text{sen}\, t)^2$ se escribirán $\cos^2 t$ y $\text{sen}^2 t$, respectivamente, y primero se escribirá el término $\text{sen}^2 t$.

IDENTIDAD PITAGÓRICA

Para todos los números reales t,

$$\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1. \qquad (4)$$

También, si $P(x, y)$ representa un punto en el círculo unitario (3), entonces las coordenadas de P deben satisfacer las desigualdades $-1 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$. Como $x = \cos t$ y $y = \text{sen}\, t$, entonces las cotas de valores de las funciones seno y coseno serán las siguientes:

COTAS DE VALORES DE SENO Y COSENO

Para todos los números reales t,

$$-1 \leq \text{sen}\, t \leq 1 \qquad \text{y} \qquad -1 \leq \cos t \leq 1.$$

Las desigualdades anteriores se pueden expresar también en la forma siguiente: $|\text{sen}\, t| \leq 1$ y $|\cos t| \leq 1$. Así, por ejemplo, no hay un número t tal que $\text{sen}\, t = \frac{3}{2}$.

Dominio y contradominio De acuerdo con las observaciones anteriores, las funciones seno y coseno $f(t) = \text{sen}\, t$ y $g(t) = \cos t$, cada una tienen como **dominio** $\boldsymbol{R}$ el conjunto de los números reales, y como **contradominio** el intervalo $[-1, 1]$.

Signos de las funciones circulares Los signos de los valores de las funciones sen t y cos t se determinan por el cuadrante en el que está el punto P, y viceversa. Por ejemplo, si sen t y cos t son ambos negativos, el punto $P(t)$ y el lado terminal del ángulo correspondiente de t radianes debe estar en el cuadrante III. La **FIGURA 4.2.2** muestra los signos de las funciones coseno y seno, en cada uno de los cuatro cuadrantes.

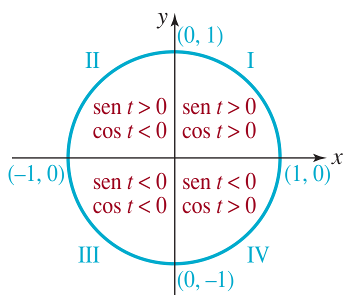


FIGURA 4.2.2 Signos algebraicos de sen t y cos t en los cuatro cuadrantes

EJEMPLO 1 Uso de la identidad de Pitágoras

Si $\cos t = \frac{1}{3}$ y $P(t)$ es un punto en el cuarto cuadrante, calcular sen t.

Solución Por sustitución de $\cos t = \frac{1}{3}$ en el teorema de Pitágoras (4) se obtiene $\text{sen}^2 t + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$ o $\text{sen}^2 t = \frac{8}{9}$. Como sen t es la coordenada y de $P(t)$, un punto en el cuarto cuadrante, se debe tomar la raíz cuadrada negativa de sen t:

$$\text{sen}\, t = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

■

EJEMPLO 2 Seno y coseno de un número real

Usar una calculadora para aproximar sen 3 y cos 3, y describir una interpretación geométrica de esos valores.

Solución Con una calculadora puesta en *modo radián*, se obtiene $\cos 3 \approx -0.9899925$ y $\text{sen}\, 3 \approx 0.1411200$. Esos valores representan las coordenadas x y y, respectivamente, del pun-

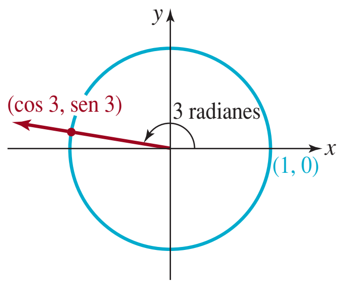


FIGURA 4.2.3 El punto $P(3)$

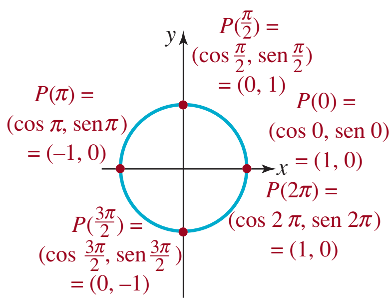


FIGURA 4.2.4 Senos y cosenos de los ángulos en el cambio de cuadrante

to de intersección del lado terminal del ángulo de 3 radianes en posición normal, con el círculo unitario. Como se ve en la **FIGURA 4.2.3**, este punto está en el segundo cuadrante, porque $\pi/2 < 3 < \pi$. Esto también era de esperarse, a la vista de la figura 4.2.2, porque cos 3, la coordenada x, es *negativa*, y sen 3, la coordenada y, es *positiva*. ■

☐ Valores correspondientes a coordenadas al origen del círculo unitario

Como se ve en la **FIGURA 4.2.4**, las coordenadas al origen del círculo unitario indican los valores de las funciones seno y coseno de los números reales correspondientes a los **ángulos cuadrantales** que se citan a continuación.

VALORES DE SENO Y COSENO

Para $t = 0$: $\quad \operatorname{sen} 0 = 0 \quad$ y $\quad \cos 0 = 1$

Para $t = \dfrac{\pi}{2}$: $\quad \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1 \quad$ y $\quad \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

Para $t = \pi$: $\quad \operatorname{sen}\pi = 0 \quad$ y $\quad \cos\pi = -1$

Para $t = \dfrac{3\pi}{2}$: $\quad \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2} = -1 \quad$ y $\quad \cos\dfrac{3\pi}{2} = 0$

☐ Periodicidad

En la sección 4.1 vimos que para todo número real t, los ángulos de t radianes y $t \pm 2\pi$ radianes son coterminales. Así, determinan el mismo punto (x, y) en el círculo unitario. Por consiguiente,

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t \pm 2\pi) \qquad \text{y} \qquad \cos t = \cos(t \pm 2\pi). \tag{5}$$

En otras palabras, las funciones seno y coseno repiten sus valores cada 2π unidades.

FUNCIONES PERIÓDICAS

Se dice que una función f no constante es **periódica** si hay un número positivo p tal que

$$f(t) = f(t + p) \tag{6}$$

para toda t en el dominio de f. Si p es el número positivo más pequeño para el que (6) es válida, entonces p es el **periodo** de la función f.

Las ecuaciones (5) implican que las funciones seno y coseno son periódicas, y su periodo es $p \leq 2\pi$. Para ver que el periodo de sen t en realidad es 2π, se observa que sólo hay un punto en el círculo unitario cuya coordenada y es 1: es $P(\pi/2) = (\cos(\pi/2), \operatorname{sen}(\pi/2)) = (0, 1)$. Por consiguiente,

$$\operatorname{sen} t = 1 \qquad \text{sólo para} \qquad t = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \pm 2\pi, \frac{\pi}{2} \pm 4\pi,$$

y así sucesivamente. Entonces, el valor positivo más pequeño de p es 2π.

PERIODO DEL SENO Y EL COSENO

Las funciones seno y coseno son periódicas, y **su periodo** es 2π. Por consiguiente,

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \text{y} \qquad \cos(t + 2\pi) = \cos t \tag{7}$$

para todo número real t.

Propiedades par-impar La simetría del círculo unitario comunica varias propiedades adicionales a las funciones circulares. Para todo número real t, los puntos $P(t)$ y $P(-t)$ del círculo unitario están ubicados en el lado terminal de un ángulo de t y $-t$ radianes, respectivamente. Esos dos puntos siempre serán simétricos con respecto al eje x. La **FIGURA 4.2.5** ilustra el caso de un punto $P(t)$ que está en el primer cuadrante: las coordenadas x de los dos puntos son idénticas; sin embargo, las coordenadas y tienen magnitudes iguales, pero signos contrarios. Las mismas simetrías son válidas, independientemente de cuál cuadrante contenga a $P(t)$. Así, para cualquier número real t, $\cos(-t) = \cos t$ y $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$. Al aplicar las definiciones de **funciones pares** e **impares** de la sección 2.2, se llega al siguiente resultado.

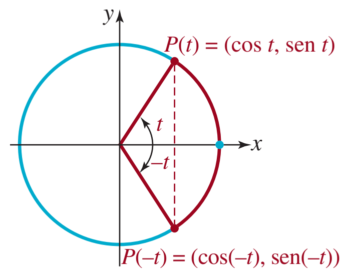


FIGURA 4.2.5 Coordenadas de $P(t)$ y $P(-t)$

FUNCIONES PARES E IMPARES

La función coseno es **par**, y la función seno es **impar**. Esto es, para todo número real t,

$$\cos(-t) = \cos t \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t. \tag{8}$$

Las siguientes propiedades adicionales de las funciones seno y coseno se pueden verificar, examinando las simetrías de puntos escogidos en forma adecuada en el círculo unitario.

PROPIEDADES ADICIONALES

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t \tag{9}$$

$$\cos(t + \pi) = -\cos t \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(t + \pi) = -\operatorname{sen} t \tag{10}$$

$$\cos(\pi - t) = -\cos t \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\pi - t) = \operatorname{sen} t \tag{11}$$

Estas propiedades especiales de las funciones seno y coseno serán muy útiles tan pronto como determinemos valores adicionales de $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$, para t en el intervalo $[0, 2\pi)$. Ahora, usando los resultados de la geometría plana, determinaremos los valores de seno y coseno para $t = \pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$.

Determinación de $\operatorname{sen}(\pi/4)$ y $\cos(\pi/4)$ Se traza un ángulo de $\pi/4$ radianes (45°) en la posición normal, y se localiza e identifica $P(\pi/4) = (\cos \pi/4, \operatorname{sen} \pi/4)$ en el círculo unitario. Como se ve en la **FIGURA 4.2.6**, se forma un triángulo rectángulo bajando una perpendicular al eje x desde $P(\pi/4)$. Como la suma de los ángulos, en cualquier triángulo, es π radianes (180°), el tercer ángulo de este triángulo también es de $\pi/4$ radianes, y por consiguiente el triángulo es isósceles. Entonces, las coordenadas de $P(\pi/4)$ son iguales; esto es, $\cos(\pi/4) = \operatorname{sen}(\pi/4)$. De acuerdo con el teorema de Pitágoras (4),

$$\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \text{es} \qquad 2\cos^2\frac{\pi}{4} = 1.$$

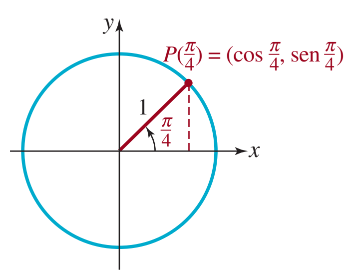


FIGURA 4.2.6 El punto $P(\pi/4)$

Dividiendo entre 2 y sacando la raíz cuadrada queda $\cos(\pi/4) = \pm\sqrt{2}/2$. Como $P(\pi/4)$ está en el primer cuadrante, ambas coordenadas deben ser positivas. Así hemos determinado las coordenadas (iguales) de $P(\pi/4)$.

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

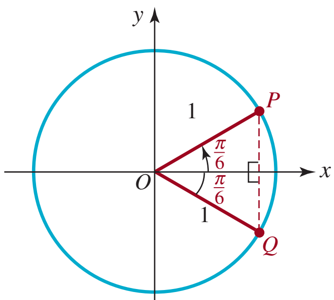


FIGURA 4.2.7 El punto $P(\pi/6)$

Determinación de $\text{sen}(\pi/6)$ y $\cos(\pi/6)$ Se trazan dos ángulos de $\pi/6$ radianes (30°) en el primero y cuarto cuadrantes, como se ve en la **FIGURA 4.2.7** y se identifican los puntos de intersección con el círculo unitario $P(\pi/6)$ y Q, respectivamente. Trazando segmentos de recta perpendiculares desde P y Q al eje x se obtienen dos triángulos rectángulos *congruentes*, porque cada uno tiene la hipotenusa de longitud 1 y los ángulos de sus vértices son 30°, 60° y 90°. Ya que los ángulos de 90° son ángulos rectos, estos dos triángulos rectángulos forman un triángulo *equilátero* $\triangle POQ$ cuyos lados tienen longitud 1. Debido a que $\text{sen}(\pi/6)$ es igual a la mitad del lado vertical de $\triangle POQ$, entonces

$$\text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Según lo anterior, y el teorema de Pitágoras (4), se ve que el valor de $\cos\frac{\pi}{6}$ es:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\frac{\pi}{6} = 1 \qquad \text{implica que} \qquad \cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}$$

Aquí se toma la raíz cuadrada positiva, porque $P(\pi/6)$ está en el primer cuadrante

o sea

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Determinación de $\text{sen}(\pi/3)$ y $\cos(\pi/3)$ Se trazan los ángulos $\pi/6$ y $\pi/3$ en la posición normal, y se localizan e identifican los puntos $P(\pi/6)$ y $P(\pi/3)$, como se ve en la **FIGURA 4.2.8**. A continuación se trazan dos triángulos congruentes 30°-60°-90° bajando perpendiculares a los ejes x y y, respectivamente. De acuerdo con la congruencia de esos triángulos,

$$\cos\frac{\pi}{3} = \text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \text{sen}\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

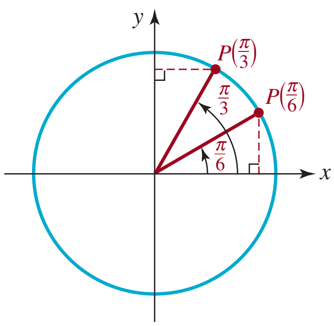


FIGURA 4.2.8 El punto $P(\pi/3)$

En la tabla siguiente se resumen los valores de las funciones seno y coseno que corresponden a las fracciones básicas de π que hemos determinado hasta ahora.

VALORES DEL SENO Y COSENO (CONTINUACIÓN)

$$\text{Para } t = \frac{\pi}{6}: \quad \text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Para } t = \frac{\pi}{4}: \quad \text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Para } t = \frac{\pi}{3}: \quad \text{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Ángulo de referencia Como se indicó al inicio de esta sección, para cada número real t hay un ángulo único de t radianes en la posición normal, que determina al punto $P(t)$, en el círculo unitario, con coordenadas $(\cos t, \text{sen } t)$. Como se ve en la **FIGURA 4.2.9** el lado terminal de todo ángulo de t radianes ($P(t)$ no está en un eje) formará un ángulo agudo con el eje x. Entonces se puede localizar un ángulo de t' radianes en el primer cuadrante, que sea congruente con este ángulo agudo. El ángulo de t' radianes se llama **ángulo de referencia** de t. Debido a la simetría del círculo unitario, las coordenadas de $P(t')$ serán iguales *en valor absoluto* a las coordenadas respectivas de $P(t)$. Por consiguiente,

$$\text{sen } t = \pm\text{sen } t' \qquad \text{y} \qquad \cos t = \pm\cos t'.$$

Como se verá en los ejemplos que siguen, los ángulos de referencia se pueden usar para determinar valores de funciones trigonométricas de cualquier múltiplo entero de $\pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$.

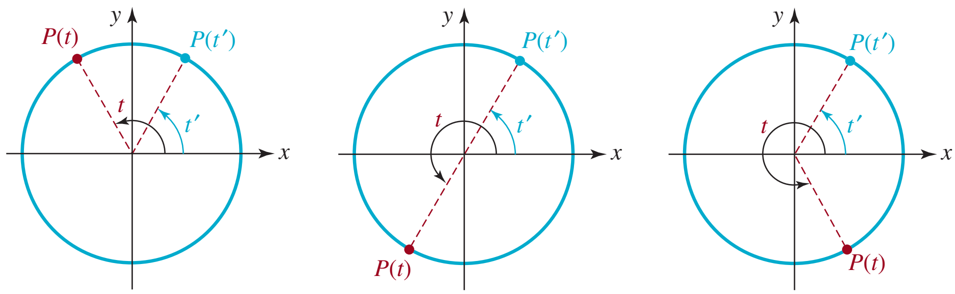


FIGURA 4.2.9 El ángulo de referencia t' es agudo

EJEMPLO 3 Uso de ángulos de referencia

Determinar valores exactos de sen t y cos t del número real t indicado:

a) $t = 5\pi/3$ y ***b)*** $t = -3\pi/4$.

Solución En cada inciso comenzaremos determinando el ángulo de referencia que corresponde al valor indicado de t.

a) De acuerdo con la **FIGURA 4.2.10** se ve que un ángulo $t = 5\pi/3$ radianes determina un punto $P(5\pi/3)$ en el cuarto cuadrante, que tiene ángulo de referencia $t' = \pi/3$ radianes. Después de ajustar los signos de las coordenadas de $P(\pi/3) = (1/2, \sqrt{3}/2)$ para obtener el punto en el cuarto cuadrante $P(5\pi/3) = (1/2, -\sqrt{3}/2)$, se ve que

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \cos\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

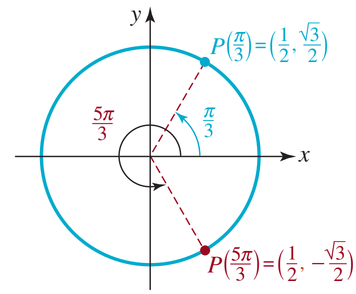


FIGURA 4.2.10 Ángulo de referencia del inciso *a*) del ejemplo 3

b) El punto $P(-3\pi/4)$ está en el tercer cuadrante, y su ángulo de referencia es $\pi/4$, como se ve en la **FIGURA 4.2.11**. Por consiguiente,

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

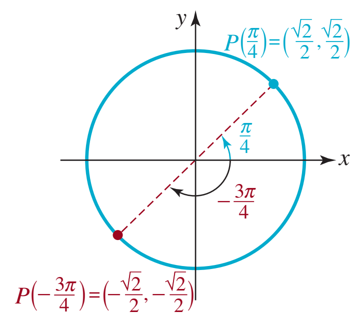


FIGURA 4.2.11 Ángulo de referencia del inciso *b*) del ejemplo 3

A veces, para determinar los valores trigonométricos de múltiplos de las fracciones básicas de π se deben aplicar las propiedades de periodicidad, o de par-impar, además de los números de referencia.

EJEMPLO 4 Uso de periodicidad y un ángulo de referencia

Determinar valores exactos de sen t y cos t para $t = 29\pi/6$.

Solución Ya que 29 $\pi/6$ es mayor que 2π, se expresa $29\pi/6$ como múltiplo entero de 2π, más un número menor que 2π:

$$\frac{29\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6} = 2(2\pi) + \frac{5\pi}{6}.$$

De acuerdo con las ecuaciones de periodicidad (7), se sabe que $\operatorname{sen}(29\pi/6) = \operatorname{sen}(5\pi/6)$ y $\cos(29\pi/6) = \cos(5\pi/6)$. A continuación, en la **FIGURA 4.2.12** se ve que el ángulo de referencia de $5\pi/6$ es $\pi/6$. Como $P(5\pi/6)$ es un punto del segundo cuadrante,

$$\operatorname{sen}\frac{29\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

y

$$\cos\frac{29\pi}{6} = \cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

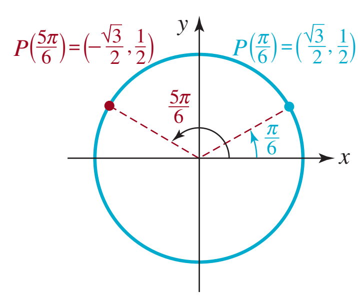


FIGURA 4.2.12 Ángulo de referencia del ejemplo 4

EJEMPLO 5 Propiedades par-impar

Determinar los valores exactos de sen t y cos t para $t = -\pi/6$.

Solución Ya que el seno es una función impar y el coseno es una función par,

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Este problema también se pudo haber resuelto usando un ángulo de referencia. ■

Funciones trigonométricas de los ángulos En esta sección hemos definido las funciones seno y coseno del número real t usando las coordenadas de un punto $P(t)$ en el círculo unitario. Ahora ya es posible definir las **funciones trigonométricas de cualquier ángulo $\boldsymbol{\theta}$**. Para todo ángulo θ, tan sólo se hace que

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} t \qquad \text{y} \qquad \cos\theta = \cos t,$$

donde el número real t es la medida de θ en radianes. Como se indicó en la sección 4.1, se acostumbra omitir la palabra radianes cuando se mide un ángulo. Entonces, se escribe $\operatorname{sen}(\pi/6)$ para el seno del número real $\pi/6$, y también para el seno del ángulo $\pi/6$ radianes. Además, como los valores de las funciones trigonométricas se determinan por las coordenadas del punto $P(t)$ en el círculo unitario, en realidad no importa si θ se mide en radianes o en grados. Por ejemplo, independientemente de si el dato es $\theta = \pi/6$ radianes o $\theta = 30°$, el punto en el círculo unitario que corresponde a este ángulo en la posición normal es $(\sqrt{3}/2, 1/2)$. Entonces

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4.2 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-12.

1. Si $\cos t = -\frac{2}{5}$ y $P(t)$ es un punto en el segundo cuadrante, determine sen t.
2. Si sen $t = \frac{1}{4}$, y $P(t)$ es un punto en el segundo cuadrante, determine cos t.
3. Si sen $t = -\frac{2}{3}$ y $P(t)$ es un punto en el tercer cuadrante, determine cos t.
4. Si cos $t = \frac{3}{4}$ y $P(t)$ es un punto del cuarto cuadrante, determine sen t.
5. Si sen $t = -\frac{2}{7}$ determine todos los valores posibles de cos t.
6. Si cos $t = \frac{3}{10}$ determine todos los valores posibles de sen t.
7. Si cos $t = -0.2$, determine todos los valores posibles de sen t.
8. Si sen $t = 0.4$, determine todos los valores posibles de cos t.
9. Si $2 \operatorname{sen} t - \cos t = 0$, determine todos los valores posibles de sen t y cos t.
10. Si $3 \operatorname{sen} t - 2 \cos t = 0$, determine todos los valores posibles de sen t y cos t.

En los problemas 11 a 14 determine el valor exacto de ***a***) sen t y ***b***) cos t, para el valor indicado de t. No use calculadora.

11. $t = -\pi/2$
12. $t = 3\pi$
13. $t = 8\pi$
14. $t = -3\pi/2$

En los problemas 15 a 26, para el valor indicado de t, determine el ángulo de referencia t' y los valores exactos de sen t y cos t. No use calculadora.

15. $t = 2\pi/3$
16. $t = 4\pi/3$
17. $t = 5\pi/4$
18. $t = 3\pi/4$

19. $t = 11\pi/6$

20. $t = 7\pi/6$

21. $t = -\pi/4$

22. $t = -7\pi/4$

23. $t = -5\pi/6$

24. $t = -11\pi/6$

25. $t = -5\pi/3$

26. $t = -2\pi/3$

En los problemas 27 a 32, determine el valor de la función trigonométrica indicada. No use calculadora.

27. $\text{sen}(-11\pi/3)$

28. $\cos(17\pi/6)$

29. $\cos(-7\pi/4)$

30. $\text{sen}(-19\pi/2)$

31. $\cos(5\pi)$

32. $\text{sen}(23\pi/3)$

En los problemas 33 a 38, justifique la afirmación mediante una de las propiedades de las funciones trigonométricas.

33. $\text{sen}\,\pi = \text{sen}\,3\pi$

34. $\cos(\pi/4) = \text{sen}(\pi/4)$

35. $\text{sen}(-3 - \pi) = -\text{sen}(3 + \pi)$

36. $\cos 16.8\pi = \cos 14.8\pi$

37. $\cos 0.43 = \cos(-0.43)$

38. $\text{sen}(2\pi/3) = \text{sen}(\pi/3)$

En los problemas 39 a 46, determine el valor de la función trigonométrica indicada. No use calculadora.

39. $\text{sen}\,135°$

40. $\cos 150°$

41. $\cos 210°$

42. $\text{sen}\,270°$

43. $\cos 330°$

44. $\text{sen}(-180°)$

45. $\text{sen}(-60°)$

46. $\cos(-300°)$

En los problemas 47 a 50, determine todos los ángulos t, donde $0 \le t < 2\pi$, que satisfagan la condición indicada.

47. $\text{sen}\ t = 0$

48. $\cos t = -1$

49. $\cos t = \sqrt{2}/2$

50. $\text{sen}\ t = \frac{1}{2}$

En los problemas 51 a 54, determine todos los ángulos θ, donde $0° \le \theta < 360°$, que satisfagan la condición indicada.

51. $\cos\theta = \sqrt{3}/2$

52. $\text{sen}\ \theta = -\frac{1}{2}$

53. $\text{sen}\ \theta = -\sqrt{2}/2$

54. $\cos\theta = 1$

Aplicaciones diversas

Tiro libre

55. Tiro libre Bajo ciertas condiciones, la altura y que alcanza un balón de basquetbol, que se lanza desde una altura h hacia un ángulo α respecto a la horizontal, con una velocidad inicial v_0 es $y = h + (v_0^2\text{sen}^2\alpha)/2g$, donde g es la aceleración de la gravedad. Calcule la altura máxima que alcanza un tiro libre, si $h = 2.15$ m, $v_0 = 8$ m/s, $\alpha = 64.47°$ y $g = 9.81$ m/s^2.

56. Lanzamiento de bala El alcance de una bala que se lanza desde una altura h sobre el piso, con una velocidad inicial v_0 y en ángulo α con respecto a la horizontal, se puede aproximar con

$$R = \frac{v_0\cos\alpha}{g}\left[v_0\text{sen}\,\alpha + \sqrt{v_0^2\text{sen}^2\alpha + 2gh}\right],$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Si $v_0 = 13.7$ m/s, $\alpha = 40°$ y $g = 9.81$ m/s^2, calcule los alcances a los que llegan lanzamientos con alturas ***a***) $h = 2.0$ m y

***b*)** $h = 2.4$ m. ***c*)** Explique por qué al aumentar h se produce un incremento de R si los demás parámetros quedan fijos. ***d*)** ¿Qué efectos tiene esto? ¿La altura de un lanzador de bala es una ventaja?

57. **Aceleración de la gravedad** Debido a su rotación, la Tierra se ensancha en el ecuador y se aplana en los polos. El resultado es que la aceleración de la gravedad no es constante e igual a 980 cm/s^2, sino que varía con la latitud θ. Mediante estudios satelitales se ha demostrado que la aceleración de la gravedad g_{sat} se aproxima con la función

$$g_{\text{sat}} = 978.0309 + 5.18552\,\text{sen}^2\theta - 0.00570\,\text{sen}^2 2\theta.$$

***a*)** Calcule g_{sat} en el ecuador ($\theta = 0°$), ***b*)** en el Polo Norte y ***c*)** a una latitud de 45° norte.

Para discusión

58. Indique cómo es posible determinar, sin una calculadora, que el punto $P(6) = (\cos 6, \text{sen } 6)$, está en el cuarto cuadrante.

59. Indique cómo es posible determinar, sin una calculadora, que tanto sen 4 como cos 4 son negativos.

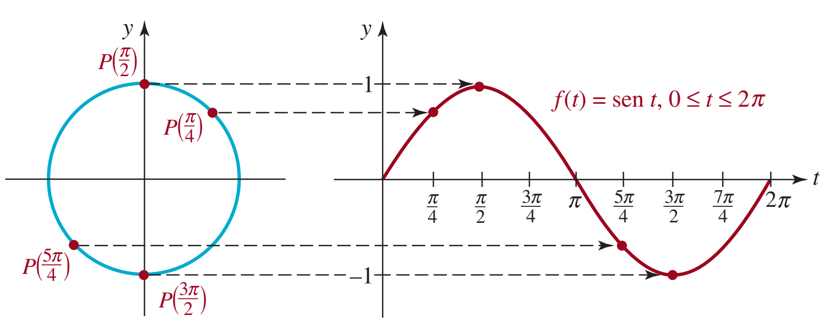
60. ¿Hay algún número real t que satisfaga $3 \text{ sen } t = 5$? Explique su respuesta.

61. ¿Hay un ángulo θ que satisfaga $\cos\theta = -2$? Explique su respuesta.

4.3 Gráficas de las funciones seno y coseno

Introducción Una forma de estimular la comprensión de las funciones trigonométricas es examinar sus gráficas. En esta sección examinaremos las gráficas de las funciones seno y coseno.

Gráficas del seno y del coseno En la sección 4.2 vimos que el dominio de la función seno, $f(t) = \text{sen } t$, es el conjunto de todos los números reales $(-\infty, \infty)$, y que su contradominio es el intervalo $[-1, 1]$. Como el periodo de la función seno es 2π, comenzaremos trazando su gráfica en el intervalo $[0, 2\pi]$. Se obtiene un bosquejo aproximado de la gráfica de la **FIGURA 4.3.1*b*)** si se examinan varias posiciones del punto $P(t)$ en el círculo unitario, como se ve en la figura 4.3.1*a*). Cuando t varía de 0 a $\pi/2$, el valor de sen t aumenta de 0 hasta su valor máximo 1. Pero cuando t varía de $\pi/2$ a $3\pi/2$, el valor de sen t disminuye desde 1 hasta su valor mínimo, -1. Se ve que sen t cambia de positivo a negativo cuando $t = \pi$. Cuando t está entre $3\pi/2$ y 2π, se ve que los valores correspondientes de sen t aumentan de -1 a 0. Se dice que la gráfica de *cualquier* función periódica, para un intervalo de longitud igual a su periodo,



a) Círculo unitario *b*) Un ciclo de la gráfica de seno

FIGURA 4.3.1 Puntos $P(t)$ en un círculo, correspondientes a puntos en la gráfica es un **ciclo** de su gráfica. En el caso de la función seno, la gráfica sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ de la figura 4.3.1*b*) es un ciclo de la gráfica de $f(t) = \text{sen}\ t$.

En adelante, recurriremos a los símbolos tradicionales x y y para graficar las funciones trigonométricas. Así, escribiremos $f(t) = \text{sen}\ t$ en la forma $f(x) = \text{sen}\ x$ o bien, simplemente $y = \text{sen}\ x$.

◀ Téngalo en cuenta.

La gráfica de una función periódica se obtiene con facilidad trazando repetidamente un ciclo de su gráfica. En otras palabras, la gráfica de $y = \text{sen}\ x$ en, por ejemplo, los intervalos $[-2\pi, 0]$ y $[2\pi, 4\pi]$, es la misma de la figura 4.3.1*b*). Recuerde, de la sección 4.2, que la función seno es una función impar, porque $f(-x) = \text{sen}(-x) = -\text{sen}\,x = -f(x)$. Así, como se puede ver en la **FIGURA 4.3.2**, la gráfica de $y = \text{sen}\ x$ es simétrica con respecto al origen.

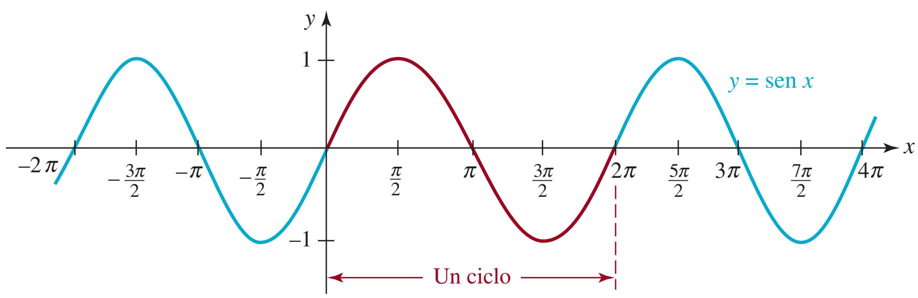


FIGURA 4.3.2 Gráfica de $y = \text{sen}\ x$

Al trabajar de nuevo con el círculo unitario se puede obtener un ciclo de la gráfica de la función coseno $g(x) = \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. En contraste con la gráfica de $f(x) = \text{sen}\ x$, donde $f(0) = f(2\pi) = 0$, en la función coseno se tiene $g(0) = g(2\pi) = 1$. La **FIGURA 4.3.3** muestra un ciclo (en rojo) de $y = \cos x$ en $[0, 2\pi]$, junto con la extensión de ese ciclo (en azul) a los intervalos adyacentes $[-2\pi, 0]$ y $[2\pi, 4\pi]$. En esta figura se ve que la gráfica de la función coseno es simétrica con respecto al eje y. Es una consecuencia de que g sea una función par: $g(-x) = \cos(-x) = \cos x = g(x)$.

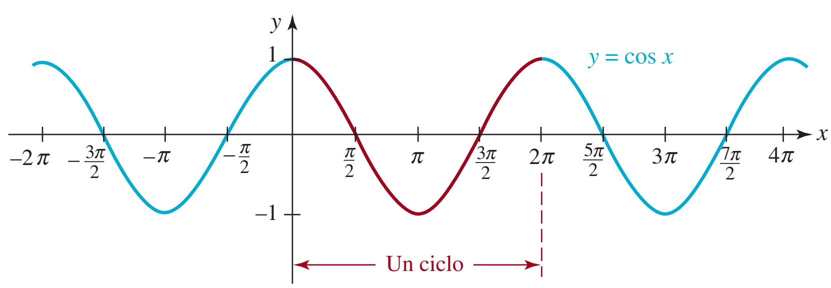


FIGURA 4.3.3 Gráfica de $y = \cos x$

☐ Intersecciones

En este curso de matemáticas, y en los que siguen, es importante que conozca usted las coordenadas x de las intersecciones de las gráficas de seno y coseno con el eje x; en otras palabras, las raíces de $f(x) = \text{sen}\ x$ y $g(x) = \cos x$. Según la gráfica del seno en la figura 4.3.2, se ve que las raíces de la función seno, o sea los números para los que $\text{sen}\ x = 0$, son $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ son múltiplos enteros de π. En la gráfica del coseno en la figura 4.3.3 se ve que $\cos x = 0$ cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \ldots$ Esos números son múltiplos enteros impares de $\pi/2$.

Si n representa un entero, entonces $2n + 1$ es un entero impar. Entonces, las raices de $f(x) = \text{sen}\ x$ y de $g(x) = \cos x$ se pueden expresar en forma compacta como sigue.

RAÍCES DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

$$\text{sen}\, x = 0 \quad \text{para} \quad x = n\pi,\, n \text{ un entero.} \tag{1}$$

$$\cos x = 0 \quad \text{para} \quad x = (2n + 1)\frac{\pi}{2},\, n \text{ un entero.} \tag{2}$$

Al aplicar la ley distributiva, el resultado en (2) con frecuencia se escribe $x = \pi/2 + n\pi$.

Como hicimos en los capítulos 2 y 3, se pueden obtener variaciones de las gráficas básicas de seno y coseno mediante transformaciones rígidas y no rígidas. En lo que queda de esta descripción examinaremos gráficas de funciones de la forma

$$y = A\,\text{sen}(Bx + C) + D \qquad \text{o bien} \qquad y = A\cos(Bx + C) + D, \tag{3}$$

donde A, B, C y D son constantes reales.

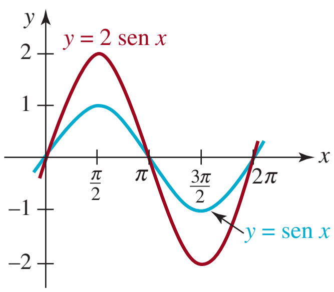


FIGURA 4.3.4 Estiramiento vertical de $y = \text{sen}\, x$

□ Gráficas de $y = A\,\text{sen}\, x + D$ y $y = A\cos x + D$

Comenzaremos examinando los casos especiales de (3):

$$y = A\,\text{sen}\, x \qquad \text{y} \qquad y = A\cos x.$$

Para $A > 0$, las gráficas de esas funciones son un estiramiento vertical o una compresión vertical de las gráficas de $y = \text{sen}\, x$ o de $y = \cos x$. En el caso de $A < 0$, las gráficas también se reflejan en el eje x. Por ejemplo, como muestra la FIGURA 4.3.4, se obtiene la gráfica de $y = 2\,\text{sen}\, x$ estirando verticalmente la gráfica de $y = \text{sen}\, x$ por un factor de 2. Nótese que los valores máximo y mínimo de $y = 2\,\text{sen}\, x$ están en los mismos valores de x que los valores máximos y mínimos de $y = \text{sen}\, x$. En general, la distancia máxima de cualquier punto en la gráfica de $y = A\,\text{sen}\, x$, o $y = A\cos x$, al eje x, es $|A|$. Al número $|A|$ se le llama **amplitud** de las funciones o de sus gráficas. La amplitud de las funciones básicas $y = \text{sen}\, x$ y $y = \cos x$ es $|A| = 1$. En general, si una función periódica f es continua, entonces, en un intervalo cerrado de longitud igual a su periodo, f tiene un valor máximo M y también un valor mínimo m. La amplitud se define por

$$\text{amplitud} = \tfrac{1}{2}[M - m]. \tag{4}$$

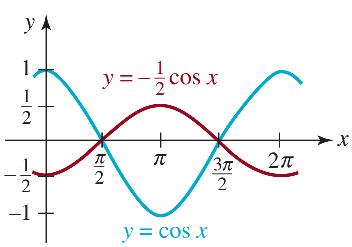


FIGURA 4.3.5 Gráfica de la función del ejemplo 1

EJEMPLO 1 Gráfica de coseno comprimida verticalmente

Graficar $y = -\frac{1}{2}\cos x$.

Solución La gráfica de $y = -\frac{1}{2}\cos x$ es la de $y = \cos x$ comprimida verticalmente por un factor de $\frac{1}{2}$, y reflejada después en el eje x. Si $A = -\frac{1}{2}$, se ve que la amplitud de la función es $|A| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. La gráfica de $y = -\frac{1}{2}\cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ se muestra en rojo en la FIGURA 4.3.5. ■

Las gráficas de

$$y = A\,\text{sen}\, x + D \qquad \text{y} \qquad y = A\cos x + D$$

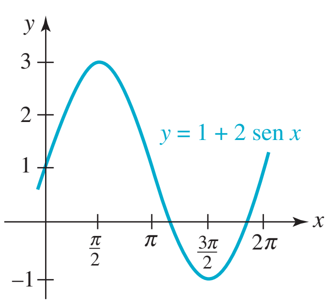


FIGURA 4.3.6 Gráfica de $y = 2$ sen x desplazada 1 unidad hacia arriba

son las gráficas de $y = A\,\text{sen}\, x$ y $y = A\cos x$ desplazadas verticalmente hacia arriba cuando $D > 0$, y hacia abajo cuando $D < 0$. Por ejemplo, la gráfica de $y = 1 + 2\,\text{sen}\, x$ es la gráfica de $y = 2\,\text{sen}\, x$ (figura 4.3.4) desplazada 1 unidad hacia arriba. La amplitud de la gráfica de $y = A\,\text{sen}\, x + D$, o de $y = A\cos x + D$ sigue siendo $|A|$. Nótese que en la gráfica de la FIGURA 4.3.6, el máximo de $y = 1 + 2\,\text{sen}\, x$ es $y = 3$, en $x = \pi/2$, y el mínimo es $y = -1$ en $x = 3\pi/2$. De acuerdo con (4), la amplitud de $y = 1 + 2\,\text{sen}\, x$ es, entonces, $\frac{1}{2}[3 - (-1)] = 2$.

Si se interpreta a x como comodín para apartar lugar, en las ecuaciones (1) y (2), se pueden determinar las coordenadas x de las intersecciones con el eje x de las gráficas de las funciones seno y coseno, de la forma $y = A$ sen Bx y $y = A \cos Bx$ (que veremos a continuación). Por ejemplo, para resolver sen $2x = 0$, de acuerdo con (1) sucede que

$$2x = n\pi \quad \text{de modo que} \quad x = \tfrac{1}{2}n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

esto es, $x = 0, \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{2}{2}\pi = \pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{4}{2}\pi = 2\pi$, y así sucesivamente. Vea la **FIGURA 4.3.7**.

Gráficas de $y = A$ sen Bx y de $y = A \cos Bx$ Ahora examinaremos la gráfica de $y =$ sen Bx para $B > 0$. La función tiene amplitud 1, porque $A = 1$. Como el periodo de $y =$ sen x es 2π, un ciclo de la gráfica de $y =$ sen Bx comienza en $x = 0$ y se comenzarán a repetir sus valores cuando $Bx = 2\pi$. En otras palabras, un ciclo de la función $y =$ sen Bx se completa en el intervalo definido por $0 \leq Bx \leq 2\pi$. Esta desigualdad se divide entre B, y se ve que el **periodo** de la función $y =$ sen Bx es $2\pi/B$, y que la gráfica en el intervalo $[0, 2\pi/B]$ es un **ciclo** de su gráfica. Por ejemplo, el periodo de $y =$ sen $2x$ es $2\pi/2 = \pi$, por lo que un ciclo de la gráfica se completa en el intervalo $[0, \pi]$. La figura 4.3.7 muestra que se completan dos ciclos de la gráfica de $y =$ sen $2x$ (en rojo y en azul) en el intervalo $[0, 2\pi]$, mientras que la gráfica de $y =$ sen x (en verde) ha completado sólo un ciclo. En términos de transformaciones, se puede caracterizar el ciclo de $y =$ sen $2x$ en $[0, \pi]$ como una **compresión horizontal** del ciclo de $y =$ sen x en $[0, 2\pi]$.

◀Tenga cuidado aquí; sen $2x \neq 2$ sen x.

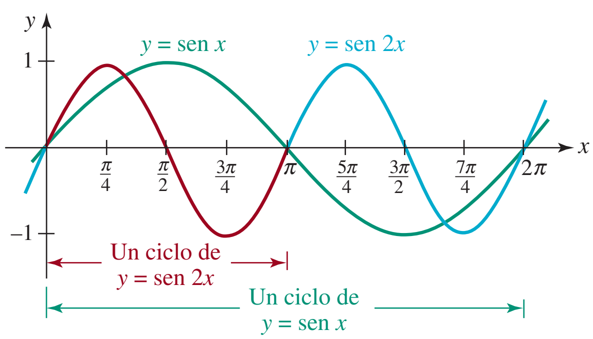


FIGURA 4.3.7 Comparación de las gráficas de $y =$ sen x y $y =$ sen $2x$

En resumen, las gráficas de

$$y = A \operatorname{sen} Bx \qquad \text{y} \qquad y = A \cos Bx$$

para $B > 0$ tienen amplitud $|A|$ y periodo $2\pi/B$, las dos.

EJEMPLO 2 Gráfica del coseno comprimida horizontalmente

Determinar el periodo de $y = \cos 4x$ y graficar la función.

Solución En razón de que $B = 4$, se ve que el periodo de $y = \cos 4x$ es $2\pi/4 = \pi/2$. Se llega a la conclusión que la gráfica de $y = \cos 4x$ es la de $y = \cos x$ comprimida horizontalmente. Para graficar la función se traza un ciclo del coseno con amplitud 1 en el intervalo $[0, \pi/2]$ y a continuación se usa la periodicidad para extender la gráfica. La **FIGURA 4.3.8** muestra cuatro ciclos completos de $y = \cos 4x$ (el ciclo básico en rojo, y la gráfica extendida en azul) y un ciclo de $y = \cos x$ (en verde) en $[0, 2\pi]$. Nótese que $y = \cos 4x$ llega a su mínimo en $x = \pi/4$, porque $\cos 4(\pi/4) = \cos \pi = -1$, y llega a su máximo en $x = \pi/2$, porque $\cos 4(\pi/2) = \cos 2\pi = 1$. ■

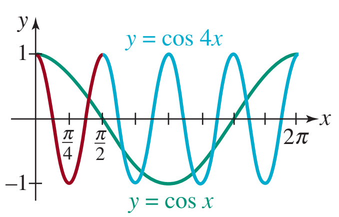


FIGURA 4.3.8 Gráfica de la función del ejemplo 2

Si $B < 0$ en $y = A$ sen Bx o $y = A \cos Bx$, se pueden usar las propiedades par/impar (vea (8) de la sección 4.2) para escribir la función con B positiva. Esto se ve en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Gráfica del seno estirada horizontalmente

Determinar la amplitud y el periodo de $y = \text{sen}\left(-\frac{1}{2}x\right)$. Graficar la función.

Solución Como se requiere que $B > 0$, usaremos $\text{sen}(-x) = -\text{sen}\,x$ para reformular la función como sigue:

$$y = \text{sen}\left(-\tfrac{1}{2}x\right) = -\text{sen}\tfrac{1}{2}x.$$

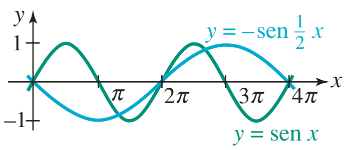


FIGURA 4.3.9 Gráfica de la función del ejemplo 3

Si se identifica $A = -1$, se ve que la amplitud es $|A| = |-1| = 1$. Ahora bien, con $B = \frac{1}{2}$, se ve que el periodo es $2\pi/\frac{1}{2} = 4\pi$. Por consiguiente se puede interpretar al ciclo de $y = -\text{sen}\frac{1}{2}x$ en $[0, 4\pi]$ como un estiramiento horizontal y una reflexión (en el eje x, porque $A < 0$) del ciclo de $y = \text{sen}\,x$ en $[0, 2\pi]$. La **FIGURA 4.3.9** muestra que en el intervalo $[0, 4\pi]$, la gráfica de $y = -\text{sen}\frac{1}{2}x$ (en azul) completa un ciclo, mientras que la gráfica de $y = \text{sen}\,x$ (en verde) hace dos ciclos. ■

□ Gráficas de $y = A\ \text{sen}(Bx + C)$ y $y = A\cos(Bx + C)$

Hemos visto que las gráficas básicas de $y = \text{sen}\,x$ y $y = \cos x$ se pueden estirar o comprimir verticalmente ($y = A\ \text{sen}\,x$ y $y = A\cos x$), se pueden desplazar verticalmente ($y = A\ \text{sen}\,x + D$ y $y = A\cos x + D$), y estirarse o comprimirse horizontalmente ($y = A\ \text{sen}\,Bx + D$ y $y = A\cos Bx + D$). Las gráficas de

$$y = A\ \text{sen}(Bx + C) + D \qquad \text{y} \qquad y = A\cos(Bx + C) + D$$

son las gráficas de $y = A\ \text{sen}\,Bx + D$ y $y = A\cos Bx + D$ desplazadas horizontalmente.

En el resto de esta descripción nos concentraremos en las gráficas de $y = A\ \text{sen}(Bx + C)$ y $y = A\cos(Bx + C)$. Por ejemplo, de acuerdo con la sección 2.2, la gráfica de $y = \cos(x - \pi/2)$ es la gráfica básica del coseno desplazada hacia la derecha. En la **FIGURA 4.3.10** la gráfica de $y = \cos(x - \pi/2)$ (en rojo) en el intervalo $[0, 2\pi]$ es un ciclo de $y = \cos x$ en el intervalo $[-\pi/2, 3\pi/2]$ (en azul), pero desplazada horizontalmente $\pi/2$ unidades hacia la derecha. De igual modo, las gráficas de $y = \text{sen}(x + \pi/2)$ y $y = \text{sen}(x - \pi/2)$ son las gráficas básicas del seno desplazadas $\pi/2$ unidades hacia la izquierda y hacia la derecha, respectivamente. Vea las **FIGURAS 4.3.11** y **4.3.12**.

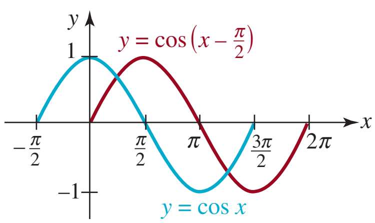


FIGURA 4.3.10 Gráfica del seno desplazada horizontalmente

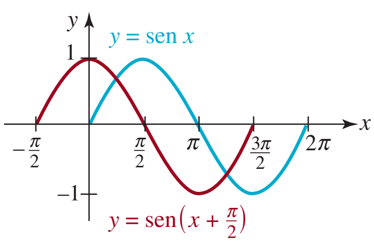


FIGURA 4.3.11 Gráfica del seno desplazada horizontalmente

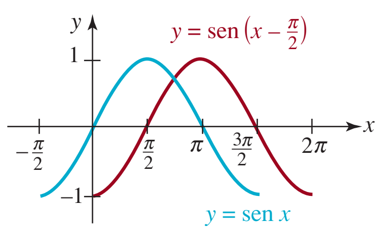


FIGURA 4.3.12 Senoide desplazada horizontalmente

Si se comparan las gráficas en rojo de las figuras 4.3.10 a 4.3.12 con las gráficas de las figuras 4.3.2 y 4.3.3, se ve que

- la gráfica del coseno desplazada $\pi/2$ unidades hacia la derecha es la gráfica del seno,
- la gráfica del seno desplazada $\pi/2$ unidades hacia la izquierda es la gráfica del coseno y
- la gráfica del seno desplazada $\pi/2$ unidades hacia la derecha es la gráfica del coseno reflejada en el eje x.

En otras palabras, hemos comprobado gráficamente las identidades

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\,x, \quad \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad \text{y} \quad \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x. \qquad (5)$$

Ahora examinaremos la gráfica de $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ para $B > 0$. Como los valores de $\operatorname{sen}(Bx + C)$ van de -1 a 1, entonces $A \operatorname{sen}(Bx + C)$ varía entre $-A$ y A. Esto es, la **amplitud** de $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ es $|A|$. También, como $Bx + C$ varía de 0 a 2π, la gráfica hace un ciclo completo. Al resolver $Bx + C = 0$ y $Bx + C = 2\pi$, se ve que un ciclo se completa cuando x varía de $-C/B$ hasta $(2\pi - C)/B$. Por consiguiente, la función $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ tiene como **periodo**

$$\frac{2\pi - C}{B} - \left(-\frac{C}{B}\right) = \frac{2\pi}{B}.$$

Además, si $f(x) = A \operatorname{sen} Bx$, entonces

$$f\left(x + \frac{C}{B}\right) = A \operatorname{sen} B\left(x + \frac{C}{B}\right) = A \operatorname{sen}(Bx + C). \tag{6}$$

El resultado de (6) indica que se puede obtener la gráfica de $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ desplazando la gráfica de $f(x) = A \operatorname{sen} Bx$ horizontalmente, una distancia $|C|/B$. Si $C < 0$, el desplazamiento es hacia la derecha, mientras que si $C > 0$, el desplazamiento es hacia la izquierda. El número $|C|/B$ se llama **desplazamiento de fase**, o desfasamiento, de la gráfica de $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$.

EJEMPLO 4 Ecuación de un coseno desplazado

La gráfica de $y = 10 \cos 4x$ está desplazada $\pi/12$ unidades hacia la derecha. Deducir su ecuación.

Solución Si se escribe $f(x) = 10 \cos 4x$ y se aplica la ecuación (6), se ve que

$$f\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 10 \cos 4\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \quad \text{o sea} \quad y = 10 \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right).$$

En la última ecuación se identificaría a $C = -\pi/3$. El desplazamiento de fase es $\pi/12$. ■

Como cosa práctica, el desplazamiento de fase de $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ se puede obtener sacando B como factor común de $Bx + C$.

◀ Téngalo en cuenta.

$$y = A \operatorname{sen}(Bx + C) = A \operatorname{sen} B\left(x + \frac{C}{B}\right).$$

Por comodidad, resumiremos la información anterior.

GRÁFICAS DE UN SENO O COSENO DESPLAZADOS

Las gráficas de

$$y = A \operatorname{sen}(Bx + C) \qquad \text{y} \qquad y = A \cos(Bx + C), \qquad B > 0,$$

son, respectivamente, las de $y = A \operatorname{sen} Bx$ y $y = A \cos Bx$, desplazadas horizontalmente $|C|/B$. El desplazamiento es hacia la derecha si $C < 0$, y hacia la izquierda si $C > 0$. El número $|C|/B$ se llama **desplazamiento de fase**. La **amplitud** de cada gráfica es $|A|$ y el **periodo** de cada gráfica es $2\pi/B$.

EJEMPLO 5 Gráfica del seno desplazada horizontalmente

Graficar $y = 3 \operatorname{sen}(2x - \pi/3)$.

Solución Para comparar, primero graficaremos $y = 3 \operatorname{sen} 2x$. La amplitud de $y = 3 \operatorname{sen} 2x$ es $|A| = 3$, y su periodo es $2\pi/2 = \pi$. Así, un ciclo de $y = 3 \operatorname{sen} 2x$ se completa en el intervalo $[0, \pi]$. Entonces, extendemos la gráfica hacia el intervalo adyacente $[\pi, 2\pi]$, como se indica

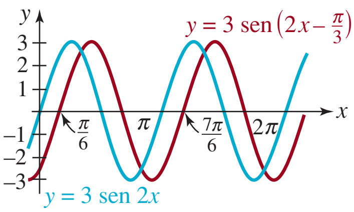


FIGURA 4.3.13 Gráfica de la función del ejemplo 5

en azul en la **FIGURA 4.3.13**. A continuación se vuelve a escribir $y = 3\ \text{sen}(2x - \pi/3)$ sacando 2 como factor común de $2x - \pi/3$:

$$y = 3\,\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 3\,\text{sen}\,2\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

En esta última forma se ve que el desplazamiento de fase es $\pi/6$. La gráfica de la función dada, que se ve en rojo en la figura 4.3.13, se obtiene desplazando $\pi/6$ unidades hacia la derecha la gráfica de $y = 3\ \text{sen}\ 2x$. Recuerde que eso quiere decir que si (x, y) es un punto en la gráfica en azul, entonces $(x + \pi/6, y)$ es el punto correspondiente en la gráfica roja. Por ejemplo, $x = 0$ y $x = \pi$ son dos coordenadas x de intersecciones con el eje x de la gráfica en azul. Por consiguiente, $x = 0 + \pi/6 = \pi/6$ y $x = \pi + \pi/6 = 7\pi/6$ son coordenadas x de intersecciones con el eje x de la gráfica en rojo, desplazada. Estos números se indican con flechas en la figura 4.3.13. ■

EJEMPLO 6 Gráficas desplazadas horizontalmente

Determinar la amplitud, el periodo, el desplazamiento de fase y la dirección del desplazamiento horizontal de cada una de las funciones siguientes.

a) $y = 15\cos\left(5x - \dfrac{3\pi}{2}\right)$ ***b***) $y = -8\,\text{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Solución

a) Primero se identifican $A = 15$, $B = 5$ y $C = -3\pi/2$. Entonces, la amplitud es $|A| = 15$, y el periodo es $2\pi/B = 2\pi/5$. El desplazamiento de fase se puede calcular ya sea por $(|-3\pi|/2)/5 = 3\pi/10$, o bien ordenando la función como sigue:

$$y = 15\cos 5\left(x - \frac{3\pi}{10}\right).$$

La última forma indica que la gráfica de $y = 15\cos(5x - 3\pi/2)$ es la gráfica de $y = 15\cos 5x$ desplazada $3\pi/10$ unidades hacia la derecha.

b) Como $A = -8$, la amplitud es $|A| = |-8| = 8$. Con $B = 2$, el periodo es $2\pi/2 = \pi$. El 2 se saca como factor común de $2x + \pi/4$, y queda

$$y = -8\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -8\,\text{sen}\,2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$$

y se ve que el desplazamiento de fase es $\pi/8$. La gráfica de $y = -8\ \text{sen}\ (2x + \pi/4)$ es la de $y = -8\ \text{sen}\ 2x$ desplazada $\pi/8$ unidades hacia la izquierda. ■

EJEMPLO 7 Gráfica del coseno desplazada horizontalmente

Graficar $y = 2\cos(\pi x + \pi)$.

Solución La amplitud de $y = 2\cos \pi x$ es $|A| = 2$, y el periodo es $2\pi/\pi = 2$. Entonces, un ciclo de $y = 2\cos\pi x$ se completa en el intervalo $[0, 2]$. En la **FIGURA 4.3.14** se muestran dos ciclos de la gráfica de $y = 2\cos\pi x$. Las intersecciones con el eje x de esta gráfica corresponden a los valores de x para los cuales $\cos\pi x = 0$. De acuerdo con (2), eso quiere decir que $\pi x = (2n + 1)\pi/2$, o sea $x = (2n + 1)/2$, n un entero. En otras palabras, para $n = 0, -1, 1, -2, 2, -3, \ldots$ se ve que $x = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}$, y así sucesivamente. Ahora, si se reacomoda la función dada como sigue:

$$y = 2\cos\pi(x + 1)$$

se ve que el desplazamiento de fase es 1. La gráfica de $y = 2\cos(\pi x + \pi)$ (en rojo) en la figura 4.3.14 se obtiene desplazando la gráfica de $y = 2\cos\pi x$ una unidad hacia la izquierda. Eso quiere decir que las intersecciones con el eje x son iguales para ambas gráficas. ■

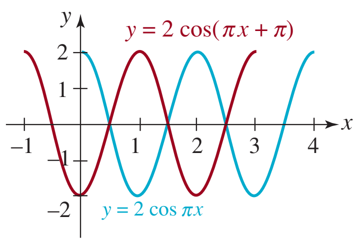


FIGURA 4.3.14 Gráfica de la función del ejemplo 7

EJEMPLO 8 Corriente alterna

La corriente I (en amperes) que pasa por un conductor de un circuito de corriente alterna se determina con $I(t) = 30$ sen $120\pi t$, donde t es el tiempo expresado en segundos. Trazar el ciclo de la gráfica. ¿Cuál es el valor máximo de la corriente?

Solución La gráfica tiene una amplitud de 30, y su periodo es $2\pi/120\pi = \frac{1}{60}$. Por consiguiente, se traza un ciclo de la gráfica del seno básica en el intervalo $\left[0, \frac{1}{60}\right]$, como se ve en la FIGURA 4.3.15. En la figura se ve que el valor máximo de la corriente es $I = 30$ amperes, y se presenta cuando $t = \frac{1}{240}$ de segundo, ya que

$$I\left(\tfrac{1}{240}\right) = 30\,\mathrm{sen}\left(120\pi \cdot \tfrac{1}{240}\right) = 30\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = 30.$$

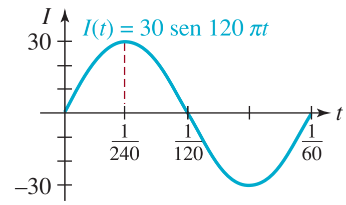


FIGURA 4.3.15 Gráfica de la corriente del ejemplo 8

4.3 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-12.

En los problemas 1 a 6 aplique las técnicas de desplazar, estirar, comprimir y reflejar, para trazar al menos un ciclo de la gráfica de la función.

1. $y = \frac{1}{2} + \cos x$

2. $y = -1 + \cos x$

3. $y = 2 - \mathrm{sen}\, x$

4. $y = 3 + 3\,\mathrm{sen}\, x$

5. $y = -2 + 4\cos x$

6. $y = 1 - 2\,\mathrm{sen}\, x$

En los problemas 7 a 10, la figura muestra un ciclo de una senoide o cosenoide. De acuerdo con la figura, determine A y D y deduzca una ecuación de la forma $y = A$ sen $x + D$, o $y = A$ cos $x + D$ de la gráfica.

7.

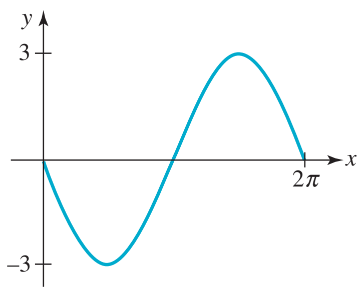


FIGURA 4.3.16 Gráfica del problema 7

8.

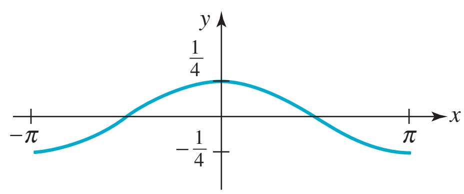


FIGURA 4.3.17 Gráfica del problema 8

9.

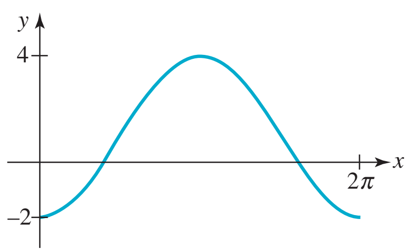


FIGURA 4.3.18 Gráfica del problema 9

10.

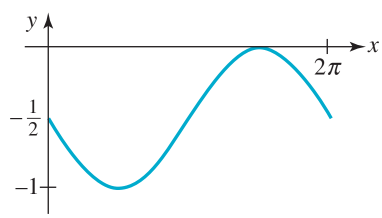


FIGURA 4.3.19 Gráfica del problema 10

En los problemas 11 a 16, use las relaciones (1) y (2) de la sección 4.3 para determinar las intersecciones con el eje x de la gráfica de la función indicada. No trace la gráfica.

11. $y = \mathrm{sen}\,\pi x$

12. $y = -\cos 2x$

13. $y = 10\cos\dfrac{x}{2}$

14. $y = 3\,\mathrm{sen}(-5x)$

15. $y = \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

16. $y = \cos(2x - \pi)$

En los problemas 17 y 18, determine las intersecciones con el eje x de la gráfica de la función, en el intervalo $[0, 2\pi]$. A continuación, aplicando la periodicidad, determine todas las intersecciones.

17. $y = -1 + \operatorname{sen} x$

18. $y = 1 - 2\cos x$

En los problemas 19 a 24, la figura muestra un ciclo de una gráfica del coseno o seno. De acuerdo con la figura, determine A y B, y deduzca una ecuación de la forma $y = A$ sen Bx o $y = A$ cos Bx de la gráfica.

19.

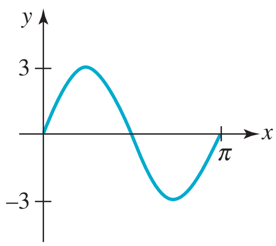


FIGURA 4.3.20 Gráfica del problema 19

20.

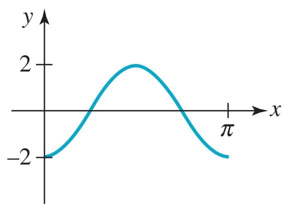


FIGURA 4.3.21 Gráfica del problema 20

21.

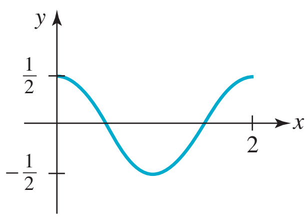


FIGURA 4.3.22 Gráfica del problema 21

22.

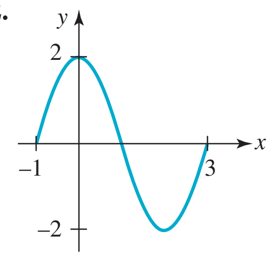


FIGURA 4.3.23 Gráfica del problema 22

23.

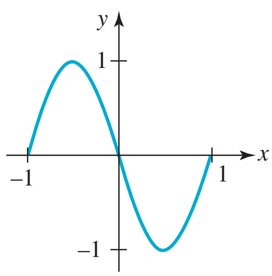


FIGURA 4.3.24 Gráfica del problema 23

24.

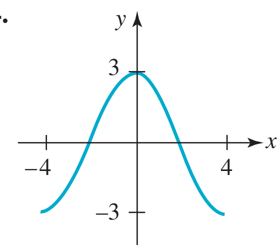


FIGURA 4.3.25 Gráfica del problema 24

En los problemas 25 a 32, determine la amplitud y el periodo de la función. Trace cuando menos un ciclo de la gráfica.

25. $y = 4\operatorname{sen}\pi x$

26. $y = -5\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$

27. $y = -3\cos 2\pi x$

28. $y = \dfrac{5}{2}\cos 4x$

29. $y = 2 - 4\,\text{sen}\,x$

30. $y = 2 - 2\,\text{sen}\,\pi x$

31. $y = 1 + \cos\dfrac{2x}{3}$

32. $y = -1 + \text{sen}\dfrac{\pi x}{2}$

En los problemas 33 a 42, determine amplitud, periodo y desplazamiento de fase de la función. Trace al menos un ciclo de la gráfica.

33. $y = \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

34. $y = \text{sen}\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

35. $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

36. $y = -2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

37. $y = 4\cos\left(2x - \dfrac{3\pi}{2}\right)$

38. $y = 3\,\text{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

39. $y = 3\,\text{sen}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$

40. $y = -\cos\left(\dfrac{x}{2} - \pi\right)$

41. $y = -4\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

42. $y = 2\cos\left(-2\pi x - \dfrac{4\pi}{3}\right)$

En los problemas 43 y 44, escriba la ecuación de la función cuya gráfica se describe en palabras.

43. La gráfica de $y = \cos x$ se estira verticalmente por un factor de 3, y a continuación se desplaza 5 unidades hacia abajo. Un ciclo de $y = \cos x$ en $[0, 2\pi]$ se comprime a $[0, \pi/3]$ y el ciclo comprimido se desplaza $\pi/4$ unidades horizontalmente hacia la izquierda.

44. Un ciclo de $y = \text{sen}\,x$ en $[0, 2\pi]$ se estira hasta $[0, 8\pi]$ y a continuación, el ciclo estirado se desplaza $\pi/12$ unidades horizontalmente hacia la derecha. La gráfica también se comprime verticalmente por un factor de $\frac{3}{4}$, y a continuación se refleja en el eje x.

En los problemas 45 a 48, determine las funciones seno y coseno, desplazadas horizontalmente, de manera que cada función satisfaga las condiciones dadas. Grafique las funciones.

45. Amplitud 3, periodo $2\pi/3$, desplazada $\pi/3$ unidades hacia la derecha.
46. Amplitud $\frac{2}{3}$, periodo π, desplazada $\pi/4$ unidades hacia la izquierda.
47. Amplitud 0.7, periodo 0.5, desplazada 4 unidades hacia la derecha.
48. Amplitud $\frac{5}{4}$, periodo 4, desplazada $1/2\pi$ unidades hacia la izquierda.

En los problemas 49 y 50, verifique gráficamente la identidad.

49. $\cos(x + \pi) = -\cos x$

50. $\text{sen}(x + \pi) = -\text{sen}\,x$

Aplicaciones diversas

51. Péndulo El desplazamiento angular θ de un péndulo, respecto a la vertical en el momento t segundos, se determina con $\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t$, donde θ_0 es el desplazamiento inicial cuando $t = 0$ segundos. Vea la FIGURA 4.3.26. Para $\omega = 2$ rad/s y $\theta_0 = \pi/10$, trace dos ciclos de la función resultante.

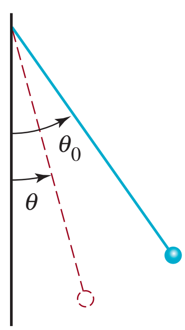


FIGURA 4.3.26 Péndulo del problema 51

52. Corriente En cierto circuito eléctrico, la corriente I, en amperes, cuando el tiempo es t, en segundos es

$$I(t) = 10\cos\left(120\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Trace dos ciclos de la gráfica de I en función del tiempo t.

53. Profundidad del agua La profundidad d del agua, a la entrada de un puerto pequeño cuando el tiempo es t, se modela con una función de la forma

$$d(t) = A \operatorname{sen} B\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + C,$$

donde A es la mitad de la diferencia entre las profundidades cuando las mareas son altas y bajas; $2\pi/B$, $B > 0$, es el periodo de la marea y C es la profundidad promedio. Suponga que el periodo de la marea es de 12 horas, que la profundidad en la pleamar (marea alta) es de 18 pies, y que en la bajamar es de 6 pies. Trace dos ciclos de la gráfica de d.

54. Temperatura Fahrenheit Suponga que

$$T(t) = 50 + 10 \operatorname{sen} \frac{\pi}{12}(t - 8),$$

$0 \leq t \leq 24$ es un modelo matemático de la temperatura Fahrenheit a las t horas después de medianoche, en cierto día de la semana.

a) ¿Cuál es la temperatura a las 8 a.m.?
b) ¿A cuál o cuáles horas $T(t) = 60$?
c) Trace la gráfica de T.
d) Calcule las temperaturas máxima y mínima, y los tiempos en que se presentan.

Problemas para calculadora

En los problemas 55 a 58, use una calculadora para investigar si la función es periódica.

55. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

56. $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 2x}$

57. $f(x) = 1 + (\cos x)^2$

58. $f(x) = x \operatorname{sen} x$

Para discusión

En los problemas 59 y 60, busque el periodo de la función dada.

59. $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{2}x \operatorname{sen} 2x$

60. $f(x) = \operatorname{sen}\frac{3}{2}x + \cos\frac{5}{2}x$

En los problemas 61 y 62, explique y luego dibuje la gráfica de la función dada.

61. $f(x) = |\operatorname{sen} x|$

62. $f(x) = |\cos x|$

4.4 Otras funciones trigonométricas

Introducción Se definen cuatro funciones trigonométricas más, en términos de recíprocos y cocientes de las funciones seno y coseno. En esta sección examinaremos las propiedades y las gráficas de estas nuevas funciones.

Comenzaremos con unas definiciones.

FUNCIONES TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE Y COSECANTE

Las funciones **tangente**, **cotangente**, **secante** y **cosecante** se representan por tan x, cot x, sec x y csc x, respectivamente, y se definen como sigue:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \tag{1}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}. \tag{2}$$

Observe que las funciones tangente y cotangente se relacionan como sigue:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{1}{\tan x}.$$

De acuerdo con las definiciones en (2) y con el resultado anterior, cot x, sec x y csc x se llaman **funciones recíprocas**.

□ Dominio y contradominio

Debido a que las funciones en (1) y (2) son cocientes, el **dominio** de cada función consiste en el conjunto de los números reales, excepto aquellos números para los cuales el denominador es cero. Hemos visto en (2), de la sección 4.3, que cos $x = 0$ cuando $x = (2n + 1)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, y así

- el dominio de tan x y de sec x es $\{x \mid x \neq (2n + 1)\pi/2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

De igual manera, de acuerdo con (1) de la sección 4.3, sen $x = 0$ para $x = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, por lo que

- el dominio de cot x y de csc x es $\{x \mid x \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

Ya sabemos que los valores de las funciones seno y coseno están acotados, esto es, que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ y $|\cos x| \leq 1$. De acuerdo con estas desigualdades,

$$|\sec x| = \left|\frac{1}{\cos x}\right| = \frac{1}{|\cos x|} \geq 1 \tag{3}$$

y

$$|\csc x| = \left|\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right| = \frac{1}{|\operatorname{sen} x|} \geq 1. \tag{4}$$

Recuerde que una desigualdad como (3) quiere decir que sec $x \geq 1$, o sec $x \leq -1$. Por consiguiente, el contradominio de la función secante es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. La desigualdad en (4) implica que la función cosecante tiene el mismo contradominio $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Cuando se consideran las gráficas de las funciones tangente y cotangente se ve que tienen el mismo contradominio: $(-\infty, \infty)$.

Si se interpreta a x como un ángulo, la **FIGURA 4.4.1** ilustra los signos algebraicos de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante en cada uno de los cuatro cuadrantes. Se verifican con facilidad usando los signos de las funciones seno y coseno que aparecen en la figura 4.2.2.

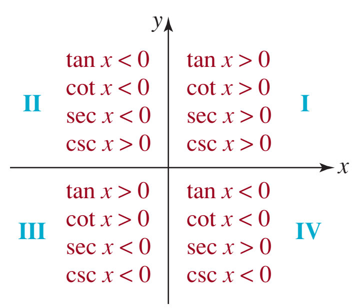


FIGURA 4.4.1 Signos de las funciones tan x, cot x, sec x y csc x en los cuatro cuadrantes

EJEMPLO 1 Regreso al ejemplo 5 de la sección 4.2

Determinar tan x, cot x, sec x y csc x para $x = -\pi/6$.

Solución En el ejemplo 5 de la sección 4.2 se vio que

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por consiguiente, de acuerdo con las definiciones en (1) y (2):

$$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3},$$

← También se podría haber usado $\cot x = 1/\tan x$

$$\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \csc\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{-1/2} = -2.$$

■

TABLA 4.2

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\cot x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec x$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	–
$\csc x$	–	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

La tabla 4.2, que resume algunos valores importantes de la tangente, cotangente, secante y cosecante, se formó usando los valores de seno y coseno de la sección 4.2. Un guión en la tabla indica que la función trigonométrica no está definida en ese valor de x en particular.

□ **Identidades pitagóricas** La tangente se relaciona con la secante mediante una útil identidad. Si se divide la identidad pitagórica

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{5}$$

entre $\cos^2 x$, se ve que

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{6}$$

De igual modo, si se divide (5) entre $\operatorname{sen}^2 x$ se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}. \tag{7}$$

Al aplicar las leyes de los exponentes se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2 = \tan^2 x, \qquad \frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 = \sec^2 x,$$

$$\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 = \cot^2 x, \qquad \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)^2 = \csc^2 x,$$

las ecuaciones (6) y (7) se pueden escribir en una forma más sencilla. Estos resultados se resumen a continuación, y se conocen también como **identidades pitagóricas**.

IDENTIDADES PITAGÓRICAS (CONTINUACIÓN)

Para todo número real x para el que estén definidas las funciones,

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x, \tag{8}$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x. \tag{9}$$

EJEMPLO 2 Uso de una identidad pitagórica

Si $\csc x = -5$ y $3\pi/2 < x < 2\pi$, determinar los valores de $\tan x$ y $\cot x$.

Solución Primero determinaremos $\cot x$. De acuerdo con (9)

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1.$$

Para $3\pi/2 < x < 2\pi$, se ve en la figura 4.4.1 que $\cot x$ debe ser negativa, por lo que se toma la raíz cuadrada negativa:

$$\cot x = -\sqrt{\csc^2 x - 1} = -\sqrt{(-5)^2 - 1} = -\sqrt{24} = -2\sqrt{6}.$$

Usando $\cot x = 1/\tan x$,

$$\tan x = \frac{1}{\cot x} = \underset{\text{racionalización del denominador}}{\frac{1}{-2\sqrt{6}}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}.$$

■

En el ejemplo 2 se dio la información $\csc x = -5$ y $3\pi/2 < x < 2\pi$, y con facilidad se pudieron determinar los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes. Una forma de proceder sería usar $\csc x = 1/\operatorname{sen} x$ para determinar $\operatorname{sen} x = 1/\csc x = -\frac{1}{5}$. A continuación se usaría $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ para determinar $\cos x$. Después se pueden obtener las tres funciones trigonométricas restantes con (1) y (2).

□ **Periodicidad** Como las funciones seno y coseno son periódicas cada 2π, cada una de las funciones en (1) y en (2) tienen un periodo de 2π. Pero, de acuerdo con (10) de la sección 4.2,

$$\tan(x + \pi) = \frac{\operatorname{sen}(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \tan x. \tag{10}$$

◀ Vea también los problemas 49 y 50 en los ejercicios 4.3.

Entonces, la expresión (10) implica que $\tan x$ y $\cot x$ son periódicas, con un periodo $p \leq \pi$. En el caso de la función tangente, $\tan x = 0$ sólo si $\operatorname{sen} x = 0$; esto es, sólo si $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$ y así sucesivamente. Por consiguiente, el número p positivo menor para el cual $\tan(x + p) = \tan x$ es $p = \pi$. La función cotangente tiene el mismo periodo, porque es recíproca de la función tangente.

PERIODO DE LA TANGENTE Y LA COTANGENTE

Las funciones tangente y cotangente son periódicas, con **periodo** π. Por consiguiente,

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \text{y} \qquad \cot(x + \pi) = \cot x \tag{11}$$

para todo número real x para el cual estén definidas las funciones.

PERIODO DE LA SECANTE Y LA COSECANTE

Las funciones secante y cosecante son periódicas, con **periodo** 2π. Por consiguiente,

$$\sec(x + 2\pi) = \sec x \qquad \text{y} \qquad \csc(x + 2\pi) = \csc x \tag{12}$$

para todo número real x para el cual estén definidas las funciones.

□ **Gráficas** Los números que hacen que los denominadores de $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$ sean iguales a cero corresponden a asíntotas verticales en sus gráficas. Por ejemplo, recomendamos al lector que con una calculadora verifique que

◀ Es un buen momento para repasar el recuadro (7) de la sección 3.5.

$$\tan x \to -\infty \text{ como } x \to -\frac{\pi^+}{2} \qquad \text{y} \qquad \tan x \to \infty \text{ como } x \to \frac{\pi^-}{2}.$$

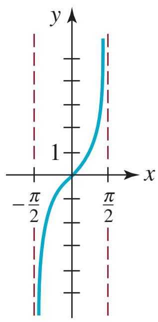


FIGURA 4.4.2 Un ciclo de la gráfica de $y = \tan x$

En otras palabras, $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$ son asíntotas verticales. La gráfica de $y = \tan x$ en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, que muestra la FIGURA 4.4.2 es un **ciclo** de la gráfica de $y = \tan x$. Aplicando la periodicidad se puede extender el ciclo de la figura 4.4.2 a intervalos adyacentes de longitud π, que se ven en la FIGURA 4.4.3. Las intersecciones con el eje x en la gráfica de la función tangente están en $(0, 0)$, $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, . . . , y las asíntotas verticales de la gráfica son $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \ldots$

La gráfica de $y = \cot x$ se parece a la gráfica de la función tangente, y se ve en la FIGURA 4.4.4. En este caso, la gráfica de $y = \cot x$ en el intervalo $(0, \pi)$ es un **ciclo** de la gráfica de $y = \cot x$. Las intersecciones con el eje x de la función cotangente están en $(\pm\pi/2, 0)$, $(\pm 3\pi/2, 0)$, $(\pm 5\pi/2, 0)$ . . . y las asíntotas verticales de la gráfica son $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$.

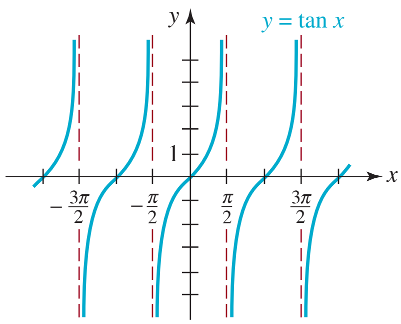


FIGURA 4.4.3 Gráfica de $y = \tan x$

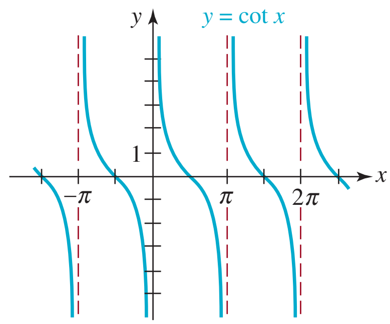


FIGURA 4.4.4 Gráfica de $y = \cot x$

Note que las gráficas de $y = \tan x$ y $y = \cot x$ son simétricas con respecto al origen, porque $\tan(-x) = -\tan x$, y $\cot(-x) = -\cot x$.

Ya se sabe que para $y = \sec x$ y $y = \csc x$, $|y| \geq 1$, por lo que no puede haber alguna parte de sus gráficas en la faja horizontal $-1 < y < 1$ en el plano cartesiano. Por consiguiente, las gráficas de $y = \sec x$ y $y = \csc x$ no tienen intersecciones con el eje x. Tanto $y = \sec x$ como $y = \csc x$ tienen el periodo 2π. Las asíntotas verticales de la gráfica de $y = \sec x$ son las mismas que las de $y = \tan x$, es decir, $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \ldots$ Como $y = \cos x$ es una función par, también lo es $y = \sec x = 1/\cos x$. La gráfica de $y = \sec x$ es simétrica con respecto al eje y. Por otra pare, las asíntotas verticales de la gráfica de $y = \csc x$ son iguales a las de $y = \cot x$, es decir, $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ Como $y = \operatorname{sen} x$ es una función impar, también lo es $y = \csc x = 1/\operatorname{sen} x$. La gráfica de $y = \csc x$ es simétrica con respecto al origen. Un ciclo de la gráfica de $y = \sec x$ en $[0, 2\pi]$ se extiende al intervalo $[-2\pi, 0]$ por la periodicidad (o la simetría con respecto al eje y) en la FIGURA 4.4.5. De igual modo, en la FIGURA 4.4.6 se extendió un ciclo de $y = \csc x$ en $(0, 2\pi)$ al intervalo $(-2\pi, 0)$, por periodicidad (o por simetría con respecto al origen).

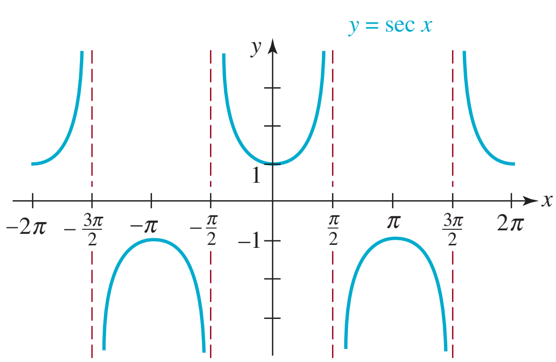


FIGURA 4.4.5 Gráfica de $y = \sec x$

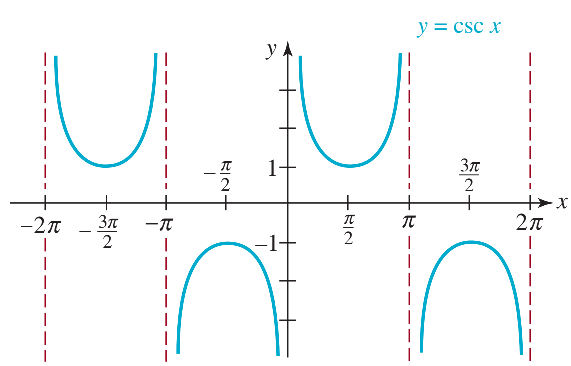


FIGURA 4.4.6 Gráfica de $y = \csc x$

Transformaciones y gráficas

En forma parecida a las gráficas de seno y coseno, se pueden aplicar transformaciones rígidas y no rígidas a las gráficas de $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$ y $y = \csc x$. Por ejemplo, una función como $y = A\tan(Bx + C) + D$ se puede analizar como sigue:

$$y = \overset{\substack{\text{estiramiento/compresión/reflexión vertical}\\ \downarrow}}{A}\tan(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{estiramiento/compresión horizontal al cambiar el periodo}}}{B}x + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{desplazamiento horizontal}}}{C}) + \overset{\substack{\text{desplazamiento vertical}\\ \downarrow}}{D} \tag{13}$$

Si $B > 0$, entonces el periodo de

$$y = A\tan(Bx + C) \qquad \text{y} \qquad y = A\cot(Bx + C) \text{ es } \pi/B, \tag{14}$$

mientras que el periodo de

$$y = A\sec(Bx + C) \qquad \text{y} \qquad y = A\csc(Bx + C) \text{ es } 2\pi/B. \tag{15}$$

Como se vio en (13), el número A en cada caso se puede interpretar como un estiramiento o una compresión vertical de la gráfica. Sin embargo, debe uno tener en cuenta que las funciones en (14) y (15) no tienen amplitud, porque ninguna de ellas tiene un valor máximo *ni* uno mínimo.

◀ De las seis funciones trigonométricas, sólo las funciones seno y coseno tienen amplitud.

EJEMPLO 3 Comparación de gráficas

Determinar el periodo, las intersecciones con el eje x y las asíntotas verticales de la gráfica de $y = \tan 2x$. Graficar la función en $[0, \pi]$.

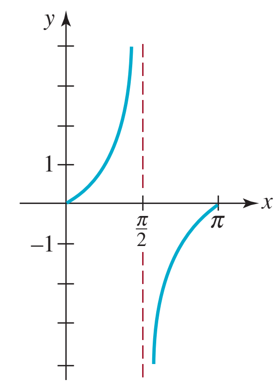
Solución Si hacemos que $B = 2$, se ve de (14) que el periodo es $\pi/2$. Como $\tan 2x = \text{sen}\, 2x/\cos 2x$, las intersecciones con el eje x de la gráfica están en las raíces de sen $2x$. De acuerdo con (1), de la sección 4.3, sen $2x = 0$ para

$$2x = n\pi \quad \text{de modo que} \quad x = \tfrac{1}{2}n\pi, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

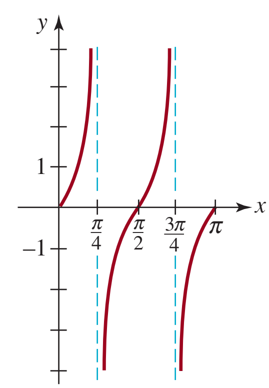
Esto es, $x = 0, \pm\pi/2, \pm2\pi/2 = \pi, \pm3\pi/2, \pm4\pi/2 = 2\pi$, y así sucesivamente. Las intersecciones con el eje x están en $(0, 0), (\pm\pi/2, 0), (\pm\pi, 0), (\pm3\pi/2, 0), \ldots$ Las asíntotas verticales de la gráfica están en las raíces de $\cos 2x$. De acuerdo con (2) de la sección 4.3, los números para los que $\cos 2x = 0$ se determinan como sigue:

$$2x = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \quad \text{de modo que} \quad x = (2n + 1)\frac{\pi}{4}, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Esto es, las asíntotas verticales son $x = \pm\pi/4, \pm3\pi/4, \pm5\pi/4, \ldots$ En el intervalo $[0, \pi]$, la gráfica de $y = \tan 2x$ tiene tres cruces con el eje y en $(0, 0)$, $(\pi/2, 0)$ y $(\pi, 0)$, y dos asíntotas verticales, $x = \pi/4$ y $x = 3\pi/4$. En la **FIGURA 4.4.7** hemos comparado las gráficas de $y = \tan x$ y $y = \tan 2x$ en el mismo intervalo. La gráfica de $y = \tan 2x$ es una compresión horizontal de la gráfica de $y = \tan x$. ■



a) $y = \tan x$ en $[0, \pi]$



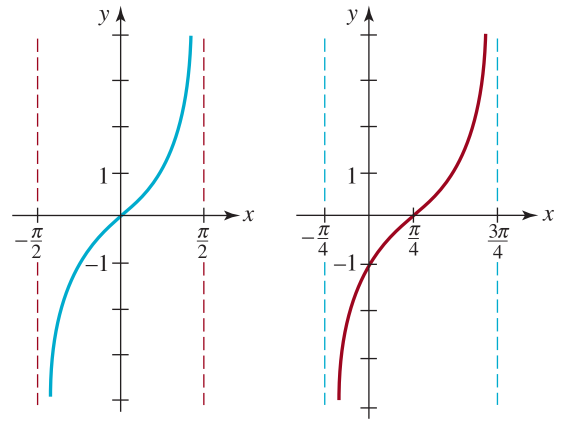
b) $y = \tan 2x$ en $[0, \pi]$

FIGURA 4.4.7 Gráfica de las funciones del ejemplo 3

EJEMPLO 4 Comparación de gráficas

Comparar un ciclo de las gráficas de $y = \tan x$ y $y = \tan(x - \pi/4)$.

Solución La gráfica de $y = \tan(x - \pi/4)$ es la de $y = \tan x$ desplazada horizontalmente $\pi/4$ unidades hacia la derecha. La intersección, $(0, 0)$, de la gráfica de $y = \tan x$, se desplazan a $(\pi/4, 0)$ en la gráfica de $y = \tan(x - \pi/4)$. Las asíntotas verticales $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$ para la gráfica de $y = \tan x$ están desplazadas a $x = -\pi/4$ y $x = 3\pi/4$ de la gráfica de $y = \tan(x - \pi/4)$. En las **FIGURAS 4.4.8*a*)** y 4.4.8*b*) se ve, respectivamente, que un ciclo de la gráfica de $y = \tan x$ en



a) Ciclo de $y = \tan x$ en $(-\pi/2, \pi/2)$

b) Ciclo de $y = \tan (x - \pi/4)$ en $(-\pi/4, 3\pi/4)$

FIGURA 4.4.8 Gráfica de las funciones en el ejemplo 4

el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ está desplazado hacia la derecha formando un ciclo de la gráfica de $y = \tan(x - \pi/4)$ en el intervalo $(-\pi/4, 3\pi/4)$. ■

Como hicimos en el análisis de las gráficas de $y = A$ sen $(Bx + C)$ y $y = A \cos (Bx + C)$, se puede determinar la cantidad de desplazamiento horizontal de gráficas de funciones como $y = A \tan(Bx + C)$ y $y = A \sec(Bx + C)$, sacando el número $B > 0$ como factor común de $Bx + C$.

EJEMPLO 5 Dos desplazamientos y dos compresiones

Graficar $y = 2 - \frac{1}{2}\sec(3x - \pi/2)$.

Solución Descompondremos el análisis de la gráfica en cuatro partes, que serán por transformaciones.

i) Un ciclo de la gráfica de $y = \sec x$ sucede en $[0, 2\pi]$. Como el periodo de $y = \sec 3x$ es $2\pi/3$, un ciclo de su gráfica ocupa el intervalo $[0, 2\pi/3]$.

En otras palabras, la gráfica de $y = \sec 3x$ es una compresión horizontal de la gráfica de $y = \sec x$. Como $\sec 3x = 1/\cos 3x$, las asíntotas verticales están en las raíces de $\cos 3x$. De acuerdo con (2) de la sección 4.3, se ve que

$$3x = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \qquad \text{o sea que} \qquad x = (2n + 1)\frac{\pi}{6}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

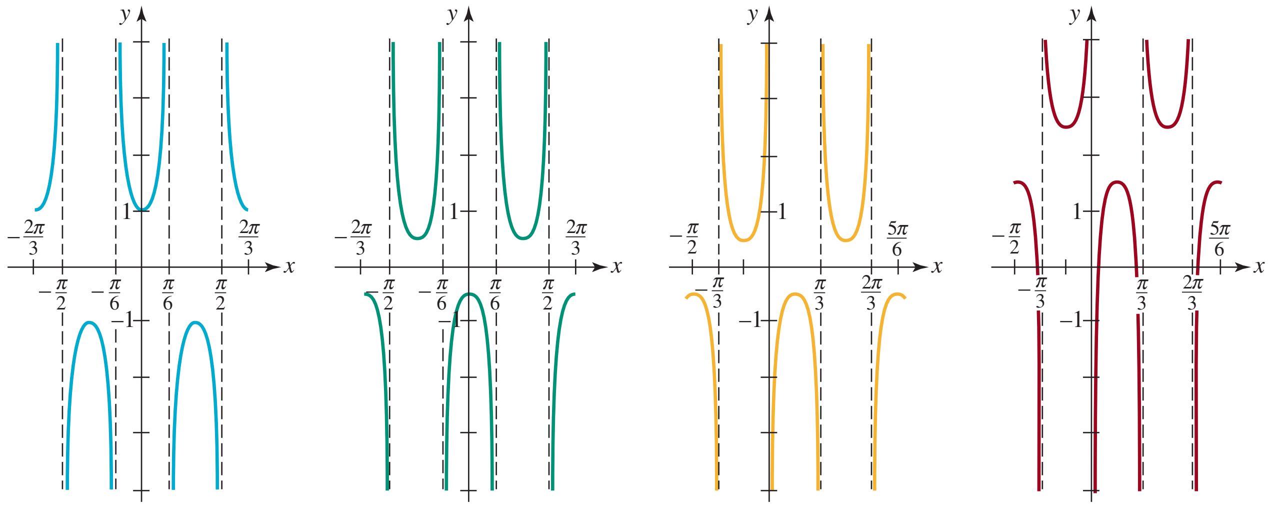
La **FIGURA 4.4.9*a*)** muestra dos ciclos de la gráfica de $y = \sec 3x$; un ciclo en $[-2\pi/3, 0]$ y otro en $[0, 2\pi/3]$. Dentro de esos intervalos, las asíntotas verticales son $x = -\pi/2$, $x = -\pi/6$, $x = \pi/6$ y $x = \pi/2$.

ii) La gráfica de $y = -\frac{1}{2}\sec 3x$ es la de $y = \sec 3x$ comprimida verticalmente por un factor de $\frac{1}{2}$, y después reflejada en el eje x. Vea la figura 4.4.9*b*).

iii) Se saca a 3 como factor común de $3x - \pi/2$, y se ve en

$$y = -\tfrac{1}{2}\sec\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}\sec 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

que la gráfica de $y = -\frac{1}{2}\sec(3x - \pi/2)$ es la de $y = -\frac{1}{2}\sec 3x$, desplazada $\pi/6$ unidades hacia la derecha. Si se desplazan los dos intervalos, $[-2\pi/3, 0]$ y $[0, 2\pi/3]$,



a) Compresión horizontal

b) Compresión vertical y reflexión en el eje *x*

c) Traslación horizontal

d) Traslación vertical

FIGURA 4.4.9 Gráfica de la función del ejemplo 5

en la figura 4.4.9*b*), $\pi/6$ unidades hacia la derecha, se ve en la figura 4.4.9*c*) que hay dos ciclos de $y = -\frac{1}{2}\sec(3x - \pi/2)$ en los intervalos $[-\pi/2, \pi/6]$ y $[\pi/6, 5\pi/6]$. Las asíntotas verticales $x = -\pi/2, x = -\pi/6, x = \pi/6$ y $x = \pi/2$ que se ven en la figura 4.4.9*b*) están desplazadas a $x = -\pi/3, x = 0, x = \pi/3$ y $x = 2\pi/3$. Observe que la intersección con el eje *y* en $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ de la figura 4.4.9*b*) ahora se mueve a $\left(\pi/6, -\frac{1}{2}\right)$ en la figura 4.4.9*c*).

iv) Por último se obtiene la gráfica $y = 2 - \frac{1}{2}\sec(3x - \pi/2)$ de la figura 4.4.9*d*) desplazando la gráfica de $y = -\frac{1}{2}\sec(3x - \pi/2)$ en la figura 4.4.9*c*), dos unidades hacia arriba. ■

4.4 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-13.

En los problemas 1 y 2 llene la tabla respectiva.

1.

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\tan x$												
$\cot x$												

2.

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sec x$												
$\csc x$												

En los problemas 3 a 18 determine el valor indicado sin usar una calculadora.

3. $\cot\dfrac{13\pi}{6}$ **4.** $\csc\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)$ **5.** $\tan\dfrac{9\pi}{2}$ **6.** $\sec 7\pi$

7. $\csc\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ **8.** $\cot\left(-\dfrac{13\pi}{3}\right)$ **9.** $\tan\dfrac{23\pi}{4}$ **10.** $\tan\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$

11. $\sec \dfrac{10\pi}{3}$ **12.** $\cot \dfrac{17\pi}{6}$ **13.** $\csc 5\pi$ **14.** $\sec \dfrac{29\pi}{4}$

15. $\sec(-120°)$ **16.** $\tan 405°$ **17.** $\csc 495°$ **18.** $\cot(-720°)$

En los problemas 19 a 26 use la información para determinar los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes.

19. $\tan x = -2, \pi/2 < x < \pi$

20. $\cot x = \frac{1}{2}, \pi < x < 3\pi/2$

21. $\csc x = \frac{4}{3}, 0 < x < \pi/2$

22. $\sec x = -5, \pi/2 < x < \pi$

23. $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}, \pi/2 < x < \pi$

24. $\cos x = -1/\sqrt{5}, \pi < x < 3\pi/2$

25. $\cos x = \frac{12}{13}, 3\pi/2 < x < 2\pi$

26. $\operatorname{sen} x = \frac{4}{5},\ 0 < x < \pi/2$

27. Si 3 cos x = sen x, determine todos los valores de tan x, cot x, sec x y csc x.
28. Si csc x = sec x, determine todos los valores de tan x, cot x, sen x y cos x.

En los problemas 29 a 36 determine el periodo, las intersecciones con el eje x y las asíntotas verticales de la función. Trace al menos un ciclo de la gráfica.

29. $y = \tan \pi x$

30. $y = \tan \dfrac{x}{2}$

31. $y = \cot 2x$

32. $y = -\cot \dfrac{\pi x}{3}$

33. $y = \tan\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

34. $y = \dfrac{1}{4}\cot\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

35. $y = -1 + \cot \pi x$

36. $y = \tan\left(x + \dfrac{5\pi}{6}\right)$

En los problemas 37 a 44 determine el periodo y las asíntotas verticales de la función. Trace al menos un ciclo de la gráfica.

37. $y = -\sec x$

38. $y = 2\sec \dfrac{\pi x}{2}$

39. $y = 3\csc \pi x$

40. $y = -2\csc \dfrac{x}{3}$

41. $y = \sec\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

42. $y = \csc(4x + \pi)$

43. $y = 3 + \csc\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

44. $y = -1 + \sec(x - 2\pi)$

En los problemas 45 y 46, use las gráficas de $y = \tan x$ y $y = \sec x$ para determinar los números A y C para los cuales la igualdad indicada es cierta.

45. $\cot x = A\tan(x + C)$

46. $\csc x = A\sec(x + C)$

Problemas para calculadora

47. Ponga la calculadora en modo radián y compare los valores de tan 1.57 y tan 1.58. Explique la diferencia entre esos valores.
48. Use una calculadora en modo radián y compare los valores de cot 3.14 y cot 3.15.

Para discusión

49. ¿Puede ser 9 csc x = 1 para algún número real x?
50. ¿Puede ser 7 + 10 sec x = 0 para algún número real x?

51. ¿Para cuáles números reales x se cumple ***a***) $\text{sen}\, x \leq \csc x$? ***b***) $\text{sen}\, x < \csc x$?
52. ¿Para cuáles números reales x se cumple ***a***) $\sec x \leq \cos x$? ***b***) $\sec x < \cos x$?
53. Describa, y después trace, las gráficas de $y = |\sec x|$ y $y = |\csc x|$.

4.5 Identidades especiales

Introducción En esta sección examinaremos identidades trigonométricas. Una **identidad trigonométrica** es una ecuación o fórmula donde intervienen funciones trigonométricas, que es válida para todos los ángulos o números reales para los cuales están definidos ambos lados de la igualdad. Hay *numerosas* identidades trigonométricas, pero sólo se demostrarán las que tienen una importancia especial en los cursos de matemáticas y de ciencias.

Las fórmulas que se deducen en la descripción que sigue se aplican a un número real x y también a un ángulo x expresado en grados o en radianes.

Identidades pitagóricas En la sección 4.2 vimos que el seno y coseno están relacionados por la identidad básica $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. En la sección 4.4 vimos que al dividir a su vez estas identidades entre $\cos^2 x$ y luego entre $\text{sen}^2 x$, obtenemos dos identidades más, una relacionada con $\tan^2 x$ al $\sec^2 x$ y la otra con $\cot^2 x$ al $\csc^2 x$. Estas **identidades pitagóricas** son tan fundamentales para la trigonometría que las trataremos otra vez para referencias futuras.

IDENTIDADES PITAGÓRICAS

Si x es un número real para el que están definidas las funciones,

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \tag{1}$$
$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x, \tag{2}$$
$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x. \tag{3}$$

Sustituciones trigonométricas En cálculo, con frecuencia es útil usar sustitución trigonométrica para cambiar la forma de ciertas expresiones algebraicas donde intervienen radicales. En general, eso se hace aplicando las identidades pitagóricas. El ejemplo que sigue ilustra la técnica.

EJEMPLO 1 **Replanteo de un radical**

Transformar $\sqrt{a^2 - x^2}$ en una expresión trigonométrica que no tenga radicales, mediante la sustitución $x = a\, \text{sen}\, \theta$, $a > 0$ y $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Solución Si $x = a\, \text{sen}\, \theta$, entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a\,\text{sen}\,\theta)^2}\\ &= \sqrt{a^2 - a^2\text{sen}^2\theta}\\ &= \sqrt{a^2(1 - \text{sen}^2\theta)} \qquad \leftarrow \text{ahora use (1)}\\ &= \sqrt{a^2\cos^2\theta}.\end{aligned}$$

Ya que $a > 0$ y $\cos\theta \geq 0$ para $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, el radical original es igual que

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\cos\theta.$$

Fórmulas de suma y diferencia Las **fórmulas de suma y diferencia** de las funciones coseno y seno son identidades que reducen $\cos(x_1 + x_2)$, $\cos(x_1 - x_2)$, $\text{sen}\,(x_1 + x_2)$ y $\text{sen}\,(x_1 - x_2)$ a expresiones que contienen $\cos x_1$, $\cos x_2$, $\text{sen}\, x_1$ y $\text{sen}\, x_2$. Aquí deduciremos primero la fórmula de cos $(x_1 - x_2)$, y después usaremos el resultado para obtener las demás.

Por comodidad, supongamos que x_1 y x_2 representan ángulos expresados en radianes. Como se ve en la **FIGURA 4.5.1a)**, sea d la distancia entre $P(x_1)$ y $P(x_2)$. Si se coloca al ángulo $x_1 - x_2$ en posición normal, como se ve en la figura 4.5.1*b*), entonces d también es la distancia entre $P(x_1 - x_2)$ y $P(0)$. Al igualar los cuadrados de esas distancias se obtienen

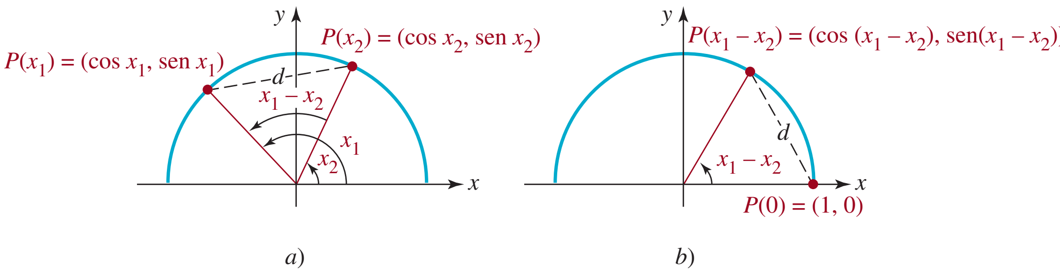


FIGURA 4.5.1 La diferencia de dos ángulos

$$(\cos x_1 - \cos x_2)^2 + (\text{sen}\, x_1 - \text{sen}\, x_2)^2 = (\cos(x_1 - x_2) - 1)^2 + \text{sen}^2(x_1 - x_2)$$

o sea $\cos^2 x_1 - 2\cos x_1 \cos x_2 + \cos^2 x_2 + \text{sen}^2 x_1 - 2\,\text{sen}\, x_1\, \text{sen}\, x_2 + \text{sen}^2 x_2$

$$= \cos^2(x_1 - x_2) - 2\cos(x_1 - x_2) + 1 + \text{sen}^2(x_1 - x_2).$$

En vista de la identidad (1),

$$\cos^2 x_1 + \text{sen}^2 x_1 = 1, \quad \cos^2 x_2 + \text{sen}^2 x_2 = 1, \quad \cos^2(x_1 - x_2) + \text{sen}^2(x_1 - x_2) = 1,$$

por lo que la ecuación anterior se simplifica a

$$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \text{sen}\, x_1\, \text{sen}\, x_2.$$

Este último resultado se puede poner en acción de inmediato, para determinar el coseno de la suma de dos ángulos. Como $x_1 + x_2$ se pueden expresar como la diferencia $x_1 - (-x_2)$,

$$\begin{aligned}\cos(x_1 + x_2) &= \cos(x_1 - (-x_2)) \\ &= \cos x_1 \cos(-x_2) + \text{sen}\, x_1\, \text{sen}(-x_2).\end{aligned}$$

De acuerdo con las identidades par-impar, $\cos(-x_2) = \cos x_2$, y $\text{sen}(-x_2) = -\text{sen}\, x_2$; entonces, el último renglón es lo mismo que

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \text{sen}\, x_1\, \text{sen}\, x_2.$$

Los dos resultados que acabamos de obtener se resumen a continuación.

FÓRMULAS DE SUMA Y DIFERENCIA DEL COSENO

Para todos los números reales x_1 y x_2,

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \text{sen}\, x_1\, \text{sen}\, x_2, \tag{4}$$

$$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \text{sen}\, x_1\, \text{sen}\, x_2. \tag{5}$$

EJEMPLO 2 Coseno de una suma

Evaluar $\cos(7\pi/12)$.

Solución No hay forma de evaluar $\cos(7\pi/12)$ directamente. Sin embargo, obsérvese que

$$\frac{7\pi}{12} \text{ radianes} = 105° = 60° + 45° = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

Como $7\pi/12$ radianes es un ángulo del segundo cuadrante, el valor de $\cos(7\pi/12)$ es negativo. Al seguir, la fórmula de la suma (4) da como resultado

$$\begin{aligned}\cos\frac{7\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Si $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$, este resultado también se puede escribir como $\cos(7\pi/12) = (\sqrt{2} - \sqrt{6})/4$. Como $\sqrt{6} > \sqrt{2}$, se ve que $\cos(7\pi/12) < 0$, como era de esperarse. ■

Para obtener las identidades correspondientes de suma o diferencia de la función seno, usaremos dos identidades:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x. \tag{6}$$

◀ Vea el recuadro (5) de la sección 4.3.

Estas identidades fueron descubiertas en la sección 4.3, al desplazar las gráficas de seno y coseno. Sin embargo, los dos resultados en (6) se pueden demostrar ahora, usando (5):

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} x\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \cos x \cdot 0 + \operatorname{sen} x \cdot 1 = \operatorname{sen} x,$$

$$\cos x = \cos\Bigg(\underbrace{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}_{\text{cero}} + x\Bigg) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \overset{\text{por}(5)}{=} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Ahora bien, de acuerdo con la primera ecuación de (6), el seno de la suma $x_1 + x_2$ se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x_1 + x_2) &= \cos\left((x_1 + x_2) - \frac{\pi}{2}\right)\\ &= \cos\left(x_1 + \left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= \cos x_1 \cos\left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen}\left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right) && \leftarrow \text{por (4)}\\ &= \cos x_1 \operatorname{sen} x_2 - \operatorname{sen} x_1(-\cos x_2). && \leftarrow \text{por (6)}\end{aligned}$$

Este último renglón se escribe, por tradición, en la siguiente forma:

$$\operatorname{sen}(x_1 + x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \operatorname{sen} x_2.$$

Para obtener la diferencia $x_1 - x_2$, de nuevo aplicaremos $\cos(-x_2) = \cos x_2$ y $\operatorname{sen}(-x_2) = -\operatorname{sen} x_2$:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x_1 - x_2) = \operatorname{sen}(x_1 + (-x_2)) &= \operatorname{sen} x_1 \cos(-x_2) + \cos x_1 \operatorname{sen}(-x_2)\\ &= \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \operatorname{sen} x_2.\end{aligned}$$

FÓRMULAS DE SUMA Y DIFERENCIA DEL SENO

Para todos los números reales x_1 y x_2,

$$\operatorname{sen}(x_1 + x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \operatorname{sen} x_2, \tag{7}$$
$$\operatorname{sen}(x_1 - x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \operatorname{sen} x_2. \tag{8}$$

EJEMPLO 3 Seno de una suma

Evaluar sen$(7\pi/12)$.

Solución Procederemos como en el ejemplo 2, pero usaremos la fórmula (7) de la suma:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Como en el ejemplo 2, el resultado se puede expresar como sen$(7\pi/12) = (\sqrt{2}+\sqrt{6})/4$. ■

Como ya se conoce el valor de cos$(7\pi/12)$ por el ejemplo 2, también se puede calcular el valor de sen$(7\pi/12)$ aplicando la identidad pitagórica (1):

$$\operatorname{sen}^2\frac{7\pi}{12}+\cos^2\frac{7\pi}{12} = 1.$$

Se despeja sen$(7\pi/12)$ y se toma la raíz cuadrada positiva:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} &= \sqrt{1-\cos^2\frac{7\pi}{12}} = \sqrt{1-\left[\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})\right]^2}\\ &= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.\end{aligned} \tag{9}$$

Aunque el número en (9) no se parece al resultado que se obtuvo en el ejemplo 3, los valores son iguales. Vea el problema 68 en los ejercicios 4.5.

También hay fórmulas de suma y diferencia de la función tangente. Se puede deducir la fórmula de la suma con las fórmulas de suma del seno y el coseno, como sigue:

$$\tan(x_1+x_2) = \frac{\operatorname{sen}(x_1+x_2)}{\cos(x_1+x_2)} = \frac{\operatorname{sen}x_1\cos x_2+\cos x_1\operatorname{sen}x_2}{\cos x_1\cos x_2-\operatorname{sen}x_1\operatorname{sen}x_2}. \tag{10}$$

Ahora dividiremos numerador y denominador entre (10) entre $\cos x_1 \cos x_2$ (suponiendo que x_1 y x_2 son tales que $\cos x_1 \cos x_2 \neq 0$),

$$\tan(x_1+x_2) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}x_1}{\cos x_1}\dfrac{\cos x_2}{\cos x_2}+\dfrac{\cos x_1}{\cos x_1}\dfrac{\operatorname{sen}x_2}{\cos x_2}}{\dfrac{\cos x_1}{\cos x_1}\dfrac{\cos x_2}{\cos x_2}-\dfrac{\operatorname{sen}x_1}{\cos x_1}\dfrac{\operatorname{sen}x_2}{\cos x_2}} = \frac{\tan x_1+\tan x_2}{1-\tan x_1\tan x_2}. \tag{11}$$

La deducción de la fórmula de la diferencia de $\tan(x_1 - x_2)$ se hace en forma parecida. Los dos resultados se resumen a continuación.

FÓRMULAS DE SUMA Y DIFERENCIA DE LA TANGENTE

Para números reales x_1 y x_2 para los cuales están definidas las funciones,

$$\tan(x_1+x_2) = \frac{\tan x_1+\tan x_2}{1-\tan x_1\tan x_2}, \tag{12}$$

$$\tan(x_1-x_2) = \frac{\tan x_1-\tan x_2}{1+\tan x_1\tan x_2}. \tag{13}$$

EJEMPLO 4 Tangente de una suma

Evaluar $\tan(\pi/12)$.

Solución Si consideramos que $\pi/12$ es un ángulo en radianes, entonces

$$\frac{\pi}{12} \text{ radianes} = 15° = 45° - 30° = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \text{ radianes}.$$

En consecuencia de la fórmula (13):

$$\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}\cdot\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} \quad \leftarrow \text{se racionaliza el denominador}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

◀ El lector debe resolver este ejemplo usando

$\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$

para ver que el resultado es el mismo.

Hablando con propiedad, en realidad no necesitamos las identidades de $\tan(x_1 \pm x_2)$, porque siempre se pueden determinar $\text{sen}(x_1 \pm x_2)$ y $\cos(x_1 \pm x_2)$ aplicando las fórmulas (4) a (8) y a continuación siguiendo como en (10), esto es, formar el cociente de $\text{sen}(x_1 \pm x_2)/\cos(x_1 \pm x_2)$.

□ Fórmulas de ángulo doble

Se pueden deducir muchas y útiles fórmulas trigonométricas a partir de las fórmulas de suma y diferencia. Las **fórmulas de ángulo doble** expresan el coseno y el seno de $2x$ en función del coseno y el seno de x.

Si se igualan $x_1 = x_2 = x$ en (4), y se usa $\cos(x + x) = \cos 2x$, entonces

$$\cos 2x = \cos x \cos x - \text{sen}\, x\, \text{sen}\, x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x.$$

De igual forma, igualando $x_1 = x_2 = x$ en (7), y usando $\text{sen}\,(x + x) = \text{sen}\, 2x$,

estos dos términos son iguales

$$\text{sen}\, 2x = \text{sen}\, x \cos x + \cos x\, \text{sen}\, x = 2\, \text{sen}\, x \cos x.$$

Resumiremos estos dos últimos resultados.

FÓRMULAS DEL COSENO Y SENO DE ÁNGULO DOBLE

Para todo número real x,

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x, \tag{14}$$

$$\text{sen}\, 2x = 2\, \text{sen}\, x \cos x. \tag{15}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}. \tag{16}$$

EJEMPLO 5 Uso de las fórmulas de ángulo doble

Si $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{4}$ y $\pi < x < 3\pi/2$, determinar los valores exactos de $\cos 2x$ y $\operatorname{sen} 2x$.

Solución Primero se calcula $\cos x$ aplicando $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Como $\pi < x < 3\pi/2$, $\cos x < 0$ y entonces se escoge la raíz cuadrada negativa:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

De la fórmula (14), de ángulo doble,

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{15}{16} - \frac{1}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Por último, de acuerdo con la fórmula (15) de ángulo doble,

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$ ■

La fórmula (14) tiene dos formas alternativas útiles. De acuerdo con (1), se sabe que $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$. Sustituyendo esta expresión en (14) se obtiene $\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$, es decir

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1. \tag{17}$$

Por otra parte, si en (14) se sustituye $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, se llega a

$$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x. \tag{18}$$

☐ Fórmulas de mitad de ángulo

Las formas alternativas (17) y (18) de la fórmula de ángulo doble (14) son el origen de dos fórmulas de mitad de ángulo. Al despejar $\cos^2 x$ y $\operatorname{sen}^2 x$ de (17) y (18) se obtienen, respectivamente,

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x). \tag{19}$$

El símbolo x en (19) se sustituye con $x/2$, y usando $2(x/2) = x$, se obtienen las fórmulas siguientes.

FÓRMULAS DE MITAD DE ÁNGULO DEL COSENO Y EL SENO

Para todo número real x,

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x), \tag{20}$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x), \tag{21}$$

$$\tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}. \tag{22}$$

EJEMPLO 6 Aplicación de las fórmulas de mitad de ángulo

Determinar los valores exactos de $\cos(5\pi/8)$ y $\operatorname{sen}(5\pi/8)$.

Solución Si hacemos que $x = 5\pi/4$, entonces $x/2 = 5\pi/8$, y las fórmulas (20) y (21) dan, respectivamente,

$$\cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

y $$\operatorname{sen}^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

Como $5\pi/8$ radianes es un ángulo del segundo cuadrante, $\cos(5\pi/8) < 0$ y $\operatorname{sen}(5\pi/8) > 0$. En consecuencia se toma la raíz cuadrada negativa como valor del coseno,

$$\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2},$$

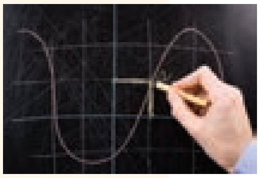
y la raíz cuadrada positiva como valor del seno

$$\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

Si queremos el valor exacto de $\tan(5\pi/8)$, podemos usar los resultados del ejemplo 6 o la fórmula (22) con $x = 5\pi/4$. De cualquier manera, el resultado es el mismo

$$\tan\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}.$$

NOTAS PARA EL SALÓN DE CLASE



i) ¿Se deben memorizar todas las identidades que se presentaron en esta sección? Pregúntelo a su profesor, pero en opinión de los autores, cuando menos debería memorizar las fórmulas (1) a (8), (14), (15) y las dos fórmulas en (19).

ii) Cuando se inscriba en un curso de cálculo, examine el título de su libro de texto. Si en su título tiene las palabras *Trascendentes tempranas,* casi de inmediato entrarán en acción sus conocimientos de las gráficas y propiedades de las funciones trigonométricas.

iii) Como se describió en las secciones 2.9 y 3.7, los temas principales de estudio en el cálculo son *derivadas* e *integrales* de funciones. Las identidades de suma (4) y (7) se usan para determinar las derivadas de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, vea la sección 4.11. Las identidades tienen utilidad especial en el cálculo integral. Reemplazar un radical por una función trigonométrica, como se ilustra en el ejemplo 1 de esta sección, es una técnica normal para evaluar algunos tipos de integrales. También, para evaluar integrales de $\cos^2 x$ y $\operatorname{sen}^2 x$ se usarían las fórmulas de mitad de ángulo, en la forma que se presenta en (19):

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

En algún momento de sus estudios de cálculo integral se le pedirá evaluar integrales de productos como

$$\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 5x \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} 10x \cos 4x.$$

Una forma de hacerlo es usar las fórmulas de suma o diferencia para formar una identidad que convierta esos productos ya sea en una suma de senos o en una suma de cosenos. Vea los problemas 67 a 70 en los ejercicios 4.5.

4.5 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-14.

En los problemas 1 a 8 proceda como en el ejemplo 1 y formule la expresión como expresión trigonométrica sin radicales, haciendo la sustitución indicada. Suponga que $a > 0$.

1. $\sqrt{a^2 - x^2}, \quad x = a\cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi$
2. $\sqrt{a^2 + x^2}, \quad x = a\tan\theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$
3. $\sqrt{x^2 - a^2}, \quad x = a\sec\theta, \quad 0 \le \theta < \pi/2$
4. $\sqrt{16 - 25x^2}, \quad x = \frac{4}{5}\operatorname{sen}\theta, \quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$
5. $\dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}, \quad x = 3\operatorname{sen}\theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$
6. $\dfrac{\sqrt{x^2 - 3}}{x^2}, \quad x = \sqrt{3}\sec\theta, \quad 0 < \theta < \pi/2$
7. $\dfrac{1}{\sqrt{7 + x^2}}, \quad x = \sqrt{7}\tan\theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$
8. $\dfrac{\sqrt{5 - x^2}}{x}, \quad x = \sqrt{5}\cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi$

En los problemas 9 a 30, use una fórmula de suma o diferencia para determinar el valor exacto de la expresión indicada.

9. $\cos\dfrac{\pi}{12}$
10. $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}$
11. $\operatorname{sen} 75°$
12. $\cos 75°$
13. $\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{12}$
14. $\cos\dfrac{11\pi}{12}$
15. $\tan\dfrac{5\pi}{12}$
16. $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)$
17. $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$
18. $\tan\dfrac{11\pi}{12}$
19. $\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{12}$
20. $\tan\dfrac{7\pi}{12}$
21. $\cos 165°$
22. $\operatorname{sen} 165°$
23. $\tan 165°$
24. $\cos 195°$
25. $\operatorname{sen} 195°$
26. $\tan 195°$
27. $\cos 345°$
28. $\operatorname{sen} 345°$
29. $\cos\dfrac{13\pi}{12}$
30. $\tan\dfrac{17\pi}{12}$

En los problemas 31 a 34, use una fórmula de ángulo doble para escribir la expresión dada como una sola función trigonométrica del doble del ángulo.

31. $2\cos\beta\operatorname{sen}\beta$
32. $\cos^2 2t - \operatorname{sen}^2 2t$
33. $1 - 2\operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{5}$
34. $2\cos^2\left(\dfrac{19}{2}x\right) - 1$

En los problemas 35 a 40, use la información presentada para determinar ***a***) cos $2x$, ***b***) sen $2x$ y ***c***) tan $2x$.

35. $\operatorname{sen} x = \sqrt{2}/3, \quad \pi/2 < x < \pi$

36. $\cos x = \sqrt{3}/5, \quad 3\pi/2 < x < 2\pi$

37. $\tan x = \frac{1}{2}, \quad \pi < x < 3\pi/2$

38. $\csc x = -3, \quad \pi < x < 3\pi/2$

39. $\sec x = -\frac{13}{5}, \quad \pi/2 < x < \pi$

40. $\cot x = \frac{4}{3}, \quad 0 < x < \pi/2$

En los problemas 41 a 48, use la fórmula de mitad de ángulo para determinar el valor exacto de la expresión dada.

41. $\cos(\pi/12)$

42. $\operatorname{sen}(\pi/8)$

43. $\operatorname{sen}(3\pi/8)$

44. $\tan(\pi/12)$

45. $\cos 67.5°$

46. $\operatorname{sen} 15°$

47. $\csc(13\pi/12)$

48. $\sec(-3\pi/8)$

En los problemas 49 a 54 use la información indicada para determinar ***a***) $\cos(x/2)$, ***b***) $\operatorname{sen}(x/2)$ y ***c***) $\tan(x/2)$.

49. $\operatorname{sen} t = \frac{12}{13}, \quad \pi/2 < t < \pi$

50. $\cos t = \frac{4}{5}, \quad 3\pi/2 < t < 2\pi$

51. $\tan x = 2, \quad \pi < x < 3\pi/2$

52. $\csc x = 9, \quad 0° < x < \pi/2$

53. $\sec x = \frac{3}{2}, \quad 0° < x < 90°$

54. $\cot x = -\frac{1}{4}, \quad 90° < x < 180°$

55. Si $P(x_1)$ y $P(x_2)$ son puntos del cuadrante II en el lado terminal de los ángulos x_1 y x_2, respectivamente, y $\cos x_1 = -\frac{1}{3}$ y $\operatorname{sen} x_2 = \frac{2}{3}$, determine ***a***) $\operatorname{sen}(x_1 + x_2)$, ***b***) $\cos(x_1 + x_2)$, ***c***) $\operatorname{sen}(x_1 - x_2)$ y ***d***) $\cos(x_1 - x_2)$.

56. Si x_1 es un ángulo del cuadrante II, x_2 es un ángulo del cuadrante III, $\operatorname{sen} x_1 = \frac{8}{17}$, y $\tan x_2 = \frac{3}{4}$, determine ***a***) $\operatorname{sen}(x_1 + x_2)$, ***b***) $\operatorname{sen}(x_1 - x_2)$, ***c***) $\cos(x_1 + x_2)$ y ***d***) $\cos(x_1 - x_2)$.

Aplicaciones diversas

57. Número de Mach La relación de la velocidad de un avión con la velocidad del sonido se llama número de Mach, M, del avión. Si $M > 1$, el avión produce ondas sonoras que forman un cono (en movimiento), como se ve en la FIGURA 4.5.2. Un estampido sónico se oye en la intersección del cono con el suelo. Si el ángulo del vértice del cono es θ, entonces

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{1}{M}.$$

Si $\theta = \pi/6$, calcule el valor exacto del número de Mach.

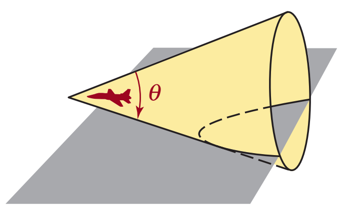


FIGURA 4.5.2 Avión del problema 57

58. Ramificación cardiovascular Un modelo matemático del flujo de la sangre en un vaso sanguíneo grande indica que los valores óptimos de los ángulos θ_1 y θ_2, que representan los ángulos (positivos) de las ramas menores (vasos) con respecto al eje del conducto inicial, se determinan con

$$\cos\theta_1 = \frac{A_0^2 + A_1^2 - A_2^2}{2A_0A_1} \quad \text{y} \quad \cos\theta_2 = \frac{A_0^2 - A_1^2 + A_2^2}{2A_0A_2},$$

donde A_0 es el área transversal del conducto inicial y A_1 y A_2 son las áreas transversales de las ramas. Vea la FIGURA 4.5.3. Sea $\psi = \theta_1 + \theta_2$ el ángulo de ramificación, como se indica en la figura.

a) Demuestre que

$$\cos\psi = \frac{A_0^2 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2}.$$

b) Demuestre que, para los valores óptimos de θ_1 y θ_2, el área transversal de las ramas, $A_1 + A_2$, es mayor o igual que la del vaso inicial. Por consiguiente, el flujo de la sangre debe desacelerarse en las ramas.

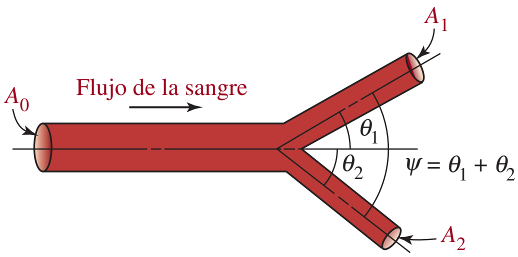


FIGURA 4.5.3 Ramificación de un vaso sanguíneo grande, del problema 58

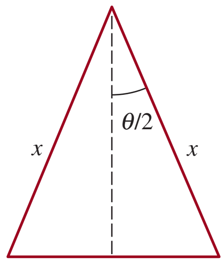


FIGURA 4.5.4 Triángulo isósceles del problema 59

59. Área de un triángulo Demuestre que el área de un triángulo isósceles, con lados iguales de longitud x, es

$$A = \tfrac{1}{2}x^2 \operatorname{sen}\theta,$$

donde θ es el ángulo que forman los dos lados iguales. Vea la FIGURA 4.5.4. [*Sugerencia:* Tenga en cuenta a $\theta/2$, como se ve en la figura.]

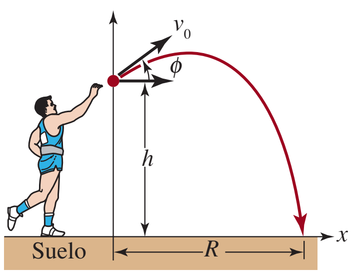


FIGURA 4.5.5 Proyectil del problema 60

60. Alcance de un proyectil Si un proyectil, como por ejemplo una bala de atletismo, se lanza hacia arriba desde una altura h, en dirección que hace ángulo ϕ con una velocidad v_0, el alcance R hasta donde llega al suelo se determina con

$$R = \frac{v_0^2 \cos\phi}{g}\left(\operatorname{sen}\phi + \sqrt{\operatorname{sen}^2\phi + (2gh/v_0^2)}\right),$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Vea la FIGURA 4.5.5. Se puede demostrar que el alcance máximo, $R_{\text{máx}}$, se logra si el ángulo ϕ satisface la ecuación

$$\cos 2\phi = \frac{gh}{v_0^2 + gh}.$$

Demuestre que $$R_{\text{máx}} = \frac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$$

usando las ecuaciones para R y cos 2ϕ,y las fórmulas de medio ángulo de seno y coseno, con $t = 2\phi$.

Para discusión

61. Explique por qué es de esperar que su calculadora muestre un mensaje de error cuando se trata de evaluar

$$\frac{\tan 35° + \tan 55°}{1 - \tan 35° \tan 55°}?$$

62. En el ejemplo 3 se demostró que $\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$. Siguiendo el ejemplo, después se demostró que $\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$. Demuestre que estos resultados son equivalentes.

63. Explique cómo se podría expresar sen 3θ en función de sen θ. Ejecute sus ideas.

64. En el problema 55, ¿en qué cuadrante están $P(x_1 + x_2)$ y $P(x_1 - x_2)$?

65. En el problema 56 ¿en qué cuadrante está el lado terminal de $x_1 + x_2$? ¿Y el lado terminal de $x_1 - x_2$?

66. Use las fórmulas de suma o diferencia (4), (5), (7) y (8) para deducir las **fórmulas de producto a suma**:

$$\operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2 = \tfrac{1}{2}[\cos(x_1 - x_2) - \cos(x_1 + x_2)]$$
$$\cos x_1 \cos x_2 = \tfrac{1}{2}[\cos(x_1 - x_2) + \cos(x_1 + x_2)]$$
$$\operatorname{sen} x_1 \cos x_2 = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x_1 + x_2) + \operatorname{sen}(x_1 - x_2)]$$

En los problemas 67 a 70 use una fórmula de producto a suma como las del problema 66 para expresar el producto indicado como una suma de senos o una suma de cosenos.

67. $\cos 4\theta \cos 3\theta$

68. $\operatorname{sen}\dfrac{3t}{2}\cos\dfrac{t}{2}$

69. $\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 5x$

70. $\operatorname{sen} 10x \cos 4x$

71. Demuestre que

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}.$$

72. Use las fórmulas de producto a suma del problema 66 para derivar las **fórmulas de suma a producto**

$$\operatorname{sen} x_1 + \operatorname{sen} x_2 = 2\operatorname{sen}\frac{x_1 + x_2}{2}\cos\frac{x_1 - x_2}{2}$$
$$\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2 = 2\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\operatorname{sen}\frac{x_1 - x_2}{2}$$
$$\cos x_1 + \cos x_2 = 2\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\cos\frac{x_1 - x_2}{2}$$
$$\cos x_1 - \cos x_2 = -2\operatorname{sen}\frac{x_1 + x_2}{2}\operatorname{sen}\frac{x_1 - x_2}{2}.$$

En los problemas 73 y 74, use la fórmula de suma a producto del problema 72 para buscar el valor exacto de la expresión. No utilice calculadora.

73. $\operatorname{sen} 75° + \operatorname{sen} 15°$

73. $\cos 75° - \cos 195°$

En los problemas 75 y 76, use la fórmula de suma a producto del problema 72 para escribir la suma o diferencia dada como producto.

75. $\cos t + \cos 5t$

76. $\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} - \operatorname{sen}\dfrac{3x}{2}$

77. ***a***) Utilice un programa graficador para obtener la gráfica de $f(x) = 4 - 8\operatorname{sen}^2 4x$.
b) Utilice la gráfica de la parte *a*) para estimar el periodo de la función f.
c) Explique por qué el periodo de f *no* es $2\pi/4 = \pi/2$.
d) Determine el periodo exacto de f. [*Sugerencia:* Use (21) de esta sección.]

4.6 Ecuaciones trigonométricas

□ Introducción En la sección 4.5 examinamos identidades, que son ecuaciones que contienen funciones trigonométricas que se satisfacen con todos los valores de la variable para la cual están definidos ambos lados de la igualdad. En esta sección examinaremos **ecuaciones**

trigonométricas condicionales, esto es, ecuaciones que sólo son válidas para ciertos valores de la variable. Describiremos técnicas para determinar los valores de la variable (si es que los hay) que satisfagan la ecuación.

Comenzaremos examinando el problema de determinar todos los números reales x que satisfacen $\operatorname{sen} x = \sqrt{2}/2$. Como indica la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ de la **FIGURA 4.6.1**, existe una cantidad infinita de soluciones de esta ecuación:

$$\ldots, -\frac{7\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{9\pi}{4}, \quad \frac{17\pi}{4}, \ldots \tag{1}$$

y

$$\ldots, -\frac{5\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{11\pi}{4}, \quad \frac{19\pi}{4}, \ldots .$$

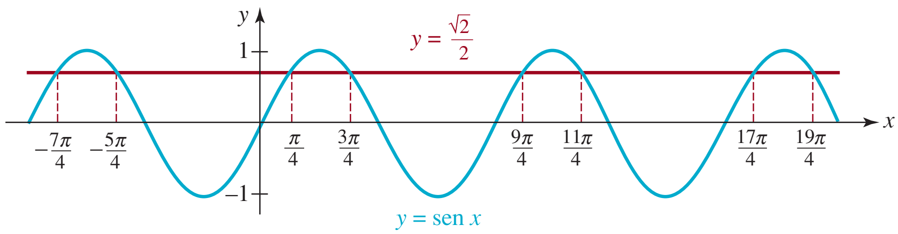


FIGURA 4.6.1 Gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \sqrt{2}/2$

Observe que en cada lista de (1), cada solución se puede obtener sumando $2\pi = 8\pi/4$ a la solución anterior. Eso es una consecuencia de la periodicidad de la función seno. Es común que las ecuaciones trigonométricas tengan una cantidad infinita de soluciones, por la periodicidad de las funciones trigonométricas. En general, para obtener soluciones de una ecuación como $\operatorname{sen} x = \sqrt{2}/2$, lo más cómodo es usar un círculo unitario y ángulos de referencia, y no una gráfica de la función trigonométrica. Ilustraremos este método en el siguiente ejemplo.

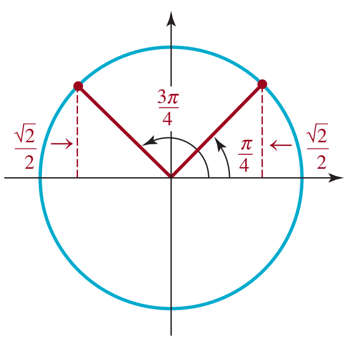


FIGURA 4.6.2 Círculo unitario del ejemplo 1

EJEMPLO 1 Uso del círculo unitario

Determinar todos los números reales x que satisfagan $\operatorname{sen} x = \sqrt{2}/2$.

Solución Si $\operatorname{sen} x = \sqrt{2}/2$, el ángulo de referencia de x es $\pi/4$ radianes. Ya que el valor de $\operatorname{sen} x$ es positivo, el lado terminal del ángulo x está en el primero o en el segundo cuadrantes. Así, como se ve en la **FIGURA 4.6.2**, las únicas soluciones entre 0 y 2π son

$$x = \frac{\pi}{4} \qquad \text{o} \qquad x = \frac{3\pi}{4}.$$

Como la función seno es periódica con periodo 2π, todas las soluciones restantes se pueden obtener sumando múltiplos enteros de 2π a estas soluciones:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \qquad \text{o} \qquad x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi,$$

donde n es un entero. ■

Cuando uno se encuentra con una ecuación más complicada, como

$$4\operatorname{sen}^2 x - 8\operatorname{sen} x + 3 = 0,$$

el método básico es despejar una sola función trigonométrica (en este caso sería $\operatorname{sen} x$) con métodos similares a los que se usan para resolver ecuaciones algebraicas. Después se determinan los valores de la variable x, usando el círculo unitario y ángulos de referencia. En el siguiente ejemplo se ilustra esta técnica.

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación trigonométrica mediante factorización

Determinar todas las soluciones de $4\,\text{sen}^2 x - 8\,\text{sen}\,x + 3 = 0$.

Solución Primero, se observa que se trata de una ecuación cuadrática en sen x, y que se factoriza como sigue

$$(2\,\text{sen}\,x - 3)(2\,\text{sen}\,x - 1) = 0.$$

Esto implica que

$$\text{sen}\,x = \frac{3}{2} \qquad \text{o} \qquad \text{sen}\,x = \frac{1}{2}.$$

La primera ecuación no tiene solución, porque $|\,\text{sen}\,x\,| \leq 1$. Como se ve en la **FIGURA 4.6.3**, los dos ángulos entre 0 y 2π para los cuales sen x es igual a $\frac{1}{2}$ son

$$x = \frac{\pi}{6} \qquad \text{o} \qquad x = \frac{5\pi}{6}.$$

Por consiguiente, debido a la periodicidad de la función seno, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \qquad \text{o} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,$$

donde n es un entero. ■

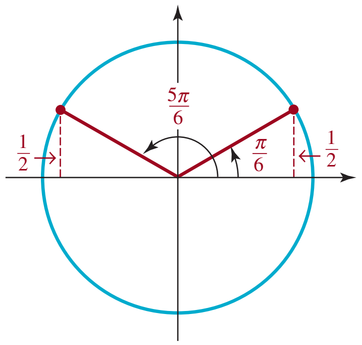


FIGURA 4.6.3 Círculo unitario del ejemplo 2

EJEMPLO 3 Verificación de soluciones perdidas

Determinar todas las soluciones de sen x = cos x. (2)

Solución Para trabajar con una sola función trigonométrica, se dividen ambos lados de la ecuación entre cos x, para obtener

$$\tan x = 1. \tag{3}$$

La ecuación (3) es equivalente a (2) *siempre y cuando* $\cos x \neq 0$. Se observa que si $\cos x = 0$, entonces, de acuerdo con (2) de la sección 4.3, $x = (2n + 1)\pi/2 = \pi/2 + n\pi$, donde n es un entero. Según la fórmula de suma del seno,

◀ $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$, $\cos 2\pi = 1$, $\cos 3\pi = -1$, etc. En general, $\cos n\pi = (-1)^n$, donde n es un entero.

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \overset{\substack{\text{Vea (7) en la sección 4.5}\\ \downarrow}}{\text{sen}\frac{\pi}{2}}\overset{\substack{(-1)^n\\ \downarrow}}{\cos n\pi} + \cos\frac{\pi}{2}\overset{\substack{0\\ \downarrow}}{\text{sen}\,n\pi} = (-1)^n \neq 0,$$

estos valores de x no satisfacen la ecuación original. Entonces, debemos determinar *todas* las soluciones de (2), resolviendo la ecuación (3).

Ahora bien, $\tan x = 1$ implica que el ángulo de referencia de x sea $\pi/4$ radianes. Ya que $\tan x = 1 > 0$, el lado terminal del ángulo de x radianes puede estar en el primer cuadrante o en el tercero, como se ve en la **FIGURA 4.6.4**. Entonces, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \qquad \text{o} \qquad x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi,$$

donde n es un entero. En la figura 4.6.4 se puede ver que estos dos conjuntos de números se pueden expresar en forma más compacta como sigue:

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi,$$

donde n es un entero. ■

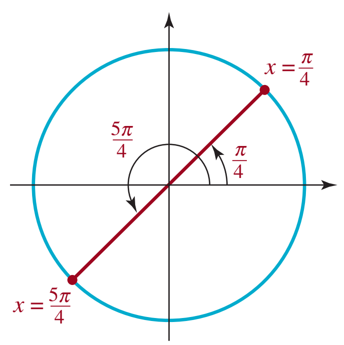


FIGURA 4.6.4 Círculo unitario del ejemplo 3

◀ Esto es consecuencia de que tan x sea periódica con periodo π.

☐ Pérdida de soluciones

Al resolver una ecuación, si se divide entre una expresión que contenga una variable, se pueden perder algunas soluciones de la ecuación original. Por ejemplo, un error común en álgebra, al resolver ecuaciones como $x^2 = x$ es dividir entre x, para obtener $x = 1$. Pero si se escribe $x^2 = x$ en la forma $x^2 - x = 0$, o $x(x - 1) = 0$, se ve que de hecho $x = 0$ o $x = 1$. Para evitar perder alguna solución se deben determinar los valores que hacen que la expresión sea cero, y comprobar si son soluciones de la ecuación original. En el ejemplo 3, nótese que cuando se dividió entre $\cos x$, se tuvo cuidado de comprobar que no se perdieran soluciones.

Cuando sea posible, es preferible dividir entre una expresión variable. Como se ilustró con la ecuación algebraica $x^2 = x$, esto se puede hacer con frecuencia reuniendo todos los términos distintos de cero en un lado de la ecuación, para entonces factorizar (algo que no pudimos hacer en el ejemplo 3). El ejemplo 4 ilustra esta técnica.

EJEMPLO 4 Solución de una ecuación trigonométrica factorizando

Resolver $2 \operatorname{sen} x \cos^2 x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x$. (4)

Solución Para evitar dividir entre $\cos x$, esta ecuación se escribe como sigue:

$$2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0$$

y se factoriza:

$$\cos x\left(2 \operatorname{sen} x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

Entonces, ya sea

$$\cos x = 0 \qquad \text{o} \qquad 2 \operatorname{sen} x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Como el coseno es cero para todos los múltiplos impares de $\pi/2$, las soluciones de $\cos x = 0$ son

$$x = (2n + 1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

donde n es un entero.

Vea (15) en la sección 4.5.

En la segunda ecuación sustituiremos $2 \operatorname{sen} x \cos x$ por $\operatorname{sen} 2x$, de la fórmula de ángulo doble del seno, y se obtiene una ecuación con una sola función trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \operatorname{sen} 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

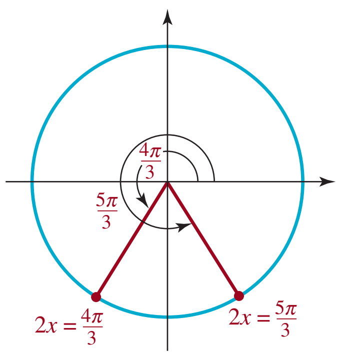


FIGURA 4.6.5 Círculo unitario del ejemplo 4

Entonces, el ángulo de referencia de $2x$ es $\pi/3$. Como el seno es negativo, el ángulo $2x$ debe estar en el tercero o en el cuarto cuadrantes. Como muestra la FIGURA 4.6.5,

$$2x = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi \qquad \text{o} \qquad 2x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi.$$

Se divide entre 2 y resulta

$$x = \frac{2\pi}{3} + n\pi \qquad \text{o} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + n\pi.$$

Por consiguiente, todas las soluciones de (4) son

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \qquad x = \frac{2\pi}{3} + n\pi, \qquad \text{o} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + n\pi,$$

donde n es un entero. ■

En el ejemplo 4, si hubiéramos simplificado la ecuación dividiendo entre $\cos x$ y no hubiéramos comprobado si los valores de x para los cuales $\cos x = 0$ satisfacen la ecuación (4), hubiéramos perdido las soluciones $x = \pi/2 + n\pi$, donde n es un entero.

EJEMPLO 5 Uso de una identidad trigonométrica

Resolver $3\cos^2 x - \cos 2x = 1$.

Solución Se observa que la ecuación contiene el coseno de x y el coseno de $2x$. En consecuencia, usaremos la fórmula de ángulo doble del coseno, en la forma

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \qquad \leftarrow \text{Vea (16) de la sección 4.5.}$$

para reemplazar la ecuación por una ecuación equivalente que sólo contenga $\cos x$. Se ve que

$$3\cos^2 x - (2\cos^2 x - 1) = 1 \qquad \text{se transforma en} \qquad \cos^2 x = 0.$$

Por lo anterior, $\cos x = 0$, y las soluciones son

$$x = (2n + 1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

donde n es un entero. ■

Hasta ahora, en esta sección hemos considerado que la variable de la ecuación trigonométrica representa un número real, o bien un ángulo medido en radianes. Si la variable representa un ángulo expresado en grados, la técnica para resolverla es la misma.

EJEMPLO 6 Ecuación cuando el ángulo está en grados

Resolver $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$, donde θ es un ángulo expresado en grados.

Solución Como $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$, el ángulo de referencia de 2θ es 60° y el ángulo 2θ debe estar en el segundo o tercer cuadrantes. La FIGURA 4.6.6 muestra que $2\theta = 120°$, o $2\theta = 240°$. Todo ángulo que sea coterminal con uno de esos ángulos también satisfará $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$. Estos ángulos se obtienen sumando cualquier múltiplo entero de 360° a 120° o a 240°.

$$2\theta = 120° + 360°n \qquad \text{o} \qquad 2\theta = 240° + 360°n,$$

donde n es un entero. Este renglón se divide entre 2 y quedan

$$\theta = 60° + 180°n \qquad \text{o} \qquad \theta = 120° + 180°n.$$ ■

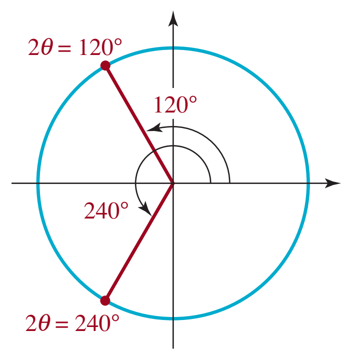


FIGURA 4.6.6 Círculo unitario del ejemplo 6

En el ejemplo siguiente se ve que al elevar al cuadrado una ecuación se pueden introducir soluciones extrañas.

EJEMPLO 7 Raíces adicionales

Determinar todas las soluciones de $1 + \tan\alpha = \sec\alpha$, donde α es un ángulo expresado en grados.

Solución La ecuación no se factoriza, pero veremos que si se elevan ambos lados al cuadrado se puede aplicar una identidad fundamental para obtener una ecuación que contenga una sola función trigonométrica.

$$\begin{aligned}(1 + \tan\alpha)^2 &= (\sec\alpha)^2 \\ 1 + 2\tan\alpha + \tan^2\alpha &= \sec^2\alpha \qquad \leftarrow \text{Vea (8) de la sección 4.4.} \\ 1 + 2\tan\alpha + \tan^2\alpha &= 1 + \tan^2\alpha \\ 2\tan\alpha &= 0 \\ \tan\alpha &= 0.\end{aligned}$$

Los valores de α en $[0°, 360°)$ para los cuales $\tan\alpha = 0$ son

$$\alpha = 0° \qquad \text{y} \qquad \alpha = 180°.$$

Como se elevó al cuadrado cada lado de la ecuación original se pueden haber introducido soluciones adicionales. Por ello es importante comprobar todas las soluciones en la ecuación original. Si se sustituye $\alpha = 0°$ en $1 + \tan\alpha = \sec\alpha$, se obtiene la declaración *cierta* $1 + 0 = 1$. Pero después de sustituir $\alpha = 180°$ se obtiene la declaración *falsa* $1 + 0 = -1$. Por lo anterior, 180° es una solución adicional no válida, y $\alpha = 0°$ es la única solución en el intervalo $[0°, 360°)$. Entonces, todas las soluciones de la ecuación son

$$\alpha = 0° + 360°n = 360°n,$$

donde n es un entero. Para $n \neq 0$, son los ángulos que son coterminales con 0°. ■

Recuerde, de la sección 2.1, que la determinación de las intersecciones con el eje x de la gráfica de una función $y = f(x)$ equivale a resolver la ecuación $f(x) = 0$. En el siguiente ejemplo se usa lo anterior.

EJEMPLO 8 Intersecciones de una gráfica

Determinar las primeras tres intersecciones con el eje x de la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} 2x \cos x$ en el eje de las x positivas.

Solución Se debe resolver $f(x) = 0$; esto es, $\operatorname{sen} 2x \cos x = 0$. Se ve que o bien $\operatorname{sen} 2x = 0$, o $\cos x = 0$.

De $\operatorname{sen} 2x = 0$ se obtiene $2x = n\pi$, donde n es un entero; es decir, $x = n\pi/2$, donde n es un entero. De $\cos x = 0$ se obtiene $x = \pi/2 + n\pi$, donde n es un entero. Entonces, para $n = 2$, $x = n\pi/2$ da $x = \pi$, mientras que para $n = 0$ y $n = 1$, $x = \pi/2 + n\pi$ da $x = \pi/2$ y $x = 3\pi/2$. Así, las primeras tres intersecciones con el eje x en el eje de las x positivas están en $(\pi/2, 0)$, $(\pi, 0)$ y $(3\pi/2, 0)$. ■

Hasta ahora, todas las ecuaciones trigonométricas han tenido soluciones que estaban relacionadas por ángulos de referencia con los ángulos especiales 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ o $\pi/2$. Si éste no es ese el caso, en la siguiente sección veremos cómo usar funciones trigonométricas inversas y una calculadora para determinar las soluciones.

4.6 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados se encuentran en la página RESP-14.

En los problemas 1 a 6 determine todas las soluciones de la ecuación trigonométrica, si x representa un ángulo expresado en radianes.

1. $\operatorname{sen} x = \sqrt{3}/2$

2. $\cos x = -\sqrt{2}/2$

3. $\sec x = \sqrt{2}$

4. $\tan x = -1$

5. $\cot x = -\sqrt{3}$

6. $\csc x = 2$

En los problemas 7 a 12 determine todas las soluciones de la ecuación trigonométrica correspondiente, si x representa un número real.

7. $\cos x = -1$

8. $2 \operatorname{sen} x = -1$

9. $\tan x = 0$

10. $\sqrt{3} \sec x = 2$

11. $-\csc x = 1$

12. $\sqrt{3} \cot x = 1$

En los problemas 13 a 18, determine todas las soluciones de la ecuación trigonométrica respectiva si θ representa un ángulo expresado en grados.

13. $\csc \theta = 2\sqrt{3}/3$

14. $2 \operatorname{sen} \theta = \sqrt{2}$

15. $1 + \cot \theta = 0$

16. $\sqrt{3} \operatorname{sen} \theta = \cos \theta$

17. $\sec \theta = -2$

18. $2 \cos \theta + \sqrt{2} = 0$

En los problemas 19 a 46 determine todas las soluciones de la ecuación trigonométrica respectiva si x es un número real, y θ es un ángulo expresado en grados.

19. $\cos^2 x - 1 = 0$

20. $2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$

21. $3 \sec^2 x = \sec x$

22. $\tan^2 x + \left(\sqrt{3} - 1\right) \tan x - \sqrt{3} = 0$

23. $2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta - 2 = 0$

24. $2 \operatorname{sen}^2 \theta - \operatorname{sen} \theta - 1 = 0$

25. $\cot^2 \theta + \cot \theta = 0$

26. $2 \operatorname{sen}^2 \theta + \left(2 - \sqrt{3}\right) \operatorname{sen} \theta - \sqrt{3} = 0$

27. $\cos 2x = -1$

28. $\sec 2x = 2$

29. $2 \operatorname{sen} 3\theta = 1$

30. $\tan 4\theta = -1$

31. $\cot(x/2) = 1$

32. $\csc(\theta/3) = -1$

33. $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0$

34. $\cos 2x + \operatorname{sen}^2 x = 1$

35. $\cos 2\theta = \operatorname{sen} \theta$

36. $\operatorname{sen} 2\theta + 2 \operatorname{sen} \theta - 2 \cos \theta = 2$

37. $\operatorname{sen}^4 x - 2 \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$

38. $\tan^4 \theta - 2 \sec^2 \theta + 3 = 0$

39. $\sec x \operatorname{sen}^2 x = \tan x$

40. $\dfrac{1 + \cos \theta}{\cos \theta} = 2$

41. $1 + \cot \theta = \csc \theta$

42. $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$

43. $\sqrt{\dfrac{1 + 2 \operatorname{sen} x}{2}} = 1$

44. $\operatorname{sen} x + \sqrt{\operatorname{sen} x} = 0$

45. $\cos \theta - \sqrt{\cos \theta} = 0$

46. $\cos \theta \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = 1$

En los problemas 47 a 54, determine las tres primeras intersecciones con el eje x de la gráfica de la función, en el eje de las x positivas.

47. $f(x) = -5 \operatorname{sen}(3x + \pi)$

48. $f(x) = 2 \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

49. $f(x) = 2 - \sec \dfrac{\pi}{2} x$

50. $f(x) = 1 + \cos \pi x$

51. $f(x) = \operatorname{sen} x + \tan x$

52. $f(x) = 1 - 2 \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

53. $f(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x$

54. $f(x) = \cos x + \cos 3x$ [*Sugerencia:* Escriba $3x = x + 2x$.]

En los problemas 55 a 58 haga la gráfica y determine si la ecuación tiene soluciones.

55. $\tan x = x$ [*Sugerencia:* Grafique $y = \tan x$ y $y = x$ en el mismo conjunto de ejes.]

56. $\operatorname{sen} x = x$

57. $\cot x - x = 0$

58. $\cos x + x + 1 = 0$

Aplicaciones diversas

59. Triángulo isósceles En el problema 59 de los ejercicios 4.5, el área del triángulo isósceles cuyo vértice tiene ángulo θ, como se ve en la figura 4.5.4, es $A = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen}\theta$. Si la longitud x es 4 ¿con qué valor de θ el área del triángulo será 4?

60. Movimiento circular Un objeto describe una trayectoria circular centrada en el origen, con velocidad angular constante. La coordenada y del objeto, en cualquier momento a los t segundos, es $y = 8\cos(\pi t - \pi/12)$. ¿En qué momento(s) cruza el objeto al eje x?

61. Número de Mach Use el problema 57 de los ejercicios 4.5 para determinar el ángulo del vértice del cono, de las ondas sonoras provocadas por un avión que vuele a Mach 2.

62. Corriente alterna Un generador eléctrico produce una corriente alterna de 60 ciclos, definida por $I(t) = 30 \operatorname{sen} 120\,\pi\left(t - \frac{7}{36}\right)$, donde $I(t)$ es la corriente en amperes a los t segundos. Calcule el valor positivo más pequeño de t para el cual la corriente es de 15 amperes.

63. Circuitos eléctricos Si se aplica un voltaje definido por $V = V_0 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$ a un circuito en serie, se produce una corriente alterna. Si $V_0 = 110$ volts, $\omega = 120\pi$ radianes por segundo y $\alpha = -\pi/6$, ¿cuándo el voltaje es igual a cero?

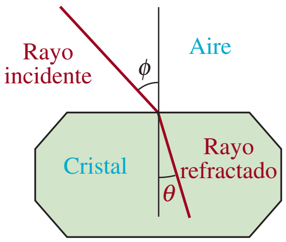


FIGURA 4.6.7 Rayos de luz en el problema 64

64. Refracción de la luz Un rayo de luz pasa de un medio (como el aire) a otro (como un cristal). Sean ϕ el ángulo de incidencia y θ el ángulo de refracción. Como se ve en la FIGURA 4.6.7, esos ángulos se miden respecto de una línea vertical. De acuerdo con la **ley de Snell**, hay una c constante, que depende de los dos medios, tal que $\dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\theta} = c$.

Suponga que cuando la luz pasa de aire a un cristal, $c = 1.437$. Calcule ϕ y θ tales que el ángulo de incidencia sea el doble del ángulo de refracción.

65. Capa de nieve Con base en datos recolectados entre 1966 y 1980, la superficie de la capa de nieve S en el hemisferio norte, medida en millones de kilómetros cuadrados, se puede modelar por la función

$$S(w) = 25 + 21\cos\left(\tfrac{1}{26}\pi(w - 5)\right),$$

donde w es la cantidad de semanas después del 1 de enero.

a) ¿Cuánta capa de nieve indica esta fórmula para mediados de abril? (Redondee w al entero más cercano.)

b) ¿En qué semana la capa nevada será mínima, según la fórmula?

c) ¿En qué mes se encuentra esa semana?

4.7 Funciones trigonométricas inversas

Introducción Aunque se pueden calcular los valores de las funciones trigonométricas de números reales o de ángulos, en muchas aplicaciones se debe hacer la inversa: dado el valor de una función trigonométrica, determinar un ángulo o número correspondiente. Eso parece indicar que se deben usar funciones trigonométricas inversas. Antes de definir esas funciones, vamos a recordar de la sección 2.7 algunas de las propiedades de una función uno-a-uno y su inversa f^{-1}.

Recuerde que una función f es uno-a-uno si toda y en su contradominio corresponde exactamente a una x en su dominio.

Propiedades de las funciones inversas Si $y = f(x)$ es una función uno-a-uno, hay entonces una función inversa única, f^{-1}, con las propiedades correspondientes:

- El dominio de f^{-1} = contradominio de f.
- El contradominio de f^{-1} = dominio de f.
- $y = f(x)$ equivale a $x = f^{-1}(y)$.
- Las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones en la recta $y = x$.
- $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}.
- $f^{-1}(f(x)) = x$ para x en el dominio de f.

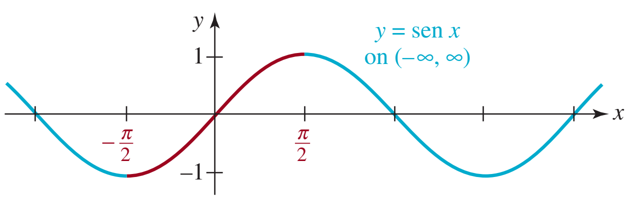
Al revisar las gráficas de las diversas funciones trigonométricas se ve con claridad que *ninguna* de esas funciones es uno-a-uno. En la sección 2.7 describimos que si una función f no es uno-a-uno, se podrá restringir la función a una parte de su dominio donde sí sea uno-a-uno. Entonces, se puede definir una inversa de f en ese dominio restringido. En el caso normal, cuando se restringe el dominio, uno se asegura de conservar todo el contradominio de la función original.

◀ Vea el ejemplo 7 en la sección 2.7.

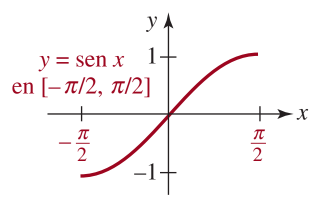
Función arco seno En la FIGURA 4.7.1*a*) se ve que la función $y =$ sen x en el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$ asume todos los valores en su contradominio $[-1, 1]$. Observe que toda recta horizontal que se trace para cruzar la parte roja de la gráfica lo puede hacer cuando mucho una vez. Así, la función seno en este dominio restringido es uno-a-uno y tiene una inversa. Para representar la inversa de la función que se ve en la figura 4.7.1*b*) se usan normalmente dos notaciones:

$$\operatorname{arcsen} x \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen}^{-1} x,$$

y se leen **arco seno de *x*** y **seno inverso de *x***, respectivamente.



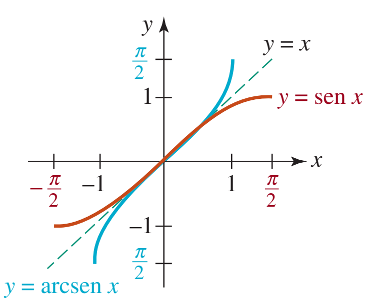
a) No es función uno-a-uno



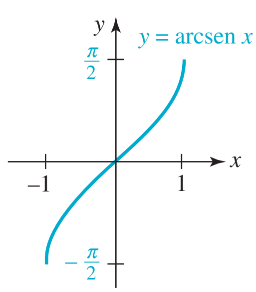
b) Sí es función uno-a-uno

FIGURA 4.7.1 Restricción del dominio de $y =$ sen x para obtener una función uno-a-uno

En la FIGURA 4.7.2*a*) se ha reflejado una parte de la gráfica de $y =$ sen x en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (la gráfica roja en la figura 4.7.1*b*) en la recta $y = x$ para obtener la gráfica de $y =$ arcsen x (en azul). Para mayor claridad, hemos reproducido esta gráfica en azul en la figura 4.7.2*b*). Como indica esta curva, el dominio de la función arco seno es $[-1, 1]$ y el contradominio es $[-\pi/2, \pi/2]$.



a)



b)

FIGURA 4.7.2 La gráfica de $y =$ arcsen x es la curva azul

FUNCIÓN ARCO SENO

La **función arco seno**, o **función seno inverso**, se define por

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \operatorname{sen} y, \tag{1}$$

donde $-1 \leq x \leq 1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$.

En otras palabras:

El arco seno del número x es aquel número y (o ángulo expresado en radianes) entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ cuyo seno es x.

Precaución:
$(\operatorname{sen} x)^{-1} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \neq \operatorname{sen}^{-1} x$

Al usar la notación $\operatorname{sen}^{-1} x$ es importante tener en cuenta que "-1" no es un exponente; más bien representa una función inversa. La notación arcsen x tiene la ventaja sobre la notación $\operatorname{sen}^{-1} x$ de que no hay "-1" y en consecuencia no da pie a malas interpretaciones; es más, el prefijo "arco" se refiere a un ángulo, *el* ángulo cuyo seno es x. Pero como $y = \operatorname{arcsen} x$ y $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ se usan en forma indistinta en cálculo y en sus aplicaciones, continuaremos alternando su uso, para que el lector se sienta cómodo con ambas notaciones.

EJEMPLO 1 Evaluación de la función seno inverso

Determinar ***a***) $\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}$, ***b***) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ y ***c***) $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$.

Solución

a) Si se hace que $y = \operatorname{arcsen}\frac{1}{2}$, entonces, de acuerdo con (1), se debe encontrar el número y (o el ángulo en radianes) que satisfaga $\operatorname{sen} y = \frac{1}{2}$, *y también* $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Ya que $\operatorname{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$, y $\pi/6$ satisface la desigualdad $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, entonces $y = \pi/6$.

b) Si se hace que $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$, entonces $\operatorname{sen} y = -\frac{1}{2}$. Como se debe escoger a y tal que $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, se ve que $y = -\pi/6$.

c) Si $y = \operatorname{sen}^{-1}(-1)$, entonces $\operatorname{sen} y = -1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Por consiguiente, $y = -\pi/2$. ■

Lea este párrafo varias veces.

En los incisos *b*) y *c*) del ejemplo 1 se tuvo cuidado de escoger a y tal que $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Por ejemplo, es un error frecuente pensar que como $\operatorname{sen}(3\pi/2) = -1$, entonces por necesidad $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$ se puede suponer que es $3\pi/2$. Recuerde: si $y = \operatorname{sen}^{-1}x$, entonces y está sujeta a la restricción $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, y $3\pi/2$ no satisface esta desigualdad.

EJEMPLO 2 Evaluación de una composición

Sin usar calculadora, calcular $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4}\right)$.

Solución Se debe calcular la tangente del ángulo de t radianes, cuyo seno sea igual a $\frac{1}{4}$, esto es, $\tan t$, donde $t = \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4}$. El ángulo t se ve en la **FIGURA 4.7.3**. Como

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{1/4}{\cos t},$$

se debe determinar el valor de $\cos t$. De la figura 4.7.3 y por la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, se ve que

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 t = 1 \qquad \text{o sea} \qquad \cos t = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

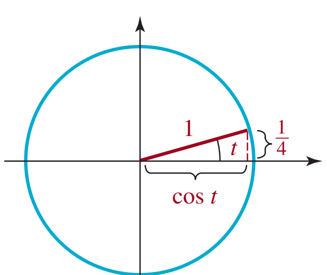


FIGURA 4.7.3 Ángulo $t = \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4}$ del ejemplo 2

Por consiguiente,

$$\tan t = \frac{1/4}{\sqrt{15}/4} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15},$$

y así

$$\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4}\right) = \tan t = \frac{\sqrt{15}}{15}. \quad ■$$

□ Función arco coseno Si se restringe el dominio de la función coseno al intervalo cerrado $[0, \pi]$, la función que resulta es uno-a-uno y tiene inversa. A esta inversa se le representa por

$$\arccos x \qquad \text{o} \qquad \cos^{-1} x,$$

lo cual nos da la siguiente definición.

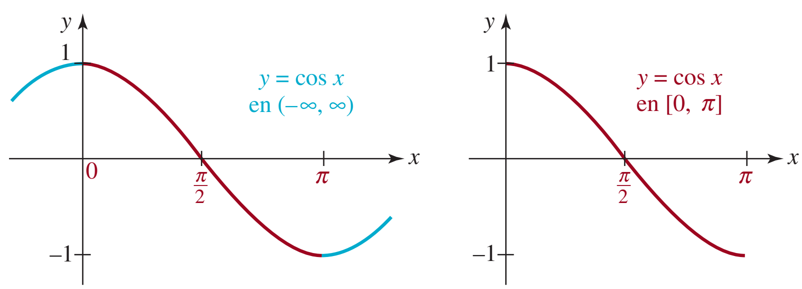
FUNCIÓN ARCO COSENO

La **función arco coseno**, o **función coseno inverso**, se define por

$$y = \arccos x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = \cos y, \tag{2}$$

donde $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq \pi$.

Las gráficas que se ven en la **FIGURA 4.7.4** ilustran cómo se puede restringir la función $y = \cos x$ al intervalo $[0, \pi]$ para que sea uno-a-uno. La inversa de la función que muestra la figura 4.7.4*b*) es $y = \text{arc cos } x$, o $y = \arccos x$.



a) No es función uno-a-uno *b*) Sí es función uno-a-uno

FIGURA 4.7.4 Restricción del dominio de $y = \cos x$ para obtener una función uno-a-uno

Si se refleja la gráfica de la función uno-a-uno en la figura 4.7.4*b*) en la recta $y = x$, se obtiene la gráfica de $y = \text{arc cos } x$, que muestra la **FIGURA 4.7.5**.

Note que en la figura se ve con claridad que el dominio y el contradominio de $y = \text{arc cos } x$ son $[-1, 1]$ y $[0, \pi]$, respectivamente.

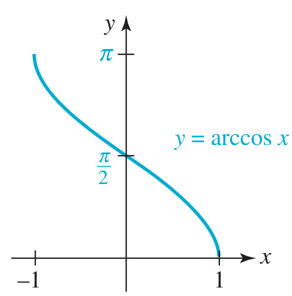


FIGURA 4.7.5 Gráfica de $y = \text{arc cos } x$

EJEMPLO 3 Evaluación de la función coseno inverso

Determinar ***a***) $\arccos(\sqrt{2}/2)$ y ***b***) $\cos^{-1}(-\sqrt{3}/2)$.

Solución

a) Si se hace que $y = \arccos(\sqrt{2}/2)$, entonces $\cos y = \sqrt{2}/2$, y $0 \leq y \leq \pi$. Entonces, $y = \pi/4$.

b) Si $y = \cos^{-1}(-\sqrt{3}/2)$, tenemos $\cos y = -\sqrt{3}/2$, y se debe determinar y tal que $0 \leq y \leq \pi$. Por consiguiente, $y = 5\pi/6$, porque $\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$. ■

EJEMPLO 4 Evaluación de composición de funciones

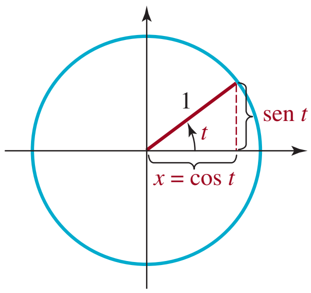


FIGURA 4.7.6 Ángulo $t = \cos^{-1} x$ del ejemplo 4

Escribir $\operatorname{sen}(\cos^{-1}x)$ como expresión algebraica en x.

Solución En la FIGURA 4.7.6 se ha trazado un ángulo de t radianes cuyo coseno es igual a x. Entonces, $t = \cos^{-1}x$, o $x = \cos t$, donde $0 \le t \le \pi$. Ahora, para determinar $\operatorname{sen}(\cos^{-1}x) = \operatorname{sen} t$, se usará la identidad $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$. Así,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 t + x^2 &= 1 \\ \operatorname{sen}^2 t &= 1 - x^2 \\ \operatorname{sen} t &= \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Se usa la raíz cuadrada no negativa de $1 - x^2$, porque el contradominio de $\cos^{-1}x$ es $[0, \pi]$, el seno de un ángulo t en el primero o segundo cuadrantes es positivo. ■

□ Función arco tangente

Si se restringe el dominio de $\tan x$ al intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, entonces, la función que resulta es uno-a-uno y por consiguiente tiene inversa. Esa inversa se representa por

$$\arctan x \qquad \text{o} \qquad \tan^{-1} x.$$

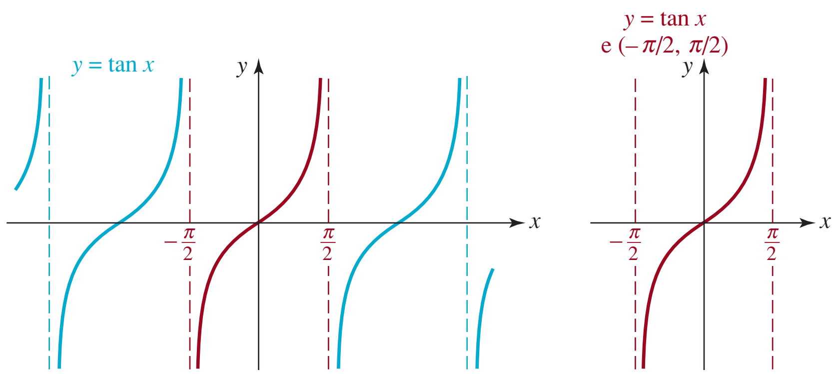
FUNCIÓN ARCO TANGENTE

La **función arco tangente**, o **tangente inversa**, se define como sigue:

$$y = \arctan x \qquad \text{si, y sólo si} \qquad x = \tan y, \tag{3}$$

donde $-\infty < x < \infty$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$.

Las gráficas de la FIGURA 4.7.7 ilustran la forma en que se restringe la función $y = \tan x$ al intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, para que sea función uno-a-uno.



a) No es función uno-a-uno

b) Función uno-a-uno

FIGURA 4.7.7 Restricción del dominio de $y = \tan x$ para obtener una función uno-a-uno

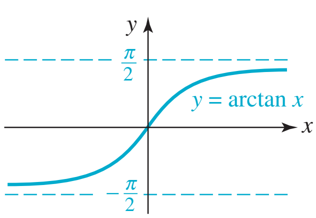


FIGURA 4.7.8 Gráfica de $y = \arctan x$

Si se refleja la gráfica de la función uno-a-uno en la figura 4.7.7*b*) en la recta $y = x$, se obtiene la gráfica de $y = \arctan x$, que se ve en la FIGURA 4.7.8. En esa figura se ve que el dominio y el contradominio de $y = \arctan x$ son, respectivamente, los intervalos $(-\infty, \infty)$ y $(-\pi/2, \pi/2)$.

EJEMPLO 5 Evaluación de la tangente inversa

Determinar $\tan^{-1}(-1)$.

Solución Si $\tan^{-1}(-1) = y$, entonces $\tan y = -1$, donde $-\pi/2 < y < \pi/2$. Entonces, $\tan^{-1}(-1) = y = -\pi/4$. ■

EJEMPLO 6 Evaluación de composición de funciones

Sin usar una calculadora, determinar $\operatorname{sen}\left(\arctan\left(-\frac{5}{3}\right)\right)$.

Solución Si hacemos que $t = \arctan\left(-\frac{5}{3}\right)$, entonces $\tan t = -\frac{5}{3}$. Se puede aplicar la identidad pitagórica $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$ para determinar $\sec t$:

$$1+\left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \sec^2 t$$

$$\sec t = \sqrt{\frac{25}{9} + 1} = \sqrt{\frac{34}{9}} = \frac{\sqrt{34}}{3}.$$

En este último renglón se toma la raíz cuadrada positiva, porque $t = \arctan\left(-\frac{5}{3}\right)$ está en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ (el contradominio de la función arco tangente) y la secante de un ángulo t en el primero y cuarto cuadrantes es positiva. También, de $\sec t = \sqrt{34}/3$ se determina el valor de $\cos t$, con la identidad recíproca:

$$\cos t = \frac{1}{\sec t} = \frac{1}{\sqrt{34}/3} = \frac{3}{\sqrt{34}}.$$

Por último, se puede usar la identidad $\tan t = \operatorname{sen} t/\cos t$ en la forma $\operatorname{sen} t = \tan t \cos t$, para calcular $\operatorname{sen}\left(\arctan\left(-\frac{5}{3}\right)\right)$. Entonces,

$$\operatorname{sen} t = \tan t \cos t = \left(-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right) = -\frac{5}{\sqrt{34}}.$$ ■

□ **Propiedades de las funciones inversas** Recordemos, de la sección 2.7, que $f^{-1}(f(x)) = x$, y que $f(f^{-1}(x)) = x$ valen para cualquier función f y su inversa, bajo las restricciones adecuadas en x. Entonces, para las funciones trigonométricas inversas se tienen las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

i) $\arcsin(\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x$ si $-\pi/2 \le x \le \pi/2$

ii) $\operatorname{sen}(\arcsin x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x$ si $-1 \le x \le 1$

iii) $\arccos(\cos x) = \cos^{-1}(\cos x) = x$ si $0 \le x \le \pi$

iv) $\cos(\arccos x) = \cos(\cos^{-1} x) = x$ si $-1 \le x \le 1$

v) $\arctan(\tan x) = \tan^{-1}(\tan x) = x$ si $-\pi/2 < x < \pi/2$

vi) $\tan(\arctan x) = \tan(\tan^{-1} x) = x$ si $-\infty < x < \infty$

EJEMPLO 7 Aplicación de las propiedades inversas

Sin usar calculadora, evaluar:

a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)$ ***b)*** $\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$ ***c)*** $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$.

Solución

a) De acuerdo con *i*) de las propiedades de las funciones trigonométricas inversas,

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{12}.$$

b) De acuerdo con la propiedad *iv*), $\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

c) En este caso *no se puede* aplicar la propiedad *v*), porque el número $3\pi/4$ no está en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Si primero se evalúa $\tan(3\pi/4)=-1$, entonces

$$\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Vea el ejemplo 5}}}{\tan^{-1}(-1)}=-\frac{\pi}{4}.$$

El siguiente ejemplo muestra cómo se usan las funciones trigonométricas inversas para resolver ecuaciones trigonométricas.

EJEMPLO 8 Solución de ecuaciones usando funciones inversas

Determinar las soluciones de $4\cos^2 x-3\cos x-2=0$, en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución Se ve que ésta es una ecuación cuadrática en $\cos x$. Como no se factoriza con facilidad, se aplica la fórmula cuadrática para obtener

$$\cos x=\frac{3\pm\sqrt{41}}{8}.$$

Llegados aquí, desechamos el valor $(3+\sqrt{41})/8\approx 1.18$, porque $\cos x$ no puede ser mayor que 1. Entonces, se puede usar la función coseno inverso (con ayuda de una calculadora) para resolver la ecuación que queda:

$$\cos x=\frac{3-\sqrt{41}}{8}\quad\text{lo cual implica que}\quad x=\cos^{-1}\left(\frac{3-\sqrt{41}}{8}\right)\approx 2.01.$$

Claro que si hubiéramos tratado de calcular $\cos^{-1}[(3+\sqrt{41})/8]$ con una calculadora, hubiéramos recibido un mensaje de error.

Nota final: las demás funciones trigonométricas inversas Las funciones $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$ también tienen inversas, cuando se restringe su dominio en forma adecuada. Vea los problemas 55 a 57 en los ejercicios 4.7. Como esas funciones no se usan con tanta frecuencia como arctan, arccos y arcsen, la mayor parte de las calculadoras científicas no tienen teclas para ellas. Sin embargo, cualquier calculadora que determine arcsen, arccos y arctan se puede usar para obtener valores de **arccsc**, **arcsec** y **arccot**. A diferencia de que $\sec x=1/\cos x$, se ve que $\sec^{-1}x\neq 1/\cos^{-1}x$; más bien $\sec^{-1}x=\cos^{-1}(1/x)$ para $|x|\geq 1$. Hay relaciones similares para $\csc^{-1}x$ y $\cot^{-1}x$. Vea los problemas 62 a 64 de los ejercicios 4.7.

4.7 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-15.

En los problemas 1 a 14 determine el valor solicitado sin usar una calculadora.

1. $\operatorname{sen}^{-1}0$

2. $\tan^{-1}\sqrt{3}$

3. $\arccos(-1)$

4. $\operatorname{arcsen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5. $\arccos\frac{1}{2}$

6. $\arctan(-\sqrt{3})$

7. $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

8. $\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

9. $\tan^{-1}1$

10. $\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

11. $\arctan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

12. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

13. $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

14. $\arctan 0$

En los problemas 15 a 32, determine el valor indicado sin usar una calculadora.

15. $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$

16. $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3}\right)$

17. $\tan\left(\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$

18. $\operatorname{sen}\left(\arctan\frac{1}{4}\right)$

19. $\cos(\arctan(-2))$

20. $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{6}\right)\right)$

21. $\csc\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)$

22. $\sec(\tan^{-1}4)$

23. $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{5}\right)$

24. $\cos\left(\cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$

25. $\tan(\tan^{-1}1.2)$

26. $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}0.75)$

27. $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{16}\right)$

28. $\arccos\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)$

29. $\tan^{-1}(\tan\pi)$

30. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6}\right)$

31. $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

32. $\arctan\left(\tan\dfrac{\pi}{7}\right)$

En los problemas 33 a 40, escriba la expresión como una expresión algebraica en x.

33. $\operatorname{sen}(\tan^{-1}x)$

34. $\cos(\tan^{-1}x)$

35. $\tan(\operatorname{arcsen}x)$

36. $\sec(\arccos x)$

37. $\cot(\operatorname{sen}^{-1}x)$

38. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}x)$

39. $\csc(\arctan x)$

40. $\tan(\arccos x)$

En los problemas 41 a 48 trace la gráfica de la función.

41. $y = \arctan|x|$

42. $y = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$

43. $y = |\operatorname{arcsen}x|$

44. $y = \operatorname{sen}^{-1}(x + 1)$

45. $y = 2\cos^{-1}x$

46. $y = \cos^{-1}2x$

47. $y = \arccos(x - 1)$

48. $y = \cos(\operatorname{arcsen}x)$

En los problemas 49 a 54 calcule las soluciones de la ecuación en el intervalo indicado. (Exprese sus resultados con dos cifras decimales.)

49. $20\cos^2 x + \cos x - 1 = 0, \quad [0, \pi]$

50. $3\operatorname{sen}^2 x - 8\operatorname{sen}x + 4 = 0, \quad [-\pi/2, \pi/2]$

51. $\tan^2 x + \tan x - 1 = 0, \quad (-\pi/2, \pi/2)$

52. $3\operatorname{sen}2x + \cos x = 0, \quad [-\pi/2, \pi/2]$

53. $5\cos^3 x - 3\cos^2 x - \cos x = 0, \quad [0, \pi]$

54. $\tan^4 x - 3\tan^2 x + 1 = 0, \quad (-\pi/2, \pi/2)$.

55. Se puede definir a la función **arco cotangente** con $y = \operatorname{arccot} x$ (o $y = \cot^{-1}x$) si, y sólo si, $x = \cot y$, donde $0 < y < \pi$. Grafique $y = \operatorname{arccot} x$ e indique el dominio y el contradominio de esta función.

56. Se puede definir la función **arco cosecante** con $y = \operatorname{arccsc} x$ (o $y = \csc^{-1}x$) si, y sólo si, $x = \csc y$, donde $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ y $y \neq 0$. Grafique $y = \operatorname{arccsc} x$ e indique el dominio y el contradominio de esta función.

57. Una definición de la función **arco secante** es $y = \operatorname{arcsec} x$ (o $y = \sec^{-1}x$) si, y sólo si, $x = \sec y$, donde $0 \leq y \leq \pi$ y $y \neq \pi/2$. (Vea una definición alternativa en el problema 58.) Grafique $y = \operatorname{arcsec} x$ e indique el dominio y el contradominio de esta función.

58. Una definición alternativa de la función arco secante puede obtenerse restringiendo el dominio de la función secante a $[0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$. Con esta restricción, defina la función arco secante. Grafique $y = \operatorname{arcsec} x$ e indique el dominio y el contradominio de esta función.

59. Use la definición de la función arco cotangente del problema 55 e indique para cuáles valores de x es cierto que ***a***) $\cot(\operatorname{arccot} x) = x$ y ***b***) $\operatorname{arccot}(\cot x) = x$.

60. Use la definición de la función arco cosecante del problema 56 e indique para cuáles valores de x se cumple que ***a***) $\csc(\operatorname{arccsc} x) = x$ y ***b***) $\operatorname{arccsc}(\csc x) = x$.

61. Use la definición de la función arco secante del problema 57 e indique para cuáles valores de x se cumple que ***a***) $\sec(\operatorname{arcsec} x) = x$ y ***b***) $\operatorname{arcsec}(\sec x) = x$.

62. Verifique que $\operatorname{arccot} x = \pi/2 - \arctan x$ para todos los números reales x.

63. Verifique que $\operatorname{arccsc} x = \operatorname{arcsen}(1/x)$ para $|x| \geq 1$.

64. Verifique que $\operatorname{arcsec} x = \arccos(1/x)$ para $|x| \geq 1$.

En los problemas 65 a 70 use los resultados de los problemas 62 a 64 y una calculadora para determinar el valor correspondiente.

65. $\cot^{-1} 0.75$

66. $\csc^{-1}(-1.3)$

67. $\operatorname{arccsc}(-1.5)$

68. $\operatorname{arccot}(-0.3)$

69. $\operatorname{arcsec}(-1.2)$

70. $\sec^{-1} 2.5$

Aplicaciones diversas

71. Movimiento de un proyectil El ángulo de salida de una bala, para que llegue a un blanco a una distancia R (suponiendo que el blanco y el arma están a la misma altura) satisface

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g},$$

donde v_0 es la velocidad inicial y g es la aceleración de la gravedad. Si el blanco está a 800 pies del arma, y la velocidad inicial es de 200 pies/s, calcule el ángulo de salida. Use $g = 32$ pies/s^2. [*Sugerencia:* Hay dos soluciones.]

72. Deportes olímpicos En el lanzamiento de martillo se puede demostrar que la distancia máxima se alcanza con un ángulo de lanzamiento θ (medido desde la horizontal) que satisfaga

$$\cos 2\theta = \frac{gh}{v_0^2 + gh},$$

donde h es la altura del martillo sobre el suelo, en el lanzamiento, v_0 es la velocidad inicial y g es la aceleración de la gravedad. Para $v_0 = 13.7$ m/s y $h = 2.25$ m, calcule el ángulo óptimo de lanzamiento. Use $g = 9.81$ m/s^2.

73. Diseño de carreteras En el diseño de las carreteras y los ferrocarriles, las curvas tienen un peralte para producir una fuerza centrípeta que proporcione seguridad. El ángulo θ óptimo para un peralte se define con $\tan\theta = v^2/Rg$, donde v es la velocidad del vehículo, R el radio de la curva y g la aceleración de la gravedad. Vea la FIGURA 4.7.9. Como indica la fórmula, para determinado radio no hay un ángulo que sea correcto para todas las velocidades. En consecuencia, las curvas tienen peralte para la velocidad promedio del tráfico en ellas. Calcule el ángulo correcto de peralte para una curva de 600 pies de radio, en una carretera secundaria donde las velocidades son 30 mph en promedio. Use $g = 32$ pies/s^2. [*Sugerencia:* Use unidades consistentes.]

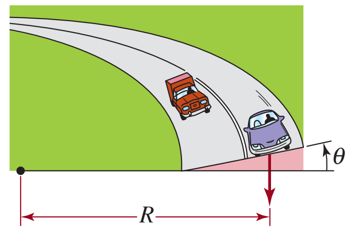


FIGURA 4.7.9 Curva con peralte, del problema 73

74. Diseño de carreteras, continuación Si μ es el coeficiente de fricción entre el vehículo y la carretera, entonces la velocidad máxima v_m a la que puede recorrer una curva sin resbalar se calcula con $v_m^2 = gR\tan(\theta + \tan^{-1}\mu)$, donde θ es el ángulo de peralte de la curva. Calcule v_m en el camino secundario del problema 73, si $\mu = 0.26$.

75. Geología Visto desde un costado, un cono de cenizas volcánicas se ve como un trapezoide isósceles. Vea la FIGURA 4.7.10. Los estudios de conos de ceniza que tienen menos de 50 000 años indican que la altura H_{co} del cono y el ancho W_{cr} del cráter se relacionan con el ancho W_{co} del cono mediante las ecuaciones $H_{co} = 0.18W_{co}$ y $W_{cr} = 0.40W_{co}$. Si $W_{co} = 1.00$, con estas ecuaciones determine el ángulo ϕ de la base del trapezoide, en la figura 4.7.10.


Cono volcánico

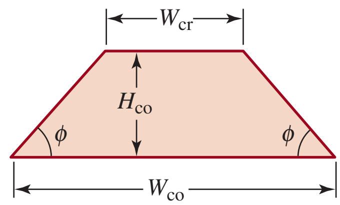


FIGURA 4.7.10 Cono de ceniza volcánica del problema 75

76. Circuitos eléctricos Bajo ciertas condiciones, la corriente $I(t)$ en un circuito eléctrico, en el momento t, se determina mediante $I(t) = I_0[\operatorname{sen}(\omega t + \theta)\cos\phi + \cos(\omega t + \theta)\operatorname{sen}\phi]$. Despeje t. [*Sugerencia:* Use la fórmula de suma del seno, y escriba entre paréntesis rectangulares la expresión, como una sola función seno. Vea (7) de la sección 4.5.]

Para discusión

77. Use una calculadora puesta en modo radián para evaluar arctan(tan 1.8), arccos(cos 1.8) y arcsen(sen 1.8). Explique los resultados.

78. Use una calculadora puesta en modo radián para evaluar $\tan^{-1}(\tan(-1))$, $\cos^{-1}(\cos(-1))$ y $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(-1))$. Explique los resultados.

79. En la sección 4.3 vimos que las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ se relacionan por desplazamiento y reflexión. Justifique la identidad

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

para toda x en $[-1, 1]$, determinando una relación similar entre las gráficas de $y = \operatorname{arcsen} x$ y $y = \arccos x$.

80. Con una calculadora puesta en modo radianes, determine cuál de las siguientes evaluaciones trigonométricas inversas producen un mensaje de error: ***a***) $\operatorname{sen}^{-1}(-2)$, ***b***) $\cos^{-1}(-2)$, ***c***) $\tan^{-1}(-2)$. Explique por qué.

81. Analice lo siguiente: ¿Cualquier función periódica puede ser uno-a-uno?

4.8 Movimiento armónico simple

Introducción Muchos objetos físicos vibran u oscilan en forma regular, moviéndose de aquí para allá a través de un intervalo de tiempo determinado. Algunos ejemplos son los péndulos de relojes, una masa sobre un resorte, las ondas sonoras, las cuerdas de una guitarra que se puntean, el corazón humano, la marea y la corriente alterna. En esta sección nos enfocaremos en los modelos matemáticos del movimiento oscilatorio no amortiguado de una masa sobre un resorte.

Antes de pasar a la discusión principal tenemos que abordar la gráfica de la suma de múltiplos constantes de cos Bx y sen Bx, es decir $y = c_1 \cos Bx + c_2 \operatorname{sen} Bx$, donde c_1 y c_2 son constantes.

□ **Adición de dos funciones sinusoidales** En la sección 4.3 hemos examinado las gráficas de curvas de senos y cosenos horizontalmente desplazadas. Resulta que cualquier combinación lineal de una función seno y una función coseno de la forma

$$y = c_1 \cos Bx + c_2 \operatorname{sen} Bx \tag{1}$$

donde c_1 y c_2 son constantes, se puede expresar ya sea como una función seno desplazada $y = A \operatorname{sen}(Bx + \phi)$, $B > 0$, o como una función coseno desplazada $y = A \cos(Bx + \phi)$. Note que en (1) las funciones de seno y coseno sen Bx y cos Bx tienen el mismo periodo $2\pi/B$.

EJEMPLO 1 Adición de un seno y un coseno

Grafique la función $y = \cos 2x - \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x$.

Solución Se usa una herramienta de gráficas que hemos mostrado en la FIGURA 4.8.1 para cuatro ciclos de las gráficas de $y = \cos 2x$ (en rojo) y $y = -\sqrt{3} \operatorname{sen} 2x$ (en verde). En la FIGURA 4.8.2 es obvio que el periodo de la suma de estas dos funciones es π, el periodo común de cos $2x$ y sen $2x$. También es aparente que la gráfica azul es una función seno (o coseno) horizontalmente desplazada. Aunque la figura 4.8.2 sugiere que la amplitud de la función $y = \cos 2x - \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x$ es 2, el desplazamiento de fase exacto de la gráfica ciertamente *no* es aparente.

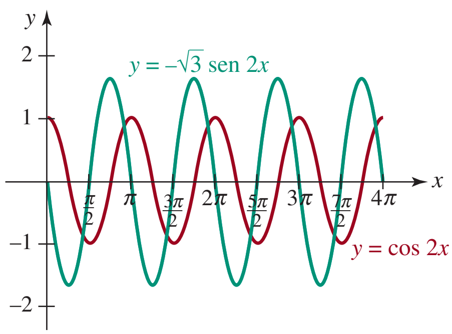


FIGURA 4.8.1 Gráficas superpuestas de $y = \cos 2x$ y $y = -\sqrt{3} \operatorname{sen} 2x$ del ejemplo 1

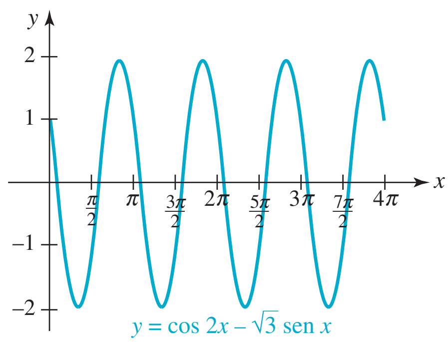


FIGURA 4.8.2 Gráfica de la suma $y = \cos 2x - \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x$ del ejemplo 1 ■

La forma de seno, $y = A$ sen $(Bx + \phi)$, es un poco más fácil de usar que la forma de coseno, $y = A \cos (Bx + \phi)$.

□ **Reducción a una función seno** Examinamos solamente la reducción de (1) a la forma $y = A$ sen $(Bx + \phi)$, $B > 0$.

REDUCCIÓN DE (1) A (2)

Para los números reales c_1, c_2, B y x,

$$c_1 \cos Bx + c_2 \operatorname{sen} Bx = A \operatorname{sen}(Bx + \phi), \tag{2}$$

donde A y ϕ son definidos por

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \tag{3}$$

y

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} \phi &= \frac{c_1}{A} \\ \cos \phi &= \frac{c_2}{A} \end{aligned}\right\} \tan \phi = \frac{c_1}{c_2}. \tag{4}$$

PRUEBA Para comprobar (2) utilizamos la fórmula de suma (7) de la sección 4.5:

$$\begin{aligned} A\,\text{sen}(Bx + \phi) &= A\,\text{sen}\,Bx\cos\phi + A\cos Bx\,\text{sen}\,\phi \\ &= (A\,\text{sen}\,\phi)\cos Bx + (A\cos\phi)\,\text{sen}\,Bx \\ &= c_1\cos Bx + c_2\,\text{sen}\,Bx \end{aligned}$$

e identificamos A sen $\phi = c_1$, A cos $\phi = c_2$. Por lo tanto, $\text{sen}\,\phi = c_1/A = c_1/\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y $\cos\phi = c_2/A = c_2/\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. ■

EJEMPLO 2 Ejemplo 1 revisitado

Exprese $y = \cos 2x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,2x$ como una sola función seno.

Solución Mediante las identificaciones $c_1 = 1$, $c_2 = -\sqrt{3}$ y $B = 2$ tenemos, según (3) y (4),

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\left.\begin{aligned} \text{sen}\,\phi &= \frac{1}{2} \\ \cos\phi &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \tan\phi = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Aunque $\tan\phi = -1/\sqrt{3}$, no podemos ciegamente suponer que $\phi = \tan^{-1}(-1/\sqrt{3})$. El ángulo que tomamos para ϕ debe ser consistente con los signos algebraicos de sen ϕ y cos ϕ. Puesto que sen $\phi > 0$ y cos $\phi < 0$, el lado terminal del ángulo ϕ se encuentra en el segundo cuadrante. Pero visto que el rango de la función de tangente inversa es el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, $\tan^{-1}(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6$ es un cuarto ángulo de cuadrante. El ángulo correcto se encuentra utilizando el ángulo de referencia $\pi/6$ para $\tan^{-1}(-1/\sqrt{3})$ para encontrar el segundo ángulo de cuadrante

$$\phi = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \text{ radianes.}$$

Por lo tanto, $y = \cos 2x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,2x$ se puede reescribir como

$$y = 2\,\text{sen}\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) \qquad \text{o} \qquad y = 2\,\text{sen}\,2\left(x + \frac{5\pi}{12}\right).$$

Por ende la gráfica $y = \cos 2x - \sqrt{3}$ sen $2x$ es la gráfica de $y = 2$ sen $2x$, que tiene la amplitud 2, el periodo $2\pi/2 = \pi$, y es desplazado $5\pi/12$ unidades hacia la izquierda. ■

□ Movimiento armónico simple

Considere el movimiento de una masa sobre un resorte como se muestra en la FIGURA 4.8.3. En la ausencia de fuerzas de fricción o amortiguación, se da un modelo matemático para el desplazamiento (o distancia dirigida) de la masa medida desde una posición que se llama **posición de equilibrio** mediante la función

$$y(t) = y_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\,\text{sen}\,\omega t. \tag{5}$$

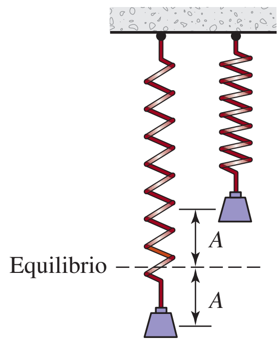


FIGURA 4.8.3 Un sistema de resorte-masa no amortiguado presenta un movimiento armónico simple

Se dice que el movimiento oscilatorio modelado por la función (5) es un **movimiento armónico simple**.

Dicho más precisamente, tenemos la siguiente definición.

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Se dice que un punto que se mueve en una línea de coordenadas cuya posición en el momento t es dada por

$$y(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \phi) \qquad \text{o} \qquad y(t) = A\cos(\omega t + \phi), \tag{6}$$

donde A, $\omega > 0$, y ϕ son constantes, presenta un **movimiento armónico simple**.

Casos especiales de las funciones trigonométricas (6) son $y(t) = A$ sen ωt, $y(t) = A \cos \omega t$ y $y(t) = c_1 \cos \omega t + c_1$ sen ωt.

□ **Terminología** Se dice que la función (5) es una **ecuación de movimiento** de la masa. También en (5), $\omega = \sqrt{k/m}$, donde k es la **constante de resorte** (un indicador de la rigidez del resorte), m es la **masa** sujetada al resorte (medida en unidades de masa o kilogramos), y_0 es el **desplazamiento inicial** de la masa (medido arriba o debajo de la posición de equilibrio), v_0 es la **velocidad inicial** de la masa, t es el **tiempo** medido en segundos y el **periodo** p del movimiento es $p = 2\pi/\omega$ segundos. El número $f = 1/p = 1/(2\pi/\omega) = \omega/2\pi$ se llama la **frecuencia** del movimiento. La frecuencia indica el número de ciclos completados por la gráfica por unidad de tiempo. Por ejemplo, si el periodo de (5) es $p = 2$ segundos, entonces sabemos que un ciclo de la función es completado en 2 segundos. La frecuencia $f = 1/p = \frac{1}{2}$ significa un medio segundo de un ciclo se completa en 1 segundo.

En el estudio del movimiento armónico simple es conveniente remodelar la ecuación de movimiento (5) como una sola expresión, involucrando únicamente la función seno:

$$y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi). \tag{7}$$

La reducción de (5) a la función seno (7) se puede realizar en exactamente la misma forma que se ilustra en el ejemplo 2. En esta situación hacemos las siguientes identificaciones entre (2) y (5):

$$c_1 = y_0, \quad c_2 = v_0/\omega, \quad A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{y} \quad B = \omega.$$

EJEMPLO 3 La ecuación del movimiento

a) Busque la ecuación del movimiento armónico simple (5) para un sistema de resorte-masa si $m = \frac{1}{16}$ barra, $y_0 = -\frac{2}{3}$ pie, $k = 4$ libra/pie y $v_0 = \frac{4}{3}$ pie/s

b) Busque el periodo y frecuencia de movimiento.

Solución *a*) Empezamos con la ecuación de movimiento armónico simple (5). Puesto que $k/m = 4/(\frac{1}{16}) = 64, \omega = \sqrt{k/m} = 8$ y $v_0/\omega = (\frac{4}{3})/8 = \frac{1}{6}$. Por lo tanto, (5) se vuelve

$$y(t) = -\tfrac{2}{3}\cos 8t + \tfrac{1}{6}\operatorname{sen} 8t. \tag{8}$$

b) El periodo de movimiento es $2\pi/8 = \pi/4$ segundos, la frecuencia es $4/\pi = 1.27$ ciclos por segundo. ■

EJEMPLO 4 Continuación del ejemplo 3

Exprese la ecuación del movimiento (8) como una sola función seno (7).

Solución Mediante $c_1 = -\frac{2}{3}, c_2 = \frac{1}{6}$, encontramos que la amplitud de movimiento es

$$A = \sqrt{(-\tfrac{2}{3})^2 + (\tfrac{1}{6})^2} = \tfrac{1}{6}\sqrt{17} \text{ pies.}$$

Luego, según

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\phi = -\frac{2}{3}/\frac{\sqrt{17}}{6} < 0 \\ \cos\phi = \frac{1}{6}/\frac{\sqrt{17}}{6} > 0 \end{array}\right\} \tan\phi = -4$$

podemos ver por los signos algebraicos sen $\phi < 0$ y $\cos \phi > 0$ que el lado terminal del ángulo ϕ se encuentra en el cuarto cuadrante. Por consiguiente, el valor correcto, pero aproximado de ϕ es $\tan^{-1}(-4) = -1.3258$. La ecuación del movimiento es entonces $y(t) = \frac{1}{6}\sqrt{17}\operatorname{sen}(8t - 1.3258)$. Como se muestra en la **FIGURA 4.8.4**, la amplitud del movimiento es $A = \sqrt{17}/6 \approx 0.6872$. Puesto que suponemos que no hay resistencia al movimiento, una vez que el sistema de resorte-masa se pone en movimiento, el modelo indica que permanece en movimiento rebotando de un lado al otro entre su desplazamiento máximo $\sqrt{17}/6$ pies arriba de la posición de equilibrio y un mínimo de $-\sqrt{17}/6$ pies debajo de la posición de equilibrio.

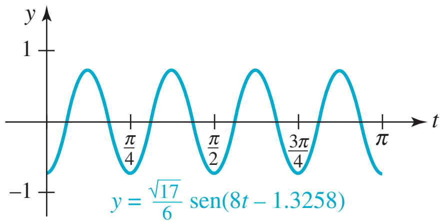


FIGURA 4.8.4 Gráfica de la ecuación de movimiento del ejemplo 4

Sólo en los dos casos $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, o $c_1 < 0$, $c_2 > 0$ podemos usar tan ϕ en (4) para escribir $\phi = \tan^{-1}(c_1/c_2)$. (¿Por qué?) De manera correspondiente, ϕ es un primer o cuarto ángulo de cuadrante.

4.8 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-15.

En los problemas 1 a 6, proceda igual que en el ejemplo 2 y reduzca la expresión trigonométrica dada a la forma $y = A\ \mathrm{sen}(Bx + \phi)$. Esboce la gráfica y dé la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase.

1. $y = \cos \pi x - \mathrm{sen}\, \pi x$

2. $y = \mathrm{sen}\dfrac{\pi}{2}x - \sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{2}x$

3. $y = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, 2x + \cos 2x$

4. $y = \sqrt{3}\cos 4x - \mathrm{sen}\, 4x$

5. $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\mathrm{sen}\, x - \cos x)$

6. $y = \mathrm{sen}\, x + \cos x$

En los problemas 7 a 10, proceda como en los ejemplos 3 y 4 y utilice las informaciones dadas para expresar la ecuación del movimiento armónico simple (5) para un sistema de resorte-masa en la forma trigonométrica (7). Dé la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento.

7. $m = \frac{1}{4}$ barra, $y_0 = \frac{1}{2}$ pie, $k = 1$ libra/pie y $v_0 = \frac{3}{2}$ pie/s

8. $m = 1.6$ barra, $y_0 = -\frac{1}{3}$ pie, $k = 40$ libras/pie y $v_0 = -\frac{5}{4}$ pie/s

9. $m = 1$ barra, $y_0 = -1$ pie, $k = 16$ libras/pie y $v_0 = -2$ pies/s

10. $m = 2$ barra, $y_0 = -\frac{2}{3}$ pie, $k = 200$ libras/pie y $v_0 = 5$ pies/s

11. La ecuación del movimiento armónico simple de un sistema de resorte-masa es $y(t) = \frac{5}{2}\mathrm{sen}(2t - \pi/3)$. Determine el desplazamiento inicial y_0 y la velocidad inicial v_0 de la masa. [*Sugerencia:* Utilice (5).]

12. Utilice la ecuación del movimiento armónico simple del sistema de resorte-masa dada en el problema 11 para buscar los tiempos para los que la masa pasa a través de la posición de equilibrio $y = 0$.

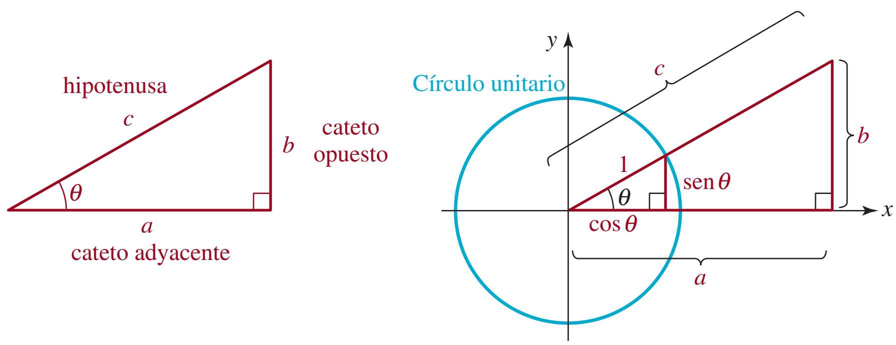
Aplicaciones diversas

13. Circuitos eléctricos Bajo ciertas circunstancias la corriente $I(t)$ en un circuito eléctrico en el tiempo t está dado por $I(t) = I_0[\mathrm{sen}(\omega t) + \theta)\cos\phi + \cos(\omega t + \theta)\mathrm{sen}\phi]$. Exprese $I(t)$ como una sola función seno de la forma dada en (7). [*Sugerencia:* Revise la fórmula en (7) de la sección 4.5.]

4.9 Trigonometría del triángulo rectángulo

Introducción La palabra *trigonometría* (del griego *trigonon*, triángulo, y *metria*, medición) se refiere a la medición de triángulos. En la sección 4.2 se definieron las funciones trigonométricas mediante coordenadas de puntos en el círculo unitario, y por medio de radianes se pudieron definir las funciones trigonométricas de cualquier ángulo. En esta sección demostraremos que las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo tienen una definición equivalente en función de las longitudes de los lados del triángulo.

Cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa En la **FIGURA 4.9.1*a*)** se ha trazado un triángulo rectángulo, y sus lados se identifican con a, b y c (que indican sus longitudes respectivas), y uno de los ángulos agudos representado por θ. Por el teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$. El lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**; los otros lados son los **catetos** del triángulo. Los catetos indicados con a y b son, respectivamente, el cateto **adyacente** al ángulo θ y el cateto **opuesto** al ángulo θ. También usaremos las abreviaturas **hip**, **ady** y **op** para representar las longitudes de esos lados.



a) Triángulo rectángulo con el ángulo agudo θ

b) El círculo unitario con el ángulo θ puesto en la posición normal

FIGURA 4.9.1 En *a*) y *b*), los triángulos rectángulos son iguales

Si se pone θ en la posición normal y se traza un círculo unitario con centro en el origen se ve, en la figura 4.9.1*b*), que hay dos triángulos rectángulos semejantes que contienen el mismo ángulo θ. Como los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales, entonces

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{1} = \frac{b}{c} = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \text{y} \qquad \frac{\cos\theta}{1} = \frac{a}{c} = \frac{\text{ady}}{\text{hip}}.$$

También

$$\frac{\tan\theta}{1} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{b}{a} = \frac{\text{op}}{\text{ady}}.$$

Entonces, aplicando las identidades recíprocas de la sección 4.4, cada función trigonométrica de θ se puede escribir como la relación de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo como sigue. Vea la **FIGURA 4.9.2**.

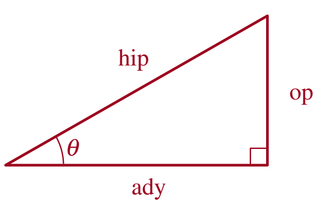


FIGURA 4.9.2 Definición de las funciones trigonométricas de θ

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE θ EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Para un ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo como el de la figura 4.9.2,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad & \cos\theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \\ \tan\theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad & \cot\theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}} \\ \sec\theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} \qquad & \csc\theta &= \frac{\text{hip}}{\text{op}}. \end{aligned} \tag{1}$$

EJEMPLO 1 Valores de las seis funciones trigonométricas

Determinar los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ del triángulo rectángulo de la FIGURA 4.9.3.

Solución En la figura 4.9.3 se ve que el cateto opuesto a θ tiene 8 de longitud, y que el cateto adyacente tiene 15 de longitud. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es

$$c^2 = 8^2 + 15^2 = 289 \qquad \text{y así} \qquad c = \sqrt{289} = 17.$$

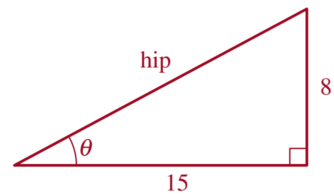


FIGURA 4.9.3 Triángulo rectángulo del ejemplo 1

Entonces, de acuerdo con (1), los valores de las seis funciones trigonométricas son:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{8}{17}, \qquad & \cos\theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{15}{17}, \\ \tan\theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{8}{15}, \qquad & \cot\theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}} = \frac{15}{8}, \\ \sec\theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} = \frac{17}{15}, \qquad & \csc\theta &= \frac{\text{hip}}{\text{op}} = \frac{17}{8}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Uso del esquema de un triángulo

Si θ es un ángulo agudo y $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{7}$, determinar los valores de las demás funciones trigonométricas de θ.

Solución Se traza un esquema de un triángulo rectángulo con un ángulo agudo θ que satisfaga $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{7}$, haciendo que op $= 2$ e hip $= 7$, como se ve en la FIGURA 4.9.4. Según el teorema de Pitágoras,

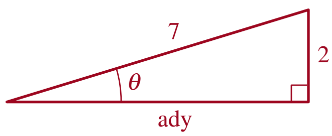


FIGURA 4.9.4 Triángulo rectángulo del ejemplo 2

$$2^2 + (\text{ady})^2 = 7^2 \qquad \text{y entonces} \qquad (\text{ady})^2 = 7^2 - 2^2 = 45.$$

Por lo tanto, $\qquad \text{ady} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$

Los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes se obtienen con las definiciones de (1):

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{3\sqrt{5}}{7}, \qquad & \sec\theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} = \frac{7}{3\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{15}, \\ \tan\theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}, \qquad & \cot\theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}} = \frac{7}{2}.$$

☐ Solución de triángulos rectángulos

Las aplicaciones de la trigonometría de triángulos rectángulos en campos como topografía y navegación implican **resolver triángulos rectángulos**. La expresión "resolver un triángulo" quiere decir que se desea determinar la longitud de cada lado y la medida de cada ángulo del triángulo. Se puede resolver cualquier triángulo rectángulo si se conocen dos lados o un ángulo agudo y un lado. Como se verá en los ejemplos que siguen, una parte esencial del proceso de solución es trazar e identificar el triángulo. Nuestra práctica general para identificar un triángulo será la que se muestra en la FIGURA 4.9.5. Los tres vértices se denominarán A, B y C, donde C es el vértice del ángulo recto. Representaremos los ángulos en A y B por α y β, y las longitudes de los lados opuestos a esos ángulos por a y b, respectivamente. La longitud del lado opuesto al ángulo recto en C se denomina c.

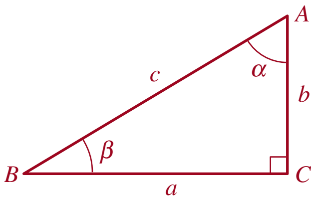


FIGURA 4.9.5 Identificación normal de un triángulo rectángulo

EJEMPLO 3 Solución de un triángulo rectángulo

Resolver el triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $4\sqrt{3}$ y uno de sus ángulos es de 60°.

Solución Primero se hace un esquema del triángulo y se identifica como se ve en la FIGURA 4.9.6. Se desea determinar a, b y β. Como α y β son ángulos complementarios, $\alpha + \beta = 90°$, y

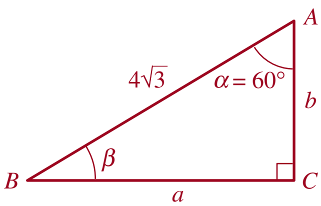


FIGURA 4.9.6 Triángulo rectángulo del ejemplo 3

$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 60° = 30°.$$

La longitud de la hipotenusa es, a saber, hip $= 4\sqrt{3}$. Para determinar a, la longitud del lado opuesto al ángulo $\alpha = 60°$, se escoge la función seno. De sen α = op/hip,

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{a}{4\sqrt{3}} \qquad \text{o} \qquad a = 4\sqrt{3}\operatorname{sen} 60°.$$

Como $\operatorname{sen} 60° = \sqrt{3}/2$, entonces

$$a = 4\sqrt{3}\operatorname{sen} 60° = 4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6.$$

Por último, para determinar la longitud b del lado adyacente al ángulo de 60° seleccionamos la función coseno. De cos α = ady/hip se obtiene

$$\cos 60° = \frac{b}{4\sqrt{3}}, \qquad \text{o sea} \qquad b = 4\sqrt{3}\cos 60°.$$

Como $\cos 60° = \frac{1}{2}$, entonces

$$b = 4\sqrt{3}\cos 60° = 4\sqrt{3}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}.$$ ■

En el ejemplo 3, una vez determinado a se podría haber calculado b usando el teorema de Pitágoras, o la función tangente. En general suele haber varias maneras de resolver un triángulo.

☐ Uso de calculadora

Si en un problema intervienen ángulos que no sean de 30°, 45° o 60°, se obtienen aproximaciones a los valores de las funciones trigonométricas que se buscan con una calculadora. En el resto de este capítulo, cuando se use una aproximación, redondearemos los resultados finales a la centésima, a menos que en el problema se pida otra cosa. Para aprovechar bien la exactitud de la calculadora, guarde los valores calculados de las funciones trigonométricas para cálculos posteriores. Si, por otra parte, se escribe una versión redondeada de un valor en la pantalla, y después se teclea en la calculadora, puede ser que disminuya la exactitud del resultado final.

EJEMPLO 4 Solución de un triángulo rectángulo

Resolver el triángulo rectángulo con catetos de longitud 4 y 5.

Solución Después de trazar e identificar el triángulo como se ve en la FIGURA 4.9.7, se deben calcular c, α y β. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, la hipotenusa c es

$$c = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \approx 6.40.$$

Para determinar β usaremos $\tan \beta = \text{op/ady}$. (Si se opta por trabajar con las cantidades dadas se evitan los errores debidos a las aproximaciones anteriores.) Entonces,

$$\tan \beta = \tfrac{4}{5} = 0.8.$$

En una calculadora en modo grado, se determina $\beta \approx 38.66°$. Como $\alpha = 90° - \beta$ se obtiene $\alpha \approx 51.34°$. ■

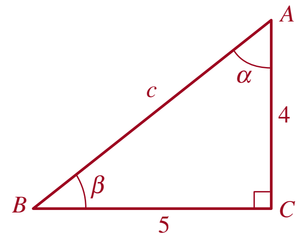


FIGURA 4.9.7 Triángulo rectángulo del ejemplo 4

EJEMPLO 5 Cálculo de la altura de un árbol

Una cometa queda atorada en las ramas de la copa de un árbol. Si el hilo de 90 pies de la cometa forma un ángulo de 22° con el suelo, estime la altura del árbol, calculando la distancia de la cometa al suelo.

Solución Sea h la altura de la cometa. En la FIGURA 4.9.8 se ve que

$$\frac{h}{90} = \operatorname{sen} 22° \qquad \text{y así} \qquad h = 90 \operatorname{sen} 22° \approx 33.71 \text{ pies}$$ ■

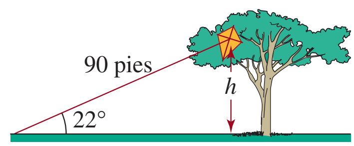


FIGURA 4.9.8 Árbol del ejemplo 5

EJEMPLO 6 Cálculo de las dimensiones de un corte a sierra

Un carpintero corta el extremo de una tabla de 4 pulgadas, formando un bisel de 25° con respecto a la vertical, comenzando en un punto a $1\frac{1}{2}$ pulgadas del extremo de la tabla. Calcular las longitudes del corte diagonal y del lado restante. Vea la FIGURA 4.9.9.

Solución Sean x, y y z las dimensiones (desconocidas), como se ve en la figura 4.9.9. Entonces, de acuerdo con la definición de la función tangente,

$$\tan 25° = \frac{x}{4} \qquad \text{así que, entonces} \qquad x = 4 \tan 25° \approx 1.87 \text{ pulg.}$$

Para calcular y se observa que

$$\cos 25° = \frac{4}{y} \qquad \text{así que} \qquad y = \frac{4}{\cos 25°} \approx 4.41 \text{ pulg.}$$

Ya que $z = \frac{3}{2} + x$ y $x \approx 1.87$ pulg., se ve que $z \approx 1.5 + 1.87 \approx 3.37$ pulg. ■

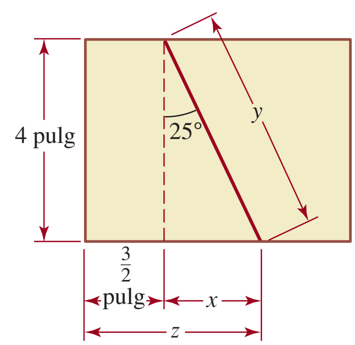


FIGURA 4.9.9 Corte a sierra del ejemplo 6

□ Ángulos de elevación y de depresión

El ángulo entre la visual del observador a un objeto, y la horizontal, tiene un nombre especial. En el caso de la FIGURA 4.9.10, si la visual

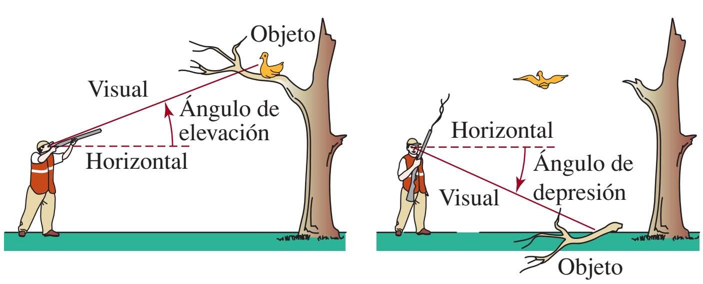


FIGURA 4.9.10 Ángulos de elevación y depresión

es hacia un objeto arriba de la horizontal, el ángulo se llama ángulo de nivel, y en el caso general se llama **ángulo de elevación**, mientras que si la visual es hacia un objeto abajo de la horizontal, el ángulo se llama **ángulo de depresión**.

EJEMPLO 7 Uso de los ángulos de elevación

Un topógrafo usa un instrumento llamado teodolito para medir el ángulo de elevación entre el nivel del piso y la cumbre de una montaña. En un punto, se mide un ángulo de elevación de 41°. Medio kilómetro más lejos de la base de la montaña, el ángulo de elevación medido es de 37°. ¿Qué altura tiene la montaña?

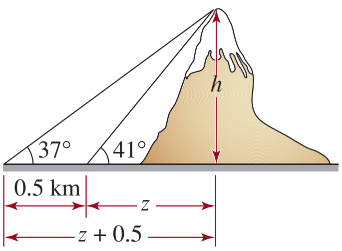


FIGURA 4.9.11 Montaña del ejemplo 7

Solución Sea h la altura de la montaña. La FIGURA 4.9.11 muestra que hay dos triángulos rectángulos que comparten un lado común, h; entonces, se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas, h y z:

$$\frac{h}{z + 0.5} = \tan 37° \qquad \text{y} \qquad \frac{h}{z} = \tan 41°.$$

De ambas ecuaciones se despeja h y se obtiene

$$h = (z + 0.5)\tan 37° \qquad \text{y} \qquad h = z \tan 41°.$$

Se igualan los dos últimos resultados, y se llega a una ecuación con la que podemos determinar la distancia z:

$$(z + 0.5)\tan 37° = z \tan 41°.$$

Al despejar z se ve que

$$z = \frac{-0.5 \tan 37°}{\tan 37° - \tan 41°}.$$

Ahora se puede calcular h con $h = z \tan 41°$.

$$h = \frac{-0.5 \tan 37° \tan 41°}{\tan 37° - \tan 41°} \approx 2.83 \text{ km}.$$

☐ **Construir una función** La sección 2.8 se dedicó a formar o construir funciones que se describieron o expresaron en palabras. Como se subrayó en ella, es una tarea con la que seguramente se encontrará el lector en cálculo. Nuestro último ejemplo ilustra un procedimiento recomendado para trazar una figura e identificar cantidades de interés, con variables adecuadas.

EJEMPLO 8 Definición de funciones que implican trigonometría

Un avión que vuela a 2 millas de altitud se acerca a una estación de radar, como muestra la FIGURA 4.9.12.

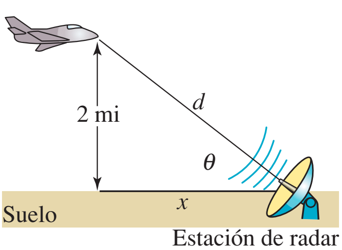


FIGURA 4.9.12 Avión del ejemplo 8

a) Expresar la distancia d entre el avión y la estación de radar en función del ángulo de elevación θ.

b) Expresar el ángulo de elevación θ del avión en función de la separación horizontal x entre el avión y la estación de radar.

Solución Como se ve en la figura 4.9.12, θ es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo.

a) Se pueden relacionar la distancia d y el ángulo θ con sen $\theta = 2/d$. Se despeja d y resulta

$$d(\theta) = \frac{2}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \text{o sea} \qquad d(\theta) = 2\csc\theta,$$

donde $0° < \theta \leq 90°$.

b) La separación horizontal x y θ se relacionan con $\tan \theta = 2/x$. Se aprovecha la función tangente inversa para despejar θ:

$$\theta(x) = \tan^{-1}\frac{2}{x},$$

donde $0 < x < \infty$. ■

4.9 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-15.

En los problemas 1 a 10 determine los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ del triángulo.

1.

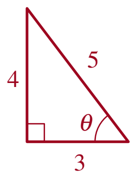


FIGURA 4.9.13 Triángulo del problema 1

2.

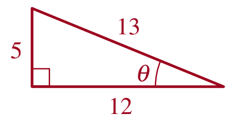


FIGURA 4.9.14 Triángulo del problema 2

3.

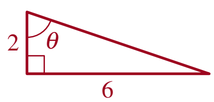


FIGURA 4.9.15 Triángulo del problema 3

4.

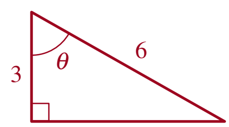


FIGURA 4.9.16 Triángulo del problema 4

5.

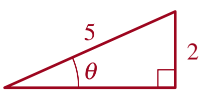


FIGURA 4.9.17 Triángulo del problema 5

6.

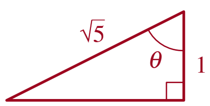


FIGURA 4.9.18 Triángulo del problema 6

7.

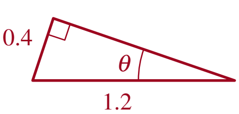


FIGURA 4.9.19 Triángulo del problema 7

8.

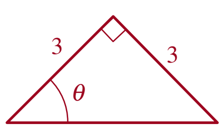


FIGURA 4.9.20 Triángulo del problema 8

9.

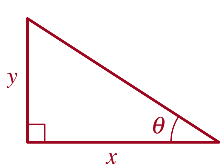


FIGURA 4.9.21 Triángulo el problema 9

10.

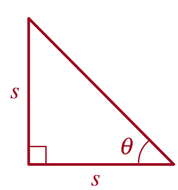


FIGURA 4.9.22 Triángulo del problema 10

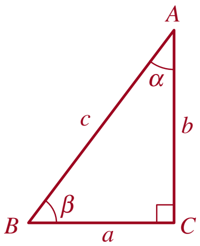


FIGURA 4.9.23 Triángulo de los problemas 11 a 22

En los problemas 11 a 22, calcule las incógnitas indicadas. Cada problema se refiere al triángulo de la FIGURA 4.9.23.

11. $a = 4, \beta = 27°; b, c$

12. $c = 10, \beta = 49°; a, b$

13. $b = 8, \beta = 34.33°; a, c$

14. $c = 25, \alpha = 50°; a, b$

15. $b = 1.5, c = 3; \alpha, \beta, a$

16. $a = 5, b = 2; \alpha, \beta, c$

17. $a = 4, b = 10; \alpha, \beta, c$

18. $b = 4, \alpha = 58°; a, c$

19. $a = 9, c = 12; \alpha, \beta, b$

20. $b = 3, c = 6; \alpha, \beta, a$

21. $b = 20, \alpha = 23°; a, c$

22. $a = 11, \alpha = 33.5°; b, c$

En los problemas 23 y 24, resuelva para x en el triángulo dado.

23.

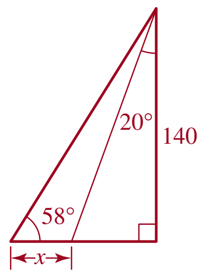


FIGURA 4.9.24 Triángulo del problema 23

24.

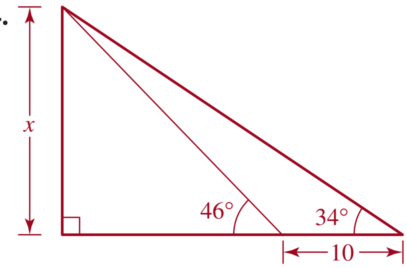


FIGURA 4.9.25 Triángulo del problema 24

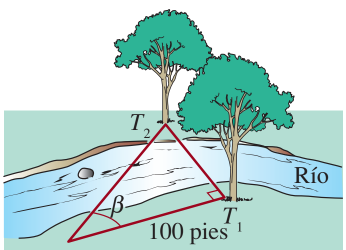


FIGURA 4.9.26 Árboles y río del problema 26

25. Un edificio proyecta una sombra de 20 m de longitud. Si el ángulo de la punta de la sombra a un punto en la parte alta del edificio es de 69° ¿qué altura tiene el edificio?

26. Dos árboles están en las orillas opuestas de un río, como se ve en la FIGURA 4.9.26. Se mide una línea de referencia de 100 pies del árbol T_1 y de esa posición se mide un ángulo β a T_2, que resulta de 29.7°. Si la línea de referencia es perpendicular al segmento de recta entre T_1 y T_2, calcule la distancia entre los dos árboles.

27. Una torre de 50 pies está a la orilla de un río. El ángulo de elevación entre la orilla opuesta y la punta de la torre es de 37°. ¿Qué anchura tiene el río?

28. Un topógrafo usa un geodímetro para medir la distancia, en línea recta, desde un punto en el suelo hasta la cumbre de una montaña. Con la información de la FIGURA 4.9.27 calcule la altura de la montaña.

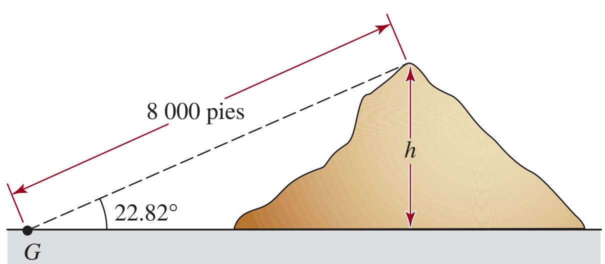


FIGURA 4.9.27 Montaña del problema 28

29. Un observador en la azotea del edificio A mide un ángulo de depresión de 27° entre la horizontal y la base del edificio B. El ángulo de elevación del mismo punto en la azotea a la azotea del segundo edificio es de 41.42°. ¿Cuál es la altura del edificio B, si la altura del edificio A es de 150 pies? Suponga que los edificios A y B están sobre el mismo plano horizontal.

30. Calcule la altura h de una montaña, con la información de la FIGURA 4.9.28.

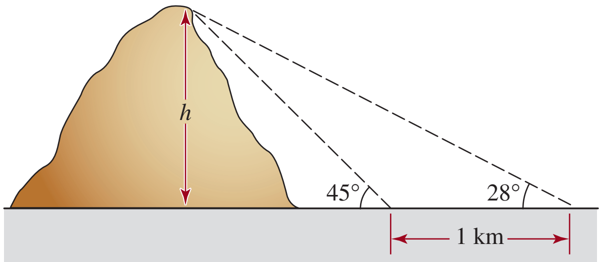


FIGURA 4.9.28 Montaña del problema 30

31. La parte superior de una escalera de 20 pies está recargada contra la orilla del techo de una casa. Si el ángulo de inclinación de la escalera con respecto a la horizontal es de 51°, ¿cuál es la altura aproximada de la casa, y cuál es la distancia del pie de la escalera a la base de la casa?

32. Un avión vuela horizontalmente a 25 000 pies de altura, y se acerca a una estación de radar, ubicada sobre una montaña de 2 000 pies de altura. En determinado momento, el ángulo entre el plato de radar que apunta hacia el avión y la horizontal es de 57°. ¿Cuál es la distancia en línea recta, en millas, entre el avión y la estación de radar en ese instante?

33. Un tramo recto de carretera de 5 millas sube a una montaña de 4 000 pies de altura. Determine el ángulo que forma la carretera con la horizontal.

34. Las dimensiones de una caja se ven en la FIGURA 4.9.29. Calcule la longitud de la diagonal entre las esquinas P y Q. ¿Cuál es el ángulo θ que forma la diagonal con la orilla inferior de la caja?

35. Unos observadores en dos pueblos A y B, a cada lado de una montaña de 12 000 pies de altura, miden los ángulos de elevación entre el suelo y la cumbre de la montaña. Vea la FIGURA 4.9.30. Suponiendo que los pueblos y la cumbre de la montaña están en el mismo plano vertical, calcule la distancia entre ellos.

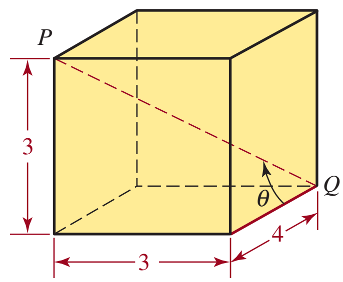


FIGURA 4.9.29 Caja del problema 34

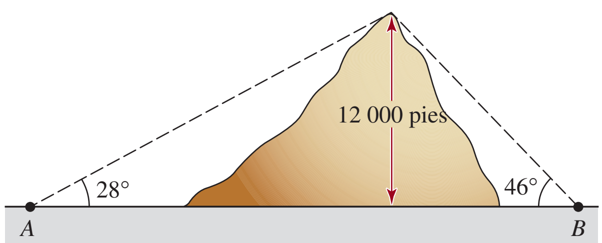
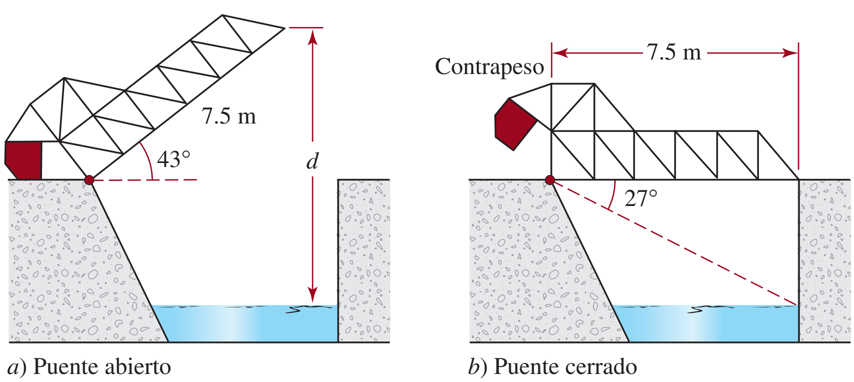


FIGURA 4.9.30 Montaña del problema 35

36. Un puente levadizo[1] mide 7.5 m de orilla a orilla, y cuando se abre por completo forma un ángulo de 43° con la horizontal. Vea la FIGURA 4.9.31*a*). Cuando el puente se cierra,



a) Puente abierto

b) Puente cerrado

FIGURA 4.9.31 Puente levadizo del problema 36

[1] El puente levadizo de la figura 4.9.31, donde el claro está balanceado continuamente por un contrapeso, se llama puente *basculante*.

el ángulo de depresión de la orilla a un punto en la superficie del agua bajo el extremo opuesto es de 27°. Vea la figura 4.9.31*b*). Cuando el puente está totalmente abierto, ¿cuál es la distancia *d* entre el punto más alto del puente y el agua?

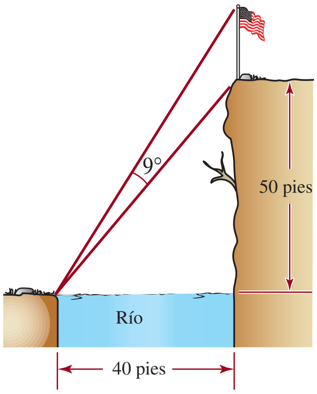
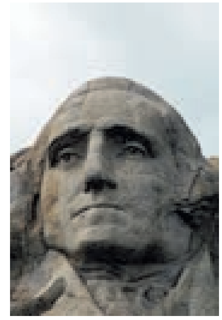


FIGURA 4.9.32 Asta de bandera del problema 35

37. Una bandera está en la orilla de un acantilado de 50 pies de altura, en la orilla de un río de 40 pies de ancho. Vea la **FIGURA 4.9.32**. Un observador en la orilla opuesta del río mide un ángulo de 9° entre su visual a la punta del asta y su visual a la base del asta. Calcule la altura del asta.



Busto de George Washington en el monte Rushmore

38. Desde un mirador a 1 000 pies de la base del monte Rushmore, el ángulo de elevación a la coronilla de la cabeza esculpida de George Washington mide 80.05°, mientras que el ángulo de elevación hasta la punta del mentón es de 79.946°. Calcule la altura de la cabeza de George Washington.

39. La longitud de un avión Boeing 747 es de 231 pies. ¿Cuál es la altura del avión, si abarca un ángulo de 2° cuando está directamente arriba de un observador en el suelo? Vea la **FIGURA 4.9.33**.

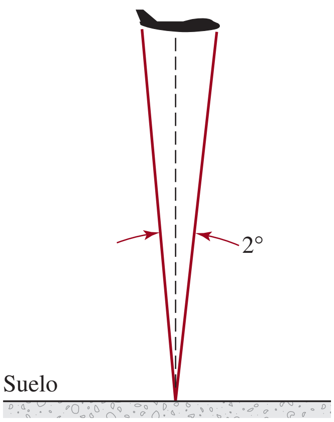


FIGURA 4.9.33 Avión del problema 39

40. La altura del estilo de un gnomon (reloj de Sol) es de 4 pulgadas. Cuando su sombra mide 6 pulgadas, ¿cuál es el ángulo de elevación del Sol?

Reloj de sol

41. Un radar meteorológico puede medir el ángulo de elevación a la parte superior de una tempestad de rayos, y también su distancia (la distancia horizontal a la tempestad). Si la distancia a una tempestad es de 90 km y el ángulo de elevación es de 4°, ¿puede un avión de pasajeros subir 10 km para volar sobre la tempestad?

42. El cielo de nubes es la altitud mínima que tiene la base de las nubes. En los aeropuertos, el cielo de nubes debe tener la altura suficiente para que los despegues y los aterrizajes sean seguros. Por la noche, se lo puede determinar iluminando la base de ellas, con un faro apuntado verticalmente hacia arriba. Si un observador está a 1 km del faro, y el ángulo de elevación a la base de la nube iluminada es de 8°, calcule el cielo de nubes. Vea la **FIGURA 4.9.34**. (Durante el día, los cielos de nubes suelen estimarse a la vista. Sin embargo, si se requiere un valor exacto, se infla un globo para que suba a una velocidad constante conocida. A continuación se suelta y se toma el tiempo hasta que desaparece en la nube. El cielo de nubes se determina multiplicando la velocidad por el tiempo de ascenso; para este cálculo no se requiere trigonometría.)

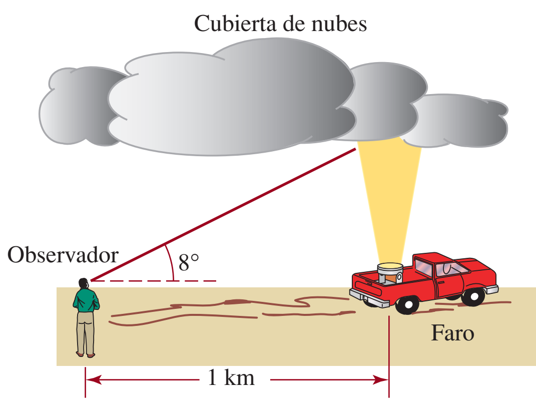


FIGURA 4.9.34 Faro para el problema 42

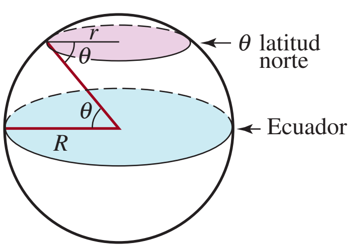


FIGURA 4.9.35 Tierra, problema 43

43. Suponiendo que la Tierra es una esfera, demuestre que $C_\theta = C_e \cos\theta$, donde C_θ es la circunferencia del paralelo de latitud en el ángulo de latitud θ y C_e es la circunferencia de la Tierra en el ecuador. Vea la **FIGURA 4.9.35**. [*Sugerencia:* $R\cos\theta = r$.]

44. Con el problema 43, y sabiendo que el radio R de la Tierra es de 6 400 km, calcule:
a) La circunferencia del Círculo Ártico, que está a 66°33′ N (66.55° N) de latitud.
b) La distancia "alrededor del mundo" a la latitud de 58°40′ N (58.67° N).

45. La distancia entre la Tierra y la Luna varía mientras ésta gira alrededor de nuestro planeta. En determinado momento se mide el ángulo de **paralaje geocéntrico** que se ve en la FIGURA 4.9.36, y resulta de 1°. Calcule, redondeando a las 100 millas, la distancia entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna en ese instante. Suponga que el radio de la Tierra es de 3 963 millas.

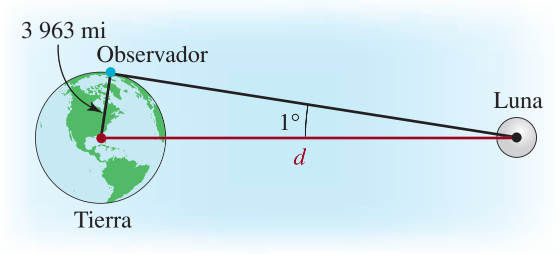


FIGURA 4.9.36 Ángulo del problema 45

46. La longitud final de un flujo de lava volcánica parece decrecer a medida que aumenta la altura de un cráter adventicio por donde sale. Un estudio empírico del monte Etna indica que la longitud final L del flujo de lava, en función de la elevación h, es

$$L = 23 - 0.0053h,$$

donde L está en kilómetros y h en metros. Suponga que un pueblo siciliano está a 750 m de altura en una pendiente de 10°, directamente abajo de un cráter adventicio que está a 2 500 m. Vea la FIGURA 4.9.37. De acuerdo con la fórmula, ¿a qué distancia se acercará el flujo de lava al pueblo?

Monte Etna

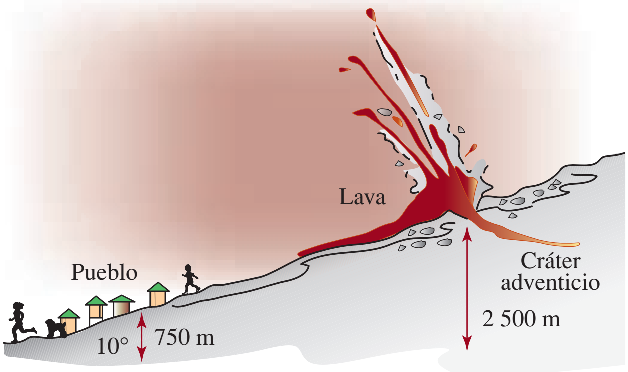


FIGURA 4.9.37 Flujo de lava del problema 46

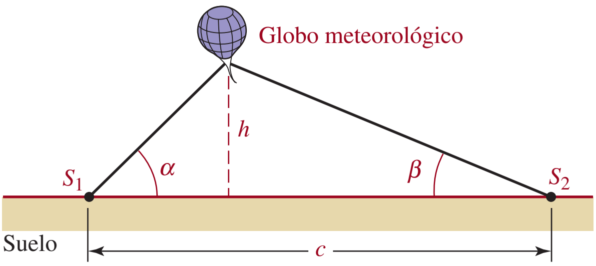


FIGURA 4.9.38 Globo meteorológico del problema 47

47. Como se ve en la FIGURA 4.9.38, dos estaciones rastreadoras S_1 y S_2 avistan un globo meteorológico entre ellas, con los ángulos respectivos de elevación α y β. Exprese la altura h del globo en función de α y β, y la distancia c entre las estaciones rastreadoras. Suponga que esas estaciones y el globo están en el mismo plano vertical.

48. Un coche en una carrera de "cajas de jabón" rueda cuesta abajo. Con la información de la **FIGURA 4.9.39** calcule la distancia total $d_1 + d_2$ que recorre la caja de jabón.

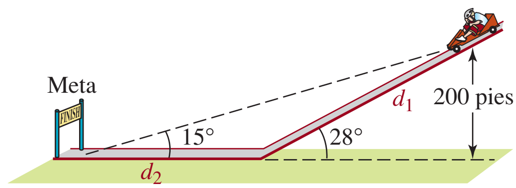


FIGURA 4.9.39 Caja de jabón del problema 48

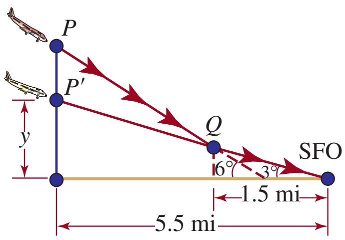
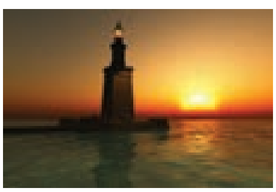


FIGURA 4.9.40 Dos trayectorias de deslizamiento en el problema 49

49. Historia reciente La mayoría de los aviones se acercan al aeropuerto internacional de San Francisco (SFO) con una trayectoria de planeo de 3°, empezando en un punto a 5.5 millas del campo. En los años ochenta, la FAA experimentó en SFO con un acercamiento computarizado de dos segmentos donde un avión se acerca al campo sobre una trayectoria de planeo de 6°, empezando en un punto a 5.5 millas del campo para luego cambiar a una trayectoria de planeo de 3° en un punto Q a 1.5 millas del punto de aterrizaje. El objetivo de este acercamiento experimental era reducir el ruido de los aviones sobre las áreas residenciales circundantes. Compare la altura de un avión P' usando el acercamiento estándar con la altura de un avión P cuando ambos aviones se encuentran a 5.5 millas del aeropuerto. Vea la **FIGURA 4.9.40**.

50. Historia antigua En un artículo de la enciclopedia en línea *Wikipedia* se estima que la altura h del Faro de Alejandría, uno de las Siete Maravillas del Mundo Antiguo, construido entre 280 y 247 a.C., era de entre 393 y 450 pies. El artículo sigue diciendo que había afirmaciones antiguas de que la luz se podía ver en el mar desde una distancia de 29 millas. Use el triángulo de la **FIGURA 4.9.41** junto con las dos alturas dadas h para determinar la exactitud de la afirmación de 29 millas. Suponga que el radio de la Tierra sea $r = 3\,963$ millas y que s sea la distancia medida en millas sobre el mar. [*Sugerencia:* Use 1 pie y (4) de la sección 4.1.]



Homenaje del artista al Faro de Alejandría

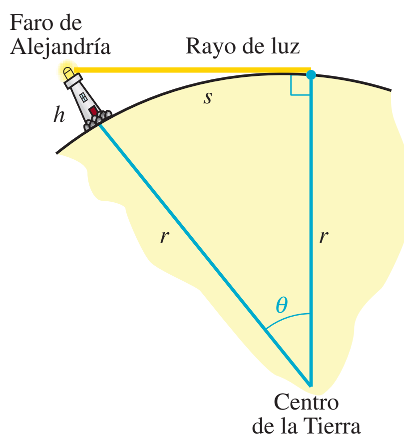


FIGURA 4.9.41 El faro del problema 50

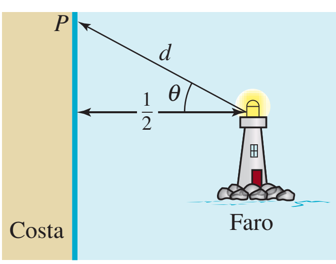


FIGURA 4.9.42 Faro del problema 52

En los problemas 51 a 54, proceda como en el ejemplo 7 y traduzca las palabras a una función adecuada.

51. Un telescopio rastreador, que está a 1.25 km del punto de lanzamiento de un cohete, da seguimiento a un cohete que asciende verticalmente. Exprese la altura h del cohete en función del ángulo de elevación θ.

52. Un faro está a media milla frente a la costa, e ilumina un punto P de la costa. Exprese la distancia d del faro hasta el punto iluminado P en función del ángulo θ, como se ve en la **FIGURA 4.9.42**.

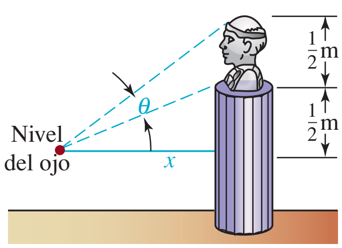


FIGURA 4.9.43 Ángulos de visual del problema 53

53. Una estatua se coloca sobre un pedestal, como se ve en la **FIGURA 4.9.43**. Exprese el ángulo de la visual θ en función de la distancia x al pedestal.

54. Una mujer en una isla desea llegar a un punto R, sobre una costa recta, desde un punto P en la isla. El punto P está a 9 millas de la costa y a 15 millas del punto R. Vea la FIGURA 4.9.44. Si la mujer rema en un bote a 3 mi/h hacia un punto Q en tierra y después camina el resto sobre la costa, a 5 mi/h, exprese el tiempo total que tarda la mujer en llegar al punto R, en función del ángulo indicado θ. [*Sugerencia:* Distancia = velocidad × tiempo.]

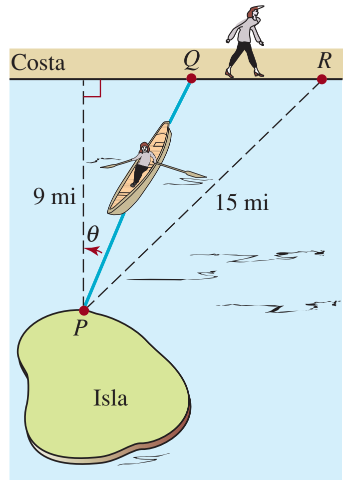


FIGURA 4.9.44 Mujer remando a la costa, problema 54

4.10 Ley de los senos y ley de los cosenos

Introducción En la sección 4.9 se explicó cómo resolver triángulos rectángulos. En esta sección describiremos dos técnicas para resolver triángulos en general.

Ley de los senos Examine el triángulo ABC de la FIGURA 4.10.1, cuyos ángulos son α, β y γ, y sus lados opuestos correspondientes son BC, AC y AB. Si se conoce la longitud de un lado y otras dos partes del triángulo, se pueden determinar las tres partes que restan. Una forma de hacerlo es con la **ley de los senos**.

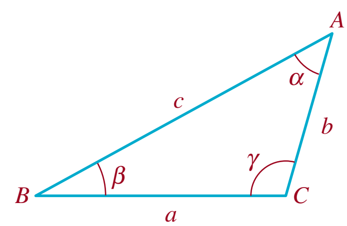


FIGURA 4.10.1 Triángulo general

LEY DE LOS SENOS

Supongamos que los ángulos α, β y γ, y los lados opuestos de longitud a, b y c son como se muestran en la figura 4.10.1. Entonces

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}. \tag{1}$$

Aunque la ley de los senos es válida para cualquier triángulo, sólo la deduciremos aquí para triángulos acutángulos o agudos, esto es, en los que los tres ángulos, α, β y γ son menores de 90°. Como se ve en la FIGURA 4.10.2, sea h la altura desde el vértice A al lado BC. Como la altura es perpendicular a la base BC, determina dos triángulos rectángulos. En consecuencia, se puede escribir

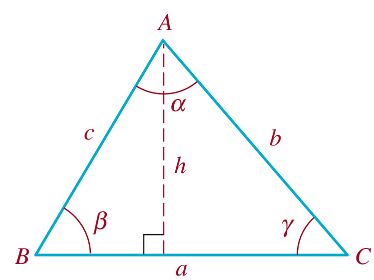


FIGURA 4.10.2 Triángulo agudo

$$\frac{h}{c} = \operatorname{sen}\beta \qquad \text{y} \qquad \frac{h}{b} = \operatorname{sen}\gamma. \tag{2}$$

Así, las ecuaciones (2) se transforman en

$$h = c\operatorname{sen}\beta \qquad \text{y} \qquad h = b\operatorname{sen}\gamma. \tag{3}$$

Se igualan las dos expresiones en (3), lo que da c sen $\beta = b$ sen γ, por lo que

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}. \tag{4}$$

Si se usa la altura desde el vértice C hasta el lado AB de la misma forma, entonces

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}. \tag{5}$$

Al combinar (4) y (5) se llega al resultado que se muestra en (1).

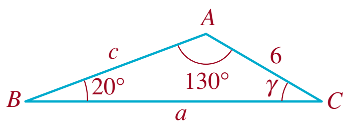


FIGURA 4.10.3 Triángulo del ejemplo 3

EJEMPLO 1 Determinación de las partes de un triángulo

Calcular las partes restantes del triángulo de la FIGURA 4.10.3.

Solución Sean $\beta = 20°$, $\alpha = 30°$ y $b = 6$. Entonces, $\gamma = 180° - 20° - 130° = 30°$. De acuerdo con (1),

$$\frac{\operatorname{sen} 130°}{a} = \frac{\operatorname{sen} 20°}{6} = \frac{\operatorname{sen} 30°}{c}. \tag{6}$$

Usaremos la primera igualdad de (6) para despejar a:

$$a = 6\frac{\operatorname{sen} 130°}{\operatorname{sen} 20°} \approx 13.44.$$

Con la segunda igualdad de (6) se obtiene c:

$$c = 6\frac{\operatorname{sen} 30°}{\operatorname{sen} 20°} \approx 8.77.$$

■

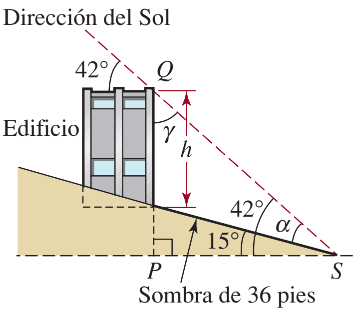


FIGURA 4.10.4 Triángulo QPS del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Altura de un edificio

Un edificio está al lado de una colina que baja formando un ángulo de 15°. El sol está sobre la colina, y desde el edificio tiene un ángulo de elevación de 42°. Calcular la altura del edificio, si su sombra mide 36 pies de longitud.

Solución Sea h la altura del edificio sobre la pendiente, con lo cual se forma un triángulo rectángulo QPS como se ve en la FIGURA 4.10.4. Ahora bien, $\alpha + 15° = 42°$, por lo tanto $\alpha = 27°$. Como $\triangle QPS$ es triángulo rectángulo, $\gamma = 90° - 42° = 48°$. Por la ley de los senos (1),

$$\frac{\operatorname{sen} 27°}{h} = \frac{\operatorname{sen} 48°}{36} \quad \text{así que} \quad h = 36\frac{\operatorname{sen} 27°}{\operatorname{sen} 48°} \approx 21.99 \text{ pies}.$$

■

En los ejemplos 1 y 2, donde los datos fueron *dos ángulos y un lado*, cada triángulo tuvo una solución única. Sin embargo, puede ser que no siempre sea así, cuando los datos de los triángulos sean *dos lados y un ángulo opuesto a uno de esos lados*. El siguiente ejemplo ilustra este caso.

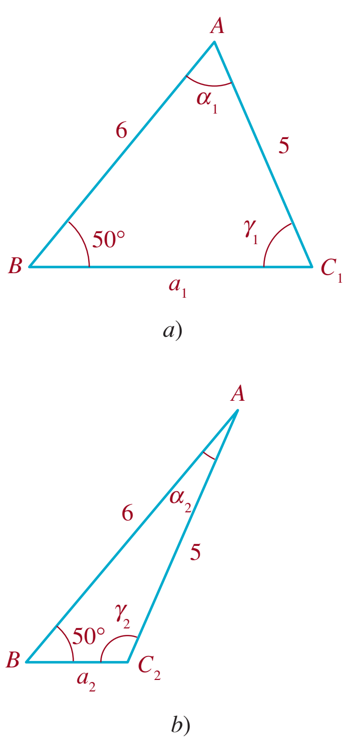


FIGURA 4.10.5 Triángulos del ejemplo 3

EJEMPLO 3 Los datos determinan dos triángulos

Calcule las partes restantes del triángulo con $\beta = 50°$, $b = 5$ y $c = 6$.

Solución Por la ley de los senos,

$$\frac{\operatorname{sen} 50°}{5} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{6} \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} \gamma = \frac{6}{5}\operatorname{sen} 50° \approx 0.9193.$$

Con una calculadora puesta en modo grados, se obtiene el resultado $\gamma \approx 66.82°$. Llegados aquí es esencial recordar que la función seno también es positiva para ángulos de segundo cuadrante. En otras palabras, hay otro ángulo que satisface $0° \leq \gamma \leq 180°$ para el cual $\operatorname{sen} \gamma \approx 0.9193$. Si se usa 66.82° como ángulo de referencia, se ve que el ángulo del segundo cuadrante es $180° - 66.82° = 113.18°$. Por consiguiente, las dos posibilidades de γ son $\gamma_1 \approx 66.82°$ y $\gamma_2 \approx 113.18°$. Así, como se ve en la FIGURA 4.10.5, hay dos triángulos posibles, ABC_1 y ABC_2, que satisfacen las tres condiciones de los datos.

Para terminar la solución del triángulo ABC_1 (figura 4.10.5*a*), primero se determina $\alpha_1 = 180° - \gamma_1 - \beta \approx 63.18°$. Para calcular el lado opuesto a este ángulo se usa

$$\frac{\operatorname{sen} 63.18°}{a_1} = \frac{\operatorname{sen} 50°}{5} \quad \text{que da como resultado} \quad a_1 = 5\left(\frac{\operatorname{sen} 63.18°}{\operatorname{sen} 50°}\right) \approx 5.83$$

Para completar la solución del triángulo ABC_2 (figura 4.10.5*b*), se determina $\alpha_2 = 180° - \gamma_2 - \beta \approx 16.82°$. Entonces, de

$$\frac{\operatorname{sen} 16.82°}{a_2} = \frac{\operatorname{sen} 50°}{5} \quad \text{se ve que} \quad a_2 = 5\left(\frac{\operatorname{sen} 16.82°}{\operatorname{sen} 50°}\right) \approx 1.89. \quad ■$$

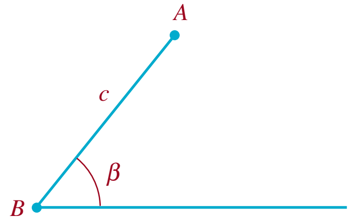
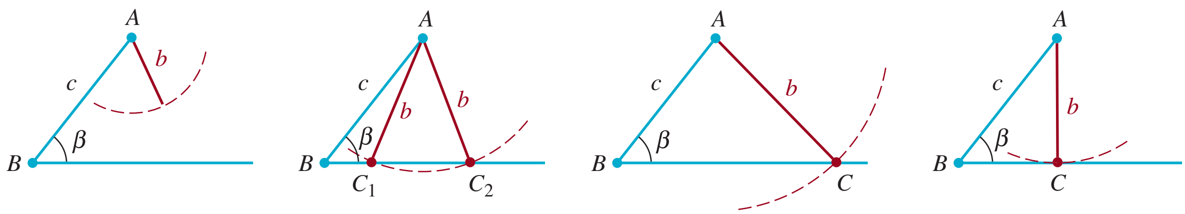


FIGURA 4.10.6 Base horizontal, ángulo β y lado AB

☐ Caso ambiguo

Cuando se resuelven triángulos, al caso en el que los datos son dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos se le llama **caso ambiguo**. Acabamos de ver, en el ejemplo 3, que la información de los datos puede determinar dos triángulos diferentes. En el caso ambiguo pueden surgir otras complicaciones. Por ejemplo, suponga que se especifican la longitud de los lados AB y AC (esto es, los lados c y b), y el ángulo β del triángulo ABC. Como se ve en la **FIGURA 4.10.6**, se traza el ángulo β y se marca el lado AB con longitud c, para localizar los vértices A y B. El tercer vértice, C, está en la base, y se traza un arco de círculo con radio b (la longitud de AC) con centro en A. Como se ve en la **FIGURA 4.10.7**, hay cuatro resultados posibles en esta construcción:

- El arco no cruza la base y no se forma un triángulo.
- El arco cruza la base en dos puntos distintos, C_1 y C_2, y se forman dos triángulos (como en el ejemplo 3).
- El arco cruza la base en un punto, y se forma un triángulo.
- El arco es tangente a la base, y se forma un solo triángulo rectángulo.



a) No se forma triángulo *b*) Dos triángulos *c*) Un solo triángulo *d*) Triángulo rectángulo

FIGURA 4.10.7 Posibilidades de solución del caso ambiguo en la ley de los senos

EJEMPLO 4 Determinación de las partes de un triángulo

Calcular las partes restantes de un triángulo con $\beta = 40°$, $b = 5$ y $c = 9$.

Solución De acuerdo con la ley de los senos (1),

$$\frac{\operatorname{sen} 40°}{5} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{9} \quad \text{y así} \quad \operatorname{sen} \gamma = \frac{9}{5}\operatorname{sen} 40° \approx 1.1570.$$

Ya que el seno de cualquier triángulo debe estar entre -1 y 1, entonces sen $\gamma \approx 1.1570$ es imposible. Eso quiere decir que el triángulo no tiene solución; el lado b no tiene la longitud suficiente para llegar a la base. Es el caso que se ilustra en la figura 4.10.7*a*). ■

Los triángulos para los que se conocen *tres lados* o *dos lados y el ángulo incluido* (esto es, el ángulo formado por los lados indicados) no se puede resolver en forma directa usando la ley de los senos. El método que describiremos a continuación se puede usar para resolver triángulos en estos dos casos.

☐ Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, como el de la **FIGURA 4.10.8**, la longitud c de la hipotenusa se relaciona con las longitudes a y b de los otros dos lados, mediante el teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{7}$$

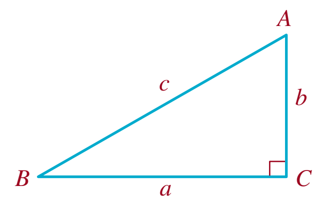


FIGURA 4.10.8 Triángulo rectángulo

Esta última ecuación es un caso especial de una fórmula general para relacionar las longitudes de los lados de *cualquier* triángulo.

☐ Ley de los cosenos

Supongamos otra vez que el triángulo ABC de la figura 4.10.1 representa un triángulo en general. La generalización de la ecuación (7) se llama **ley de los cosenos**.

LEY DE LOS COSENOS

Sean los ángulos α, β y γ, y los lados opuestos a ellos sean a, b y c, como se ve en la figura 4.10.1. Entonces

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned} \tag{8}$$

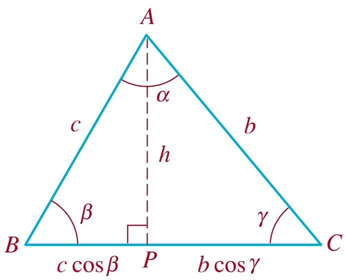


FIGURA 4.10.9 Triángulo acutángulo

Al igual que (1), la ley de los cosenos es válida para cualquier triángulo. Pero por comodidad deduciremos las dos primeras ecuaciones de (8) usando el mismo triángulo acutángulo que el de la figura 4.10.2. Sin embargo, esta vez sea P el punto donde la altura desde el vértice A cruza al lado BC. Entonces, como tanto el $\triangle BPA$ y el $\triangle CPA$ de la **FIGURA 4.10.9** son triángulos rectángulos, de acuerdo con (7),

$$c^2 = h^2 + (c\cos\beta)^2 \tag{9}$$

y

$$b^2 = h^2 + (b\cos\gamma)^2. \tag{10}$$

Ahora, la longitud de BC es $a = c\cos\beta + b\cos\gamma$, por lo que

$$c\cos\beta = a - b\cos\gamma. \tag{11}$$

Además, según (10),

$$h^2 = b^2 - (b\cos\gamma)^2. \tag{12}$$

Las ecuaciones (11) y (12) se sustituyen en (9), y simplificando se llega a la tercera de las ecuaciones (8):

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 - (b\cos\gamma)^2 + (a - b\cos\gamma)^2 \\ &= b^2 - b^2\cos^2\gamma + a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2\cos^2\gamma \end{aligned}$$

o

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{13}$$

Note que la ecuación (13) se reduce al teorema de Pitágoras (7) cuando $\gamma = 90°$.

De igual modo, si se usan $b\cos\gamma = a - c\cos\beta$, y $h^2 = c^2 - (c\cos\beta)^2$ para eliminar $b\cos\gamma$ y h^2 en (10), se obtiene la segunda de las ecuaciones (8).

EJEMPLO 5 Determinación de las partes de un triángulo

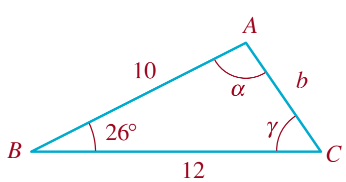


FIGURA 4.10.10 Triángulo del ejemplo 5

Calcular las partes restantes del triángulo que muestra la **FIGURA 4.10.10**.

Solución Primero, si se llama b al lado desconocido y se identifican $a = 12$, $c = 10$ y $\beta = 26°$, entonces, de acuerdo con la segunda de las ecuaciones (8),

$$b^2 = (12)^2 + (10)^2 - 2(12)(10)\cos 26°.$$

Por consiguiente, $b^2 \approx 28.2894$ y $b \approx 5.32$.

A continuación se aplica la ley de los cosenos para calcular los demás ángulos del triángulo de la figura 4.10.10. Si γ es el ángulo del vértice C, entonces la tercera de las ecuaciones (8) da como resultado

$$10^2 = 12^2 + (5.32)^2 - 2(12)(5.32)\cos\gamma \quad \text{o sea} \quad \cos\gamma \approx 0.5663.$$

Con ayuda de una calculadora se ve que $\gamma \approx 55.51°$. Nótese que como el coseno de un ángulo entre 90° y 180° es negativo, no hay necesidad de considerar dos posibilidades, como lo hicimos en el ejemplo 3. Por último, el ángulo del vértice A es $\alpha = 180° - \beta - \gamma$, o sea $\alpha \approx 98.89°$. ■

Observe, en el ejemplo 5, que después de determinado b, se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos. Entonces, se podía haber usado la ley de los senos para calcular el ángulo γ.

En el ejemplo que sigue describiremos el caso en el que los datos son las longitudes de los tres lados.

EJEMPLO 6 Determinación de los ángulos en un triángulo

Calcular los ángulos α, β y γ del triángulo que muestra la FIGURA 4.10.11.

Solución Aplicaremos la ley de los cosenos para calcular el ángulo opuesto al lado más largo:

$$9^2 = 6^2 + 7^2 - 2(6)(7)\cos\gamma \qquad \text{o sea} \qquad \cos\gamma = \tfrac{1}{21}.$$

Entonces, con una calculadora se comprueba que $\gamma \approx 87.27°$. Aunque podríamos usar la ley de los cosenos, optaremos por calcular β usando la ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{6} = \frac{\operatorname{sen}87.27°}{9} \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{6}{9}\operatorname{sen}87.27° \approx 0.6659.$$

Debido a que γ es el ángulo opuesto, el lado más largo es el ángulo más grande del triángulo, por lo que β debe ser un ángulo agudo. Así, sen $\beta \approx 0.6659$ da $\beta \approx 41.75°$. Por último, desde $\alpha = 180° - \beta - \gamma$ determinamos $\alpha \approx 50.98°$. ■

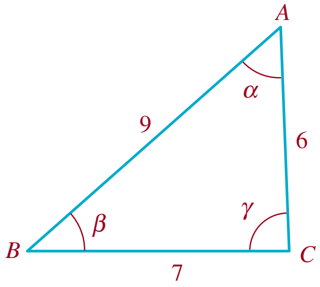


FIGURA 4.10.11 Triángulo del ejemplo 6

Rumbo

En navegación se indican direcciones usando rumbos. Un **rumbo** (o curso, derrotero o trayectoria) designa el ángulo agudo que forma una línea con la línea norte-sur. Por ejemplo, la FIGURA 4.10.12*a*) ilustra un rumbo de S40°W, lo que quiere decir que es hacia los 40 grados al oeste del sur. Los rumbos en las figuras 4.10.12*b*) y 4.10.12*c*) son N65°E y S80°E, respectivamente.

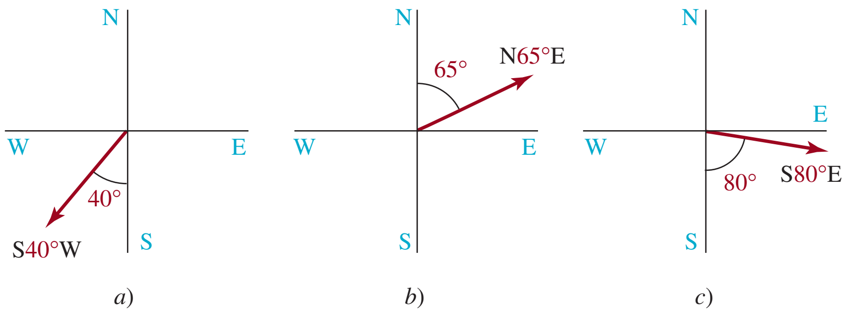


FIGURA 4.10.12 Tres ejemplo de rumbos

EJEMPLO 7 Rumbos de dos barcos

Dos barcos salen de un puerto a las 7:00 a.m. Uno viaja a 12 nudos (millas náuticas por hora) y el otro a 10 nudos. Si el barco más rápido mantiene un rumbo de N47°W y el rumbo del otro es S20°W, ¿cuál es su separación (redondeando a la milla náutica) a las 11:00 a.m. de ese día?

Solución El tiempo transcurrido es 4 horas; el barco más rápido ha recorrido $4 \cdot 12 = 48$ millas náuticas desde el puerto, y el más lento $4 \cdot 10 = 40$ millas náuticas. Con estas distancias y los rumbos indicados se puede trazar el triángulo (válido a las 11:00 a.m.) que muestra la FIGURA 4.10.13. En ese triángulo, c representa la distancia que separa a los barcos, y γ es el ángulo opuesto a ese lado. Como $47° + \gamma + 20° = 180°$, se ve que $\gamma = 113°$. Por último, por la ley de los cosenos,

$$c^2 = 48^2 + 40^2 - 2(48)(40)\cos 113°,$$

el resultado es $c^2 \approx 5\,404.41$, y $c \approx 74.51$. Entonces, la distancia entre los barcos (a la milla náutica más cercana) es de 74 millas náuticas. ■

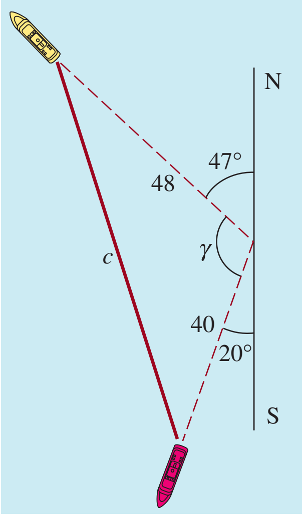


FIGURA 4.10.13 Barcos del ejemplo 7

NOTAS PARA EL SALÓN DE CLASE

i) Un primer paso importante para resolver triángulos es determinar cuál de los tres métodos que hemos descrito se va a usar: trigonometría del triángulo rectángulo, la ley de los senos o la ley de los cosenos. La tabla que sigue describe las diversas clases de problemas e indica el método más apropiado para cada uno. El término *oblicuo* indica cualquier triángulo que no sea triángulo rectángulo.

Tipo de triángulo	Datos	Técnica
Rectángulo	Dos lados o un ángulo y un lado	Definiciones básicas de seno, coseno y tangente; teorema de Pitágoras
Oblicuo	Tres lados	Ley de los cosenos
Oblicuo	Dos lados y el ángulo incluido	Ley de los cosenos
Oblicuo	Dos ángulos y un lado	Ley de los senos
Oblicuo	Dos lados y un ángulo opuesto a uno de los lados	Ley de los senos (si el ángulo dado es agudo, es un caso ambiguo)

ii) A continuación presentamos algunos consejos adicionales para resolver triángulos.

- Con frecuencia, los alumnos usan la ley de los senos cuando se podría haber usado una función trigonométrica del triángulo rectángulo. El método más sencillo y más eficiente es este último.
- Cuando se dan los tres lados, verifique primero si la longitud del lado más largo es mayor o igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados. Si lo es, no puede haber solución alguna (aunque la información indique el uso de un método de ley de los cosenos). Esto se debe a que la distancia más corta entre dos puntos es la longitud del segmento de recta que los une.
- Si obtiene usted un valor mayor que 1 para el seno de un ángulo al aplicar la ley de los senos, el problema no tiene solución.
- En el caso ambiguo de la ley de los senos, al despejar el primer ángulo desconocido debe usted tener en cuenta *el ángulo agudo determinado con su calculadora y también su suplemento como soluciones posibles*. El suplemento será una solución si la suma del suplemento y el ángulo proporcionado del triángulo es menor que 180°.

4.10 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-16.

En los problemas 1 a 32, vea la figura 4.10.1.

En los problemas 1 a 10, use la ley de los senos para resolver el triángulo.

1. $\alpha = 80°, \beta = 20°, b = 7$
2. $\alpha = 60°, \beta = 15°, c = 30$
3. $\beta = 37°, \gamma = 51°, a = 5$
4. $\alpha = 30°, \gamma = 75°, a = 6$
5. $\beta = 72°, b = 12, c = 6$
6. $\alpha = 120°, a = 9, c = 4$
7. $\gamma = 62°, b = 7, c = 4$
8. $\beta = 110°, \gamma = 25°, a = 14$
9. $\gamma = 15°, a = 8, c = 5$
10. $\alpha = 55°, a = 20, c = 18$

En los problemas 11 a 20 use la ley de los cosenos para resolver el triángulo.

11. $\gamma = 65°, a = 5, b = 8$
12. $\beta = 48°, a = 7, c = 6$
13. $a = 8, b = 10, c = 7$
14. $\gamma = 31.5°, a = 4, b = 8$
15. $\gamma = 97.33°, a = 3, b = 6$
16. $a = 7, b = 9, c = 4$
17. $a = 11, b = 9.5, c = 8.2$
18. $\alpha = 162°, b = 11, c = 8$
19. $a = 5, b = 7, c = 10$
20. $a = 6, b = 5, c = 7$

En los problemas 21 a 32 use la ley que sea adecuada para resolver el triángulo, ya sea la ley de los senos o la de los cosenos.

21. $\gamma = 150°, b = 7, c = 5$
22. $a = 5, b = 12, c = 13$
23. $a = 3, b = 4, c = 5$
24. $\alpha = 35°, a = 9, b = 12$
25. $\beta = 30°, a = 10, b = 7$
26. $\alpha = 140°, \gamma = 20, c = 12$
27. $a = 6, b = 8, c = 12$
28. $\beta = 130°, a = 4, c = 7$
29. $\alpha = 22°, b = 3, c = 9$
30. $\alpha = 75°, \gamma = 45°, b = 8$
31. $\alpha = 20°, a = 8, c = 27$
32. $\beta = 100°, a = 22.3, b = 16.1$

Aplicaciones diversas

En los problemas 33 a 44 use la ley que sea adecuada: la de los senos o la de los cosenos.

33. Longitud de una alberca Una cuerda de 10 pies que hay para medir la longitud entre dos puntos, A y B, en los extremos opuestos de una alberca en forma de riñón, no es lo bastante larga. Se encuentra un tercer punto C tal que la distancia de A a C es de 10 pies. Se determina que el ángulo ACB es de 115°, y que el ángulo ABC es de 35°. Calcule la distancia de A a B. Vea la FIGURA 4.10.14

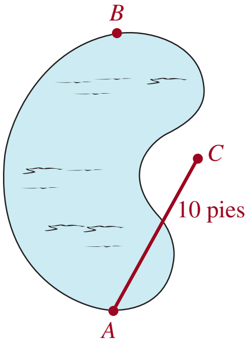


FIGURA 4.10.14 Alberca del problema 33

34. Ancho de un río Dos puntos, A y B, están en las orillas opuestas de un río. Otro punto, C, está en la misma orilla del río que B, a una distancia de 230 pies de él. Si el ángulo ABC es de 105° y el ángulo ACB es de 20°, calcule la distancia de A a B a través del río.

35. Longitud de un poste de teléfono Un poste de teléfono forma un ángulo de 82° con la horizontal. Como se ve en la FIGURA 4.10.15, el ángulo de elevación del Sol es de 76°. Calcule la longitud del poste telefónico, si su sombra mide 3.5 m (suponga que la inclinación del poste se aleja del Sol, y está en el mismo plano que el poste y el Sol).

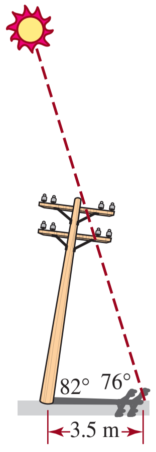


FIGURA 4.10.15 Poste telefónico del problema 35

36. Desnivelado Un hombre de 5 pies 9 pulgadas de estatura está parado en una acera que baja en ángulo constante. Un poste de alumbrado vertical, directamente atrás de él, forma una sombra de 25 pies de longitud. El ángulo de depresión desde la parte superior del hombre hasta la inclinación de su sombra es de 31°. Calcule el ángulo α, que se indica en la FIGURA 4.10.16, que forma la acera con la horizontal.

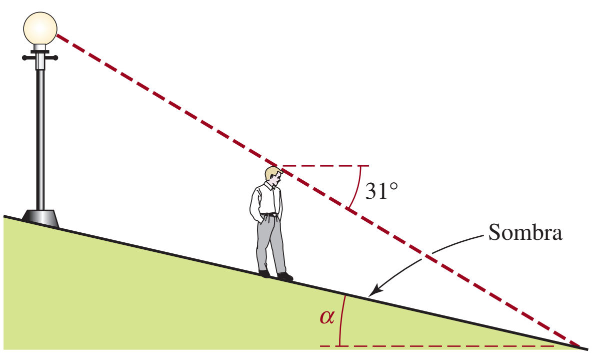


FIGURA 4.10.16 Acera con pendiente del problema 36

37. ¿Altura? Si el señor del problema 36 está a 20 pies del poste de alumbrado, pendiente abajo por la acera, calcule la altura de la lámpara sobre la acera.

38. Avión con altitud Los ángulos de elevación hacia un avión se miden desde la parte superior y la base de un edificio que tiene 20 m de altura. El ángulo desde la azotea es de 38°, y desde la base es de 40°. Calcule la altitud del avión.

39. ¿Distancia? Un barco navega 22 millas hacia el oeste, desde un puerto. Después navega hacia S62°W otras 15 millas náuticas. ¿A qué distancia está del puerto?

40. ¿A qué distancia? Dos excursionistas salen de su campamento al mismo tiempo, con rumbos N42°W y S20°E, respectivamente. Si cada uno de ellos camina a un promedio de 5 km/h ¿a qué distancia están después de 1 hora?

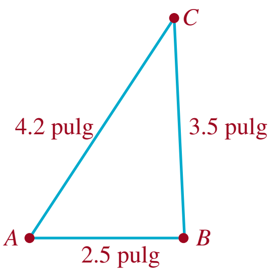


FIGURA 4.10.17 Triángulo del problema 41

41. Rumbos En el mapa de un excursionista, el punto A está a 2.5 pulg hacia el oeste del punto B, y el punto C está a 3.5 pulg de B, y a 4.2 pulg de A, respectivamente. Vea la FIGURA 4.10.17. Calcule ***a***) el rumbo de A a C y ***b***) el rumbo de B a C.

42. ¿Cuánto tardan? Dos barcos salen del puerto al mismo tiempo; uno va a 15 nudos y el otro a 12 nudos. Mantienen rumbos de S42°W y S10°E, respectivamente. Después de tres horas, el primer barco queda varado y de inmediato el segundo barco va en su ayuda.

a) ¿Cuánto tardará el segundo barco en llegar al primero, si viaja a 14 nudos?

b) ¿Qué rumbo tomará?

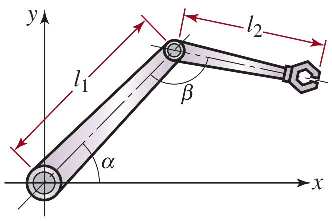


FIGURA 4.10.18 Brazo robótico del problema 43

43. Brazo robótico Un brazo robótico bidimensional "sabe" dónde está, porque mantiene registro del ángulo α de su "hombro" y del ángulo β de su "codo". Como se ve en la FIGURA 4.10.18, este brazo tiene un punto fijo de rotación en el origen. El ángulo del hombro se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del eje x, y el ángulo del codo se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj, desde el brazo hasta el antebrazo. Suponga que el brazo y el antebrazo tienen 2 de longitud, y que el ángulo β del codo no puede "dislocarse" más allá de 180°. Calcule los ángulos α y β que pongan la mano del robot en el punto $(1, 2)$.

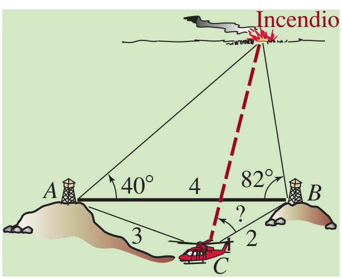


FIGURA 4.10.19 Incendio del problema 44

44. ¿Hacia dónde? Dos torres vigía están situadas en las cumbres de las montañas A y B, a 4 millas de distancia. Un equipo de bomberos en helicóptero está en un valle en el punto C, a 3 millas de A y a 2 millas de B. Usando la línea entre A y B como referencia, un vigía ve un incendio en un ángulo de 40° de la torre A, y a 82° de la torre B. Vea la FIGURA 4.10.19. ¿A qué ángulo, medido a partir de CB, debe volar el helicóptero para dirigirse hacia el incendio?

Para discusión

45. Fórmula de Herón Use la ley de cosenos para derivar la fórmula

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

del área de un triángulo con rectas de largo a, b, c y $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Esta fórmula es nombrada en honor del matemático e inventor griego **Herón de Alejandría** (c. 20-62 d.C.), pero se debería realmente acreditar a Arquímedes. [*Sugerencia:* Use la tercera fórmula en (8) para resolver $\cos \gamma$.]

46. Parcela de jardín Use la fórmula de Herón del problema 45 para buscar el área de una parcela de jardín triangular si las longitudes de las tres rectas son de 25, 32 y 41 m.

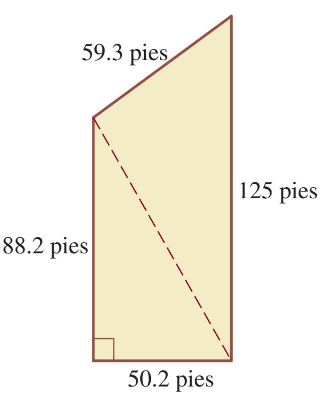


FIGURA 4.10.20 Parcela de esquina del problema 47

47. Parcela de esquina Busque el área de la parcela de esquina irregular que se muestra en la FIGURA 4.10.20. [*Sugerencia:* Divida la parcela en dos parcelas triangulares como se muestra y luego busque el área de cada triángulo. Use la fórmula de Herón del problema 45 para calcular el área del triángulo agudo.]

48. Más área Use la fórmula de Herón del problema 45 para buscar el área de un triángulo con vértices ubicados en $(3, 2)$, $(-3, -6)$ y $(0, 6)$ en un sistema de coordenadas rectangular.

49. Hombre azul El esfuerzo en subir un tramo de escalera depende en gran medida del ángulo de flexión de la rodilla delantera. Un modelo simplificado de un hombre palito que sube una escalera indica que la máxima flexión de la rodilla ocurre cuando la pierna trasera está estirada y las caderas están directamente encima del talón del pie delantero. Vea la **FIGURA 4.10.21**. Demuestre que

$$\cos\theta = \left(\frac{R}{a}\right)\sqrt{4 - \left(\frac{T}{a}\right)^2} + \frac{(T/a)^2 - (R/a)^2}{2} - 1,$$

donde θ es el ángulo de la articulación de la rodilla, $2a$ es el largo de la pierna, R es la subida de un solo escalón y T es el ancho de un escalón. [*Sugerencia:* Haga que h sea la distancia vertical desde la cadera hasta el talón de la pierna delantera, tal como se muestra en la figura. Establezca dos ecuaciones que involucren a h: una aplicando el teorema de Pitágoras al ángulo recto cuya hipotenusa consiste en la pierna trasera de longitud $2a$, y la otra usando la ley de cosenos en el ángulo θ. Luego elimine h y resuelva $\cos\theta$.]

50. **¡Socorro!** Una embarcación de los guardacostas está a 4 millas náuticas directamente al sur de una segunda embarcación de los guardacostas cuando ellos reciben una señal de socorro de un velero. A fin de ofrecer ayuda, la primera embarcación viaja con un rumbo de S50°O a 5 nudos, y la segunda embarcación lo hace con un rumbo de S10°O a 10 nudos. ¿Cuál de las dos embarcaciones de los guardacostas llegará primero al velero?

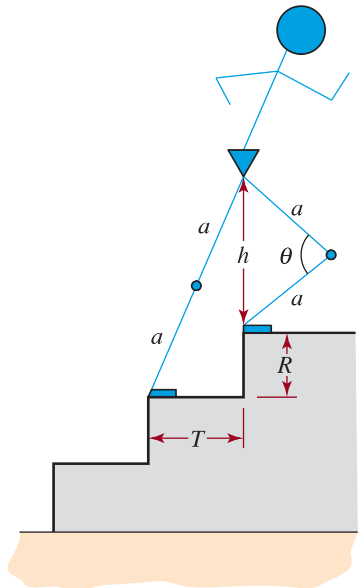


FIGURA 4.10.21 Hombre azul del problema 49

4.11 Regreso al concepto de límite

Avance DE CÁLCULO

Introducción Como vimos en la sección 2.9, el problema fundamental que motiva el cálculo diferencial, *determinar una recta tangente a la gráfica de la función*, se contesta con el concepto de un *límite*. En esa sección mantuvimos la descripción de los límites en un nivel intuitivo, y se trataba de repasar el álgebra correspondiente, como por ejemplo, factorización y racionalización, que es necesaria para poder calcular analíticamente un límite. En el estudio del cálculo de funciones trigonométricas, se espera que el lector calcule límites con funciones trigonométricas. Como ilustrarán los ejemplos de esta sección, el cálculo de límites trigonométricos comprende manipulaciones algebraicas y conocimientos de las identidades trigonométricas básicas.

Comenzaremos con un resultado fundamental del límite de la función seno.

Un límite trigonométrico importante Para calcular las funciones trigonométricas sen x, cos x, tan x, etc., es importante darse cuenta de que la variable x es un número real, o un ángulo x medido en radianes. Con eso en cuenta, veamos los valores numéricos de (sen x)/x cuando x tiende a 0 desde la derecha $(x \to 0^+)$ que presentamos en la tabla siguiente:

$x \to 0^+$	0.1	0.01	0.001	0.0001
$\dfrac{\text{sen}\, x}{x}$	0.99833416	0.99998333	0.99999983	0.99999999

Es fácil ver que los mismos resultados que muestra la tabla son válidos cuando $x \to 0^-$. Como sen x es una función impar, para $x > 0$ y $-x < 0$ sucede que $\text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x$, y en consecuencia, $\dfrac{\text{sen}(-x)}{-x} = \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$. En otras palabras, cuando el valor absoluto de x es pequeño,

$$\frac{\text{sen}\, x}{x} \approx 1.$$

Si bien es cierto que los cálculos numéricos como éste no son una demostración, sí parecen indicar que $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$ cuando $x \to 0$. Si se usa el símbolo de límite, habremos motivado el siguiente resultado:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{1}$$

El problema 40 en los ejercicios 4.11 indica una guía para recorrer los pasos básicos de una demostración de (1), que se suele presentar en cursos de cálculo.

Importante ▸ En esta descripción supondremos lo mismo que en las secciones 1.5 y 2.9: que todos los límites que se consideran existen. Todo lo que hagamos, manipulaciones algebraicas, límites de productos y cocientes en los ejemplos de esta sección, se basa en esta hipótesis.

Otros límites de importancia son

$$\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a, \tag{2}$$

$$\lim_{x \to a} \cos x = \cos a. \tag{3}$$

Los resultados (2) y (3) son consecuencia inmediata de que $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ son funciones continuas para toda x. Como vimos en la sección 4.3, las gráficas de sen x y cos x son uniformes y sin interrupciones. Por ejemplo, de acuerdo con (2),

$$\lim_{x \to \pi/6} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0. \tag{4}$$

También, de acuerdo con (3),

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1 \tag{5}$$

Con frecuencia, los resultados en (1), (2) y (3) se usan para calcular otros límites. Como en la sección 1.5, muchos de los límites que se ven en ésta son límites de expresiones fraccionarias donde el numerador *y también* el denominador tienden a 0. Recuerde que se dice que estas clases de límites tienen la **forma indeterminada** 0/0. Note que el límite (1) tiene esta forma indeterminada.

EJEMPLO 1 Uso de la ecuación (1)

Determinar $\lim_{x \to 0} \frac{10x - 3 \operatorname{sen} x}{x}$

Solución Se reacomoda la expresión fraccionaria como dos fracciones con el mismo denominador x:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{10x - 3 \operatorname{sen} x}{x} &= \lim_{x \to 0} \left[\frac{10x}{x} - \frac{3 \operatorname{sen} x}{x} \right] \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{10x}{x} - 3 \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} && \leftarrow \text{se simplifica la } x \text{ en la primera expresión} \\
&= \lim_{x \to 0} 10 - 3 \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} && \leftarrow \text{ahora se aplica (1)} \\
&= 10 - 3 \cdot 1 \\
&= 7.
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Uso de la fórmula de ángulo doble

Calcular $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$.

Solución Para evaluar este límite usaremos la fórmula de ángulo doble sen $2x = 2$ sen x cos x, de la sección 4.5, y los resultados en (1) y (5):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\operatorname{sen} x}{x} = 2\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 2\cdot \overset{\text{de acuerdo con (5)}}{1}\cdot \overset{\text{de acuerdo con (1)}}{1} = 2.$$

Por consiguiente,
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2. \tag{6}$$
■

Uso de la sustitución

Con frecuencia interesan límites parecidos al que se vio en el ejemplo 2. Pero si se trata de determinar, por ejemplo, $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x}$, el procedimiento que se emplea en el ejemplo 2 falla en la práctica, porque no hemos establecido una identidad trigonométrica para sen $5x$. No hay procedimiento alternativo que nos permita determinar con rapidez $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} kx}{x}$, donde $k \neq 0$ es una constante real, sólo con cambiar la variable por medio de una **sustitución**. Si hacemos que $t = kx$, entonces $x = t/k$. Observe que cuando $x \to 0$, por necesidad $t \to 0$. Por consiguiente, se puede escribir

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} kx}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t/k} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{1}\cdot\frac{k}{t} = k\overset{\text{de acuerdo con (1), este límite es 1}}{\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}} = k.$$

De este modo hemos demostrado el resultado general

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} kx}{x} = k. \tag{7}$$

Por consiguiente, $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x} = 5$. Vea el problema 25 de los ejercicios 4.11.

EJEMPLO 3 Límite trigonométrico

Determinar $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

Solución Se usa la definición $\tan x = \operatorname{sen} x/\cos x$ y se puede escribir que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

De acuerdo con (5) y (1) se sabe que $\cos x \to 1$ y $(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ cuando $x \to 0$; entonces, la ecuación anterior se transforma en

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \frac{1}{1}\cdot 1 = 1.$$
■

EJEMPLO 4 Uso de la identidad pitagórica

Determinar $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$.

Solución Para calcular este límite comenzaremos aplicando bastante astucia algebraica: multiplicamos el numerador y el denominador por el factor conjugado del numerador. A continuación aplicaremos la identidad pitagórica fundamental, $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, en la forma $1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}.\end{aligned}$$

En el siguiente paso regresamos al álgebra para reacomodar la expresión fraccionaria en forma de un producto, y a continuación aplicaremos los resultados en (1), (4) y (5):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\\ &= 1\cdot\frac{0}{1}\\ &= 0.\end{aligned}\tag{8}$$

Esto es,
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0.$$
■

De la ecuación (8) se obtiene un resultado de límite que se usa en cálculo para encontrar las derivadas de las funciones seno y coseno. Como el límite de (8) es igual a 0, se puede escribir

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-(\cos x - 1)}{x} = (-1)\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Entonces, al dividir entre -1 queda

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0.\tag{9}$$

□ La relación con el cálculo En la sección 2.9 vimos que la derivada de una función $y = f(x)$ es la función $f'(x)$ definida por un límite de un cociente de diferencia:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.\tag{10}$$

Al calcular este límite, se hace que h tienda a 0, pero manteniendo fija x. También recuérdese que si un número $x = a$ está en los dominios de f y f', entonces $f(a)$ es la coordenada x del punto de tangencia, $(a, f(a))$, y $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente en ese punto.

□ Derivadas de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x) = \cos x$ Para determinar la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$, se usa el proceso de cuatro pasos que se ilustra en el ejemplo 3 de la sección 2.9. En el primer paso usamos la fórmula de suma de la función seno, de la sección 4.5:

$$\operatorname{sen}(x_1 + x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \operatorname{sen} x_2.\tag{11}$$

i) Con x y h haciendo los papeles de x_1 y x_2, de acuerdo con (11):

$$f(x+h) = \operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h.$$

ii) $$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x \\ &= \operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h \end{aligned}$$

Como se verá a continuación, no podemos simplificar las h en el cociente de diferencia, pero se puede arreglar la expresión para usar los resultados de límites en (1) y (9):

iii) $$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h}{h} \\ &= \operatorname{sen} x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h} \end{aligned}$$

iv) En este renglón el símbolo h hace el papel del símbolo x en (1) y (9):

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \operatorname{sen} x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}.$$

De acuerdo con los límites en (1) y (9), esta última ecuación es lo mismo que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \operatorname{sen} x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

En resumen:

- la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es $f'(x) = \cos x$. (12)

Se deja al lector demostrar que:

- la derivada de $f(x) = \cos x$ es $f'(x) = -\operatorname{sen} x$. (13)

Vea los problemas 23 y 24 en los ejercicios 4.11.

EJEMPLO 5 Ecuación de una tangente

Deducir una ecuación de la tangente a la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ cuando $x = 4\pi/3$.

Solución Se comienza determinando el punto de tangencia. En

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

se observa que el punto de tangencia es $\left(4\pi/3, -\sqrt{3}/2\right)$. La pendiente de la recta tangente en ese punto es la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$, evaluada en la coordenada x. De acuerdo con (12), sabemos que $f'(x) = \cos x$, por lo que la pendiente en $\left(4\pi/3, -\sqrt{3}/2\right)$ es

$$f'\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Según la forma de punto-pendiente de la ecuación de una recta, una ecuación de la tangente es:

$$y + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{4\pi}{3}\right) \quad \text{o} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vea la FIGURA 4.11.1. ■

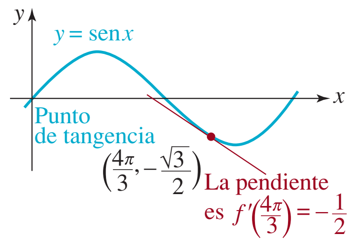


FIGURA 4.11.1 Recta tangente del ejemplo 5

4.11 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-16.

En los problemas 1 a 18 use los resultados a los que arribó en (1), (2), (3), (7) y (9) para determinar el límite indicado.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}x}{x}$

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \pi x}{x}$

3. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(-\theta)}{\theta}$

4. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3t}{4t}$

5. $\lim_{x\to 5\pi/6} \cos x$

6. $\lim_{x\to \pi/4} \operatorname{sen} x$

7. $\lim_{x\to \pi/2} (\cos x + 5 \operatorname{sen} x)$

8. $\lim_{x\to \pi/6} \cos x \operatorname{sen} x$

9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{10x}$

10. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{8(1 - \cos\theta)}{\theta}$

11. $\lim_{x\to 0} \dfrac{4x^2 - 2 \operatorname{sen} x}{x}$

12. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2 \operatorname{sen} 4x + 1 - \cos x}{x}$

13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$

14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$

15. $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos x}{\cot x}$

16. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x \tan x}{x}$

17. $\lim_{x\to 0} x \cot x$

18. $\lim_{x\to \pi/4} \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$

En los problemas 19 a 22 proceda como en el ejemplo 5 para deducir una ecuación de la tangente a la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el valor indicado de x.

19. $x = 0$

20. $x = \pi/2$

21. $x = \pi/6$

22. $x = 2\pi/3$

23. Proceda como en las páginas 276-277, y determine la derivada de $f(x) = \cos x$.

24. Use el resultado del problema 23 para deducir una ecuación de la tangente a la gráfica de $f(x) = \cos x$ en $x = \pi/3$.

25. Haga uso de

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 5x - 1}{x} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = 5$$

para determinar la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} 5x$.

26. Use el resultado del problema 25 para deducir una ecuación de la tangente a la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} 5x$ en $x = \pi$.

Problemas para calculadora o computadora

En los problemas 27 y 28 use una calculadora o computadora para estimar el límite respectivo, llenando cada tabla. Redondee los elementos de cada tabla a ocho decimales.

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

$x \to 0^+$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$\dfrac{1 - \cos x}{x^2}$					

Explique por qué no se tuvo que examinar $x \to 0^-$.

28. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{\text{sen}(x - 2)}$

$x \to 2^+$	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001
$\dfrac{x^2 - 4}{\text{sen}(x - 2)}$					

$x \to 2^-$	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999
$\dfrac{x^2 - 4}{\text{sen}(x - 2)}$					

Para discusión

En los problemas 29 a 36, explique cómo aprovechar el resultado en (1), junto con algo de astucia algebraica, trigonometría o una sustitución, para determinar el límite indicado.

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\text{sen}\, 3x}$

30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 4x}{\text{sen}\, 5x}$

31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, x^2}{x^2}$

32. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\text{sen}\, x}{\pi - x}$

33. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos x}$

34. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)}{x}$

35. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\text{sen}\, x}{\sqrt{x}}$

36. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\text{sen}(x - 1)}{x^2 + 2x - 3}$

37. Use lo que aprendió en los problemas 29 y 36 para determinar el límite

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{\text{sen}(x - 2)}$$

sin ayuda de la tabla numérica del problema 28.

38. ***a***) Use una calculadora para llenar la tabla siguiente.

$x \to 0^+$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$\dfrac{1 - \cos x^2}{x^4}$					

b) Determine el límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x^2}{x^4}$ usando el método del ejemplo 4.

c) Explique las diferencias que se observan entre los incisos ***a***) y ***b***).

39. ***a***) Un eneágono regular es un polígono de n lados inscrito en un círculo. El polígono se forma con n puntos igualmente espaciados sobre el círculo. Suponga que el polígono de la FIGURA 4.11.2 representa un eneágono regular inscrito en un círculo de radio r. Con trigonometría, demuestre que el área $A(n)$ del eneágono es

$$A(n) = \frac{n}{2} r^2 \,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

b) Es razonable suponer que el área $A(n)$ tiende al área del círculo cuando aumenta la cantidad de lados del eneágono. Calcule A_{100} y $A_{1\,000}$.

c) Sea $x = 2\pi/n$ en $A(n)$ y observe que cuando $n \to \infty$, $x \to 0$. Use (1) de esta sección para demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} A(n) = \pi r^2$.

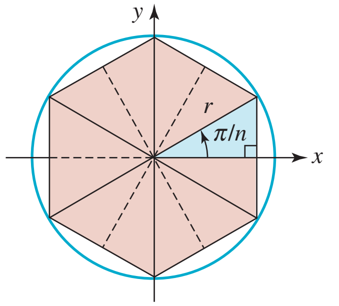
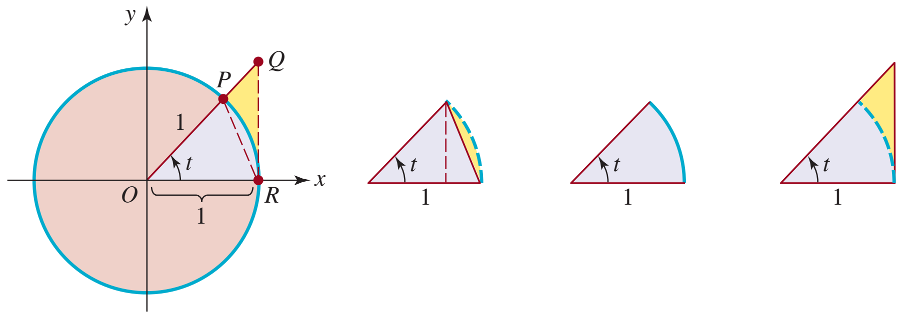


FIGURA 4.11.2 Eneágono inscrito para el problema 39

40. Un círculo tiene su centro en el origen O, y su radio es 1. Como se ve en la **FIGURA 4.11.3*a*)**, sea la región sombreada OPR un sector del círculo con el ángulo central t tal que $0 < t < \pi/2$. En las figuras 4.11.3*a*) a 4.11.3*d*) se ve que

$$\text{área de} \triangle OPR < \text{área del sector } OPR < \text{área de} \triangle OQR. \tag{12}$$



a) Círculo unitario *b*) Triángulo OPR *c*) Sector OPR *d*) Triángulo rectángulo OQR

FIGURA 4.11.3 Círculo unitario del problema 40

a) Demuestre que el área del $\triangle OPR$ es $\frac{1}{2}\operatorname{sen} t$, y que el área del $\triangle OQR$ es $\frac{1}{2}\tan t$.

b) Ya que el área de un sector de círculo es $\frac{1}{2}r^2\theta$, donde r es su radio y θ está en radianes, entonces el área del sector OPR es $\frac{1}{2}t$. Con este resultado y con las áreas del inciso ***a***), demuestre que la desigualdad en (12) da como resultado

$$\cos t < \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1.$$

c) Explique la forma en que la desigualdad anterior demuestra (1) cuando se hace que $t \to 0^+$.

CAPÍTULO 4 Ejercicios de repaso

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-16.

En los problemas 1 a 20, llene los espacios en blanco.

1. $\pi/5$ radianes $=$ ________ grados.

2. 10 grados $=$ _______ radianes.

3. Los valores exactos de las coordenadas del punto $P(t)$ del círculo unitario correspondientes a $t = 5\pi/6$ son _________.

4. El ángulo de referencia de $4\pi/3$ radianes es ________ radianes.

5. $\tan\dfrac{\pi}{3} =$ __________.

6. En la posición normal, el lado terminal del ángulo $\dfrac{8\pi}{5}$ radianes está en el _______ cuadrante.

7. Si $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{3}$, y θ está en el cuadrante IV, entonces $\sec\theta =$ ___________.

8. Si $\tan t = 2$, y t está en el cuadrante III, entonces $\cos t =$ ________.

9. La intersección con el eje y en la gráfica de la función $y = 2\sec(x + \pi)$ es _________.

10. Los valores de t en el intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfacen $\operatorname{sen} 2t = \frac{1}{2}$ son _______.

11. Si $\operatorname{sen} u = \frac{3}{5}, 0 < u < \pi/2$ y $\cos v = 1/\sqrt{5}, 3\pi/2 < v < 2\pi$, entonces $\cos(u + v) =$ _______.

12. Si $\cos t = -\frac{2}{3}, \pi < t < 3\pi/2$, entonces $\cos\frac{1}{2}t =$ ______.

13. Una función seno con periodo 4 y amplitud 6 se describe con ___________.

14. La primera asíntota vertical de la gráfica de $y = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ a la derecha del eje y es _________.

15. $\operatorname{sen} t + \cos t =$ ______ $\operatorname{sen}\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)$

16. Si $\operatorname{sen} t = \frac{1}{6}$, entonces $\cos\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right) =$ ___________.

17. La amplitud de $y = -10\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)$ es _______.

18. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{5\pi}{4}\right) =$ _______.

19. El valor exacto de $\arccos\left(\cos\dfrac{9\pi}{5}\right) =$ _______.

20. El periodo de la función $y = 2\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}t$ es _________.

En los problemas 21 a 40 conteste cierto o falso.

21. Si $\tan t = \frac{3}{4}$, entonces $\operatorname{sen} t = 3$ y $\cos t = 4$. ______

22. En un triángulo rectángulo, si $\operatorname{sen}\theta = \frac{11}{61}$, entonces $\cot\theta = \frac{60}{11}$. _______

23. $\sec(-\pi) = \csc\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$. __________

24. No hay ángulo t tal que $\sec t = \frac{1}{2}$. __________

25. $\operatorname{sen}(2\pi - t) = -\operatorname{sen} t$. __________

26. $1 + \sec^2\theta = \tan^2\theta$. __________

27. $(5, 0)$ es un cruce de la gráfica de $y = 3\operatorname{sen}\pi x$ con el eje de las x. __________

28. $\left(2\pi/3, -1/\sqrt{3}\right)$ es un punto de la gráfica de $y = \cot x$. _______

29. El contradominio de la función $y = \csc x$ es $(-\infty, -1], \cup [1, \infty)$. ________

30. La gráfica de $y = \csc x$ no cruza el eje y. _______

31. La línea $x = \pi/2$ es una asíntota vertical de la gráfica de $y = \tan x$. ________

32. Si $\tan(x + \pi) = 0.3$, entonces $\tan x = 0.3$. __________

33. En la función seno $y = -2\operatorname{sen} x$ sucede que $-2 \le y \le 2$. _______

34. $\operatorname{sen} 6x = 2\operatorname{sen} 3x\cos 3x$. ________

35. La gráfica de $y = \operatorname{sen}\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ es la gráfica de $y = \operatorname{sen} 2x$ desplazada $\pi/3$ unidades hacia la derecha. __________

36. Como $\tan(5\pi/4) = 1$, entonces $\arctan(1) = 5\pi/4$. __________

37. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$. _________

38. $f(x) = \operatorname{arcsen} x$ no es periódica. _________

39. $f(x) = x\operatorname{sen} x$ es periódica cada 2π. _________

40. $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$ es una función par. ________

En los problemas 41 a 46 determine todas las t en el intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfagan la ecuación.

41. $\cos t \operatorname{sen} t - \cos t + \operatorname{sen} t - 1 = 0$
42. $\cos t - \operatorname{sen} t = 0$
43. $4 \operatorname{sen}^2 t - 1 = 0$
44. $\operatorname{sen} t = 2 \tan t$
45. $\operatorname{sen} t + \cos t = 1$
46. $\tan t - 3 \cot t = 2$

En los problemas 47 a 50, resuelva el triángulo satisfaciendo las condiciones indicadas.

47. $\alpha = 30°, \beta = 70°, b = 10$
48. $\gamma = 145°, a = 25, c = 20$
49. $\alpha = 51°, b = 20, c = 10$
50. $a = 4, b = 6, c = 3$

En los problemas 51 a 58, calcule el valor indicado sin usar calculadora.

51. $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$
52. $\operatorname{arcsen}(-1)$
53. $\cot(\cos^{-1}\frac{3}{4})$
54. $\cos(\operatorname{arcsen}\frac{2}{5})$
55. $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}\pi)$
56. $\cos(\arccos 0.42)$
57. $\operatorname{sen}(\arccos(\frac{5}{13}))$
58. $\arctan(\cos\pi)$

En los problemas 59 y 60 escriba la expresión como expresión algebraica en x.

59. $\operatorname{sen}(\arccos x)$
60. $\sec(\tan^{-1} x)$

En los problemas 61 a 64, la gráfica correspondiente se puede interpretar como una transformación rígida/no rígida de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ o de la gráfica de $y = \cos x$. Deduzca la ecuación de la gráfica, usando la función seno. A continuación deduzca la ecuación de la misma gráfica, esta vez mediante la función coseno.

61.

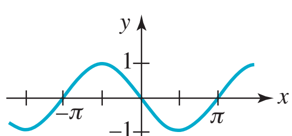


FIGURA 4.E.1 Gráfica del problema 61

62.

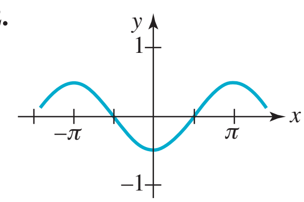


FIGURA 4.E.2 Gráfica del problema 62

63.

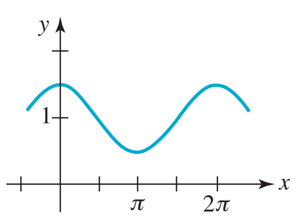


FIGURA 4.E.3 Gráfica del problema 63

64.

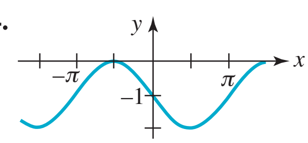


FIGURA 4.E.4 Gráfica del problema 64

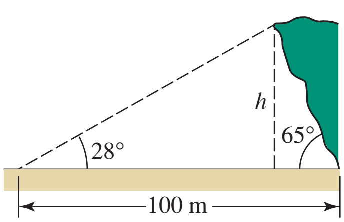


FIGURA 4.E.5 Acantilado del problema 65

65. Un topógrafo está a 100 m de la base de un acantilado volado, y mide un ángulo de elevación de 28° desde su lugar hasta la parte superior del acantilado. Vea la FIGURA 4.E.5. Si el acantilado forma un ángulo de 65° con la horizontal, calcule su altura h.

66. Se lanza un cohete desde el nivel del piso, con un ángulo de elevación de 43°. Si el cohete hace blanco en un avión autómata que vuela a 20 000 pies de altura, calcule la distancia horizontal entre el sitio de lanzamiento y el punto directamente abajo del avión cuando es tocado. ¿Cuál es la distancia en línea recta entre el lugar de lanzamiento y el avión?

67. Un esquiador acuático sale de una rampa en un punto R, y aterriza en S. Vea la **FIGURA 4.E.6**. Un juez en el punto J mide un $\angle RJS$ de 47°. Si la distancia de la rampa al juez es de 110 pies, calcule la longitud del salto. Suponga que el $\angle SRJ$ es de 90°.

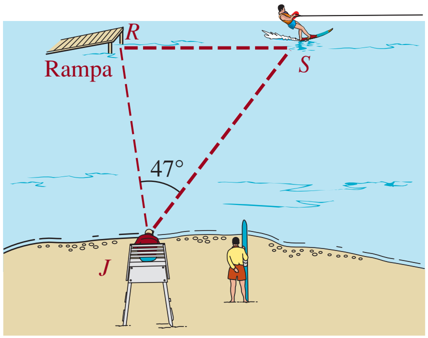


FIGURA 4.E.6 Esquiador acuático del problema 67

68. El ángulo entre dos lados de un paralelogramo es de 40°. Si las longitudes de los lados son 5 y 10 cm, calcule las longitudes de las dos diagonales.

69. Un satélite meteorológico en órbita sobre el ecuador terrestre, a una altura de $H =$ 36 000 km, localiza una tempestad eléctrica hacia el norte, en P, a un ángulo de $\theta =$ 6.5° con respecto a su vertical (la vertical del satélite). Vea la **FIGURA 4.E.7**.

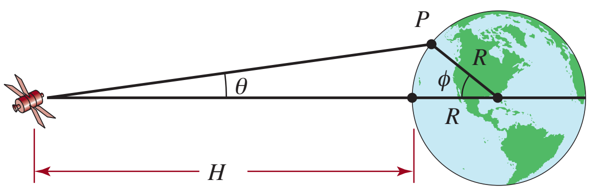


FIGURA 4.E.7 Satélite del problema 69

a) Si el radio de la Tierra es aproximadamente $R = 6\,370$ km, calcule la latitud ϕ de la tempestad eléctrica.

b) Demuestre que los ángulos θ y ϕ se relacionan por medio de

$$\tan\theta = \frac{R\,\mathrm{sen}\,\phi}{H + R(1 - \cos\phi)}.$$

70. Se puede demostrar que un balón de basquetbol de diámetro d, que está llegando a la canasta formando un ángulo θ respecto a la horizontal, pasará por un aro de diámetro D, si $D\,\mathrm{sen}\,\theta > d$, donde $0° \leq \theta \leq 90°$. Vea la **FIGURA 4.E.8**. Si el balón tiene 24.6 cm de diámetro, y el diámetro del aro es de 45 cm, ¿entre qué intervalo de ángulos θ de llegada se producirá una canasta?

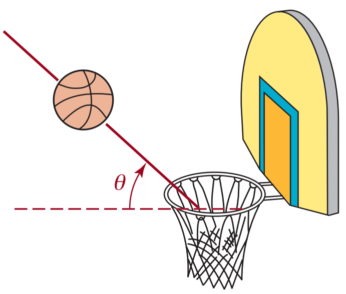


FIGURA 4.E.8 Canasta del problema 70

71. Cada uno de los 24 satélites NAVSTAR del sistema de posicionamiento global (GPS) describe una órbita alrededor de la Tierra a una altura $h = 20\,200$ km. Con esta red de satélites, un receptor GPS poco costoso, manual, puede determinar su posición sobre la superficie de la Tierra, con precisión de 10 m. Calcule la distancia máxima (en km) sobre la superficie de la Tierra que puede observarse desde un solo satélite GPS. Vea la **FIGURA 4.R.9**. Suponga que el radio de la Tierra es de 6 370 km. [*Sugerencia:* Calcule el ángulo central θ que abarca al arco s.]

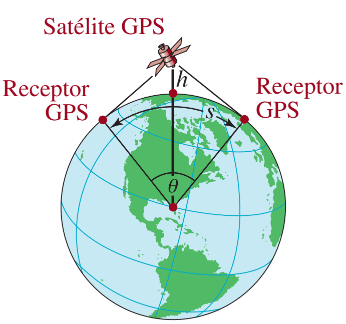


FIGURA 4.E.9 Satélite GPS del problema 71

72. Un avión vuela horizontalmente a 400 millas por hora, y sube en ángulo de 6° con respecto a la horizontal. Cuando pasa directamente arriba de un automóvil que va a 60 millas por hora, está a 2 millas arriba del vehículo. Suponiendo que el avión y el vehículo permanecen en el mismo plano vertical, calcule el ángulo de elevación desde el automóvil hasta el avión después de 30 minutos.

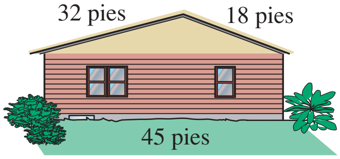


FIGURA 4.E.10 Casa del problema 73

73. Una casa mide 45 pies del frente a la parte trasera. El techo mide 32 pies desde el frente de la casa hasta la cumbrera, y 18 pies desde la cumbrera a la parte trasera de la casa. Vea la **FIGURA 4.E.10**. Calcule los ángulos de elevación de las partes delantera y trasera del techo.

74. Un polígono regular de cinco lados se llama pentágono regular. Vea la figura 4.11.2. Use medidas en radianes y determine la suma de los ángulos en los vértices de un pentágono regular.

75. Según la enciclopedia en línea *Wikipedia*, un helicóptero francés piloteado por Jean Boulet alcanzó la altura récord del mundo de 12.440 m en 1972. ¿Cuál hubiera sido el ángulo de elevación del helicóptero desde un punto P en el suelo a 2 000 m del punto directamente debajo del helicóptero?

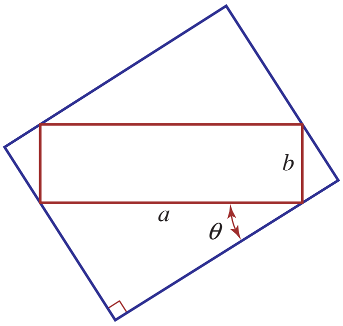


FIGURA 4.E.11 Rectángulos del problema 76

76. Considere el rectángulo azul circunscrito alrededor del rectángulo rojo en la **FIGURA 4.E.11**. Por medio del cálculo se puede demostrar que el área del rectángulo azul es mayor cuando $\theta = \pi/4$. Busque esta área en términos de a y b.

En los problemas 77 a 84, traduzca las palabras a una función adecuada.

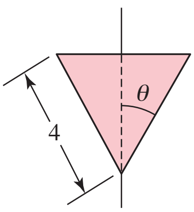


FIGURA 4.E.12 Sección transversal del canal del problema 77

77. Un canal de agua de 20 pies de longitud tiene forma de triángulo isósceles, con lados de 4 pies de longitud. Vea la figura 2.8.21 en los ejercicios 2.8. Como se ve en la **FIGURA 4.E.12**, sea θ el ángulo entre la vertical y uno de los lados del canal. Exprese el volumen del canal en función de 2θ.

78. Una persona conduce un automóvil y se acerca a un letrero de autosugerencia, como se ve en la **FIGURA 4.E.13**. Sea θ su ángulo de visión de las orillas superior e inferior del letrero, y sea x su distancia horizontal (en pies) a ese letrero. Exprese a θ como función de x.

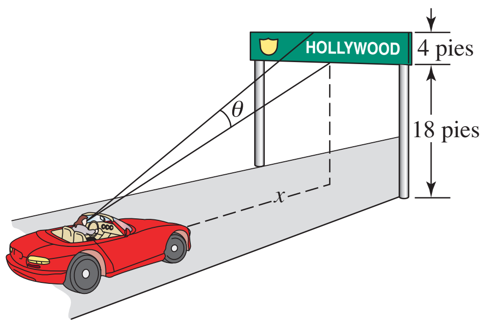


FIGURA 4.E.13 Letrero en la carretera para el problema 78

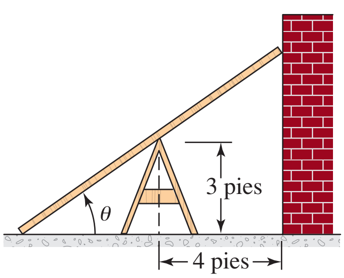


FIGURA 4.E.14 Tabla del problema 79

79. Como se ve en la **FIGURA 4.E.14**, una tabla está sostenida por un caballete, para que uno de sus extremos descanse en el piso y el otro contra un muro. Exprese la longitud de la tabla en función del ángulo θ indicado.

80. Un campesino desea cercar un pastizal en forma de triángulo usando 2 000 pies de cerca, que tiene a la mano. Vea la **FIGURA 4.E.15**. Demuestre que el área del pastizal es una función del ángulo θ indicado, como sigue:

$$A(\theta) = \frac{1}{2}\cot\theta \cdot \left(\frac{2\,000}{1 + \cot\theta + \csc\theta}\right)^2$$

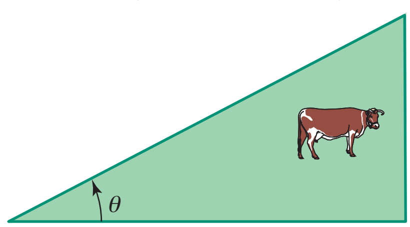


FIGURA 4.E.15 Pastizal del problema 80

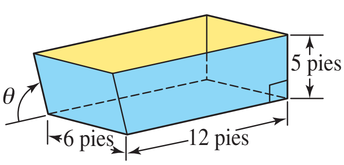


FIGURA 4.E.16 Caja del problema 81

81. Exprese el volumen de la caja de la **FIGURA 4.E.16** en función del ángulo θ, indicado.

82. Se dobla una esquina de una hoja de papel de 8.5 pulg × 11 pulg, hasta llegar a la orilla de la hoja, como se ve en la FIGURA 4.E.17. Exprese la longitud L del doblez en función del ángulo θ que indica la figura.

83. Se debe fabricar un canal con una lámina metálica de 30 cm de ancho, doblando 10 cm de sus orillas hacia arriba, en cada lado, para que éstos formen ángulos iguales ϕ con la vertical. Vea la FIGURA 4.E.18. Exprese el área transversal del canal en función del ángulo ϕ.

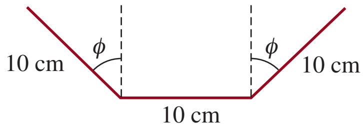


FIGURA 4.E.18 Canalón del problema 83

84. Un tubo metálico debe transportarse horizontalmente para dar la vuelta a una esquina en ángulo recto, desde un corredor de 8 pies de ancho hasta otro de 6 pies de ancho. Vea la FIGURA 4.E.19. Exprese la longitud L del tubo en función del ángulo θ que indica la figura.

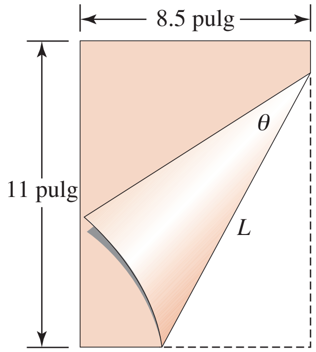


FIGURA 4.E.17 Papel doblado del problema 82

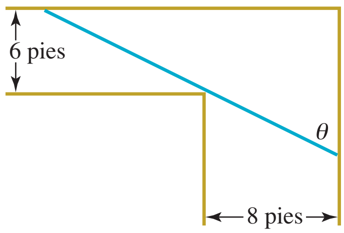


FIGURA 4.E.19 Tubo del problema 84

Contenido del capítulo

5.1 Funciones exponenciales

5.2 Funciones logarítmicas

5.3 Modelos exponenciales y logarítmicos

5.4 ∫Avance DE CÁLCULO Funciones hiperbólicas

Capítulo 5 Ejercicios de repaso

Funciones exponenciales y logarítmicas

5

5.1 Funciones exponenciales

☐ **Introducción** En los capítulos anteriores estudiamos funciones como $f(x) = x^2$; esto es, una función con una base variable x y una potencia o exponente constante 2. Ahora examinaremos funciones como $f(x) = 2^x$; en este caso tiene una base constante 2 y un exponente variable x.

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Si $b > 0$ y $b \neq 1$, una **función exponencial** $y = f(x)$ tiene la forma

$$f(x) = b^x. \tag{1}$$

El número b se llama **base** y x se llama **exponente**.

El **dominio** de una exponencial f definida en (1) es el conjunto de todos los números reales $(-\infty, \infty)$.

En (1), la base b se restringe a números positivos, para garantizar que b^x siempre sea un número real. Por ejemplo, con esta restricción se evitan números complejos, como $(-4)^{1/2}$. También, cuando la base $b = 1$, tiene poco interés para nosotros, porque (1) es la función constante $f(x) = 1^x = 1$.

☐ **Exponentes** Como acabamos de mencionar, el dominio de una función exponencial (1) es el conjunto de todos los números reales. Eso quiere decir que el exponente x puede ser un número racional o irracional. Por ejemplo, si la base es $b = 3$ y el exponente x es un *número racional*, por ejemplo, $x = \frac{1}{5}$ y $x = 1.4$, entonces

$$3^{1/5} = \sqrt[5]{3} \quad \text{y} \quad 3^{1.4} = 3^{14/10} = 3^{7/5} = \sqrt[5]{3^7}.$$

Para un exponente x que sea un *número irracional*, b^x está definida, pero su definición precisa sale del alcance de este libro. Sin embargo, se puede sugerir un procedimiento para definir un número como $3^{\sqrt{2}}$. En la representación decimal de $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$ se ve que los números racionales

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \ldots,$$

se aproximan sucesivamente cada vez más a $\sqrt{2}$. Si se usan estos números racionales como exponentes, cabe esperar que los números

$$3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, 3^{1.4142}, 3^{1.41421}, \ldots,$$

Sean aproximaciones cada vez mejores a $3^{\sqrt{2}}$. En realidad, se puede demostrar que esto es cierto, con una definición precisa de b^x para un valor irracional de x. De manera práctica, se puede usar la tecla $\boxed{y^x}$ de una calculadora para obtener la aproximación a $3^{\sqrt{2}} = 4.728804388$.

☐ Leyes de los exponentes

En la mayor parte de los textos de álgebra, se enuncian primero las leyes de los exponentes enteros, y después las de los exponentes racionales. Debido a que se puede definir a b^x para todos los números reales x cuando $b > 0$, se puede demostrar que estas mismas **leyes de los exponentes** rigen a todos los exponentes de número real. Si $a > 0$, $b > 0$ y x, x_1 y x_2 representan números reales, entonces

$$i)\ b^{x_1} \cdot b^{x_2} = b^{x_1 + x_2} \qquad ii)\ \frac{b^{x_1}}{b^{x_2}} = b^{x_1 - x_2}$$

$$iii)\ \frac{1}{b^x} = b^{-x} \qquad iv)\ (b^{x_1})^{x_2} = b^{x_1 x_2}$$

$$v)\ (ab)^x = a^x b^x \qquad vi)\ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

EJEMPLO 1 Reformulación de una función

A veces usaremos las leyes de los exponentes para reformular una función, en forma distinta. Por ejemplo, ni $f(x) = 2^{3x}$ ni $g(x) = 4^{-2x}$ tienen la forma precisa de la función exponencial definida en (1). Sin embargo, según las leyes de los exponentes, f puede reformularse como $f(x) = 8^x$ ($b = 8$ en (1)), y g se puede expresar como $g(x) = (\frac{1}{16})^x$ ($b = \frac{1}{16}$ en (1)). Los detalles se ven a continuación:

$$f(x) = 2^{3x} = \underset{\text{por } iv)}{(2^3)^x} = \underset{\text{la forma es ahora } b^x}{8^x},$$

$$g(x) = 4^{-2x} = \underset{\text{por } iv)}{(4^{-2})^x} = \underset{\text{por } iii)}{\left(\frac{1}{4^2}\right)^x} = \underset{\text{la forma es ahora } b^x}{\left(\frac{1}{16}\right)^x}.$$ ■

☐ Gráficas

Distinguiremos dos tipos de gráficas para (1), que dependerán de si la base b satisface a $b > 1$, o si $0 < b < 1$. Los dos ejemplos que siguen ilustran, una a una, las gráficas de $f(x) = 3^x$ y de $f(x) = (\frac{1}{3})^x$. Antes de trazarlas, podemos hacer algunas observaciones intuitivas acerca de ambas funciones. En razón de que las bases $b = 3$ y $b = \frac{1}{3}$ son positivas, los valores de 3^x y de $(\frac{1}{3})^x$ son positivos para todo número real x. Además, ni 3^x ni $(\frac{1}{3})^x$ pueden ser cero para alguna x, por lo que las gráficas de $f(x) = 3^x$ y $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ no intersecan al eje x. También, $3^0 = 1$ y $(\frac{1}{3})^0 = 1$, por lo que $f(0) = 1$ en cada caso. Eso quiere decir que las gráficas de $f(x) = 3^x$ y $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ tienen la misma intersección con el eje y, en (0, 1).

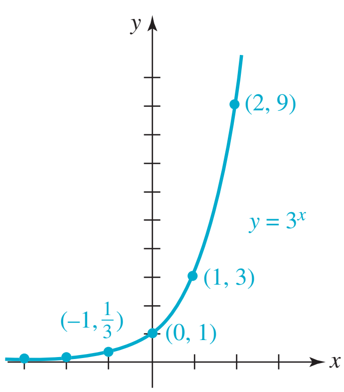


FIGURA 5.1.1 Gráfica de la función del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Gráfica para $b > 1$

Graficar la función $f(x) = 3^x$.

Solución Primero se hace una tabla de algunos valores de la función que correspondan a valores preseleccionados de x. Como se ve en la **FIGURA 5.1.1**, se graficaron los puntos correspondientes que se obtuvieron de la tabla, y se unieron con una curva continua. La gráfica muestra que f es una función creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

■

EJEMPLO 3 Gráfica de $0 < b < 1$

Graficar la función $f(x) = (\frac{1}{3})^x$.

Solución Procedemos como en el ejemplo anterior 2, y formamos una tabla de algunos valores de la función que correspondan a valores preseleccionados de x. Por ejemplo, nótese que, según las leyes de los exponentes,

$$f(-2) = (\tfrac{1}{3})^{-2} = (3^{-1})^{-2} = 3^2 = 9.$$

Como se ve en la **FIGURA 5.1.2**, se graficaron los puntos correspondientes que se sacaron de la tabla, y se unieron con una curva continua. En este caso, la gráfica muestra que f es una función decreciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

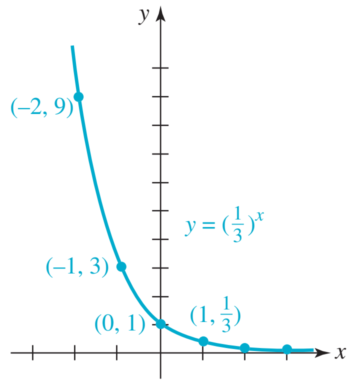


FIGURA 5.1.2 Gráfica de la función del ejemplo 3

Con frecuencia, las funciones exponenciales con bases que satisfagan $0 < b < 1$, como cuando $b = \frac{1}{3}$, se escriben en una forma alternativa. Se ve que $y = (\frac{1}{3})^x$ es lo mismo que $y = 3^{-x}$. De este último resultado se desprende que la gráfica de $y = 3^{-x}$ sólo es la gráfica de $y = 3^x$ reflejada en el eje y.

◀ En el caso de reflexiones en un eje coordenado, vea *ii*) en la página 62, sección 2.2

Asíntota horizontal

La **FIGURA 5.1.3** ilustra las dos formas generales que puede tener la gráfica de una función exponencial $f(x) = b^x$. Sin embargo, hay otro aspecto importante en todas esas gráficas. Obsérvese, en la figura 5.1.3, que para $b > 1$,

$$f(x) = b^x \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty, \qquad \leftarrow \text{gráfica en azul}$$

mientras que para $0 < b < 1$,

$$f(x) = b^x \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty. \qquad \leftarrow \text{gráfica en rojo}$$

En otras palabras, la línea $y = 0$ (el eje x) es una **asíntota horizontal** en ambos tipos de gráficas exponenciales.

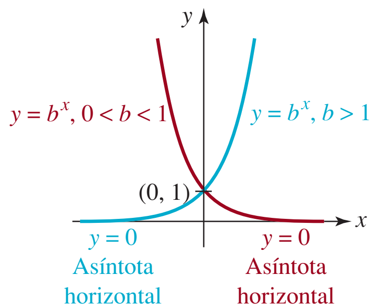


FIGURA 5.1.3 f creciente para $b > 1$; f decreciente para $0 < b < 1$

Propiedades de una función exponencial

La lista siguiente resume algunas de las propiedades importantes de la función exponencial f con base b. Vuelva a examinar las gráficas de las figuras 5.1.1 a 5.1.3 cuando lea esta lista.

- El dominio de f es el conjunto de los números reales, esto es, $(-\infty, \infty)$.
- El contradominio de f es el conjunto de los números reales positivos, esto es, $(0, \infty)$.
- La intersección con el eje y de f está en $(0, 1)$. La gráfica de f no tiene intersección con el eje x.
- La función f es creciente para $b > 1$ y es decreciente para $0 < b < 1$. (2)
- El eje x, esto es, $y = 0$, es una asíntota horizontal en la gráfica de f.
- La función f es continua en $(-\infty, \infty)$.
- La función f es uno-a-uno.

Aunque las gráficas de $y = b^x$ en el caso, por ejemplo, cuando $b > 1$, comparten la misma forma, y todas pasan por el mismo punto $(0, 1)$, hay algunas diferencias sutiles. Mientras mayor sea la base b la gráfica sube con más pendiente cuando x aumenta. En la **FIGURA 5.1.4** se comparan las gráficas de $y = 5^x$, $y = 3^x$, $y = 2^x$ y $y = (1.2)^x$, que se trazan en verde, azul, amarillo y rojo, respectivamente, en los mismos ejes coordenados. Vemos en esta gráfica que los valores de $y = (1.2)^x$ aumentan con lentitud cuando x aumenta. Por ejemplo, para $y = (1.2)^x$, $f(3) = (1.2)^3 = 1.728$, mientras que para $y = 5^x$, $f(3) = 5^3 = 125$.

El hecho que (1) sea función uno-a-uno es consecuencia de la prueba de la recta horizontal descrita en la sección 2.7. Note que en las figuras 5.1.1 a 5.1.4, una línea horizontal puede cruzar una gráfica exponencial cuando mucho en un punto.

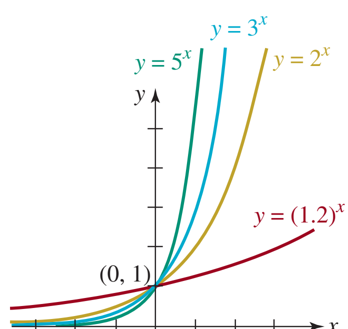


FIGURA 5.1.4 Gráficas de $y = b^x$ para $b = 1.2, 2, 3$ y 5.

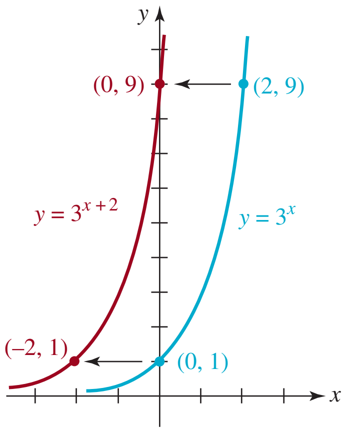


FIGURA 5.1.5 Gráfica desplazada del ejemplo 4

Naturalmente, se pueden obtener otras clases de gráficas, mediante transformaciones rígidas y no rígidas, o cuando se combina una función exponencial con otras funciones, en una operación aritmética o en composición de funciones. En los siguientes ejemplos examinaremos las variaciones de la gráfica exponencial.

EJEMPLO 4 Gráfica desplazada horizontalmente

Graficar la función $f(x) = 3^{x+2}$.

Solución Según la descripción de la sección 2.2, se debe reconocer que la gráfica de $f(x) = 3^{x+2}$ es la gráfica de $y = 3^x$ desplazada 2 unidades hacia la izquierda. Recordemos que como el desplazamiento es una transformación rígida, en este caso a la izquierda, los puntos en la gráfica de $f(x) = 3^{x+2}$ son los puntos de la gráfica de $y = 3^x$ movidos horizontalmente 2 unidades hacia la izquierda. Eso quiere decir que las ordenadas de los puntos (x, y) de la gráfica de $y = 3^x$ permanecen inalterados, pero de todas las abscisas de los puntos se resta 2. Entonces, en la **FIGURA 5.1.5** se observa que los puntos $(0, 1)$ y $(2, 9)$ de la gráfica de $y = 3^x$ se mueven, respectivamente, a los puntos $(-2, 1)$ y $(0, 9)$ de la gráfica de $f(x) = 3^{x+2}$. ■

La función $f(x) = 3^{x+2}$ del ejemplo 4 se puede reformular, si se desea, como $f(x) = 9 \cdot 3^x$. Mediante *i*) de las leyes de los exponentes, $3^{x+2} = 3^2 3^x = 9 \cdot 3^x$. De este modo, podemos reinterpretar la gráfica de $f(x) = 3^{x+2}$ como un estiramiento vertical de la gráfica de $y = 3^x$ por un factor de 9. Por ejemplo, $(1, 3)$ está en la gráfica de $y = 3^x$, en tanto que $(1, 9 \cdot 3) = (1, 27)$ está en la gráfica de $f(x) = 3^{x+2}$.

□ El número *e*

Casi todo estudiante de matemáticas ha oído de, y probablemente ha trabajado con, el famoso número irracional $\pi = 3.141592654\ldots$ Recuerde que un número irracional tiene decimales no repetitivos y que no terminan. En cálculo y en matemáticas aplicadas, el número irracional

$$e = 2.718281828459\ldots$$

puede decirse que tiene un papel más importante que el número π. La definición usual del número e es el número al cual tiende la función $f(x) = (1 + 1/x)^x$ cuando x crece sin límite en dirección positiva, esto es, $f(x) \to e$ cuando $x \to \infty$. Usando la notación de límite introducida en las secciones 1.5 y 2.9, se escribe

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. \qquad (3)$$

Vea los problemas 55 y 57, en los ejercicios 5.1. Con frecuencia se ve una definición alternativa del número e. Si $h = 1/x$ en (3), entonces, cuando $x \to \infty$, al mismo tiempo $h \to 0$. Por consiguiente, una forma equivalente de (3) es

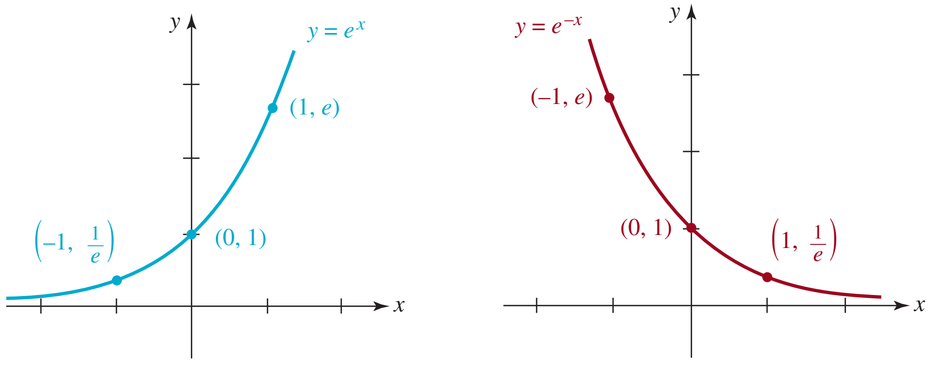
$$e = \lim_{h\to 0}(1 + h)^{1/h}. \qquad (4)$$

Vea los problemas 56 y 58 de los ejercicios 5.1. Naturalmente, si de antemano damos por *definiciones* del número e las ecuaciones (3) y (4), surge la pregunta obvia: ¿de dónde vienen esos extraños límites? Una respuesta parcial, no satisfactoria, es: las definiciones (3) y (4) se originan en el cálculo. Si bien en este curso no se puede demostrar que existen los límites en (3) y (4), describiremos los orígenes de e en la sección 5.4.

□ La función exponencial natural

Cuando se escoge que la base en (1) sea $b = e$, la función

$$f(x) = e^x \qquad (5)$$



a) *b*)

FIGURA 5.1.6 Función exponencial natural (parte *a*), y su recíproca (parte *b*)

se llama **función exponencial natural**. Como $b = e > 1$ y $b = 1/e < 1$, las gráficas de $y = e^x$ y $y = e^{-x}$ (o $y = (1/e)^x$) se ven en la **FIGURA 5.1.6**.

Al verla, la función exponencial (5) no posee alguna característica gráfica notable que la distinga, por ejemplo, de la función $f(x) = 3^x$, y no tiene propiedades especiales además que las de la lista (2). Como se mencionó, las dudas acerca de las razones por las cuales (5) es una función "natural" y la función exponencial más importante, sólo pueden aclararse totalmente en los cursos de cálculo y posteriores. Exploraremos aquí algo de la importancia del número *e* en las secciones 5.3 y 5.4.

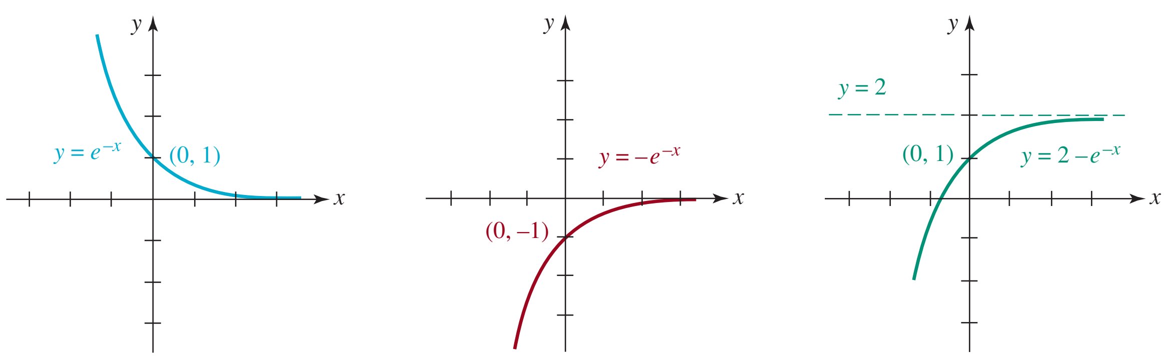
Usando transformaciones rígidas, observe que la gráfica de $y = e^{-x}$ es la gráfica de $f(x) = e^x$ reflejada en el eje *y* desde $y = f(-x) = e^{-x}$. Vea la página 62.

EJEMPLO 5 Gráfica desplazada verticalmente

Graficar la función $f(x) = 2 - e^{-x}$. Indicar el contradominio.

Solución Primero se traza la gráfica de $y = e^{-x}$, como se indica en el inciso *a*) de la **FIGURA 5.1.7**. A continuación se refleja la primera gráfica en el eje *x* para obtener la de $y = -e^{-x}$ en el inciso *b*) de la figura 5.1.7. Por último, la gráfica del inciso *c*) de la figura 5.1.7 se obtiene desplazando la gráfica del inciso *b*) 2 unidades hacia arriba.

La intersección con el eje *y* $(0, -1)$ de $y = -e^{-x}$ cuando se desplaza 2 unidades hacia arriba nos regresa a la ordenada original al origen del inciso *a*), de la figura 5.1.7. Por último, la asíntota horizontal $y = 0$ en los incisos *a*) y *b*) de la figura se traslada a $y = 2$ en el inciso *c*) de la figura 5.1.7. De acuerdo con esta última gráfica, se puede llegar a la conclusión de que el contradominio de la función $f(x) = 2 - e^{-x}$ es el conjunto de los números reales definido por $y < 2$; esto es, el intervalo $(-\infty, 2)$ en el eje *y*.



a) Se comienza con la gráfica de $y = e^{-x}$ *b*) Gráfica *a*) reflejada en el eje *x* *c*) Gráfica *b*) desplazada 2 unidades hacia arriba

FIGURA 5.1.7 Gráfica de la función del ejemplo 5

En el próximo ejemplo se grafica la composición de la función exponencial natural $y = e^x$ con la función polinomial cuadrática simple $y = -x^2$.

EJEMPLO 6 Composición de funciones

Graficar la función $f(x) = e^{-x^2}$.

Solución Como $f(0) = e^{-0^2} = e^0 = 1$, la intersección con el eje y de las gráficas está en (0, 1). También, $f(x) \neq 0$, porque $e^{-x^2} \neq 0$ para todo número real x. Eso quiere decir que la gráfica de f no tiene intersección con el eje x. Entonces, de

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$$

se desprende que f es una función par, por lo que su gráfica es simétrica con respecto al eje y. Por último, se observa que

$$f(x) = \frac{1}{e^{x^2}} \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty.$$

También, por simetría se puede decir que $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$. Esto demuestra que $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f. La gráfica de f se ve en la FIGURA 5.1.8. ■

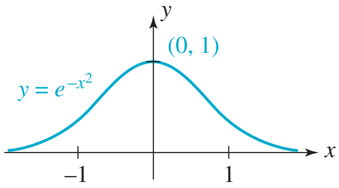


FIGURA 5.1.8 Gráfica de la función del ejemplo 6

Las gráficas con forma de campana, como la de la figura 5.1.8, son muy importantes cuando se estudia probabilidad y estadística.

□ Propiedad uno-a-uno

Recordamos, de (1) en la sección 2.7, que una función uno-a-uno f posee la propiedad que si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$. Como $f(x) = b^x$ es uno-a-uno, entonces

$$\text{Si } b^{x_1} = b^{x_2}, \quad \text{entonces} \quad x_1 = x_2. \tag{6}$$

Como veremos en el próximo ejemplo, la propiedad en (6) permite resolver ciertas clases de ecuaciones exponenciales.

EJEMPLO 7 Una ecuación exponencial

Despejar x de $2^{x-3} = 8^{x+1}$.

Solución Se ve en el lado derecho de esta igualdad que 8 se puede escribir como una potencia de 2; esto es, $8 = 2^3$. Además, según las leyes de los exponentes,

de acuerdo con *iv*) se multiplican los exponentes

$$8^{x+1} = (2^3)^{x+1} = 2^{3x+3}.$$

Entonces, la ecuación es igual que

$$2^{x-3} = 2^{3x+3}.$$

De acuerdo con la propiedad uno-a-uno (6), los exponentes son iguales, esto es, $x - 3 = 3x + 3$. Entonces, al despejar x se obtiene $2x = -6$, o $x = -3$. Se recomienda al lector comprobar este resultado, sustituyendo x por -3 en la ecuación original. ■

EJEMPLO 8 Una ecuación exponencial

Despejar x de $7^{2(x+1)} = 343$.

Solución Se observa que $343 = 7^3$, y entonces se tiene la misma base en ambos lados de la igualdad:

$$7^{2(x+1)} = 7^3.$$

Entonces, de acuerdo con (6), se pueden igualar los exponentes y despejar x:

$$\begin{aligned} 2(x+1) &= 3 \\ 2x + 2 &= 3 \\ 2x &= 1 \\ x &= \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

■

5.1 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-16.

En los problemas 1 a 12, trace la gráfica de la función f. Determine la intersección con el eje y y la asíntota horizontal de la gráfica. Indique si la función es creciente o decreciente.

1. $f(x) = (\frac{3}{4})^x$

2. $f(x) = (\frac{4}{3})^x$

3. $f(x) = -2^x$

4. $f(x) = -2^{-x}$

5. $f(x) = 2^{x+1}$

6. $f(x) = 2^{2-x}$

7. $f(x) = -5 + 3^x$

8. $f(x) = 2 + 3^{-x}$

9. $f(x) = 3 - (\frac{1}{5})^x$

10. $f(x) = 9 - e^x$

11. $f(x) = -1 + e^{x-3}$

12. $f(x) = -3 - e^{x+5}$

En los problemas 13 a 16, deduzca una función exponencial $f(x) = b^x$ tal que la gráfica de f pase por el punto dado.

13. $(3, 216)$

14. $(-1, 5)$

15. $(-1, e^2)$

16. $(2, e)$

En los problemas 17 y 18 determine el contradominio de la función.

17. $f(x) = 5 + e^{-x}$

18. $f(x) = 4 - 2^{-x}$

En los problemas 19 a 24, determine las coordenadas de los cruces de la gráfica de la función con los ejes x y y. No trace las gráficas.

19. $f(x) = 2^x - 4$

20. $f(x) = -3^{2x} + 9$

21. $f(x) = xe^x + 10e^x$

22. $f(x) = x^2 2^x - 2^x$

23. $f(x) = x^3 8^x + 5x^2 8^x + 6x 8^x$

24. $f(x) = \dfrac{2^x - 6 + 2^{3-x}}{x + 2}$

En los problemas 25 a 28, use una gráfica para resolver la desigualdad.

25. $2^x > 16$

26. $e^x \leq 1$

27. $e^{x-2} < 1$

28. $(\frac{1}{2})^x \geq 8$

En los problemas 29 y 30 use la gráfica de la figura 5.1.8 para trazar la gráfica de la función f.

29. $f(x) = e^{-(x-3)^2}$

30. $f(x) = 3 - e^{-(x+1)^2}$

En los problemas 31 y 32, use $f(-x) = f(x)$ para demostrar que la función es par. Trace la gráfica de f.

31. $f(x) = e^{x^2}$

32. $f(x) = e^{-|x|}$

En los problemas 33 a 36, use las gráficas que obtuvo en los problemas 31 y 32 como ayuda para trazar la gráfica de la función f indicada.

33. $f(x) = 1 - e^{x^2}$

34. $f(x) = 2 + 3e^{|x|}$

35. $f(x) = -e^{|x-3|}$

36. $f(x) = e^{(x+2)^2}$

37. Demuestre que $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ es una función par. Trace la gráfica de f.

38. Demuestre que $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ es una función impar. Trace la gráfica de f.

En los problemas 39 a 46 use la propiedad uno-a-uno (6) para resolver la ecuación exponencial respectiva.

39. $10^{-2x} = \dfrac{1}{1\,000}$

40. $\left(\dfrac{1}{e}\right)^x = e^3$

41. $8^{x-7} - 1 = 0$

42. $3^x - 27(\frac{1}{3})^x = 0$

43. $2^x \cdot 3^x = 36$

44. $\dfrac{4^x}{3^x} = \dfrac{9}{16}$

45. $3^x = 27^{x^2}$

46. $5^{x^2-3} = 25^x$

En los problemas 47 a 50, factorice o use la fórmula cuadrática para resolver la ecuación.

47. $(5^x)^2 - 26(5^x) + 25 = 0$

48. $64^x - 10(8^x) + 16 = 0$

49. $2^x + 2^{-x} = 2$

50. $(10^x)^2 + 10(10^x) - 1\,000(10^x) - 10\,000 = 0$

En los problemas 51 y 52, determine la intersección con el eje x de la gráfica de la función dada.

51. $f(x) = e^{x+4} - e$

52. $f(x) = 2 - \frac{1}{5}(0.1)^x$

En los problemas 53 y 54, trace la gráfica de la función f definida por secciones.

53. $f(x) = \begin{cases} -e^x, & x < 0 \\ -e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$

54. $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \leq 0 \\ -e^x, & x > 0 \end{cases}$

Problemas para calculadora o computadora

En los problemas 55 y 56, use una calculadora para llenar la tabla respectiva.

55.

x	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
$(1 + 1/x)^x$						

56.

h	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$(1 + h)^{1/h}$						

57. ***a)*** Use una graficadora para trazar las funciones $f(x) = (1 + 1/x)^x$ y $g(x) = e$, en el mismo conjunto de ejes coordenados. Use los intervalos $(0, 10]$, $(0, 100]$ y $(0, 1\,000]$. Describa el comportamiento de f para grandes valores de x, Gráficamente, ¿qué es $g(x) = e$?

b) Grafique la función f del inciso *a*), en el intervalo $[-10, 0)$. Sobreponga esta gráfica con la gráfica de f en $(0, 10]$ que obtuvo en el inciso *a*). ¿Es f una función continua?

58. Use una graficadora para trazar la función $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ en los intervalos $[0.1, 1]$, $[0.01, 1]$ y $[0.001, 1]$. Describa el comportamiento de f cerca de $x = 0$.

En los problemas 59 y 60 use una graficadora para ayudarse a determinar las abscisas al origen de las gráficas de las funciones f y g.

59. $f(x) = x^2, g(x) = 2^x$

60. $f(x) = x^3, g(x) = 3^x$

Para discusión

61. Suponga que $2^t = a$, y que $6^t = b$. Conteste lo siguiente, usando las leyes de los exponentes que se presentaron en esta sección.

a) ¿A qué es igual 12^t? *b*) ¿A qué es igual 3^t?
c) ¿A qué es igual 6^{-t}? *d*) ¿A qué es igual 6^{3t}?
e) ¿A qué es igual $2^{-3t}2^{7t}$? *f*) ¿A qué es igual 18^t?

62. Analice: ¿Qué hace que la gráfica de $y = e^{e^x}$ parezca semejante? No use graficadora.

En los problemas 63 y 64, la expresión fraccionaria se puede descomponer en fracciones parciales. Vea la sección 3.6. Describa cómo se puede hacer y ponga a funcionar sus ideas.

63. $\dfrac{e^t}{(e^t + 1)^2(e^t - 2)}$ **64.** $\dfrac{e^{2t}}{(e^t + 1)^3}$

5.2 Funciones logarítmicas

Introducción Debido a que una función exponencial $y = b^x$ es uno-a-uno, debe tener una función inversa. Para determinar esta inversa se intercambian las variables x y y, y se obtiene $x = b^y$. Esta última fórmula define a y en función de x:

y es el exponente de la base b que da como resultado x.

Al sustituir la palabra *exponente* por la palabra *logaritmo*, se puede reformular este último renglón como sigue:

y es el logaritmo de la base b que da como resultado x.

Este último renglón se abrevia con la notación $y = \log_b x$, y se llama función logarítmica.

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

La **función logarítmica** con la base $b > 0$, $b \neq 1$, se define por

$$y = \log_b x \quad \text{si, y sólo si,} \quad x = b^y. \tag{1}$$

Para $b > 0$, no hay número real y para el cual b^y pueda ser 0 o negativo. Por consiguiente, de acuerdo con $x = b^y$, se ve que $x > 0$. En otras palabras, el **dominio** de una función logarítmica $y = \log_b x$ es el conjunto de los números reales positivos $(0, \infty)$.

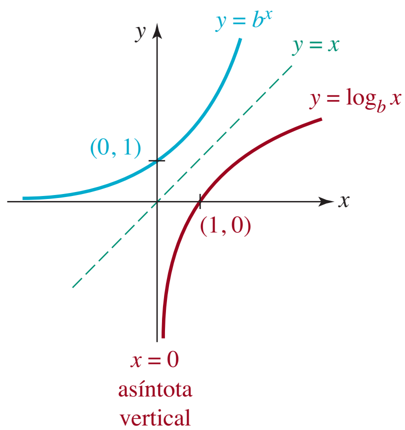
Para subrayar todo lo que se dijo en las frases anteriores:

La expresión logarítmica $y = \log_b x$ y la expresión exponencial $x = b^y$ son equivalentes,

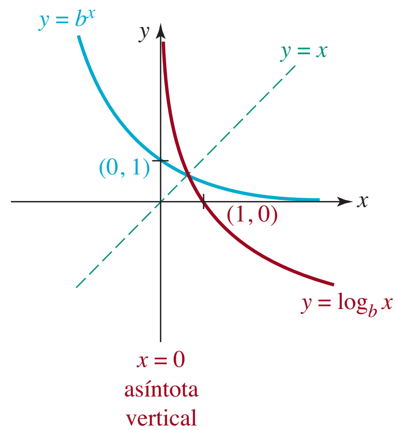
esto es, quieren decir lo mismo. Como consecuencia, dentro de un contexto específico como en la solución de un problema, se puede usar la forma que sea más cómoda. La tabla siguiente muestra algunos ejemplos de declaraciones equivalentes, exponenciales y logarítmicas.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_3 9 = 2$	$9 = 3^2$
$\log_8 2 = \frac{1}{3}$	$2 = 8^{1/3}$
$\log_{10} 0.001 = -3$	$0.001 = 10^{-3}$
$\log_b 5 = -1$	$5 = b^{-1}$

Gráficas Vimos en la sección 2.7 que la gráfica de una función inversa puede obtenerse reflejando la gráfica de la función original en la recta $y = x$. Se usó esta técnica para obtener gráficas rojas a partir de gráficas azules en la **FIGURA 5.2.1**. Si el lector revisa las dos gráficas, en la figura 5.2.1*a*) y 5.2.1*b*), recuerde que el dominio $(-\infty, \infty)$ y el contradominio $(0, \infty)$ de $y = b^x$ se transforman, respectivamente, en el contradominio $(-\infty, \infty)$ y el dominio $(0, \infty)$ de $y = \log_b x$. También, observe que la intersección con el eje y $(0, 1)$ de la función exponencial (gráficas azules) se transforma en el cruce con el eje x $(1, 0)$ en la función logarítmica (gráficas rojas).



a) Base $b > 1$



b) Base $0 < b < 1$

FIGURA 5.2.1 Gráficas de funciones logarítmicas

Asíntota vertical Cuando la función exponencial se refleja en la recta $y = x$, la asíntota horizontal $y = 0$ de la gráfica de $y = b^x$ se transforma en una asíntota vertical de la gráfica de $y = \log_b x$. En la figura 5.2.1 se ve que para $b > 1$,

$$\log_b x \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^+, \qquad \leftarrow \text{gráfica roja en } a)$$

mientras que para $0 < b < 1$,

$$\log_b x \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^+. \qquad \leftarrow \text{gráfica roja en } b$$

De acuerdo con (7) de la sección 3.5, se llega a la conclusión de que $x = 0$, que es la ecuación del eje y, es una **asíntota vertical** de la gráfica de $y = \log_b x$.

Propiedades de la función logarítmica La lista que sigue resume algunas de las propiedades importantes de la función logarítmica $f(x) = \log_b x$.

- El dominio de f es el conjunto de los números reales positivos, esto es, $(0, \infty)$.
- El contradominio de f es el conjunto de los números reales, esto es, $(-\infty, \infty)$.
- El cruce de f con el eje x está en $(1, 0)$. La gráfica de f no tiene intersección con el eje y. (2)
- La función f es creciente para $b > 1$ y decreciente para $0 < b < 1$.
- El eje y, esto es, $x = 0$, es asíntota vertical de la gráfica de f.
- La función f es continua en $(0, \infty)$.
- La función f es uno-a-uno.

Deseamos llamar la atención al tercer punto de la lista anterior:

$$\log_b 1 = 0 \quad \text{ya que} \quad b^0 = 1. \tag{3}$$

También

$$\log_b b = 1 \quad \text{ya que} \quad b^1 = b. \tag{4}$$

Así, además de $(1, 0)$, la gráfica de toda función logarítmica (1) con base b también contiene al punto $(b, 1)$. La equivalencia de $y = \log_b x$ y $x = b^y$ también llega a dos identidades, que a veces son útiles. Al sustituir $y = \log_b x$ en $x = b^y$, y después $x = b^y$ en $y = \log_b x$, se obtiene:

$$x = b^{\log_b x} \quad \text{y} \quad y = \log_b b^y. \tag{5}$$

Por ejemplo, de (5), $8^{\log_8 10} = 10$ y $\log_{10} 10^5 = 5$.

EJEMPLO 1 Gráfica logarítmica para $b > 1$

Graficar $f(x) = \log_{10}(x + 10)$.

Solución Es la gráfica de $y = \log_{10} x$, que tiene la forma que muestra la figura 5.2.1*a*), desplazada 10 unidades hacia la izquierda. Para subrayar el hecho que el dominio de una función logarítmica es el conjunto de los números reales positivos, se puede obtener el dominio de $f(x) = \log_{10}(x + 10)$, con el requisito que se debe cumplir $x + 10 > 0$ o que $x > -10$. En notación de intervalos, el dominio de f es $(-10, \infty)$. En la tabla siguiente se eligieron valores adecuados de x para graficar algunos puntos.

x	-9	0	90
$f(x)$	0	1	2

Nótese que

$$f(-9) = \log_{10} 1 = 0 \quad \leftarrow \text{por (3)}$$
$$f(0) = \log_{10} 10 = 1 \quad \leftarrow \text{por (4)}$$

La asíntota vertical $x = 0$ de la gráfica de $y = \log_{10} x$ se transforma en $x = -10$ de la gráfica desplazada. Esta asíntota es la recta vertical interrumpida en la **FIGURA 5.2.2**. ■

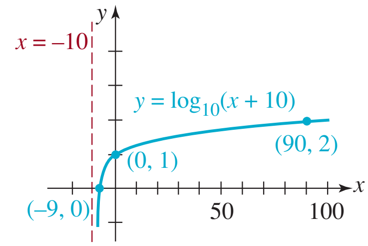


FIGURA 5.2.2 Gráfica de la función del ejemplo 1

☐ Logaritmo natural

Los logaritmos con base $b = 10$ se llaman **logaritmos base 10** o **logaritmos comunes**, y a los logaritmos con base $b = e$ se les llama **logaritmos naturales**. Además se acostumbra escribir el logaritmo natural

$$\log_e x \quad \text{como} \quad \ln x.$$

Se acostumbra decir que el símbolo "$\ln x$" es "ele ene x". Como $b = e > 1$, la gráfica de $y = \ln x$ tiene la forma característica logarítmica que se ve en la figura 5.2.1*a*). Vea la **FIGURA 5.2.3**. En el caso de la base $b = e$, la ecuación (1) se transforma en

$$y = \ln x \quad \text{si, y sólo si,} \quad x = e^y. \tag{6}$$

Las ecuaciones análogas a (3) y (4) del logaritmo natural son:

$$\ln 1 = 0 \quad \text{ya que} \quad e^0 = 1. \tag{7}$$
$$\ln e = 1 \quad \text{ya que} \quad e^1 = e. \tag{8}$$

Las identidades (5) se transforman en

$$x = e^{\ln x} \quad \text{y} \quad y = \ln e^y. \tag{9}$$

Por ejemplo, de acuerdo con (9), $e^{\ln 13} = 13$.

Los logaritmos base 10 y naturales se pueden encontrar en todas las calculadoras.

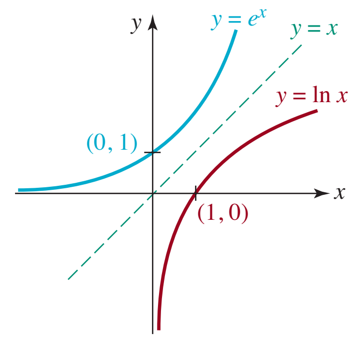


FIGURA 5.2.3 Gráfica de la función logaritmo natural

☐ Leyes de los logaritmos

Se pueden modificar las leyes de los exponentes de la sección 5.1 para indicar en forma equivalente las leyes de los logaritmos. Para visualizarlo, supongamos que se escriben $M = b^{x_1}$ y $N = b^{x_2}$. Entonces, de acuerdo con (1), $x_1 = \log_b M$ y $x_2 = \log_b N$.

Producto: Según *i*) de la sección 5.1, $MN = b^{x_1 + x_2}$. Expresado como logaritmo, esto es $x_1 + x_2 = \log_b MN$. Se sustituyen x_1 y x_2 para llegar a

$$\log_b M + \log_b N = \log_b MN.$$

Cociente: De acuerdo con *ii*) de la sección 5.1, $M/N = b^{x_1 - x_2}$. Expresado como logaritmo, esto es $x_1 - x_2 = \log_b(M/N)$. Se sustituyen x_1 y x_2 para obtener

$$\log_b M - \log_b N = \log_b (M/N).$$

Potencia: Según *iv*) de la sección 5.1, $M^c = b^{cx_1}$. Expresado como logaritmo, esto es $cx_1 = \log_b M^c$. Se sustituye x_1 para obtener

$$c\log_b M = \log_b M^c.$$

Para comodidad, y como futura referencia, resumiremos a continuación estas leyes de producto, cociente y potencia de los logaritmos.

LEYES DE LOS LOGARITMOS

Para toda base $b > 0$, $b \neq 1$, y para los números positivos M y N,

i) $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

ii) $\log_b \left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$

iii) $\log_b M^c = c\log_b M$, para cualquier número real c.

EJEMPLO 2 Leyes de los logaritmos

Simplificar y escribir como un solo logaritmo

$$\tfrac{1}{2}\ln 36 + 2\ln 4 - \ln 4.$$

Solución Hay varias formas de atacar este problema. Por ejemplo, obsérvese que el segundo y el tercer términos se pueden combinar aritméticamente como sigue:

$$2\ln 4 - \ln 4 = \ln 4. \quad \leftarrow \text{análogo a } 2x - x = x$$

También se puede aplicar la ley *iii*) y después la ley *ii*), para combinar estos términos:

$$\begin{aligned} 2\ln 4 - \ln 4 &= \ln 4^2 - \ln 4 \\ &= \ln 16 - \ln 4 \\ &= \ln \tfrac{16}{4} \\ &= \ln 4. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\ln 36 + 2\ln 4 - \ln 4 &= \ln(36)^{1/2} + \ln 4 && \leftarrow \text{por } iii) \\ &= \ln 6 + \ln 4 \\ &= \ln 24. && \leftarrow \text{por } i) \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Reformulación de expresiones logarítmicas

Usar las leyes de los logaritmos para reformular cada expresión, y evaluarla.

a) $\ln\sqrt{e}$ ***b***) $\ln 5e$ ***c***) $\ln\dfrac{1}{e}$

Solución

a) Como $\sqrt{e} = e^{1/2}$, entonces de acuerdo con *iii*) de las leyes de los logaritmos,

$$\ln\sqrt{e} = \ln e^{1/2} = \tfrac{1}{2}\ln e = \tfrac{1}{2} \quad \leftarrow \text{de acuerdo con (8), } \ln e = 1$$

b) De *i*) de las leyes de los logaritmos, y con una calculadora:

$$\ln 5e = \ln 5 + \ln e = \ln 5 + 1 \approx 2.6094.$$

c) Según *ii*) de las leyes de los logaritmos,

$$\ln\frac{1}{e} = \ln 1 - \ln e = 0 - 1 = -1. \quad \leftarrow \text{de acuerdo con (7) y (8)}$$

Nótese que aquí también se pudo haber usado *iii*) de las leyes de los logaritmos:

$$\ln\frac{1}{e} = \ln e^{-1} = (-1)\ln e = -1. \quad \leftarrow \ln e = 1$$

Propiedad uno-a-uno El análogo logarítmico de la propiedad uno-a-uno de las funciones exponenciales, (6) de la sección 5.1, es:

$$\text{Si} \quad \log_b x_1 = \log_b x_2, \quad \text{entonces} \quad x_1 = x_2. \tag{10}$$

Como se vio en la sección 5.1 en el caso de la función exponencial $y = b^x$, la propiedad uno-a-uno de la función logarítmica puede usarse para resolver ciertos tipos de ecuaciones.

EJEMPLO 4 Uso de la propiedad uno-a-uno

Despejar x de $\ln 2 + \ln(4x - 1) = \ln(2x + 5)$.

Solución Según *i*) de las leyes de los logaritmos, el lado izquierdo de la ecuación se puede expresar como

$$\ln 2 + \ln(4x - 1) = \ln 2(4x - 1) = \ln(8x - 2).$$

Entonces, la ecuación original es

$$\ln(8x - 2) = \ln(2x + 5).$$

Como dos logaritmos con la misma base son iguales, de inmediato se ve que, por la propiedad uno-a-uno (10),

$$8x - 2 = 2x + 5 \quad \text{o sea} \quad 6x = 7 \quad \text{o} \quad x = \frac{7}{6}.$$

Solución de ecuaciones El ejemplo 4 ilustra sólo uno de varios procedimientos que se pueden usar para resolver una diversidad de ecuaciones exponenciales y logarítmicas. A continuación se presenta una lista de estrategias para hacerlo:

- Usar las propiedades uno-a-uno de b^x y de $\log_b x$.
- Reformular una expresión exponencial como expresión logarítmica.
- Reformular una expresión logarítmica como una expresión exponencial.
- Para ecuaciones $a^{x_1} = b^{x_2}$, donde $a \neq b$, sacar el logaritmo natural de ambos lados y simplificar usando *iii*) de las leyes de los logaritmos.

EJEMPLO 5 Reformulación de una expresión exponencial

Despejar k de $e^{10k} = 7$.

Solución Se usará (6) para reescribir la expresión exponencial dada como una expresión logarítmica:

$$e^{10k} = 7 \quad \text{quiere decir que} \quad 10k = \ln 7.$$

Por consiguiente, con ayuda de una calculadora,

$$k = \frac{1}{10}\ln 7 \approx 0.1946.$$

EJEMPLO 6 Reformulación de una expresión exponencial

Despejar x de $\log_2 x = 5$.

Solución Se usará (1) para reexpresar la ecuación logarítmica como su forma exponencial equivalente:

$$x = 2^5 = 32.$$

EJEMPLO 7 Sacar ln en ambos lados

Resolver para x $e^{2x} = 3^{x-4}$.

Solución Como las bases de la expresión exponencial a cada lado de la ecuación son diferentes, una forma de proceder es sacar el logaritmo natural (también se podría usar el logaritmo común) de ambos lados. De la igualdad

$$\ln e^{2x} = \ln 3^{x-4}$$

y *iii*) de las leyes de los logaritmos, se obtiene

$$2x \ln e = (x - 4)\ln 3.$$

Ahora, usando $\ln e = 1$ y la ley distributiva, la última ecuación se transforma en

$$2x = x\ln 3 - 4\ln 3.$$

Se reúnen los términos en x en un lado de la igualdad, para llegar a

$$\overbrace{2x - x\ln 3}^{\text{sacar } x \text{ como factor común de estos términos}} = -4\ln 3 \quad \text{o} \quad (2 - \ln 3)x = -4\ln 3 \quad \text{o} \quad x = \frac{-4\ln 3}{2 - \ln 3}.$$

Se recomienda al lector confirme que el resultado es $x \approx -4.8752$. ■

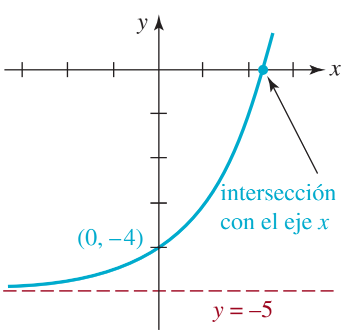


FIGURA 5.2.4 Intersección de $y = 2^x - 5$ con el eje x

Cambio de base

Supongamos que se desea determinar la intersección con el eje x de la gráfica de $y = 2^x - 5$. Vea la **FIGURA 5.2.4**. Si $y = 0$, se ve que x es la solución de la ecuación $2^x - 5 = 0$, o de $2^x = 5$. Ahora bien, una solución perfectamente válida es $x = \log_2 5$. Pero, desde un punto de vista computacional (esto es, de expresar x como un número), el último resultado no es deseable, porque ninguna calculadora tiene una función logarítmica con la base 2. Se puede calcular el resultado cambiando $\log_2 5$ al logaritmo natural, sólo con sacar el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación exponencial $2^x = 5$:

$$\ln 2^x = \ln 5$$
$$x\ln 2 = \ln 5$$

Nota: En realidad aquí dividimos los logaritmos →

$$x = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.3219.$$

A propósito, como comenzamos con $x = \log_2 5$, este último resultado también demuestra la igualdad $\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2}$.

EJEMPLO 8 Cambio de base

Determinar la x en el dominio de $f(x) = 8^x$ para la cual $f(x) = 73$.

Solución Se debe determinar una solución de la ecuación $8^x = 73$. Luego de sacar el logaritmo natural de ambos lados de esta última ecuación, y despejar x, se obtiene

$$\ln 8^x = \ln 73 \quad \text{y así} \quad x = \frac{\ln 73}{\ln 8}.$$

Con ayuda de una calculadora se ve que $x = \frac{\ln 73}{\ln 8} \approx 2.0633$. Como en la exposición anterior a este ejemplo, en realidad hemos cambiado las bases de $x = \log_8 73$ a $x = \frac{\ln 73}{\ln 8}$. ■

Para convertir un logaritmo con cualquier base $b > 0$ al logaritmo natural, primero se reordena la expresión logarítmica $x = \log_b N$ como una expresión exponencial equivalente $b^x = N$. A continuación se saca el logaritmo natural de ambos lados de esta última igualdad, y se despeja x de la ecuación resultante, $x \ln b = \ln N$. Con esto se obtiene la fórmula general

$$\log_b N = \frac{\ln N}{\ln b}. \tag{11}$$

NOTAS PARA EL SALÓN DE CLASE

i) Con frecuencia los alumnos batallan con el concepto de *logaritmo*. Puede ser que les ayude repetir algunas docenas de veces "un logaritmo es un exponente". También puede ayudarse leyendo una declaración como $3 = \log_{10} 1\,000$ en la forma "3 es el exponente al que hay que elevar 10 para...".

ii) En el caso de ecuaciones logarítmicas, como la del ejemplo 4, debe usted acostumbrarse a cambiar su resultado, sustituyendo de nuevo en la ecuación original. Es posible que una ecuación logarítmica tenga una solución adicional. Ahora, resuelva los problemas 57 y 58 en los ejercicios 5.2.

iii) Tenga *mucho* cuidado al aplicar las leyes de los logaritmos. El logaritmo *no* se distribuye sobre la suma. En otras palabras,

$$\log_b(M + N) \neq \log_b M + \log_b N.$$

También, $$\frac{\log_b M}{\log_b N} \neq \log_b M - \log_b N.$$

En general, no hay manera de reformular ya sea

$$\log_b(M + N) \quad \text{o} \quad \frac{\log_b M}{\log_b N}.$$

iv) En cálculo, el primer paso de un procedimiento llamado *diferenciación logarítmica* requiere sacar el logaritmo natural de ambos lados de una función complicada como $y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt[3]{8x^3 + 2}}$. La idea es usar las leyes de los logaritmos para transformar potencias a múltiplos constantes, productos en sumas y cocientes en diferencias. Vea los problemas 51 a 54 de los ejercicios 5.2.

v) Al avanzar en cursos superiores de matemáticas, ciencias e ingeniería, verá diferentes notaciones de la función exponencial natural, así como del logaritmo natural. Por ejemplo, en algunas calculadoras se puede ver $y = \exp x$ y no $y = e^x$. En el sistema *Mathematica*, de álgebra computacional, la función exponencial natural se escribe $\mathrm{Exp}[x]$ y el logaritmo natural se escribe $\mathrm{Log}[x]$.

5.2 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-17.

En los problemas 1 a 6 reformule la expresión exponencial en forma de una expresión logarítmica equivalente.

1. $4^{-1/2} = \frac{1}{2}$

2. $9^0 = 1$

3. $10^4 = 10\,000$

4. $10^{0.3010} = 2$

5. $t^{-s} = v$

6. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

En los problemas 7 a 12 reformule la expresión logarítmica en forma de una expresión exponencial equivalente.

7. $\log_2 128 = 7$

8. $\log_5 \frac{1}{25} = -2$

9. $\log_{\sqrt{3}} 81 = 8$

10. $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$

11. $\log_b u = v$

12. $\log_b b^2 = 2$

En los problemas 13 a 18 determine el valor exacto del logaritmo.

13. $\log_{10}(0.0000001)$

14. $\log_4 64$

15. $\log_2(2^2 + 2^2)$

16. $\log_9 \frac{1}{3}$

17. $\ln e^e$

18. $\ln(e^4 e^9)$

En los problemas 19 a 22 determine el valor exacto de la expresión indicada.

19. $10^{\log_{10} 6^2}$

20. $25^{\log_5 8}$

21. $e^{-\ln 7}$

22. $e^{\frac{1}{2}\ln \pi}$

En los problemas 23 y 24 deduzca una función logarítmica $f(x) = \log_b x$ tal que la gráfica de f pase por el punto indicado.

23. $(49, 2)$

24. $(4, \frac{1}{3})$

En los problemas 25 a 32, determine el dominio de la función f. Determine la intersección con el eje x y la asíntota vertical de la gráfica. Trace la gráfica de f.

25. $f(x) = -\log_2 x$

26. $f(x) = -\log_2(x + 1)$

27. $f(x) = \log_2(-x)$

28. $f(x) = \log_2(3 - x)$

29. $f(x) = 3 - \log_2(x + 3)$

30. $f(x) = 1 - 2\log_4(x - 4)$

31. $f(x) = -1 + \ln x$

32. $f(x) = 1 + \ln(x - 2)$

En los problemas 33 y 34, resuelva la desigualdad con una gráfica.

33. $\ln(x + 1) < 0$

34. $\log_{10}(x + 3) > 1$

35. Demuestre que $f(x) = \ln|x|$ es una función par. Trace la gráfica de f. Determine las intersecciones con el eje x y la asíntota vertical de la gráfica.

36. Use la gráfica que obtuvo en el problema 35 para trazar la gráfica de $y = \ln|x - 2|$. Determine la intersección con el eje x y la asíntota vertical de la gráfica.

En los problemas 37 y 38, trace la gráfica de la función f respectiva.

37. $f(x) = |\ln x|$

38. $f(x) = |\ln(x + 1)|$

En los problemas 39 a 44, describa el dominio de la función f.

39. $f(x) = \ln(2x - 3)$

40. $f(x) = \ln(3 - x)$

41. $f(x) = \ln(9 - x^2)$

42. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

43. $f(x) = \sqrt{\ln x}$

44. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

En los problemas 45 a 50, use las leyes de los logaritmos para reescribir la expresión dada como logaritmo.

45. $\log_{10} 2 + 2\log_{10} 5$

46. $\frac{1}{2}\log_5 49 - \frac{1}{3}\log_5 8 + 13\log_5 1$

47. $\ln(x^4 - 4) - \ln(x^2 + 2)$

48. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) - 2\ln x^3 - 4\ln y$

49. $\ln 5 + \ln 5^2 + \ln 5^3 - \ln 5^6$

50. $5\ln 2 + 2\ln 3 - 3\ln 4$

En los problemas 51 a 54 aplique las leyes de los logaritmos de modo que $\ln y$ no contenga productos, cocientes ni potencias.

51. $y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt[3]{8x^3 + 2}}$

52. $y = \sqrt{\dfrac{(2x + 1)(3x + 2)}{4x + 3}}$

53. $y = \dfrac{(x^3 - 3)^5(x^4 + 3x^2 + 1)^8}{\sqrt{x}(7x + 5)^9}$

54. $y = 64x^6\sqrt{x + 1}\sqrt[3]{x^2 + 2}$

En los problemas 55 a 60 use la propiedad uno-a-uno (10) para resolver la ecuación logarítmica indicada.

55. $\log_2 x - \log_2 10 = \log_2 9.3$

56. $\ln 3 + \ln(2x - 1) = \ln 4 + \ln(x + 1)$

57. $\ln x + \ln(x - 2) = \ln 3$

58. $\ln(x + 3) + \ln(x - 4) - \ln x = \ln 3$

59. $\log_2(x - 3) - \log_2(2x + 1) = -\log_2 4$

60. $\log_6 3x - \log_6(x + 1) = \log_6 1$

En los problemas 61 a 64, factorice o use la fórmula cuadrática para resolver la ecuación indicada.

61. $(5^x)^2 - 2(5^x) - 1 = 0$

62. $2^{2x} - 12(2^x) + 35 = 0$

63. $(\ln x)^2 + \ln x = 2$

64. $(\log_{10} 2x)^2 = \log_{10}(2x)^2$

En los problemas 65 a 72 use las propiedades de los logaritmos para resolver la ecuación indicada.

65. $\log_{10}\dfrac{1}{x} = 2$

66. $2 - \log_3\sqrt{x^2 + 17} = 0$

67. $\log_2(\log_3 x) = 2$

68. $\log_5|1 - x| = 1$

69. $\log_2(10x - x^2) = 4$

70. $\log_3(x^2 + 1) = 4$

71. $\log_3 81^x - \log_3 3^{2x} = 3$

72. $\dfrac{\log_2 8^x}{\log_2 \frac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

En los problemas 73 y 74 use logaritmos naturales para determinar x en el dominio de la función indicada, para la cual f tenga el valor indicado.

73. $f(x) = 6^x$; $f(x) = 51$

74. $f(x) = (\frac{1}{2})^x$; $f(x) = 7$

En los problemas 75 a 78 use logaritmos naturales para determinar x.

75. $2^{x+5} = 9$

76. $4 \cdot 7^{2x} = 9$

77. $5^x = 2e^{x+1}$

78. $3^{2(x-1)} = 2^{x-3}$

77. A veces, en ciencias, es útil mostrar datos usando coordenadas logarítmicas. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones determina la gráfica que muestra la FIGURA 5.2.5?

i) $y = 2x + 1$ *ii*) $y = e + x^2$

iii) $y = ex^2$ *iv*) $x^2 y = e$

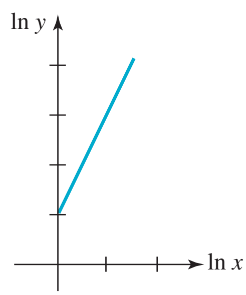


FIGURA 5.2.5 Gráfica del problema 79

Para discusión

80. Si $a > 0$ y $b > 0$, $a \neq b$, entonces $\log_a x$ es un múltiplo constante de $\log_b x$. Esto es, $\log_a x = k \log_b x$. Determine k.

81. Demuestre que $(\log_{10} e)(\log_e 10) = 1$. ¿Se puede generalizar este resultado?

82. Explique: ¿Cómo pueden obtenerse las gráficas de las funciones indicadas a partir de la gráfica de $f(x) = \ln x$ mediante una transformación rígida (un desplazamiento o una reflexión)?

a) $y = \ln 5x$ *b*) $y = \ln\dfrac{x}{4}$ *c*) $y = \ln x^{-1}$ *d*) $y = \ln(-x)$

5.3 Modelos exponenciales y logarítmicos

☐ Introducción En esta sección se examinarán algunos **modelos matemáticos**. Hablando con generalidad, un modelo matemático es una descripción matemática de algo que se llama *sistema*. Para construir un modelo matemático se comienza con un conjunto de hipótesis razonables acerca del sistema que se esté tratando de describir. En estas hipótesis se incluyen todas las leyes empíricas que sean aplicables al sistema. El resultado final podría ser una descripción tan simple como lo es una función.

☐ Modelos exponenciales En ciencias físicas aparece con frecuencia la expresión exponencial Ce^{kt}, donde C y k son constantes de modelos matemáticos de sistemas que cambian con el tiempo t. En consecuencia, los modelos matemáticos se suelen usar para predecir un estado futuro de un sistema. Por ejemplo, se usan modelos matemáticos extremadamente complicados para pronosticar el tiempo en diversas regiones de un país durante, por ejemplo, la semana próxima.

☐ Crecimiento demográfico En un modelo de una población en crecimiento, se supone que la *tasa* de crecimiento de la población es proporcional a la *cantidad presente* en el momento t. Si $P(t)$ representa la población, es decir, el número o la cantidad presente cuando el tiempo es t, entonces, con ayuda del cálculo, se puede demostrar que esta hipótesis determina que

$$P(t) = P_0e^{kt}, \; k > 0, \tag{1}$$

en donde t es el tiempo y P_0 y k son constantes. La función (1) se usa para describir el crecimiento de poblaciones de bacterias, animales pequeños y, en algunos casos raros, de los humanos. Si $t = 0$, se obtiene $P(0) = P_0$, por lo que a P_0 se le llama **población inicial**. La constante $k > 0$ se llama **constante de crecimiento** o **tasa de crecimiento**. Como e^{kt}, $k > 0$ es una función creciente en el intervalo $[0, \infty)$, el modelo de (1) describe un crecimiento no inhibido.

Bacterias *E. coli*

Cuando deba resolver problemas como éste, asegúrese de guardar el valor de k en la memoria de su calculadora.

EJEMPLO 1 Crecimiento bacteriano

Se sabe que el tiempo de duplicación[1] de bacterias *E. coli* que residen en el intestino grueso de las personas saludables, tan sólo es de 20 minutos. Usar el modelo de crecimiento exponencial (1) para calcular la cantidad de bacterias de *E. coli* en un cultivo, después de 6 horas.

Solución Se usarán horas como unidad de tiempo, y entonces 20 min $= \frac{1}{3}$h. Como no se especifica la cantidad inicial de *E. coli* en el cultivo, sólo representaremos por P_0 el tamaño inicial del cultivo. Entonces, usando (1), una interpretación de la primera frase en este ejemplo, en forma de función, es $P(\frac{1}{3}) = 2P_0$. Eso quiere decir que $P_0e^{k/3} = 2P_0$, o que $e^{k/3} = 2$. Al despejar k de esta última ecuación se obtiene la constante de crecimiento

$$\frac{k}{3} = \ln 2 \quad \text{o sea} \quad k = 3\ln 2 \approx 2.0794.$$

Entonces, un modelo del tamaño del cultivo después de 6 horas es $P(t) = P_0e^{2.0794t}$. Si $t = 6$, entonces $P(6) = P_0e^{2.0794(6)} \approx 262\,144P_0$. Dicho de otra manera, si el cultivo sólo consiste en *una* bacteria cuando $t = 0$ (entonces $P_0 = 1$), el modelo indica que habrá 262 144 bacterias 6 horas después.

A principios del siglo XIX, el clérigo y economista inglés Thomas R. Malthus usó el modelo de crecimiento (1) para pronosticar la población en el mundo. Para valores específicos de

[1] El tiempo de duplicación en biología a veces se conoce como **tiempo de generación**.

P_0 y k, sucedió que los valores de la función $P(t)$ eran en realidad aproximaciones razonables a la población mundial durante cierto periodo del siglo XIX. Como $P(t)$ es una función creciente, Malthus predijo que el crecimiento futuro de la población rebasaría la capacidad mundial de producción de alimentos. En consecuencia, también predijo que habría guerras y hambruna mundiales. Era Malthus más pesimista que vidente, y no pudo prever que los suministros alimenticios mundiales crecerían al paso de la mayor población, a causa de progresos simultáneos en ciencias y tecnologías.

Thomas R. Malthus (1776-1834)

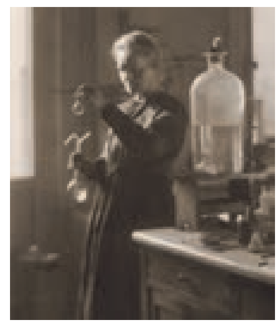
En 1840, **P. F. Verhulst**, matemático y biólogo belga, propuso un modelo más realista para poblaciones humanas en países pequeños. La llamada **función logística**

$$P(t) = \frac{K}{1 + ce^{rt}}, \quad r < 0, \tag{2}$$

en donde K, c y r son constantes, ha demostrado, a través de los años, ser un modelo exacto de crecimiento para poblaciones de protozoarios, bacterias, moscas de fruta o animales confinados a espacios limitados. En contraste con el crecimiento desenfrenado del modo malthusiano (1), (2) muestra crecimiento acotado. Más específicamente, la población predicha por (2) no aumentará más allá del número K, llamado **capacidad límite** o **de soporte** del sistema. Para $r < 0$, $e^{rt} \to 0$ y $P(t) \to K$ cuando $t \to \infty$. Se pide al lector que grafique un caso especial de (2), en los problemas 7 y 8 de los ejercicios 5.3.

□ Decaimiento radiactivo

El elemento 88, mejor conocido como **radio**, es radiactivo. Eso quiere decir que un átomo de radio **decae**, o se desintegra, espontáneamente, emitiendo radiación en forma de partículas alfa, partículas beta y rayos gamma. Cuando un átomo se desintegra de esta forma, su núcleo se transforma en un núcleo de otro elemento. El núcleo del átomo de radio se transforma en el núcleo de un átomo de radón, un gas radiactivo inodoro e incoloro, pero muy peligroso, que suele originarse en el suelo. Como puede penetrar un piso sellado de concreto, con frecuencia se acumula en sótanos de algunos hogares nuevos y con mucho aislamiento. Algunas organizaciones médicas han afirmado que el radón es la segunda causa principal del cáncer del pulmón.



Madame Curie (1867-1934), descubridora del radio

Suponemos que la tasa de decaimiento de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad que queda, o que está presente cuando el tiempo es t, entonces se llega básicamente al mismo modelo que en (1). La diferencia importante es que $k < 0$. Si $A(t)$ representa la cantidad de sustancia que queda cuando el tiempo es t, entonces

$$A(t) = A_0 e^{kt}, k < 0, \tag{3}$$

en donde A_0 la cantidad inicial de la sustancia presente; esto es, $A(0) = A_0$. A la constante $k < 0$ en (3) se le llama **constante de decaimiento** o **tasa de decaimiento**.

EJEMPLO 2 Desintegración del radio

Supongamos que inicialmente se tienen a la mano 20 gramos de radio. A los t años, la cantidad que queda se modela con la función $A(t) = 20e^{-0.000418t}$. Calcular la cantidad de radio que queda pasados 100 años. ¿Qué porcentaje de los 20 gramos originales ha decaído en 100 años?

Solución Usando calculadora se ve que 100 años después quedan

$$A(100) = 20e^{-0.000418(100)} \approx 19.18 \text{ g.}$$

Por lo que sólo

$$\frac{20 - 19.18}{20} \times 100\% = 4.1\%$$

han decaído, de los 20 gramos iniciales. ■

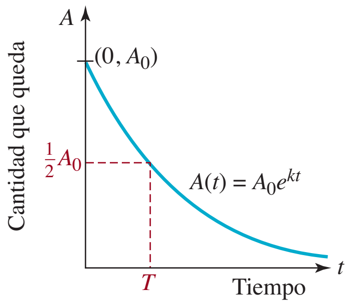


FIGURA 5.3.1 El tiempo T es la vida media

☐ Vida media

La vida media de una sustancia radiactiva es el tiempo T que tarda en desintegrarse la mitad de determinada cantidad de ese elemento, para transformarse en otro elemento. Vea la **FIGURA 5.3.1**. La vida media es una medida de la estabilidad de un elemento, esto es, mientras más corta sea la vida media, el elemento es más inestable. Por ejemplo, la vida media del elemento estroncio 90, ^{90}Sr, que es muy radiactivo y se produce en las explosiones nucleares, es de 29 días, mientras que la vida media del isótopo de uranio, ^{238}U, es de 4 560 000 años. La vida media del californio, ^{244}Cf, que fue descubierto en 1950, sólo es de 45 minutos. El polonio, ^{213}Po, tiene una vida media de 0.000001 segundos.

EJEMPLO 3 Vida media del radio

Usar el modelo exponencial del ejemplo 2 para determinar la vida media del radio.

Solución Si $A(t) = 20e^{-0.000418t}$, entonces se debe calcular el tiempo T en el cual

$$A(T) = \underbrace{\tfrac{1}{2}(20)}_{\text{la mitad de la cantidad inicial}} = 10.$$

A partir de $20e^{-0.000418T} = 10$, se obtiene $e^{-0.000418T} = \frac{1}{2}$. Esta última ecuación se pasa a la forma logarítmica $-0.000418T = \ln\frac{1}{2}$, y se puede despejar T:

$$T = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-0.000418} \approx 1\,660 \text{ años.}$$

El ibuprofeno es un medicamento antiinflamatorio no esteroidal

Al leer con cuidado el ejemplo 3 vemos que la cantidad inicial presente no tiene influencia en el cálculo real de la vida media. Como la solución de $A(T) = A_0e^{-0.000418T} = \frac{1}{2}A_0$ conduce a $e^{-0.000418T} = \frac{1}{2}$, se ve que T es independiente de A_0. Entonces, la vida media de 1 gramo, 20 gramos o 10 000 gramos de radio es igual. Se necesitan unos 1 660 años para que la mitad de *cualquier* cantidad dada de radio se transforme en radón.

También los medicamentos tienen vidas medias. En este caso, la vida media de una medicina es el tiempo T que transcurre para que el organismo elimine, por metabolismo o excreción, la mitad de la cantidad de medicamento tomada. Por ejemplo, los medicamentos antiinflamatorios no esteroidales (NSAID, de *nonsteroidal antiinflamatory drug*), como aspirina e ibuprofeno, que se toman para aliviar dolores constantes, tienen vidas medias relativamente cortas, de algunas horas, y en consecuencia se deben tomar varias veces por día. El naproxén es un NSAID y tiene mayor vida media; suele administrarse una vez cada 12 horas. Vea el problema 31 de los ejercicios 5.3.

Willard Libby (1908-1980)

☐ Datación con carbono

La edad aproximada de fósiles de materia que alguna vez fue viviente se puede determinar con un método llamado **datación**, o **fechado con carbono**. El ^{14}C o carbono 14 es un isótopo radiactivo del carbono, que posiblemente se haya formado a una tasa constante en la atmósfera, por interacción de rayos cósmicos con nitrógeno 14. El método de fechado con carbono, inventado por el químico Willard Libby alrededor de 1950, se basa en que una planta o un animal absorbe ^{14}C por los procesos de respiración y alimentación, y cesa de absorberlo cuando muere. Como se verá en el ejemplo que sigue, el procedimiento de fechado con carbono se basa en el conocimiento de la vida media del ^{14}C, que es de unos 5 730 años. El carbono 14 decae y forma el nitrógeno 14 original.

El rollo de los Salmos

Libby ganó el Premio Nobel de Química por sus trabajos; su método se ha usado hasta la fecha para fechar muebles de madera encontrados en las tumbas egipcias, los rollos del Mar Muerto, escritos en papiro y pieles animales, y el famoso Sudario de Turín, de lino, así como un ejemplar del Evangelio Gnóstico de Judas, recientemente descubierto y escrito en papiro.

EJEMPLO 4 Fechado de un fósil con carbono

Se analizó un hueso fósil y se determinó que contiene $\frac{1}{1\,000}$ de la cantidad inicial de ^{14}C que contenía el organismo cuando estaba vivo. Determinar la edad aproximada del fósil.

Solución Si la cantidad inicial era de A_0 gramos de ^{14}C en el organismo, entonces, t años después de su muerte, hay $A(t) = A_0e^{kt}$ gramos residuales. Cuando $t = 5\,730$, $A(5\,730) = \frac{1}{2}A_0$ y así $\frac{1}{2}A_0 = A_0e^{5\,730k}$. De esta última ecuación se despeja la constante k de decaimiento, y queda

$$e^{5730k} = \frac{1}{2} \quad \text{y así} \quad k = \frac{\ln\frac{1}{2}}{5\,730} \approx -0.00012097.$$

Por consiguiente, un modelo de la cantidad de ^{14}C que queda es $A(t) = A_0e^{-0.00012097t}$. Con este modelo se debe despejar ahora t de $A(t) = \frac{1}{1\,000}A_0$:

$$A_0e^{-0.00012097t} = \frac{1}{1\,000}A_0 \quad \text{implica que} \quad t = \frac{\ln\frac{1}{1\,000}}{-0.00012097} \approx 57\,100 \text{ años.}$$

La edad determinada en este último ejemplo sale, en realidad, del límite de exactitud del método del carbono 14. Pasadas 9 vidas medias del isótopo, o sea unos 52 000 años, ha decaído aproximadamente 99.7% del carbono 14, y es casi imposible medirlo en un fósil.

Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton Suponga que un objeto o cuerpo se coloca dentro de un medio (aire, agua, etc.) que se mantiene a una temperatura constante T_m llamada **temperatura ambiente**. Si la temperatura inicial T_0 del cuerpo u objeto, en el momento de colocarlo en el medio, es mayor que la temperatura ambiente T_m, el cuerpo se enfriará. Por otra parte, si T_0 es menor que T_m, se calentará. Por ejemplo, en una oficina que se mantiene, por ejemplo a 70°F, una taza de café hirviente se enfriará, mientras que un vaso de agua helada se calentará. La hipótesis acostumbrada sobre el enfriamiento o el calentamiento es que la rapidez con la que se enfría o calienta un objeto es proporcional a la diferencia $T(t) - T_m$, donde $T(t)$ representa la temperatura del objeto en el tiempo t. En cualquier caso, de enfriamiento o calentamiento, esta hipótesis da por resultado que $T(t) - T_m = (T_0 - T_m)e^{kt}$, donde k es una constante negativa. Nótese que como $e^{kt} \to 0$ para $k < 0$, la última ecuación concuerda con la expectativa intuitiva que $T(t) - T_m \to 0$, o lo que es igual, $T(t) \to T_m$, cuando $t \to \infty$ (el café se enfría y el agua helada se calienta, ambos hasta la temperatura ambiente). Si se despeja $T(t)$ se obtiene la función de la temperatura del objeto,

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}, \; k < 0. \tag{4}$$

El modelo matemático (4) se llama **ley de Newton de calentamiento/enfriamiento**, por su descubridor.

EJEMPLO 5 Enfriamiento de un pastel

Se saca un pastel del horno, cuya temperatura era de 350°F, y se lo coloca en una cocina donde la temperatura ambiente es de 75°F. Un minuto después, se mide la temperatura del pastel y resulta de 300°F.

a) ¿Cuál es la temperatura del pastel 6 minutos después?
b) ¿En cuánto tiempo la temperatura del pastel será de 80°F?
c) Hacer la gráfica de $T(t)$.

El pastel se enfriará

Solución ***a***) Cuando se saca el pastel del horno, su temperatura es también de 350°F, esto es, $T_0 = 350$. La temperatura ambiente es la de la cocina, $T_m = 75$. Entonces, la ecuación (4) se transforma en $T(t) = 75 + 275e^{kt}$. La medición $T(1) = 300$ es la condición que determina k. De $T(1) = 75 + 275e^{k} = 300$, se ve que

$$e^{k} = \frac{225}{275} = \frac{9}{11} \quad \text{o sea} \quad k = \ln\frac{9}{11} \approx -0.2007.$$

De acuerdo con el modelo $T(t) = 75 + 275e^{-0.2007t}$ se determina que

$$T(6) = 75 + 275e^{-0.2007(6)} \approx 157.5°\text{F}. \tag{5}$$

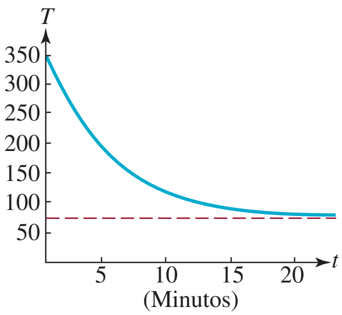


FIGURA 5.3.2 Gráfica de $T(t)$ del ejemplo 5

b) Para determinar el momento en que la temperatura del pastel es de 80°F se despeja t de la ecuación $T(t) = 80$. La ecuación $T(t) = 75 + 275e^{-0.2007t} = 80$ se reacomoda en la forma

$$e^{-0.2007t} = \frac{5}{275} = \frac{1}{55} \quad \text{se ve que} \quad t = \frac{\ln\frac{1}{55}}{-0.2007} \approx 20 \text{ min.}$$

c) Con ayuda de una función de graficación obtuvimos la gráfica de $T(t)$ que se ve en azul en la **FIGURA 5.3.2**. Debido a que $T(t) = 75 + 275e^{-0.2007t} \to 75$ cuando $t \to \infty$, $T = 75$, indicada en rojo en la figura 5.3.2 es una asíntota horizontal de la gráfica de $T(t) = 75 + 275e^{-0.2007t}$. ■

□ Interés compuesto

Ciertas inversiones, como por ejemplo las cuentas de ahorro, pagan una tasa anual de interés que se puede componer en forma anual, trimestral, mensual, semanal, a diario, etc. En general, si un principal de $\$P$ se invierte a una tasa anual de interés r, que se compone n veces por año, la cantidad S que hay al final de t años se calcula con

$$S = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}. \tag{6}$$

S es el llamado **valor futuro** del principal P. Si aumenta la cantidad n sin límite, entonces se dice que el interés es **compuesto continuamente**. Para calcular el valor futuro de P en este caso, sea $m = n/r$. Entonces $n = mr$ y

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mrt} = \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt}.$$

En razón de que $n \to \infty$ implica que $m \to \infty$, se ve por (3) de la sección 5.1, que $(1 + 1/m)^m \to e$. El lado derecho de (6) se transforma en

$$P\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt} \to P[e]^{rt} \quad \text{cuando} \quad m \to \infty.$$

Así, si se compone continuamente una tasa anual r de interés, el valor futuro S de un principal P en t años es

$$S = Pe^{rt}. \tag{7}$$

EJEMPLO 6 Comparación de valores futuros

Supongamos que se depositan \$1 000 en una cuenta de ahorros, cuya tasa de interés anual es 3%. Comparar el valor futuro de este principal dentro de 10 años ***a***) si se compone el interés mensualmente y ***b***) si se compone el interés continuamente.

Solución

a) Como un año tiene 12 meses, $n = 12$. Además, con $P = 1\,000$, $r = 0.03$ y $t = 10$, la ecuación (6) se transforma en

$$S = 1\,000\left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^{12(10)} = 1\,000(1.0025)^{120} \approx \$1\,349.35.$$

b) Según la ecuación (7),

$$S = 1\,000e^{(0.03)(10)} = 1\,000e^{0.3} \approx \$1\,349.86.$$

Entonces, a los 10 años se ha ganado \$0.51 con la composición continua con respecto a la capitalización mensual. ■

Charles F. Richter (1900-1985)

Modelos logarítmicos

Probablemente, la aplicación más famosa de los logaritmos base 10, o logaritmos comunes, es la **escala de Ricther**. Charles F. Richter, sismólogo estadounidense, inventó en 1935 una escala logarítmica para comparar las energías de distintos temblores o sismos. La magnitud M de un sismo se define con

$$M = \log_{10}\frac{A}{A_0}, \tag{8}$$

en donde A es la amplitud de la onda sísmica máxima del sismo, y A_0 es una amplitud de referencia que corresponde a la magnitud $M = 0$. El número M se calcula con un decimal de precisión. Se considera que los sismos de magnitud 6 o mayores son potencialmente destructivos.

EJEMPLO 7 Comparación de intensidades

El sismo del 26 de diciembre de 2004, frente a la costa oeste de Sumatra del Norte, que produjo un tsunami que causó 200 000 muertes, se clasificó inicialmente como de 9.3 en la escala de Richter. El 28 de marzo de 2005, una réplica en la misma zona se clasificó como de 8.7 grados en la misma escala. ¿Cuántas veces más intenso fue el sismo de 2004?

Solución De acuerdo con (8),

$$9.3 = \log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right)_{2004} \quad \text{y} \quad 8.7 = \log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right)_{2005}.$$

Esto quiere decir, a su vez, que

$$\left(\frac{A}{A_0}\right)_{2004} = 10^{9.3} \quad \text{y} \quad \left(\frac{A}{A_0}\right)_{2005} = 10^{8.7}.$$

Ahora bien, como $9.3 = 8.7 + 0.6$, entonces, por las leyes de los exponentes,

$$\left(\frac{A}{A_0}\right)_{2004} = 10^{9.3} = 10^{0.6}10^{8.7} = 10^{0.6}\left(\frac{A}{A_0}\right)_{2005} \approx 3.98\left(\frac{A}{A_0}\right)_{2005}.$$

Así, el sismo original fue unas 4 veces más intenso que la réplica. ■

En el ejemplo 7 se puede ver que, por ejemplo, si un sismo es de 6.0 y otro es de 4.0 en la escala de Richter, el sismo de 6.0 es $10^2 = 100$ veces más intenso que el de 4.0.

Søren Sørensen (1868-1939)

□ **pH de una solución** En química, el potencial hidrógeno o **pH** de una solución se define como

$$\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}^+], \tag{9}$$

en donde el símbolo $[\text{H}^+]$ representa la concentración de iones hidrógeno en la solución, expresada en moles por litro. La escala de pH fue inventada en 1909 por Søren Sørensen, bioquímico danés. Las soluciones se clasifican de acuerdo con el valor de su pH: *ácidas*, *básicas* o *neutras*. Una solución cuyo pH está en el intervalo $0 < \text{pH} < 7$ se considera ácida; cuando el $\text{pH} > 7$, la solución es básica (o alcalina). En caso de que $\text{pH} = 7$, la solución es neutra o neutral. El agua, si no está contaminada por otras soluciones o por la lluvia ácida, es un ejemplo de solución neutra, mientras que el jugo de limón sin diluir tiene un pH en los límites $\text{pH} \leq 3$. Una solución con $\text{pH} = 6$ es diez veces más ácida que una solución neutra. Vea los problemas 47 a 50 en los ejercicios 5.3.

Como se verá en el siguiente ejemplo, los valores de pH se suelen calcular redondeando a una cifra decimal.

EJEMPLO 8 pH de la sangre humana

Se sabe que la concentración de iones hidrógeno en la sangre de una persona saludable es $[\text{H}^+] = 3.98 \times 10^{-8}$ moles/litro. Calcular el pH de la sangre.

Solución De acuerdo con (9) y las leyes de los logaritmos,

$$\begin{aligned}\text{pH} &= -\log_{10}[3.98 \times 10^{-8}]\\ &= -[\log_{10}3.98 + \log_{10}10^{-8}]\\ &= -[\log_{10}3.98 - 8\log_{10}10] \qquad \leftarrow \log_{10}10 = 1\\ &= -[\log_{10}3.98 - 8].\end{aligned}$$

Con ayuda de la tecla log base 10 de una calculadora, se comprueba que

$$\text{pH} \approx -[0.5999 - 8] \approx 7.4.$$ ■

La sangre humana suele ser una solución básica. Sus valores de pH caen normalmente dentro de los límites bastante estrechos de $7.2 < \text{pH} < 7.6$. Una persona cuya sangre tiene un pH fuera de estos límites puede padecer alguna enfermedad, e incluso puede morir.

5.3 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-17.

Crecimiento demográfico

1. Pasadas 2 horas, se observa que la cantidad de bacterias en un cultivo se ha duplicado.
   a) Deduzca un modelo exponencial (1) para determinar la cantidad de bacterias en el cultivo, cuando el tiempo es t.
   b) Determine la cantidad de bacterias presentes en el cultivo después de 5 horas.
   c) Calcule el tiempo que tarda el cultivo en crecer hasta 20 veces su tamaño inicial.

2. Un modelo de la cantidad de bacterias en un cultivo después de t horas es la ecuación (1).

a) Calcule la constante de crecimiento k si se sabe que después de 1 hora la colonia se ha expandido hasta 1.5 veces su población inicial.

b) Calcule el tiempo que tarda el cultivo en cuadruplicar su tamaño.

3. Un modelo de la población de una comunidad pequeña es $P(t) = 1\,500e^{kt}$. Si la población inicial aumenta 25% en 10 años, ¿cuál será la población en 20 años?

4. Un modelo de la población de una comunidad pequeña, después de t años, se define con (1).

a) Si la población inicial se duplica en 5 años, ¿cuánto tardará en triplicarse? ¿Y en cuadruplicarse?

b) Si la población de la comunidad del inciso *a*) es 10 000 después de 3 años, ¿cuál era la población inicial?

5. Un modelo de la cantidad de bacterias en un cultivo, después de t horas, es $P(t) = P_0e^{kt}$. Después de 3 horas, se observa que hay 400 bacterias. Luego de 10 horas desde el inicio, hay 2 000 bacterias. ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?

6. Como parte de una investigación de genética se cultiva una pequeña colonia de *Drosophila* (moscas pequeñas de las frutas, con dos alas) en un ambiente de laboratorio. A los 2 días se observa que la población de moscas ha aumentado a 200. Después de 5 días, la colonia tiene 400 moscas.

a) Deduzca un modelo $P(t) = P_0e^{kt}$ de la población de la colonia de *drosophilas* después de t días.

b) ¿Cuál será la población de la colonia en 10 días?

c) ¿Cuándo la población de la colonia tendrá 5 000 moscas?

7. Un alumno enfermo de un virus de catarro regresa a un colegio aislado, de 2 000 estudiantes. La cantidad de estudiantes infectados con catarro, t días después del regreso del alumno enfermo, se calcula con la función logística

$$P(t) = \frac{2\,000}{1 + 1\,999e^{-0.8905t}}.$$

a) De acuerdo con este modelo, ¿cuántos estudiantes serán infectados por el catarro después de 5 días?

b) ¿Cuánto tiempo pasará para que la mitad de la población de estudiantes quede infectada?

c) ¿Cuántos alumnos indica el modelo que se infectarán después de un tiempo muy prolongado?

d) Trace una gráfica de $P(t)$.

8. En 1920, Pearl y Reed propusieron un modelo logístico de la población de Estados Unidos, con base en datos de 1790, 1850 y 1910. La función logística que propusieron fue

$$P(t) = \frac{2\,930.3009}{0.014854 + e^{-0.0313395t}},$$

en donde P se expresa en miles, y t representa la cantidad de años después de 1780.

a) El modelo concuerda muy bien con las cifras de los censos de entre 1790 y 1910. Determine las cifras de la población de 1790, 1850 y 1910.

b) ¿Qué indica este modelo de la población de Estados Unidos después de un tiempo muy largo? ¿Cómo se compara esta predicción con el censo de población de 2000, que fue de 281 millones?

Decaimiento radiactivo y vida media

9. Al principio había 200 miligramos de una sustancia radiactiva. Pasadas 6 horas, la masa disminuyó 3%. Forme un modelo exponencial $A(t) = A_0e^{kt}$ de la cantidad residual de la sustancia que se desintegra, pasadas t horas. Calcule la cantidad que queda después de 24 horas.

10. Determine la vida media de la sustancia del problema 9.

11. Resuelva este problema sin usar el modelo exponencial (3). Al principio hay disponibles 400 gramos de una sustancia radiactiva. Si la vida media de la sustancia es de 8 horas, presente su estimación informada de cuánto queda (aproximadamente) luego de 17 horas. Después de 23 horas. Luego de 33 horas.

12. Considere un modelo exponencial $A(t) = A_0e^{kt}$ de la cantidad que queda de la sustancia radiactiva del problema 11. Compare los valores calculados de $A(17)$, $A(23)$ y $A(33)$ con sus estimaciones.

13. El yodo 131 se usa en procedimientos de medicina nuclear; es radiactivo y su vida media es de 8 días. Calcule la constante k de decaimiento del yodo 131. Si la cantidad residual de una muestra inicial después de t días se calcula con el modelo exponencial $A(t) = A_0e^{kt}$, ¿cuánto tardará en decaer 95% de la muestra?

14. La cantidad de una sustancia radiactiva que queda pasadas t horas se calcula con $A(t) = 100e^{kt}$. Después de 12 horas, la cantidad inicial disminuyó 7%. ¿Cuánto queda después de 48 horas? ¿Cuál es la vida media de la sustancia?

15. La vida media del polonio 210, ^{210}Po, es de 140 días. Si $A(t) = A_0e^{kt}$ representa la cantidad de ^{210}Po que queda después de t días, ¿cuál es la cantidad que queda después de 80 días? ¿Después de 300 días?

Trazos con carbón vegetal, del problema 17

16. El estroncio 90 es una sustancia radiactiva peligrosa que se encuentra en la lluvia ácida. En ese caso puede llegar a la cadena alimentaria, al contaminar el pasto con el cual se alimentan unas vacas. La vida media del estroncio 90 es de 29 años.
   - *a*) Deduzca un modelo exponencial (3) para determinar la cantidad residual después de t años.
   - *b*) Suponga que se encuentra ^{90}Sr en el pastizal, y su concentración es 3 veces la concentración de seguridad A_0. ¿Cuánto tiempo pasará para que se pueda usar el pastizal de nuevo para alimentar vacas?

Datación con carbono

17. En las paredes y techos de una caverna en Lascaux, Francia, se encontraron dibujos hechos con carbón vegetal. Determine la edad aproximada de las figuras, si se determinó que 86% del ^{14}C de un trozo de carbón vegetal que se encontró en la cueva había decaído por radiactividad.

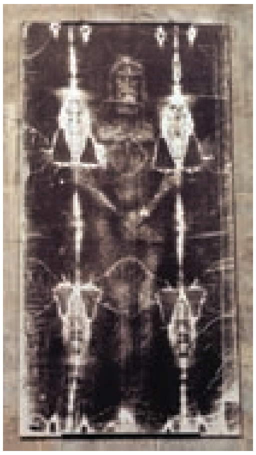


Imagen del sudario del problema 19

18. El análisis de un hueso fósil de animal, en un sitio arqueológico, indica que ese hueso ha perdido entre 90 y 95% de su ^{14}C. Indique un intervalo de edades posibles del fósil.

19. El Sudario de Turín muestra la imagen negativa del cuerpo de un hombre, que parece haber sido crucificado. Muchos creen que es el sudario con que fue sepultado Jesús de Nazaret. En 1988, el Vaticano permitió hacer un fechado del sudario con radiocarbono. Varios laboratorios independientes analizaron la tela, y el consenso de opiniones fue que el sudario tiene unos 660 años de antigüedad, edad que concuerda con su aspecto histórico. Esta edad fue refutada por muchos estudiosos. Con esta edad, determine qué porcentaje de la cantidad original de ^{14}C quedaba en la tela en 1988.

20. En 1991, unos alpinistas encontraron un cuerpo conservado de un hombre, parcialmente congelado, en un glaciar de los Alpes Austriacos. Se encontró, con técnicas de fechado con carbono, que el cuerpo de Ötzi, como se llamó a ese hombre de las nieves, contenía 53% del ^{14}C que contiene una persona viva. ¿Cuál es la fecha aproximada de su muerte?

El hombre de las nieves del problema 20

Ley de enfriamiento o calentamiento de Newton

21. Suponga que sale una pizza del horno a 400°F y que la cocina tiene una temperatura constante de 80°F. Tres minutos después, la temperatura de la pizza es de 275°F.

a) ¿Cuál es la temperatura $T(t)$ de la pizza después de 5 minutos?

b) Determine el tiempo cuando la temperatura de la pizza es de 150°F.

c) Después de un tiempo muy largo, ¿cuál es la temperatura aproximada de la pizza?

22. Un vaso de agua fría se saca de un refrigerador cuya temperatura interior es de 39°F, y se deja en un recinto que se mantiene a 72°F. Un minuto después, la temperatura del agua es de 43°F. ¿Cuál es la temperatura del agua después de 10 minutos? ¿Y después de 25 minutos?

23. Se introduce un termómetro que estaba a la intemperie, donde la temperatura del aire es de -20°F, a un recinto donde la temperatura del aire es de 70°F constante. Un minuto después, dentro del recinto, el termómetro indica 0°F. ¿Cuánto tardará en indicar 60°F?

Termómetro del problema 24

24. Un termómetro se saca del interior de una casa al exterior, donde la temperatura del aire es de 5°F. Después de estar afuera un minuto, el termómetro indica 59°F y después de 5 minutos indica 32°F. ¿Cuál es la temperatura en el interior de la casa?

25. Se encontró un cadáver dentro de un cuarto cerrado de una casa, donde la temperatura era de 70°F constantes. Cuando lo descubrieron, la temperatura en su interior se midió y resultó ser de 85°F. Una hora después, la segunda medición fue de 80°F. Suponga que el momento de la muerte corresponde a $t = 0$, y que en ese momento la temperatura interna era de 98.6°F. Determine cuántas horas pasaron hasta que se encontró el cadáver.

26. Repita el problema 25, si las pruebas indicaban que la persona muerta tenía fiebre de 102°F en el momento de su muerte.

Interés compuesto

27. Suponga que se deposita 1¢ en una cuenta de ahorros que paga 1% de interés anual, compuesto continuamente. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta después de 2 000 años? ¿Cuál es el valor futuro de 1¢ en 2 000 años, si la cuenta paga 2% de interés anual compuesto continuamente?

28. Suponga que se invierten \$100 000 a una tasa de interés anual de 5%. Use (6) y (7) para comparar los valores futuros de esa cantidad en 1 año, llenando la tabla siguiente:

Interés compuesto	***n***	**Valor futuro *S***
Anual	1	
Semestral	2	
Trimestral	4	
Mensual	12	
Semanal	52	
Diario	365	
Cada hora	8 760	
Continuamente	$n \to \infty$	

29. Suponga que deposita \$5 000 en una cuenta de ahorros que paga 6% de interés anual compuesto continuamente. ¿Cuántos intereses ganará en 8 años?

30. Si se despeja P de (7), esto es, si $P = Se^{-rt}$, se obtiene la cantidad que se debe invertir hoy, a una tasa anual r de interés, para que valgan \$$S$ después de t años. Se dice que P es el **valor presente** de la cantidad S. ¿Cuál es el valor presente de \$100 000 a una tasa anual de 3% compuesto continuamente durante 30 años?

Modelos exponenciales diversos

31. Vida media efectiva Las sustancias radiactivas son eliminadas de los organismos vivos mediante dos procesos: decaimiento físico natural y metabolismo biológico. Cada proceso contribuye a que haya una vida media efectiva E, que se define por

$$1/E = 1/P + 1/B,$$

en donde P es la vida media física de la sustancia radiactiva, y B es la vida media biológica.

a) El yodo radiactivo, ^{131}I, se usa para tratar el hipertiroidismo (tiroides hiperactiva). Se sabe que para las tiroides humanas, $P = 8$ días, y $B = 24$ días. Calcule la vida media efectiva del ^{131}I.

b) Suponga que la cantidad de ^{131}I en la tiroides humana después de t días se modela con $A(t) = A_0e^{kt}$, $k < 0$. Use la vida media efectiva que determinó en el inciso *a*) para calcular el porcentaje de yodo radiactivo que queda en la tiroides humana dos semanas después de su ingestión.

32. Regreso a la ley de enfriamiento de Newton La rapidez con que se enfría un cuerpo también depende de su superficie S expuesta. Si S es constante, entonces una modificación de (4) es

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kSt},\ k < 0.$$

Suponga que dos tazas, A y B, se llenan con café al mismo tiempo. Al principio, la temperatura del café es de 150°F. La superficie expuesta de la taza de café B es el doble de la de la taza de café A. Pasados 30 minutos, la temperatura de la taza de café A es de 100°F. Si $T_m = 70$°F, ¿cuál es la temperatura del café en la taza B a los 30 minutos?

33. Circuito en serie En un circuito sencillo en serie, formado por un voltaje constante E, una inductancia de L henries y una resistencia de R ohms, se puede demostrar que la corriente $I(t)$ es

$$I(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-(R/L)t}).$$

Despeje t en función de los otros símbolos.

34. Concentración de medicina Bajo ciertas condiciones, la concentración de una medicina, en el momento t después de inyectarla, es

$$C(t) = \frac{a}{b} + \left(C_0 - \frac{a}{b}\right)e^{-bt}.$$

Aquí, a y b son constantes positivas, y C_0 es la concentración de la sustancia cuando $t = 0$. Determine la concentración de un medicamento, en estado estable, esto es, el valor límite de $C(t)$ cuando $t \to \infty$. Determine el tiempo t en el cual $C(t)$ es la mitad de la concentración de estado estable.


Distrito Marina de San Francisco, 1989

Escala de Richter

35. Dos de los sismos más devastadores en el área de la bahía de San Francisco sucedieron en 1906, a lo largo de la Falla de San Andrés, y en 1989 en las Montañas Santa Cruz, cerca del Pico Loma Prieta. Los sismos de 1906 y 1989 fueron de 8.5 y 7.1 en la escala de Richter, respectivamente. ¿Cuántas veces mayor fue la intensidad del sismo de 1906 que la de 1989?

36. ¿Cuántas veces mayor fue la intensidad del sismo del norte de Sumatra en 2004 (ejemplo 7) en comparación con el sismo de Alaska, en 1964, cuya magnitud fue de 8.9?

37. Si un sismo tiene 4.2 de magnitud en la escala de Richter, ¿cuál es la magnitud, en escala de Richter, de un sismo cuya intensidad es 20 veces mayor? [*Sugerencia:* Primero resuelva la ecuación $10^x = 20$.]

38. Demuestre que la escala de Richter, definida en (8) de esta sección, se puede escribir en la forma

$$M = \frac{\ln A - \ln A_0}{\ln 10}.$$

pH de una solución

En los problemas 39 a 42, determine el pH de una solución con la concentración de iones hidrógeno $[H^+]$ indicada.

39. 10^{-6}

40. 4×10^{-7}

41. 2.8×10^{-8}

42. 5.1×10^{-5}

En los problemas 43 a 46, determine la concentración de iones hidrógeno $[H^+]$ de una solución a partir del pH indicado.

43. 3.3

44. 7.3

45. 6.6

46. 8.1

En los problemas 47 a 50, determine cuántas veces más ácida es la primera sustancia que la segunda.

47. jugo de limón: pH $= 2.3$, vinagre: pH $= 3.3$

48. ácido de acumulador: pH $= 1$, lejía: pH $= 13$

49. lluvia ácida: pH $= 3.8$, lluvia limpia: pH $= 5.6$

50. NaOH: $[H^+] = 10^{-14}$, HCl: $[H^+] = 1$

Modelos logarítmicos diversos

51. Escala de Richter y la energía Charles Richter, al trabajar con Beno Gutenberg, desarrolló el modelo

$$M = \tfrac{2}{3}[\log_{10} E - 11.8]$$

que relaciona la magnitud Richter, M de un sismo con su energía sísmica E (expresada en ergs). Calcule la energía sísmica E del sismo del norte de Sumatra, en 2004, en el que $M = 9.3$.

52. Nivel de intensidad El **nivel de intensidad** $\boldsymbol{b}$ de un sonido, expresado en decibeles (dB), se define por medio de

$$b = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}, \tag{10}$$

en donde I es la **intensidad del sonido** expresada en watts/cm^2 e $I_0 = 10^{-16}$ watts/cm^2 es la intensidad del sonido más débil que se puede oír (0 dB). Use (10) y llene la siguiente tabla:

Sonido	Intensidad I (watts/cm²)	Nivel de intensidad b (dB)
Murmullo	10^{-14}	
Conversación	10^{-11}	
Comerciales de TV	10^{-10}	
Alarma de humo	10^{-9}	
Despegue de avión a reacción	10^{-7}	
Banda de *rock*	10^{-4}	

53. En general, se toma el umbral del dolor como alrededor de 140 dB. Calcule la intensidad del sonido I que corresponde a 140 dB.

54. La intensidad del sonido I es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d a su fuente, esto es,

$$I = \frac{k}{d^2}, \tag{11}$$

en donde k es la constante de proporcionalidad. Suponga que d_1 y d_2 son distancias a una fuente de sonido, y que los niveles de intensidad correspondientes, de los sonidos, son b_1 y b_2. Use (11) en (10) para demostrar que b_1 y b_2 se relacionan por

$$b_2 = b_1 + 20\log_{10}\frac{d_1}{d_2}. \tag{12}$$

55. Cuando un avión P_1 volaba a una altitud de 1 500 pies, pasó sobre un punto en el suelo donde midieron su intensidad, que resultó ser de $b_1 = 70$ dB. Use (12) para calcular el nivel de intensidad b_2 de un segundo avión P_2 que vuela a 2 600 pies de altura, cuando pasa sobre el mismo punto.

56. A una distancia de 4 pies, el nivel de intensidad de una conversación animada es de 50 dB. Use (12) para calcular el nivel de intensidad a 14 pies de la conversación.

57. Pupila del ojo Un modelo empírico, inventado por DeGroot y Gebhard, relaciona el diámetro d de la pupila, en milímetros, con la luminancia B de la fuente luminosa (expresada en mililamberts, mL):

$$\log_{10} d = 0.8558 - 0.000401\,(8.1 + \log_{10} B)^3.$$

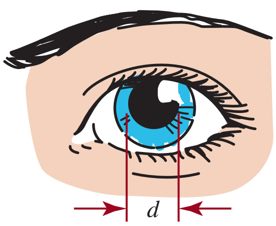


FIGURA 5.3.3 Diámetro de la pupila del problema 57

Vea la FIGURA 5.3.3.

a) La luminancia promedio del cielo claro es aproximadamente de $B = 255$ mL. Calcule el diámetro de pupila correspondiente.

b) La luminancia del Sol varía entre aproximadamente $B = 190\,000$ mL en la aurora, hasta $B = 51\,000\,000$ a mediodía. Calcule los diámetros correspondientes de pupila.

c) Calcule la luminancia B que corresponde a un diámetro de pupila de 7 mm.

5.4 Funciones hiperbólicas

Leonhard Euler

Avance DE CÁLCULO ☐ **John Napier** (1550-1617), *lord* escocés que no era matemático, inventó los logaritmos a fines del siglo XVII. Fue él quien acuñó el término "logaritmo" a partir de las palabras griegas *logos*, relación, y *arithmos*, número o potencia. Pero se necesitaron casi dos siglos para que el genio matemático suizo **Leonhard Euler** (1707-1783), y la comunidad matemática tuvieran en cuenta el número irracional e y su importancia. A continuación, emularemos su trabajo para demostrar por qué el número e es la opción natural de una base de las funciones exponenciales y logarítmicas.

☐ **Regreso al cociente de diferencia** Regresaremos al concepto de cociente de diferencia que presentamos por primera vez en la sección 2.9. Recuerde que calculamos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

en tres pasos. En el caso de la función exponencial $f(x) = b^x$, se tiene,

$$i)\ f(x+h) = b^{x+h} = b^x b^h \qquad \leftarrow \text{leyes de los exponentes}$$

$$ii)\ f(x+h) - f(x) = b^{x+h} - b^x = b^x b^h - b^x = b^x(b^h - 1) \qquad \leftarrow \text{ley de los exponentes y factorización}$$

$$iii)\ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{b^x(b^h - 1)}{h} = b^x \frac{b^h - 1}{h}$$

En el cuarto paso, que es el paso de cálculo, se hace que $h \to 0$ pero, a diferencia de todos los problemas en los ejercicios 2.9, no hay forma obvia de simplificar la h en *iii*). Sin embargo, la derivada de $f(x) = b^x$ es

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} b^x \cdot \frac{b^h - 1}{h}. \tag{2}$$

Ya que b^x no depende de la variable h, se puede reformular (2) como sigue:

$$f'(x) = b^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h}. \tag{3}$$

Entonces aparecen los resultados sorprendentes. Se puede demostrar que el límite de (3),

$$\lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h}, \tag{4}$$

existe para toda base positiva b. Sin embargo, como era de esperarse, se obtiene un resultado distinto para cada base b. Entonces, representaremos la expresión en (4) con el símbolo $m(b)$. La derivada de $f(x) = b^x$ es, entonces

$$f'(x) = b^x m(b). \tag{5}$$

Se pide al lector que aproxime el valor de $m(b)$ en los cuatro casos, cuando $b = 1.5$, 2, 3 y 5, en los problemas 21 a 24 de los ejercicios 5.4. Por ejemplo, se puede demostrar que $m(10) \approx 2.302585\ldots$, y por consiguiente la derivada de $f(x) = 10^x$ es

$$f'(x) = (2.302585\ldots)10^x. \tag{6}$$

Se puede comprender mejor qué es $m(b)$ evaluando (5) en $x = 0$. Como $b^0 = 1$, entonces $f'(0) = m(b)$. En otras palabras, $m(b)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = b^x$ en $x = 0$, esto es, en la intersección con el eje y (0, 1). Vea la **FIGURA 5.4.1**. Como se debe calcular una $m(b)$ diferente para cada base b, es probable que $m(b)$ sea un número "horrible" como en (6); al paso del tiempo surgió, de manera natural, la siguiente pregunta:

$$\text{¿Hay alguna base } b \text{ para la cual } m(b) = 1? \tag{7}$$

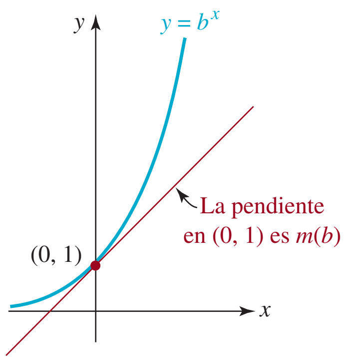


FIGURA 5.4.1 Determinar una base b tal que la pendiente $m(b)$ en el punto (0, 1) sea 1

La respuesta Para contestar la pregunta de (7), debemos regresar a las definiciones de e que se dieron en la sección 5.1. En forma específica, la ecuación (4) de esa sección,

$$e = \lim_{h\to 0} (1+h)^{1/h}, \tag{8}$$

da el medio de contestar la pregunta (7). Si el lector estudió las secciones 1.5, 2.9 y 4.10, debe tener una idea intuitiva de que la igualdad en (8) quiere decir que cuando h se acerca cada vez más a 0, entonces $(1 + h)^{1/h}$ se puede acercar arbitrariamente al número e. Así, para valores de h cercanos a 0, se tiene la aproximación $(1 + h)^{1/h} \approx e$, por lo que $1 + h \approx e^h$. Esta última expresión se puede ordenar en la forma

$$\frac{e^h - 1}{h} \approx 1 \tag{9}$$

y se puede concluir que

$$1 = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}. \tag{10}$$

Como el lado derecho de (10) es $m(e)$, hemos llegado a la respuesta de la pregunta en (7):

$$\textit{La base } b \textit{ para la cual } m(b) = 1 \textit{ es } b = e. \tag{11}$$

Además, de acuerdo con (3), hemos descubierto un resultado de bella simplicidad: la derivada de $f(x) = e^x$ es

$$f'(x) = e^x. \tag{12}$$

El resultado en (12) es igual que

$$f'(x) = f(x).$$

Además, la única función distinta de cero f en cálculo, cuya derivada es igual a sí misma, es $f(x) = ce^x$, en donde $c \neq 0$ es una constante.

□ **¿Qué sigue?** Como $y = \log_b x$ y $y = b^x$ son funciones inversas, cabría esperar que ya que la derivada más simple de $y = b^x$ se obtiene cuando $b = e$, entonces la derivada más simple de $y = \log_b x$ también se obtiene con esa base. Ése es en realidad el caso. Se pide al lector que vuelva a examinar (3) de la sección 5.1, y que después resuelva los problemas 1 a 4 de los ejercicios 5.4.

□ **Funciones hiperbólicas** En la sección 5.3 comprobamos la utilidad de la función exponencial e^x en diversos modelos matemáticos. Otra aplicación más consiste en imaginar una cuerda de alambre flexible, como un alambre telefónico que cuelga sólo bajo su propio peso entre dos soportes fijos. Se puede demostrar que, bajo ciertas condiciones, el alambre colgante toma la forma de la gráfica de la función

$$f(x) = c\frac{e^{x/c} + e^{-x/c}}{2}. \tag{13}$$

El símbolo c representa una constante positiva que depende de las características físicas del alambre. Funciones como la (13), formadas por ciertas combinaciones de e^x y e^{-x}, aparecen en tantas aplicaciones, que se les han asignado nombres. En particular cuando $c = 1$ en (13), la función resultante $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ se llama coseno hiperbólico.

SENO Y COSENO HIPERBÓLICO

Para todo número real x, el **seno hiperbólico** de x, representado por senh x, es

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tag{14}$$

y el **coseno hiperbólico** de x, representado por cosh x, es

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{15}$$

En forma análoga a las funciones trigonométricas $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$, que se definen en términos de sen x y $\cos x$, hay cuatro funciones hiperbólicas más, $\tanh x$, $\coth x$, sech x y csch x, que se definen en términos de senh x y $\cosh x$. Por ejemplo, las funciones tangente hiperbólica y secante hiperbólica se definen como sigue:

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \quad \text{y} \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}.$$

Vea los problemas 21 y 22 de los ejercicios 5.4.

Arco Gateway, St. Louis, MO., Estados Unidos

□ **Gráficas** La gráfica del coseno hiperbólico, que muestra la FIGURA 5.4.2, se llama **catenaria**. La palabra *catenaria* se deriva de la palabra *catena*, cadena en griego. La forma del famoso arco Gateway de St. Louis Missouri, de 630 pies de altura, es una catenaria invertida. Compare la forma de la figura 5.4.2 con la de la foto adjunta. La gráfica de $y = \operatorname{senh} x$ se ve en la FIGURA 5.4.3.

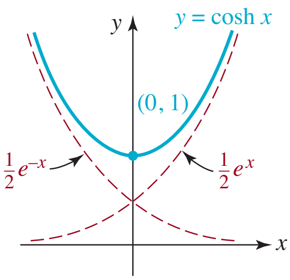


FIGURA 5.4.2 La gráfica de $y = \cosh x$ es una catenaria

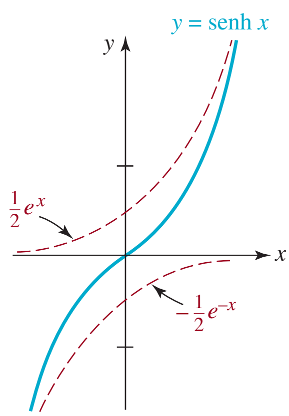


FIGURA 5.4.3 Gráfica de $y = \operatorname{senh} x$

□ **Identidades** Aunque las funciones hiperbólicas no son periódicas, poseen identidades parecidas a las identidades trigonométricas. En forma parecida a la identidad pitagórica básica de trigonometría, $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, en los casos del seno y del coseno hiperbólicos:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1.$$

Vea los problemas 9 a 14 en los ejercicios 5.4.

5.4 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-17.

1. Use las leyes de los logaritmos para demostrar que para $f(x) = \log_b x$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h}\log_b\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\log_b\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}.$$

2. De acuerdo con el problema 1, la derivada de $f(x) = \log_b x$ es

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_b\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}.$$

Supongamos que el proceso de límite se puede efectuar dentro del logaritmo:

$$f'(x) = \frac{1}{x}\log_b\left[\lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}\right].$$

Reacomode el resultado anterior usando la sustitución $n = x/h$. Observe que como x se mantiene fija, cuando $h \to 0$ se debe cumplir que $n \to \infty$. Indique el valor preciso de $f'(x)$.

En los problemas 3 y 4 use el resultado del problema 2 para determinar $f'(x)$ para cada función:

3. $f(x) = \log_{10} x$

4. $f(x) = \ln x$

En los problemas 5 y 6, use los resultados de los problemas 1 y 2 para determinar $f'(x)$ de la función. Antes de usar el cociente de diferencia, aplique las leyes de los logaritmos para reformular la función.

5. $f(x) = \ln\frac{x}{9}$

6. $f(x) = \log_{10} 6x$

En los problemas 7 y 8, calcule $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ de la función indicada.

7. $f(x) = e^{5x}$

8. $f(x) = e^{-x+4}$

En los problemas 9 a 14, use las definiciones de cosh x y senh x, en (14) y (15), para verificar la identidad.

9. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

10. $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

11. $\cosh(-x) = \cosh x$

12. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$

13. $\operatorname{senh} 2x = 2\operatorname{senh} x \cosh x$

14. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

15. Si $\cosh x = \frac{3}{2}$, use la identidad del problema 9 para determinar el valor de senh x.

16. Si $\tanh x = \frac{1}{2}$, use la identidad del problema 10 para determinar el valor de cosh x.

17. Como se puede ver en la figura 5.4.3, la función hiperbólica de seno $y = \operatorname{senh} x$ es de uno-a-uno. Use la definición del seno hiperbólico en (14) en la forma $e^x - 2y - e^{-x} = 0$ para demostrar que el **seno hiperbólico inverso** $\operatorname{senh}^{-1} x$ se puede expresar en términos del logaritmo natural

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

[*Sugerencia:* Intercambie x y y en $e^x - 2y - e^{-x} = 0$ y resuelva para y.]

18. ***a***) Use la gráfica de $y = \operatorname{senh} x$ de la figura 5.4.3 para bosquejar la gráfica del seno hiperbólico inverso $y = \operatorname{senh}^{-1} x$ que se define en el problema 17.

b) Dé el campo de definición y rango de $y = \operatorname{senh}^{-1} x$.

19. La función $y = \cosh x$ es uno-a-uno en el campo de definición restringido $[0, \infty)$. Proceda como en el problema 17 para demostrar que el **coseno hiperbólico inverso** $\cosh^{-1} x$ se puede expresar en términos del logaritmo natural:

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

20. ***a***) Use la gráfica de $y = \cosh x$ en la figura 5.4.2 para bosquejar la gráfica del coseno hiperbólico inverso $y = \cosh^{-1} x$ definido en el problema 19.

b) Dé el campo de definición y rango de $y = \cosh^{-1} x$.

21. La definición de la **tangente hiperbólica** es

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Bosqueje el gráfico de $y = \tanh x$.

22. La definición de la **secante hiperbólica** es

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}.$$

Bosqueje la gráfica de $y = \operatorname{sech} x$.

23. La función $y = \tanh x$ es uno-a-uno. Use la gráfica que obtuvo en el problema 21 para bosquejar la gráfica de la **tangente hiperbólica inversa** $y = \tanh^{-1} x$. Determine el campo de definición y rango de $y = \tanh^{-1} x$.

24. La función $y = \operatorname{sech} x$ es uno-a-uno en el campo de definición restringido $[0, \infty)$. Use la gráfica que obtuvo en el problema 22 para bosquejar la gráfica de la **secante hiperbólica inversa** $y = \operatorname{sech}^{-1} x$. Dé el campo de definición y rango de $y = \operatorname{sech}^{-1} x$.

Problemas para calculadora o computadora

25. Con una calculadora investigue $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ de la función del problema 7.

Determine $f'(x)$.

26. Use una calculadora para investigar $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ de la función del problema 8.

Determine $f'(x)$.

En los problemas 27 a 30, con una calculadora estime el valor $m(b) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{b^h - 1}{h}$ para $b = 1.5$, $b = 2$, $b = 3$ y $b = 5$, llenando la tabla indicada.

27.

$h \to 0$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\dfrac{(1.5)^h - 1}{h}$						

28.

$h \to 0$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\dfrac{2^h - 1}{h}$						

29.

$h \to 0$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\dfrac{3^h - 1}{h}$						

30.

$h \to 0$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\dfrac{5^h - 1}{h}$						

31. Haga una tabla como la de los problemas 27 a 30, pero esta vez use $\dfrac{e^h - 1}{h}$.

32. **Curiosidad** El logaritmo que desarrolló John Napier (vea la página 316) en realidad era

$$10^7 \log_{1/e}\left(\frac{x}{10^7}\right).$$

Use (11) de la sección 5.2 para expresar este logaritmo en función del logaritmo natural.

CAPÍTULO 5 Ejercicios de repaso

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-17.

En los problemas 1 a 22, llene los espacios.

1. La gráfica de $y = 6 - e^{-x}$ cruza el eje y en ______ y su asíntota horizontal es $y =$ ________.
2. El cruce de la gráfica de $y = -10 + 10^{5x}$ con el eje x está en _____.
3. La gráfica de $y = \ln(x + 4)$ cruza al eje x en _________ y su asíntota vertical es $x =$ ______.
4. La gráfica de $y = \log_8(x + 2)$ cruza al eje y en __________.

5. $\log_5 2 - \log_5 10 =$ ______

6. $6\ln e + 3\ln\dfrac{1}{e} =$ ______

7. $e^{3\ln 10} =$ ______

8. $10^{\log_{10} 4.89} =$ ______

9. $\log_4(4 \cdot 4^2 \cdot 4^3) =$ ______

10. $\dfrac{\log_5 625}{\log_5 125} =$ ______

11. Si $\log_3 N = -2$, entonces $N =$ _______.
12. Si $\log_b 6 = \frac{1}{2}$, entonces $b =$ ______.
13. Si $\ln e^3 = y$, entonces $y =$ _______.
14. Si $\ln 3 + \ln(x - 1) = \ln 2 + \ln x$, entonces $x =$ _______.
15. Si $-1 + \ln(x - 3) = 0$, entonces $x =$ ______.
16. Si $\ln(\ln x) = 1$, entonces $x =$ _______.
17. Si $100 - 20e^{-0.15t} = 35$, entonces, redondeando a cuatro decimales, $t =$ ________.
18. Si $3^x = 5$, entonces $3^{-2x} =$ _________.
19. $f(x) = 4^{3x} = (\_\_\_)^x$
20. $f(x) = (e^2)^{x/6} = (\_\_\_\_)^x$
21. Si la gráfica de $y = e^{x-2} + C$ pasa por $(2, 9)$, entonces $C =$ ______.
22. Con transformaciones rígidas, el punto $(0, 1)$ de la gráfica de $y = e^x$ se mueve al punto _______ en la gráfica de $y = 4 + e^{x-3}$.

En los problemas 23 a 36, conteste cierto o falso.

23. $y = \ln x$ y $y = e^x$ son funciones inversas. __________
24. El punto $(b, 1)$ está en la gráfica de $f(x) = \log_b x$. _______
25. $y = 10^{-x}$ y $y = (0.1)^x$ son la misma función. _______
26. Si $f(x) = e^{x^2} - 1$, entonces $f(x) = 1$ cuando $x = \pm\ln\sqrt{2}$. ________

27. $4^{x/2} = 2^x$ ______

28. $\dfrac{2^{x^2}}{2^x} = 2^x$ ______

29. $2^x + 2^{-x} = (2 + 2^{-1})^x$ ______

30. $2^{3+3x} = 8^{1+x}$ ______

31. $-\ln 2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ______

32. $\ln\dfrac{e^a}{e^b} = a - b$ ______

33. $\ln(\ln e) = 1$ ______ **34.** $\ln\sqrt{43} = \dfrac{\ln 43}{2}$ ______

35. $\ln(e + e) = 1 + \ln 2$ ______ **36.** $\log_6(36)^{-1} = -2$ ______

En los problemas 37 y 38, reformule la expresión exponencial como una expresión logarítmica equivalente.

37. $5^{-1} = 0.2$ **38.** $\sqrt[3]{512} = 8$

En los problemas 39 y 40, reformule la expresión logarítmica como una expresión exponencial equivalente.

39. $\log_9 27 = 1.5$ **40.** $\log_6(36)^{-2} = -4$

En los problemas 41 a 48, calcule x.

41. $2^{1-x} = 8$ **42.** $3^{2x} = 81$

43. $e^{1-2x} = e^2$ **44.** $e^{x^2} - e^5 e^{x-1} = 0$

45. $2^{1-x} = 7$ **46.** $3^x = 7^{x-1}$

47. $e^{x+2} = 6$ **48.** $3e^x = 4e^{-3x}$

En los problemas 49 y 50, grafique las funciones en el mismo conjunto de ejes coordenados.

49. $y = 4^x$, $y = \log_4 x$ **50.** $y = (\frac{1}{2})^x$, $y = \log_{1/2} x$

51. Indique la correspondencia de la letra en la gráfica de la FIGURA 5.E.1 con la función adecuada.

$i)\ f(x) = b^x, b > 2$ $ii)\ f(x) = b^x, 1 < b < 2$

$iii)\ f(x) = b^x, \frac{1}{2} < b < 1$ $iv)\ f(x) = b^x, 0 < b < \frac{1}{2}$

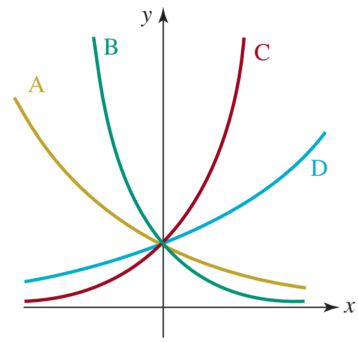


FIGURA 5.E.1 Gráficas del problema 51

52. En la FIGURA 5.E.2 llene los espacios en blanco de las coordenadas de los puntos en cada gráfica.

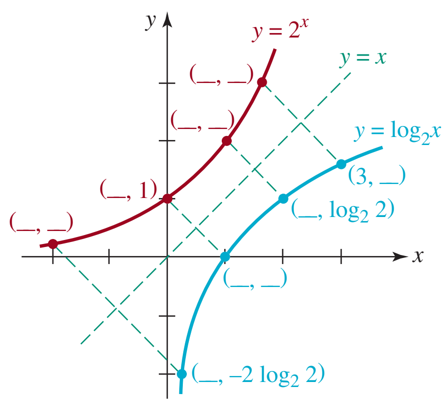


FIGURA 5.E.2 Gráficas del problema 52

En los problemas 53 y 54, determine la pendiente de la recta L que se indica en cada figura.

53.

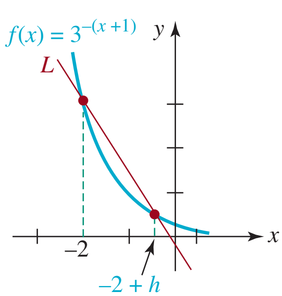


FIGURA 5.E.3 Gráfica del problema 53

54.

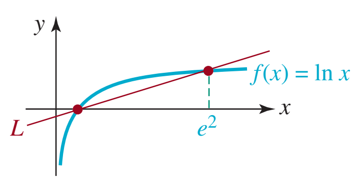


FIGURA 5.E.4 Gráfica del problema 54

En los problemas 55 a 60, indique la correspondencia de las siguientes funciones con una de las gráficas de abajo.

i) $y = \ln(x - 2)$	*ii*) $y = 2 - \ln x$
iii) $y = 2 + \ln(x + 2)$	*iv*) $y = -2 - \ln(x + 2)$
v) $y = -\ln(2x)$	*vi*) $y = 2 + \ln(-x + 2)$

55.

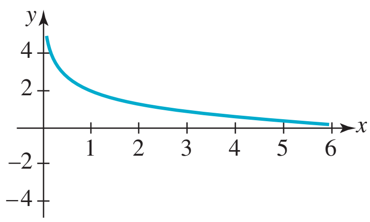


FIGURA 5.E.5 Gráfica del problema 55

56.

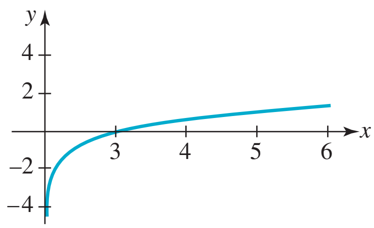


FIGURA 5.E.6 Gráfica del problema 56

57.

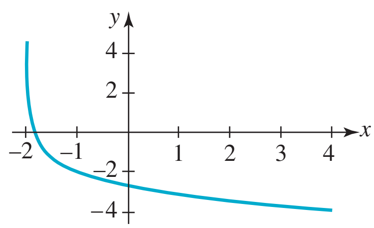


FIGURA 5.E.7 Gráfica del problema 57

58.

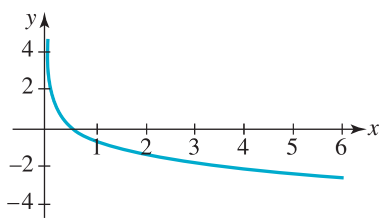


FIGURA 5.E.8 Gráfica del problema 58

59.

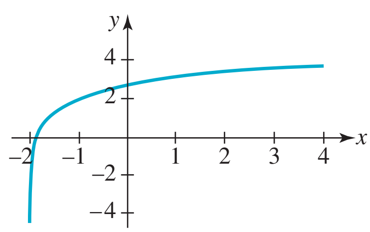


FIGURA 5.E.9 Gráfica del problema 59

60.

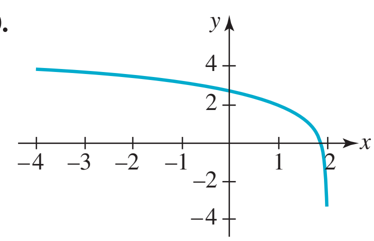


FIGURA 5.E.10 Gráfica del problema 60

En los problemas 61 y 62, describa la gráfica de la función f en términos de una transformación de la gráfica de $y = \ln x$.

61. $f(x) = \ln\dfrac{1}{x}$ **62.** $f(x) = \ln x^3$

63. Deduzca la función $f(x) = Ae^{kx}$ si (0, 5) y (6, 1) son puntos en la gráfica de f.

64. Deduzca la función $f(x) = A\ 10^{kx}$ si $f(3) = 8$ y $f(0) = \frac{1}{2}$.

65. Deduzca la función $f(x) = a + b^x$, $0 < b < 1$, si $f(1) = 5.5$ y la gráfica de f tiene como una asíntota horizontal $y = 5$.

66. Deduzca la función $f(x) = a + \log_3(x - c)$ si $f(11) = 10$ y la gráfica de f tiene una asíntota vertical $x = 2$.

67. Si la cantidad inicial de bacterias presentes en un cultivo se duplica después de 9 horas, ¿cuánto tiempo pasará para que la cantidad de bacterias se vuelva a duplicar?

68. Un lago de pesca comercial se abastece con 10 000 crías de pez. Deduzca un modelo $P(t) = P_0e^{kt}$ de la población de peces en el lago, cuando el tiempo es t, si su propietario estima que entonces quedarán 5 000 peces después de 6 meses. ¿Después de cuántos meses el modelo predice que quedarán 1 000 peces?

69. El tritio es un isótopo del hidrógeno que tiene vida media de 12.5 años. ¿Cuánto de una cantidad inicial de este elemento queda después de 50 años?

70. Un esqueleto humano que se encontró en un sitio arqueológico ha perdido 97% de ^{14}C. ¿Cuál es la edad aproximada del esqueleto?

71. Una persona se jubila e invierte \$650 000 en una cuenta de ahorros. Desea que la cuenta tenga \$1 000 000 en 10 años. ¿Qué tasa r de interés anual compuesto continuamente satisfará su deseo?

72. De acuerdo con la **ley de Lambert-Bouguer**, la intensidad I (expresada en lúmenes) de un haz luminoso vertical que atraviesa una sustancia transparente disminuye de acuerdo con la función exponencial $I(x) = I_0e^{kx}$, $k < 0$, donde I_0 es la intensidad del rayo incidente y x es la profundidad, expresada en metros. Si la intensidad de la luz a 1 metro abajo de la superficie del agua es 30% de I_0, ¿cuál es la intensidad a 3 metros abajo de la superficie? ¿A qué profundidad es la intensidad 50% de lo que era en la superficie?

73. La **función Gompertz** $y = ae^{-be^{-ct}}$, donde a, b y c son constantes positivas, recibió ese nombre en honor del matemático inglés **Benjamin Gompertz** (1779-1865) y fue empleada inicialmente en la demografía. En la actualidad se utiliza como un modelo matemático en diversas áreas, como la economía, la estadística e incluso en el crecimiento de tumores, como parte de la oncología. Resuelva para t en términos de otros símbolos.

74. La gráfica de una función de Gompertz se llama **curva de Gompertz**. Trace una curva de Grompertz en el caso siguiente. En cada caso, sobreponga las tres gráficas en el mismo sistema de coordenadas.

a) $y = ae^{-e^{-t}}, a = \frac{1}{2}, a = 1, a = 2$

b) $y = e^{-be^{-t}}, b = \frac{1}{2}, b = 1, b = 2$

c) $y = e^{-e^{-ct}}, c = \frac{1}{2}, c = 1, c = 2$

[*Sugerencia:* La gráfica tiene dos asíntotas horizontales.]

75. Una **anualidad** es un plan de ahorro donde se deposita la misma cantidad de dinero P en una cuenta en n periodos equidistantes (por ejemplo, años). Si la tasa r de interés anual es compuesta continuamente, entonces la cantidad S acumulada en la cuenta inmediatamente después del depósito n es:

$$S = P + Pe^{r} + Pe^{2r} + \cdots + Pe^{(n-1)r}.$$

¿Cuál es el valor de este tipo de anualidad en 15 años si $P = \$3\,000$ y la tasa de interés es de 2%?

Contenido del capítulo

6.1 La parábola

6.2 La elipse

6.3 La hipérbola

6.4 Sistema de coordenadas polares

6.5 Gráficas de ecuaciones polares

6.6 Secciones cónicas en coordenadas polares

6.7 Ecuaciones paramétricas

6.8 ∫Avance DE CÁLCULO Espacio tridimensional

Capítulo 6 Ejercicios de repaso

Secciones cónicas 6

6.1 La parábola

Hipatia

Introducción **Hipatia** fue la primera mujer en la historia de las matemáticas de la que se conoce bastante. Nació en Alejandría, en 370 d.C., tuvo renombre como matemática y filósofa. Entre sus escritos se destaca *Sobre las cónicas de Apolonio*, que popularizó el trabajo de **Apolonio** (200 a.C.) sobre cónicas, que se pueden obtener cortando un cono doble invertido con un plano. Son el círculo, la parábola, la elipse y la hipérbola. Vea la **FIGURA 6.1.1**. Al cerrar el periodo griego, se desvaneció el interés en las cónicas; después de Hipatia, el estudio de esas curvas desapareció durante más de 1 000 años.

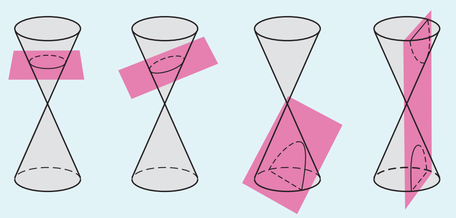
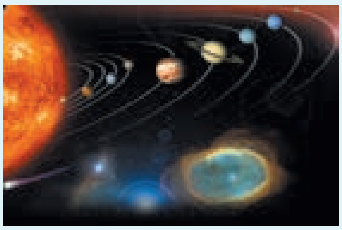


FIGURA 6.1.1 Secciones cónicas



Sistema solar

En el siglo XVII, Galileo demostró que en ausencia de resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil describe un arco parabólico. Más o menos por ese tiempo, Johannes Kepler supuso que las órbitas de los planetas en torno al Sol son elipses, y que el Sol está en uno de los focos. Después, Isaac Newton a través de los métodos del cálculo recién desarrollados verificó esta teoría. Kepler también experimentó con las propiedades reflectoras de los espejos parabólicos, investigaciones que aceleraron el desarrollo del telescopio reflector. Los griegos conocieron pocas de estas aplicaciones prácticas. Habían estudiado las cónicas por su belleza y por sus intrigantes propiedades. En las tres primeras secciones de este capítulo examinaremos tanto las propiedades antiguas como las aplicaciones modernas de estas curvas. Más que usar un cono, indicaremos cómo se definen la parábola, elipse e hipérbola mediante una distancia. Por medio de un sistema de coordenadas rectangulares y una fórmula para determinar la distancia obtendremos ecuaciones de las cónicas. Cada una de ellas estará en forma de una ecuación cuadrática de las variables x y y:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

en donde A, B, C, D, E y F son constantes. Ya hemos estudiado el caso especial de $y = ax^2 + bx + c$, de la ecuación anterior, en la sección 2.4.

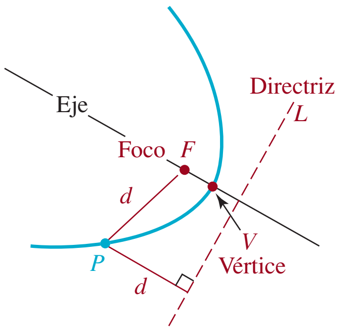


FIGURA 6.1.2 Una parábola

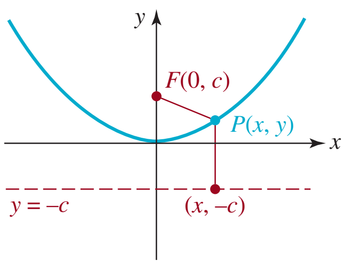


FIGURA 6.1.3 Parábola con vértice en $(0, 0)$ y foco en el eje y

PARÁBOLA

Una **parábola** es el conjunto de puntos $P(x, y)$ en el plano que son equidistantes a una recta fija L, llamada **directriz**, y a un punto fijo F, llamado **foco**.

En la **FIGURA 6.1.2** se muestra una parábola. La recta que pasa por el foco perpendicular a la directriz se llama **eje** de la parábola. El punto de intersección de la parábola con el eje se llama **vértice** y se indica con V en la figura 6.1.2.

Parábola con vértice en $(0, 0)$ Para describir analíticamente una parábola se usará un sistema de coordenadas rectangulares donde la directriz es una recta horizontal $y = -c$, en donde $c > 0$, y la ubicación del punto F sea $(0, c)$. Entonces se ve que el eje de la parábola está a lo largo del eje y, como muestra la **FIGURA 6.1.3**. El origen es necesariamente el vértice, porque está en el eje a c unidades tanto del foco como de la directriz. La distancia desde un punto $P(x, y)$ a la directriz es

$$y - (-c) = y + c.$$

Al aplicar la fórmula de la distancia, la distancia de P al foco F es

$$d(P, F) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2}.$$

De acuerdo con la definición de la parábola, $d(P, F) = y + c$, es decir

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2} = y + c.$$

Ambos lados se elevan al cuadrado y al simplificar se obtiene

$$x^2 + (y - c)^2 = (y + c)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = y^2 + 2cy + c^2$$

es decir,

$$x^2 = 4cy. \tag{1}$$

La ecuación (1) se conoce como la **forma normal** de la ecuación de una parábola con foco en $(0, c)$, directriz $y = -c$, $c > 0$ y vértice en $(0, 0)$. La gráfica de cualquier parábola con la forma normal (1) es simétrica con respecto al eje y.

La ecuación (1) no depende de la hipótesis $c > 0$. Sin embargo, la dirección hacia la que se abre la parábola sí depende del signo de c. En forma específica, si $c > 0$, la parábola se abre *hacia arriba*, como en la figura 6.1.3; si $c < 0$, la parábola se abre *hacia abajo*.

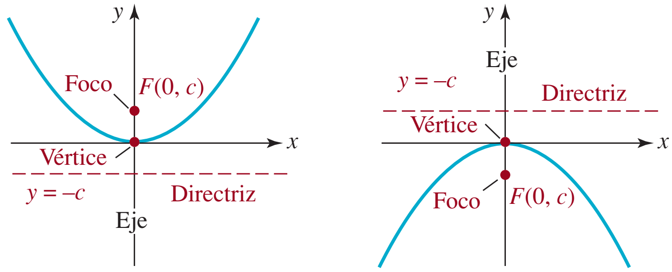
Si se supone que el foco de la parábola está en el eje x, en $F(c, 0)$, y que la ecuación de la directriz es $x = -c$, entonces el eje x es el eje de la parábola, y el vértice está en $(0, 0)$. Si $c > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; si $c < 0$, se abre hacia la izquierda. En cualquier caso, la **forma normal** de la ecuación es

$$y^2 = 4cx. \tag{2}$$

La gráfica de cualquier parábola con la forma normal (2) es simétrica con respecto al eje x.

En las **FIGURAS 6.1.4** y **6.1.5** se presenta un resumen con toda esta información de las ecuaciones (1) y (2), respectivamente. El lector se sorprenderá al ver que en la figura 6.1.4*b*), la directriz sobre el eje x se identifica con $y = -c$, y el foco en el eje de las y negativas tiene coordenadas $F(0, c)$. Tenga en cuenta que en este caso, la hipótesis es que $c < 0$ y por consiguiente $-c > 0$. Una aclaración similar sucede con la figura 6.1.5*b*).

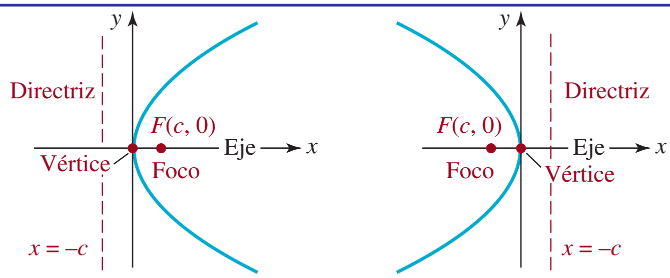
Resumen gráfico de la información de la forma normal (1)



a) $x^2 = 4cy$, $c > 0$ *b)* $x^2 = 4cy$, $c < 0$

FIGURA 6.1.4 Resumen gráfico de la información de la forma normal (1)

Resumen gráfico de la información de la forma normal (2)



a) $y^2 = 4cx$, $c > 0$ *b)* $y^2 = 4cx$, $c < 0$

FIGURA 6.1.5 Resumen gráfico de la información de la forma normal (2)

EJEMPLO 1 La parábola más simple

Ya habíamos visto la gráfica de $y = x^2$ en la sección 2.2. Al comparar esta ecuación con la (1) se ve que

$$x^2 = \overset{\overset{4c}{\downarrow}}{1} \cdot y$$

por lo que $4c = 1$, o sea que $c = \frac{1}{4}$. En consecuencia, la gráfica de $y = x^2$ es una parábola con vértice en el origen, foco en $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, y directriz $y = -\frac{1}{4}$. Estos detalles se indican en la gráfica de la **FIGURA 6.1.6**. ■

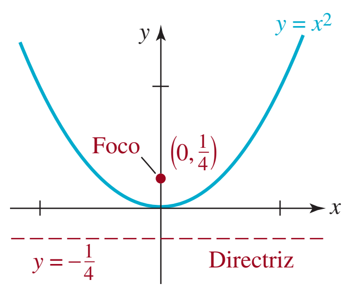


FIGURA 6.1.6 Gráfica de la ecuación del ejemplo 1

Si conocemos la forma parabólica básica, todo lo que necesitamos para saber cómo trazar una gráfica *preliminar* de las ecuaciones (1) y (2) es que la gráfica pasa por su vértice en (0, 0), y la dirección hacia la que se abre la parábola. Para que la gráfica sea más exacta, conviene usar el número c determinado por la gráfica de la ecuación en la forma normal, para graficar dos puntos adicionales. Nótese que si se opta por $y = c$ en (1), entonces $x^2 = 4c^2$ implica que $x = \pm 2c$. Entonces los puntos $(2c, c)$ y $(-2c, c)$ están en la gráfica de $x^2 = 4cy$. De igual modo, la opción $x = c$ en (2) implica que $y = \pm 2c$ y entonces $(c, 2c)$ y $(c, -2c)$ son puntos de la gráfica de $y^2 = 4cx$. El *segmento de recta* que pasa por el foco y cuyos extremos están en $(2c, c)$ y $(-2c, c)$ cuando las ecuaciones están en su forma normal (1), o cuyos extremos están en $(c, 2c)$ y $(c, -2c)$ en el caso de ecuaciones con la forma normal (2), se llama **cuerda focal**

◀ Sugerencia para graficar las ecuaciones (1) y (2).

o **diámetro**. Por ejemplo, en la figura 6.1.6, si se escoge $y = \frac{1}{4}$, entonces $x^2 = \frac{1}{4}$ implica que $x = \pm\frac{1}{2}$. Los extremos de la cuerda focal horizontal para $y = x^2$ son $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

EJEMPLO 2 Deducción de la ecuación de una parábola

Deducir la ecuación, en su forma normal, de la parábola con directriz $x = 2$ y foco en $(-2, 0)$. Hacer la gráfica.

Solución En la FIGURA 6.1.7 se han graficado la directriz y el foco. Por sus lugares se ve que la ecuación que buscamos tiene la forma $y^2 = 4cx$. Como $c = -2$, la parábola se abre hacia la izquierda, y así

$$y^2 = 4(-2)x \quad \text{o sea} \quad y^2 = -8x.$$

Como se mencionó en la explicación anterior a este ejemplo, si se sustituye $x = c$, o en este caso $x = -2$, en la ecuación $y^2 = -8x$, se pueden determinar dos puntos en su gráfica. De $y^2 = -8(-2) = 16$ se obtiene $y = \pm 4$. Como se ve en la FIGURA 6.1.8, la gráfica pasa por $(0, 0)$ y también por los extremos $(-2, -4)$ y $(-2, 4)$ de la cuerda focal.

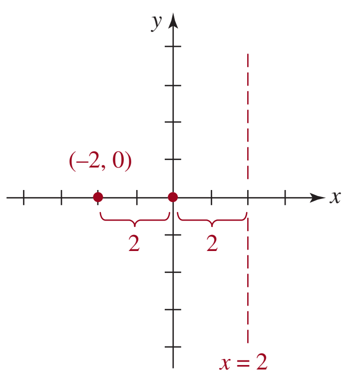


FIGURA 6.1.7 Directriz y foco del ejemplo 2

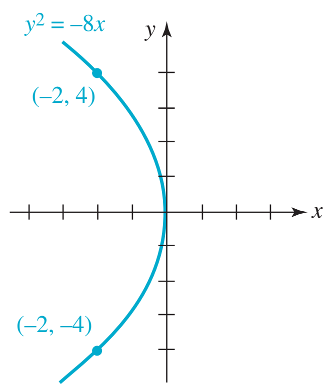


FIGURA 6.1.8 Gráfica de la parábola del ejemplo 2 ■

□ Parábola con vértice en (h, k)

Supongamos que la parábola se traslada tanto horizontal como verticalmente, de modo que su vértice está en el punto (h, k), y su eje es la recta vertical $x = h$. La **forma normal** de la ecuación de la parábola es, entonces,

$$(x - h)^2 = 4c(y - k). \tag{3}$$

De igual modo, si su eje es la recta horizontal $y = k$, la forma normal de la ecuación de la parábola con vértice en (h, k) es

$$(y - k)^2 = 4c(x - h). \tag{4}$$

Las parábolas que definen estas ecuaciones tienen una forma idéntica a las parábolas definidas por las ecuaciones (1) y (2), porque las ecuaciones (3) y (4) representan transformaciones rígidas (traslaciones hacia arriba, hacia abajo, hacia la izquierda y hacia la derecha) de las gráficas de (1) y (2). Por ejemplo, la parábola

$$(x + 1)^2 = 8(y - 5)$$

tiene su vértice en $(-1, 5)$. Su gráfica es la gráfica de $x^2 = 8y$ desplazada horizontalmente una unidad hacia la izquierda, seguida de un desplazamiento vertical de cinco unidades.

Para cada una de las ecuaciones (1) y (2) o (3) y (4), la *distancia* del vértice al foco, así como la distancia del vértice a la directriz, es $|c|$.

EJEMPLO 3 Deducción de la ecuación de una parábola

Deducir la ecuación, en su forma normal, de la parábola con vértice en $(-3, -1)$ y directriz $y = 3$. Determinar la ubicación del foco.

Solución Comenzaremos graficando el vértice en $(-3, -1)$ y la directriz $y = 3$. En la FIGURA 6.1.9 se puede ver que la parábola debe abrirse hacia abajo, y entonces la forma normal es la (3). Esto, más la observación que el vértice está a 4 unidades abajo de la directriz, indica que la solución adecuada de $|c| = 4$ es $c = -4$. Al sustituir $h = -3$, $k = -1$ y $c = -4$ en la ecuación (3) da como resultado

$$[x - (-3)]^2 = 4(-4)[y - (-1)] \quad \text{o sea} \quad (x + 3)^2 = -16(y + 1).$$ ■

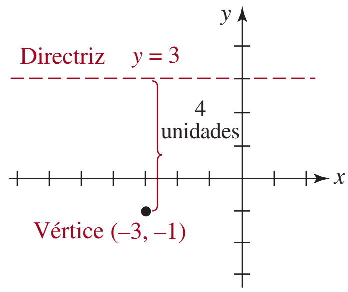


FIGURA 6.1.9 Vértice y directriz del ejemplo 3

EJEMPLO 4 Encontrar todo

Encontrar el vértice, foco, eje, directriz y gráfica de la parábola

$$y^2 - 4y - 8x - 28 = 0. \tag{5}$$

Solución Para escribir la ecuación en una de las formas normales, completaremos el cuadrado en y:

$$\begin{aligned} y^2 - 4y + 4 &= 8x + 28 + 4 \quad \leftarrow \text{Se suma 4 en ambos lados.} \\ (y - 2)^2 &= 8x + 32. \end{aligned}$$

Así, la forma normal de la ecuación (5) es $(y - 2)^2 = 8(x - 4)$. Al comparar esta ecuación con la (4) se llega a la conclusión de que el vértice está en $(-4, 2)$ y que $4c = 8$, o sea $c = 2$. Entonces, la parábola se abre hacia la derecha. De $c = 2 > 0$, el foco está 2 unidades hacia la derecha del vértice en $(-4 + 2, 2)$ o sea $(-2, 2)$. La directriz es la recta vertical a 2 unidades hacia la izquierda del vértice, $x = -4 - 2$, o sea $x = -6$. Sabiendo que la parábola se abre hacia la derecha, desde el punto $(-4, 2)$, también se ve que la gráfica interseca con los ejes coordenados de una gráfica. Para determinar la intersección con el eje x se hace que $y = 0$ en (5), y se ve de inmediato que $x = -\frac{28}{8} = -\frac{7}{2}$. La intersección con el eje x está en $(-\frac{7}{2}, 0)$. Para determinar la intersección con el eje y se hace que $x = 0$ en (5), y con la fórmula cuadrática se llega a $y = 2 \pm 4\sqrt{2}$, o sea $y \approx 7.66$ y $y \approx -3.66$. Las intersecciones con el eje y son $(0, 2 - 4\sqrt{2})$ y $(0, 2 + 4\sqrt{2})$. Al reunir toda esta información se obtiene la gráfica de la FIGURA 6.1.10. ■

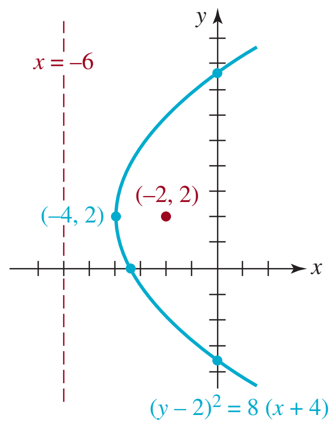
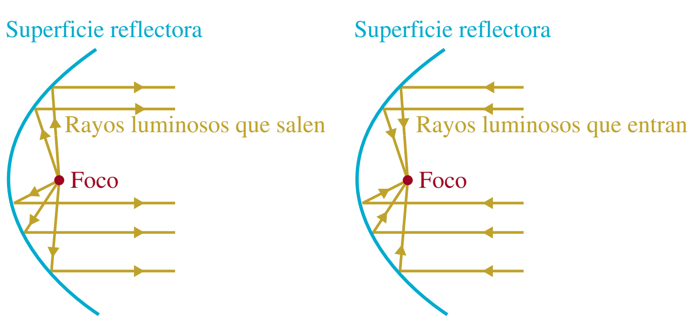


FIGURA 6.1.10 Gráfica de la ecuación del ejemplo 4

□ Aplicaciones de la parábola

La parábola tiene muchas propiedades interesantes que la hacen adecuada para ciertas aplicaciones. Con frecuencia, las superficies reflectoras se diseñan para aprovechar una propiedad de reflexión de las parábolas. Esas superficies, llamadas **paraboloides**, son tridimensionales y se forman haciendo girar una parábola en torno a su eje. Como se ve en la FIGURA 6.1.11a), los rayos de luz (o las señales electromagnéticas) desde



a) Los rayos emitidos en el foco son reflejados como rayos paralelos

b) Los rayos que entran se reflejan hacia el foco

FIGURA 6.1.11 Superficie reflectora parabólica

Faro buscador

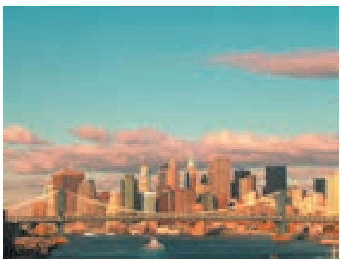
una fuente puntiforme ubicada en el foco de una superficie reflectora parabólica se reflejarán a lo largo de rectas paralelas al eje. Es el concepto para el diseño de faros buscadores, algunas linternas sordas y antenas satelitales. Al revés, si los rayos de luz que llegan son paralelos al eje de una parábola, serán reflejados en la superficie en rectas que pasen por el foco. Vea la figura 6.1.11*b*). Los rayos luminosos procedentes de un objeto lejano, como una galaxia, son esencialmente paralelos, por lo que, cuando entran a un telescopio reflector se reflejan en el espejo parabólico hacia el foco, donde en el caso normal hay una cámara para capturar la imagen durante algún tiempo. Una antena parabólica doméstica funciona con el mismo principio que el del telescopio reflector: la señal digital de un satélite de TV se capta en el foco del plato mediante un receptor.

También las parábolas son importantes en el diseño de puentes colgantes. Se puede demostrar que si el peso del puente está uniformemente distribuido sobre toda su longitud, un cable de soporte con forma de parábola puede soportar la carga.

Antenas parabólicas de TV satelital

La trayectoria de un proyectil lanzado oblicuamente, que puede ser un balón de basquetbol arrojado desde la línea de tiro libre, describirá un arco parabólico.

Se ha observado que los atunes, cuyas presas son peces más pequeños, nadan en cardúmenes de 10 a 20 ordenados aproximadamente en forma parabólica. Una explicación factible de este hecho es que los peces más pequeños atrapados por el cardumen de atunes tratarán de escapar "reflejándose" afuera de la parábola. El resultado es que se concentran en el foco y son presa fácil de los atunes. Vea la **FIGURA 6.1.12**.



El Puente de Brooklyn es un puente colgante

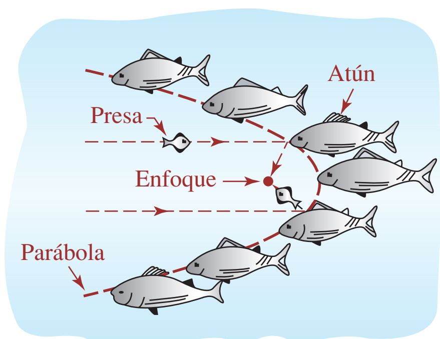
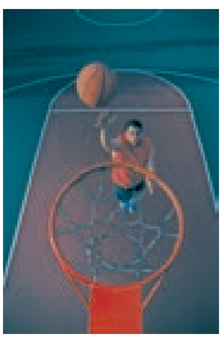


FIGURA 6.1.12 Atunes cazando en un arco parabólico



El balón describe un arco parabólico

6.1 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-18.

En los problemas 1 a 24, determine el vértice, foco, directriz y eje de la parábola respectiva. Haga una gráfica de la parábola.

1. $y^2 = 4x$

2. $y^2 = \frac{7}{2}x$

3. $y^2 = -\frac{4}{3}x$

4. $y^2 = -10x$

5. $x^2 = -16y$

6. $x^2 = \frac{1}{10}y$

7. $x^2 = 28y$

8. $x^2 = -64y$

9. $(y - 1)^2 = 16x$

10. $(y + 3)^2 = -8(x + 2)$

11. $(x + 5)^2 = -4(y + 1)$

12. $(x - 2)^2 + y = 0$

13. $y^2 + 12y - 4x + 16 = 0$

14. $x^2 + 6x + y + 11 = 0$

15. $x^2 + 5x - \frac{1}{4}y + 6 = 0$

16. $x^2 - 2x - 4y + 17 = 0$

17. $y^2 - 8y + 2x + 10 = 0$

18. $y^2 - 4y - 4x + 3 = 0$

19. $4x^2 = 2y$

20. $3(y - 1)^2 = 9x$

21. $-2x^2 + 12x - 8y - 18 = 0$

22. $4y^2 + 16y - 6x - 2 = 0$

23. $6y^2 - 12y - 24x - 42 = 0$

24. $3x^2 + 30x - 8y + 75 = 0$

En los problemas 25 a 44, deduzca una ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones indicadas.

25. Foco en $(0, 7)$, directriz $y = -7$

26. Foco en $(0, -5)$, directriz $y = 5$

27. Foco en $(-4, 0)$, directriz $x = 4$

28. Foco en $(\frac{3}{2}, 0)$, directriz $x = -\frac{3}{2}$

29. Foco en $(\frac{5}{2}, 0)$, vértice $(0, 0)$

30. Foco en $(0, -10)$, vértice en $(0, 0)$

31. Foco en $(2, 3)$, directriz $y = -3$

32. Foco en $(1, -7)$, directriz $x = -5$

33. Foco en $(-1, 4)$, directriz $x = 5$

34. Foco en $(-2, 0)$, directriz $y = \frac{3}{2}$

35. Foco en $(1, 5)$, vértice $(1, -3)$

36. Foco en $(-2, 3)$, vértice en $(-2, 5)$

37. Foco en $(8, -3)$, vértice $(0, -3)$

38. Foco en $(1, 2)$, vértice en $(7, 2)$

39. Vértice en $(0, 0)$, directriz $y = -\frac{7}{4}$

40. Vértice en $(0, 0)$, directriz $x = 6$

41. Vértice en $(5, 1)$, directriz $y = 7$

42. Vértice en $(-1, 4)$, directriz $x = 0$

43. Vértice en $(0, 0)$, pasa por $(-2, 8)$, eje a lo largo del eje y

44. Vértice en $(0, 0)$, pasa por $(1, \frac{1}{4})$, eje a lo largo del eje x

En los problemas 45 a 48, calcule las intersecciones con los ejes coordenados de la parábola respectiva.

45. $(y + 4)^2 = 4(x + 1)$

46. $(x - 1)^2 = -2(y - 1)$

47. $x^2 + 2y - 18 = 0$

48. $y^2 - 8y - x + 15 = 0$

Aplicaciones diversas

49. Candileja Una candileja grande se diseña de tal modo que una sección transversal por su eje es una parábola, y la fuente luminosa está en el foco. Calcule la posición de la fuente luminosa, si la candileja tiene 4 pies de diámetro en la abertura, y 2 pies de profundidad.

50. Telescopio reflector Un telescopio reflector tiene un espejo parabólico de 20 pies de diámetro en la parte superior, y 4 pies de profundidad en el centro. ¿Dónde se debe colocar el ocular?

51. Suponga que un rayo de luz emana del foco de la parábola $y^2 = 4x$ y llega a la parábola en el punto $(1, -2)$. ¿Cuál es la ecuación del rayo reflejado?

52. Puente colgante Suponga que dos torres de un puente colgante están a 350 pies de distancia, y que el vértice del cable parabólico es tangente al asfalto en el punto medio entre las torres. Si el cable está 1 pie arriba del asfalto en un punto a 20 pies del vértice, calcule la altura de las torres sobre el asfalto.

53. Otro puente colgante Dos torres de 75 pies de alto, de un puente colgante con un cable parabólico, están a 250 pies de distancia. El vértice de la parábola es tangente al asfalto en el punto medio entre las torres. Calcule la altura del cable, sobre el asfalto, en un punto a 50 pies de una de las torres.

54. Tubo de alcantarillado Suponga que el agua que sale por el extremo de un tubo horizontal describe un arco parabólico con su vértice en el extremo del tubo. Este tubo está a 20 metros sobre el suelo. En un punto a 2 metros abajo del extremo del tubo, la distancia horizontal del agua a una vertical que pase por el extremo del tubo es de 4 m. Vea la FIGURA 6.1.13. ¿Dónde el agua toca al suelo?

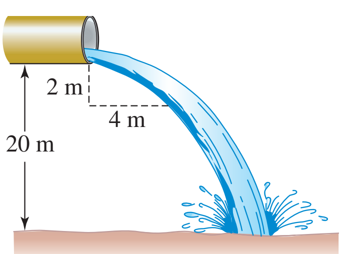


FIGURA 6.1.13 Tubo del problema 54

55. Diana Un lanzador de dardos suelta un dardo a 5 pies sobre el suelo. El dardo se arroja horizontalmente y sigue una trayectoria parabólica. Llega al suelo a $10\sqrt{10}$ pies del lanzador. A una distancia de 10 pies del lanzador, ¿a qué altura debe colocarse la diana para que el dardo le acierte?

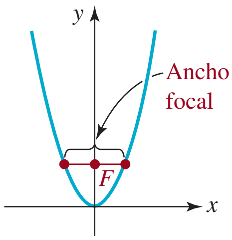


FIGURA 6.1.14 Ancho focal en el problema 57

56. Trayectoria balística La posición vertical de un proyectil se determina mediante la ecuación $y = -16t^2$, y la posición horizontal con $x = 40t$, para $t \geq 0$. Elimine t de las ecuaciones para demostrar que la trayectoria del proyectil es un arco parabólico. Grafique la trayectoria del proyectil.

57. Ancho focal El ancho focal de una parábola es la longitud de su cuerda focal; esto es, es el segmento de recta que pasa por el foco perpendicular al eje, con sus extremos en la parábola. Vea la **FIGURA 6.1.14**.

a) Calcule el ancho focal de la parábola $x^2 = 8y$.

b) Demuestre que el ancho focal de la parábola $x^2 = 4cy$ y $y^2 = 4cx$ es $4|c|$.

58. Órbita parabólica La órbita de un cometa es una parábola con el Sol en el foco. Cuando el cometa está a 50 000 000 de km del Sol, la línea del cometa al Sol es perpendicular al eje de la parábola. Use el resultado del problema 57*b*) para escribir una ecuación de la trayectoria del cometa. (Un cometa con órbita parabólica no regresa al sistema solar.)

Para discusión

59. Suponga que dos superficies reflectoras parabólicas están una frente a otra (con sus focos en un eje común). Todo sonido emitido en un foco se reflejará en las parábolas y se concentrará en el otro foco. La **FIGURA 6.1.15** muestra las trayectorias de dos ondas sonoras típicas. Con la definición de parábola de la página 328, demuestre que todas las ondas sonoras recorrerán la misma distancia. [*Nota:* Este resultado es importante por la siguiente razón: si las ondas sonoras recorrieran trayectorias de distintas longitudes, llegarían al segundo foco en tiempos distintos. El resultado sería interferencia, y no un sonido nítido.]

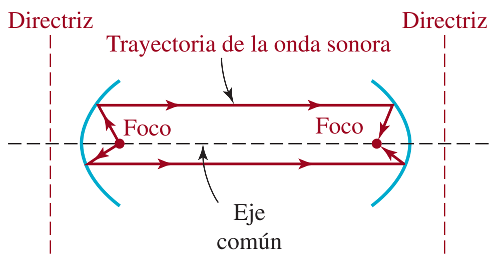


FIGURA 6.1.15 Superficies reflectoras parabólicas del problema 59

60. El punto más cercano al foco es el vértice. ¿Cómo se puede demostrar este enunciado? Ponga en práctica sus ideas.

61. En el caso del cometa del problema 58, use el resultado del problema 60 para determinar la distancia más corta entre el Sol y el cometa.

6.2 La elipse

☐ **Introducción** Esta figura es frecuente en astronomía. Por ejemplo, las órbitas de los planetas en torno al Sol son elípticas, y el Sol está en un foco. De igual manera, los satélites de comunicaciones, el telescopio espacial Hubble y la estación espacial internacional giran en torno a la Tierra en órbitas elípticas, con la Tierra en un foco. En esta sección se definirá la elipse y se estudiarán algunas de sus propiedades y aplicaciones.

ELIPSE

Una **elipse** es el conjunto de puntos $P(x, y)$ en un plano, tales que la suma de las distancias de P a dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante. Los puntos fijos F_1 y F_2 se llaman **focos**. El punto medio del segmento de recta que une a los puntos F_1 y F_2 se llama **centro** de la elipse.

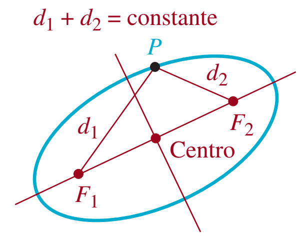


FIGURA 6.2.1 Una elipse

Como se ve en la FIGURA 6.2.1, si P es un punto en la elipse, y si $d_1 = d(F_1, P)$ y $d_2 = d(F_2, P)$ son las distancias de los focos a P, entonces, de acuerdo con la definición anterior,

$$d_1 + d_2 = k, \tag{1}$$

en donde $k > 0$ es una constante.

En nivel práctico, la ecuación (1) sugiere una forma de trazar una elipse. La FIGURA 6.2.2 muestra que si se fija un hilo de longitud k a dos clavos en una hoja de papel, se puede trazar una elipse recargando un lápiz en el hilo y moviéndolo en tal forma que el hilo permanezca tenso.

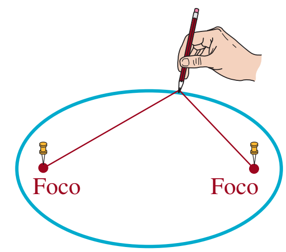


FIGURA 6.2.2 Método para trazar una elipse

Elipse con centro en (0, 0)

Ahora deduciremos la ecuación de la elipse. Por comodidad algebraica, definiremos $k = 2a > 0$ y colocaremos los focos en el eje x, en las coordenadas $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, como muestra la FIGURA 6.2.3. Entonces, de acuerdo con (1),

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

o sea

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \tag{2}$$

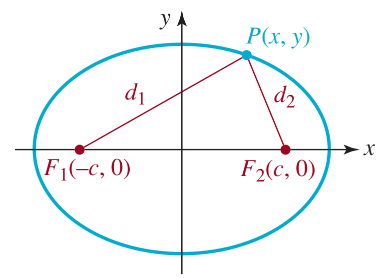


FIGURA 6.2.3 Elipse con centro en (0, 0) y focos en el eje x

Ambos lados de la segunda ecuación en (2) se elevan al cuadrado y se simplifica:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Se eleva al cuadrado por segunda vez, y entonces

$$a^2[(x - c)^2 + y^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

o sea

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{3}$$

En la figura 6.2.3 se ve que los puntos F_1, F_2 y P forman un triángulo. Como la suma de las longitudes de dos lados cualquiera en un triángulo es mayor que la longitud del otro lado, se debe cumplir que $2a > 2c$, o $a > c$. Por consiguiente, $a^2 - c^2 > 0$. Cuando se hace que $b^2 = a^2 - c^2$, la ecuación (3) se transforma en $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Esta última ecuación se divide entre a^2b^2 y se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

La ecuación (4) se llama **forma normal** de la ecuación de una elipse con centro en (0, 0) y focos en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, donde c se define por $b^2 = a^2 - c^2$, y $a > b > 0$.

Si los focos están en el eje y, al repetir el análisis anterior se llega a

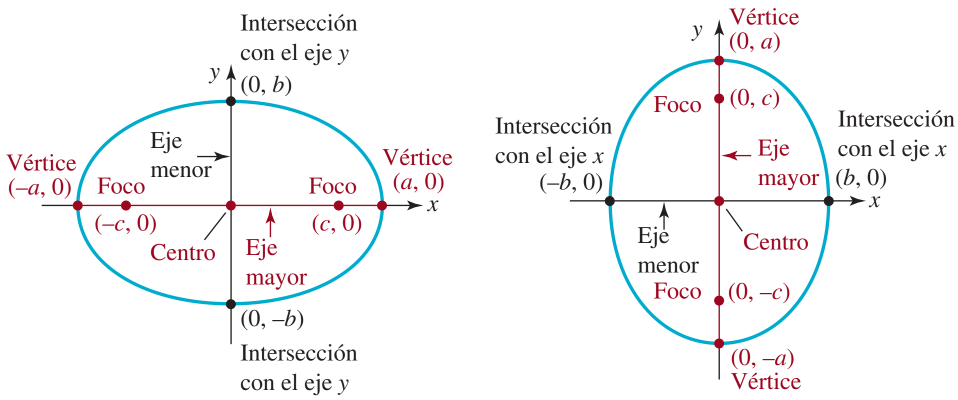
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{5}$$

La ecuación (5) es la llamada **forma normal** de la ecuación de una elipse con centro en (0, 0) y focos en $(0, -c)$ y $(0, c)$, donde c se define por $b^2 = a^2 - c^2$, y $a > b > 0$.

☐ **Ejes mayor y menor** El **eje mayor** de una elipse es el segmento de recta que pasa por su centro, que contiene a los focos y cuyos extremos están en la elipse. En el caso de una elipse cuya ecuación es la (4), el eje mayor es horizontal, mientras que en el de la (5) el eje mayor es vertical. El segmento de recta que pasa por el centro, es perpendicular al eje mayor, y cuyos extremos están en la elipse, se llama **eje menor**. Los dos extremos del eje mayor se llaman **vértices**. En la ecuación (4), los vértices están en la intersección con el eje x. Si $y = 0$ en (4), el resultado es $x = \pm a$. Entonces los vértices están en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$. En la ecuación (5), los vértices son las intersecciones con el eje y $(0, -a)$ y $(0, a)$. En la ecuación (4) los extremos de los ejes menores son $(0, -b)$ y $(0, b)$; en la ecuación (5), los extremos están en $(-b, 0)$ y $(b, 0)$. En las ecuaciones (4) o (5), la **longitud del eje mayor** es $a - (-a) = 2a$; la longitud del eje menor es $2b$. Como $a > b$, el eje mayor de una elipse siempre es más largo que su eje menor.

En la **FIGURA 6.2.4** se muestra un resumen de toda la información de las ecuaciones (4) y (5).

Resumen gráfico de la información de las formas normales (4) y (5)



$a)\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a > b$ $\qquad$ $b)\ \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1, a > b$

FIGURA 6.2.4 Resumen de la información de las formas normales (4) y (5)

EJEMPLO 1 Vértices y focos

Determinar los vértices y los focos de la elipse cuya ecuación es $3x^2 + y^2 = 9$. Hacer la gráfica.

Solución Ambos lados de esta igualdad se dividen entre 27, y se ve que la forma normal de la ecuación es

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Como $9 > 3$, se identifica esta ecuación con la (5). De $a^2 = 9$ y $b^2 = 3$, se ve que $a = 3$ y $b = \sqrt{3}$. El eje mayor es vertical con extremos en $(0, -3)$ y $(0, 3)$. El eje menor es horizontal y sus extremos están en $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$. Claro está que también los vértices son los cruces de la elipse con el eje y, y los extremos del eje menor son las intersecciones con el eje x. Ahora bien, para determinar la ubicación de los focos, se usa $b^2 = a^2 - c^2$ o $c^2 = a^2 - b^2$, para escribir $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Sustituyendo $a = 3$, $b = \sqrt{3}$, se obtiene $c = \sqrt{9 - 3} = \sqrt{6}$. Por consiguiente, los focos están en el eje y, en $(0, -\sqrt{6})$ y $(0, \sqrt{6})$. La gráfica se muestra en la **FIGURA 6.2.5**. ■

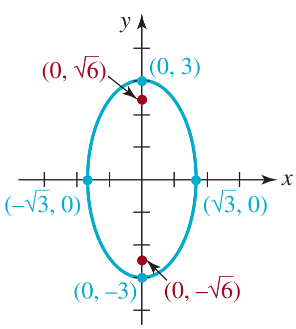


FIGURA 6.2.5 Elipse del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Deducción de la ecuación de una elipse

Deducir una ecuación de la elipse que tiene un foco en $(2, 0)$ y cruza al eje x en $(5, 0)$.

Solución Como el foco del dato está en el eje x, se puede deducir una ecuación en la forma normal (4). En consecuencia, $c = 2$, $a = 5$, $a^2 = 25$ y $b^2 = a^2 - c^2$, es decir, $b^2 = 5^2 - 2^2 = 21$. La ecuación que se busca es

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1.$$ ■

Elipse con centro en (h, k)

Cuando el centro está en (h, k), la **forma normal** de la ecuación de la elipse puede ser

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{6}$$

o bien

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1. \tag{7}$$

Las elipses definidas por estas ecuaciones tienen forma idéntica a las definidas por las ecuaciones (4) y (5), ya que las ecuaciones (6) y (7) representan transformaciones rígidas de las gráficas de (4) y (5). Por ejemplo, la elipse

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

tiene su centro en $(1, -3)$. Su gráfica es la de $x^2/9 + y^2/16 = 1$, trasladada horizontalmente una unidad hacia la derecha, y después por una traslación vertical de tres unidades hacia abajo.

No se aconseja memorizar las fórmulas de los vértices y los focos de una elipse con centro en (h, k). Todo es igual que antes: a, b y c son positivos y $a > b$, $a > c$. El lector puede ubicar vértices, focos y extremos del eje menor sabiendo que a es la distancia del centro a un vértice, b es la distancia del centro a un extremo del eje menor y c es la distancia del centro a un foco. También, el número c aún está definido por la ecuación $b^2 = a^2 - c^2$.

EJEMPLO 3 Elipse con centro en (h, k)

Ubicar los vértices y los focos de la elipse $4x^2 + 16y^2 - 8x - 96y + 84 = 0$. Hacer la gráfica.

Solución Para escribir esta ecuación en una de las formas normales (6) o (7), se deben completar los cuadrados en x y en y. Recuérdese que, para completar un cuadrado, los coeficientes de los términos cuadráticos x^2 y y^2 deben ser 1. Para hacerlo, se saca a 4 como factor común de x^2 y x, y a 16 como factor común de y^2 y y:

$$4(x^2 - 2x \quad) + 16(y^2 - 6y \quad) = -84.$$

Entonces, de acuerdo con

se suman $4 \cdot 1$ y $16 \cdot 9$ a ambos lados

$$4(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 - 6y + 9) = -84 + 4 \cdot 1 + 16 \cdot 9$$

se obtiene

$$4(x-1)^2 + 16(y-3)^2 = 64$$

es decir,

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1. \tag{8}$$

En la ecuación (8) se ve que el centro de la elipse está en $(1, 3)$. Como la última ecuación tiene la forma normal (6), se identifica $a^2 = 16$, o sea $a = 4$, y $b^2 = 4$, o $b = 2$. El eje mayor es horizontal y está en la recta horizontal $y = 3$ que pasa por $(1, 3)$. Es el segmento de recta que se muestra en rojo e interrumpido en la **FIGURA 6.2.6**. Midiendo $a = 4$ unidades hacia la izquierda y después a la derecha del centro, a lo largo de la recta $y = 3$, llegamos a los vértices $(-3, 3)$ y $(5, 3)$. Si medimos $b = 2$ unidades tanto hacia abajo como hacia arriba de la recta vertical $x = 1$, que pasa por el centro, llegamos a los extremos del eje menor $(1, 1)$ y $(1, 5)$. El eje menor se muestra en negro e interrumpido en la figura 6.2.6. Como $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$, $c = 2\sqrt{3}$. Por último, si medimos $c = 2\sqrt{3}$ unidades hacia la izquierda y hacia la derecha del centro, a lo largo de $y = 3$, llegamos a los focos en $(1 - 2\sqrt{3}, 3)$ y $(1 + 2\sqrt{3}, 3)$. ■

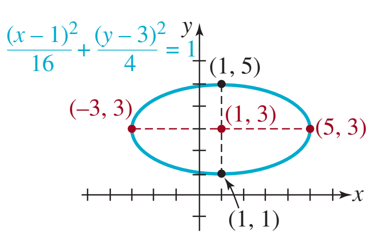


FIGURA 6.2.6 Elipse del ejemplo 3

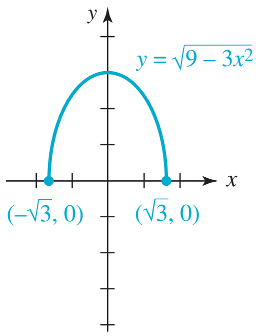
EJEMPLO 4 Dos funciones

Revise el comentario que sigue al ejemplo 6 en la sección 2.1.

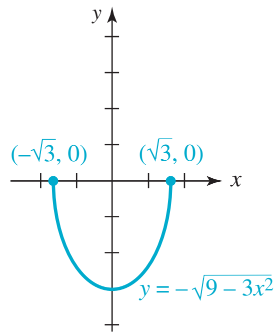
En el ejemplo 1, si resolvemos la ecuación de la elipse $3x^2 + y^2 = 9$ para la variable y en términos de x, obtenemos dos funciones,

$$y = \sqrt{9 - 3x^2} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{9 - 3x^2}.$$

El dominio de cada una de estas funciones es el intervalo $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Las gráficas de $y = \sqrt{9 - 3x^2}$ y $y = -\sqrt{9 - 3x^2}$ son, a su vez, la media elipse superior dada en la **FIGURA 6.2.7a)** y la media elipse inferior en la figura 6.2.7*b*).



a) Media elipse superior



b) Media elipse inferior

FIGURA 6.2.7 Dos medias elipses definidas por las funciones del ejemplo 4

Para graficar una elipse en una calculadora posiblemente tendrá que recurrir a la superposición de dos medias elipses definidas por dos funciones a fin de obtener la gráfica de la elipse completa.

EJEMPLO 5 Deducción de la ecuación de una elipse

Deducir la ecuación de la elipse que tiene su centro en $(2, -1)$, cuyo eje mayor vertical mide 6 y su eje menor 3.

Solución La longitud del eje mayor es $2a = 6$, y entonces $a = 3$. De igual modo, la longitud del eje menor es $2b = 3$, por lo que $b = \frac{3}{2}$. Al trazar el centro y los ejes se ve en la **FIGURA 6.2.8** que los vértices están en $(2, 2)$ y en $(2, -4)$, y que los extremos del eje menor están en $(\frac{1}{2}, -1)$ y $(\frac{7}{2}, -1)$. Como el eje mayor es vertical, la ecuación normal de esta elipse es

$$\frac{(x-2)^2}{(\frac{3}{2})^2} + \frac{(y-(-1))^2}{3^2} = 1 \quad \text{o sea} \quad \frac{(x-2)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1.$$

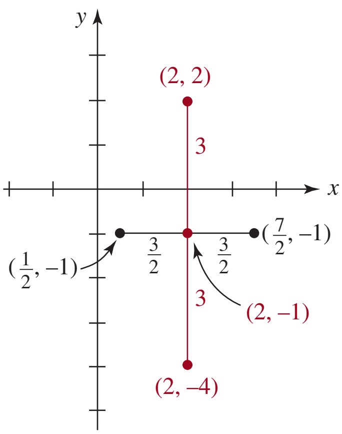


FIGURA 6.2.8 Interpretación gráfica de los datos del ejemplo 5

Excentricidad

Relacionado con cada sección cónica hay un número e llamado **excentricidad**. La excentricidad de una elipse se define mediante

$$e = \frac{c}{a},$$

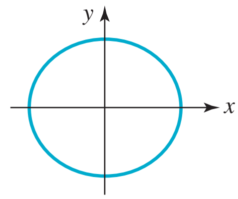
donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Como $0 < \sqrt{a^2 - b^2} < a$, la excentricidad de una elipse satisface a $0 < e < 1$.

EJEMPLO 6 Regreso al ejemplo 3

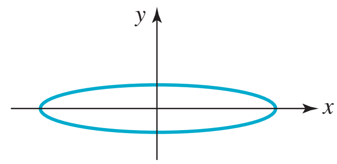
Determinar la excentricidad de la elipse en el ejemplo 3.

Solución Al resolver el ejemplo 3 se vio que $a = 4$ y $c = 2\sqrt{3}$. Por consiguiente, la excentricidad de esta elipse es $e = (2\sqrt{3})/4 = \sqrt{3}/2 \approx 0.87$.

La excentricidad es un indicador de la forma de una elipse. Cuando $e \approx 0$, esto es, cuando e es cercana a cero, la elipse es casi circular, y cuando $e \approx 1$, la elipse es aplanada, alargada o *elongada*. Para verlo, observe que si e es cercana a 0, entonces, de acuerdo con $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx 0$, y en consecuencia $a \approx b$. Como se puede ver en las ecuaciones normales (4) y (5), eso quiere decir que la forma de la elipse es cercana a un círculo. También, como c es la distancia del centro de la elipse a un foco, los dos focos están cercanos entre sí, y cerca del centro. Vea la **FIGURA 6.2.9*a*)**. Por otra parte, si $e \approx 1$ o $\sqrt{a^2 - b^2}/a \approx 1$, entonces $c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx a$ y entonces $b \approx 0$. También, $c \approx a$ quiere decir que los focos están alejados; cada foco está cerca de un vértice. Por consiguiente, la elipse es alargada, como se ve en la figura 6.2.9*b*).



a) e cercana a cero



b) e cercana a 1

FIGURA 6.2.9 Efecto de la excentricidad sobre la forma de una elipse

☐ Aplicaciones de la elipse

Las elipses tienen una propiedad reflectora análoga a la que se describió en la sección 6.1 en el caso de la parábola. Se puede demostrar que si una fuente luminosa o sonora se coloca en un foco de una elipse, todos sus rayos u ondas se reflejarán en la superficie de la elipse y llegarán al otro foco. Vea la **FIGURA 6.2.10**. Por ejemplo, si se construye una mesa de *pool* en forma de una elipse con una buchaca en un foco, cualquier tiro que se origine en el otro foco nunca fallará en entrar a ella. De igual modo, si un techo es elíptico y sus dos focos están en (o cerca del) el piso, cualquier susurro en un foco se oirá en el otro. Algunas "galerías de susurros" famosas son el Vestíbulo de las Estatuas del Capitolio, en Washington, D. C., el Tabernáculo de Mormón, en Salt Lake City, y la Catedral de San Pablo, en Londres.

Vestíbulo de las Estatuas, Washington, DC

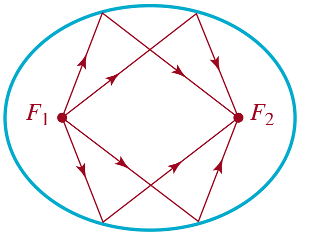


FIGURA 6.2.10 Propiedad reflectora de una elipse

Usando su ley de la gravitación universal, Isaac Newton demostró por primera vez la primera ley de Kepler, del movimiento planetario. La órbita de cada planeta alrededor del Sol es una elipse con el Sol en uno de sus focos.

EJEMPLO 7 Excentricidad de la órbita terrestre

La distancia de la Tierra al Sol en su perihelio (cuando más se acerca al Sol) es, aproximadamente, de 9.16×10^7 millas, y en su afelio (la máxima distancia de la Tierra al Sol) es de 9.46×10^7 millas, aproximadamente. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita de la Tierra?

Solución Supondremos que la órbita de la Tierra es como la que muestra la **FIGURA 6.2.11**. En esa figura se ve que

$$\begin{aligned} a - c &= 9.16 \times 10^7 \\ a + c &= 9.46 \times 10^7. \end{aligned}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se obtiene $a = 9.31 \times 10^7$ y $c = 0.15 \times 10^7$. Entonces, la excentricidad $e = c/a$, es

$$e = \frac{0.15 \times 10^7}{9.31 \times 10^7} \approx 0.016.$$

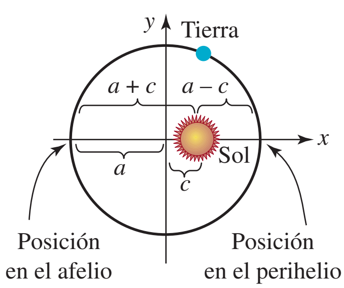


FIGURA 6.2.11 Interpretación gráfica de los datos del ejemplo 7

Las órbitas de siete de los planetas tienen excentricidades menores que 0.1, y por consiguiente, no se alejan de ser circulares. Mercurio y Plutón son las excepciones. Por ejemplo, la órbita de Plutón tiene 0.25 de excentricidad. Muchos de los asteroides y cometas tienen órbitas muy excéntricas. La órbita del asteroide Hidalgo es una de las más excéntricas, con $e = 0.66$. Otro caso notable es la órbita del cometa Halley. Vea el problema 47 en los ejercicios 6.2.

6.2 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-18.

En los problemas 1 a 20, determine el centro, focos, vértices y extremos del eje menor, y la excentricidad de la elipse. Haga una gráfica de la elipse.

1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

2. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

3. $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$

4. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{10} = 1$

5. $9x^2 + 16y^2 = 144$

6. $2x^2 + y^2 = 4$

7. $9x^2 + 4y^2 = 36$

8. $x^2 + 4y^2 = 4$

9. $\frac{(x-1)^2}{49} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$

10. $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$

11. $(x+5)^2 + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

12. $\frac{(x-3)^2}{64} + \frac{(y+4)^2}{81} = 1$

13. $4x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 4$

14. $36(x+2)^2 + (y-4)^2 = 72$

15. $5(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = 45$

16. $6(x-2)^2 + 8y^2 = 48$

17. $25x^2 + 9y^2 - 100x + 18y - 116 = 0$

18. $9x^2 + 5y^2 + 18x - 10y - 31 = 0$

19. $x^2 + 3y^2 + 18y + 18 = 0$

20. $12x^2 + 4y^2 - 24x - 4y + 1 = 0$

En los problemas 21 a 40, deduzca la ecuación de la elipse que satisfaga las condiciones indicadas.

21. Vértices en $(\pm 5, 0)$, focos en $(\pm 3, 0)$

22. Vértices en $(\pm 9, 0)$, focos en $(\pm 2, 0)$

23. Vértices en $(0, \pm 3)$, focos en $(0, \pm 1)$

24. Vértices en $(0, \pm 7)$, focos en $(0, \pm 3)$

25. Vértices en $(0, \pm 3)$, extremos del eje menor en $(\pm 1, 0)$

26. Vértices en $(\pm 4, 0)$, extremos del eje menor en $(0, \pm 2)$

27. Vértices en $(-3, -3), (5, -3)$, extremos del eje menor en $(1, -1), (1, -5)$

28. Vértices en $(1, -6), (1, 2)$, extremos del eje menor en $(-2, -2), (4, -2)$

29. Un foco en $(0, -2)$, centro en el origen $b = 3$

30. Un foco en $(1, 0)$, centro en el origen $a = 3$

31. Focos en $(\pm\sqrt{2}, 0)$, longitud del eje menor 6

32. Focos en $(0, \pm\sqrt{5})$, longitud del eje mayor 16

33. Focos en $(0, \pm 3)$, pasa por $(-1, 2\sqrt{2})$

34. Vértices en $(\pm 5, 0)$, pasa por $(\sqrt{5}, 4)$

35. Vértices en $(\pm 4, 1)$, pasa por $(2\sqrt{3}, 2)$

36. Centro en $(1, -1)$, un foco en $(1, 1)$, $a = 5$

37. Centro en $(1, 3)$, un foco en $(1, 0)$, un vértice en $(1, -1)$

38. Centro en $(5, -7)$, longitud del eje mayor vertical 8, longitud del eje menor 6

39. Extremos del eje menor en $(0, 5), (0, -1)$, un foco en $(6, 2)$

40. Extremos del eje mayor en $(2, 4), (13, 4)$, un foco en $(4, 4)$

En los problemas 41 a 44, calcule la función $y = f(x)$ que define la media elipse indicada. Dé el dominio de cada función. Las ecuaciones son de los problemas 1, 3, 9 y 12.

41. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; media elipse inferior

42. $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$; media elipse superior

43. $\dfrac{(x-1)^2}{49} + \dfrac{(y-3)^2}{36} = 1$; media elipse superior

44. $\dfrac{(x-3)^2}{64} + \dfrac{(y+4)^2}{81} = 1$; media elipse inferior

45. La órbita de Mercurio es una elipse con el Sol en uno de sus focos. La longitud del eje mayor de esta órbita es de 72 millones de millas, y la longitud del eje menor es de 70.4 millones de millas. ¿Cuál es la distancia mínima (perihelio) entre Mercurio y el Sol? ¿Cuál es la distancia máxima (afelio)?
46. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita de Mercurio, con los datos del problema 45?
47. La órbita del cometa Halley es una elipse cuyo eje mayor tiene 3.34×10^9 millas de longitud, y cuyo eje menor tiene 8.5×10^8 millas de longitud. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita del cometa?
48. Un satélite gira en torno a la Tierra en una órbita elíptica, con el centro de la Tierra en uno de sus focos. Tiene una altitud mínima de 200 millas y una altitud máxima de 1 000 millas sobre la superficie de la Tierra. Si el radio de la Tierra es de 4 000 millas, ¿cuál es la ecuación de su órbita?

Aplicaciones diversas

49. **Arco** Un arco semielíptico tiene su eje mayor vertical. La base del arco tiene 10 pies de ancho, y la parte más alta está a 15 pies sobre el suelo. Calcule la altura del arco sobre el punto en la base del arco que está a 3 pies del centro.
50. **Diseño de engranajes** Un engranaje elíptico gira en torno a su centro, y se mantiene siempre engranado con un engranaje circular que tiene libertad de movimiento horizontal. Vea la FIGURA 6.2.12. Si el origen del sistema coordenado xy se coloca en el centro de la elipse, la ecuación de la elipse en su posición actual es $3x^2 + 9y^2 = 24$. El diámetro del engranaje circular es igual a la longitud del eje menor del engranaje elíptico. Si las unidades son centímetros, ¿qué distancia se mueve horizontalmente el centro del engranaje circular durante la rotación, desde el paso de un vértice del engranaje elíptico hasta el siguiente?

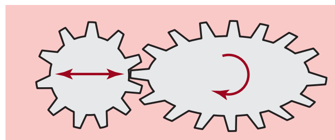


FIGURA 6.2.12 Engranajes elíptico y circular del problema 50

51. **Carpintería** Un carpintero desea cortar en forma elíptica una mesa de café, de una pieza rectangular de madera, de 4 pies por 3 pies, usando toda la longitud y el ancho disponibles. Si la elipse se debe trazar usando el método del cordón y el clavo que se ilustra en la figura 6.2.2, ¿qué longitud debe tener el cordón y dónde deben ponerse los clavos?
52. **Diseño de un parque** Un parque de Washington, DC, llamado La Elipse, está limitado por una vereda elíptica cuyo eje mayor tiene 458 m de longitud, mientras que su eje menor mide 390 m. Calcule la distancia entre los focos de esta elipse.
53. **Galería de los murmullos** Suponga que se construye un recinto sobre una base elíptica plana, haciendo girar 180° una semielipse en torno a su eje mayor. Entonces, por la propiedad de reflexión de la elipse, todo lo que se susurre en un foco se oirá claramente en el otro foco. Si la altura del recinto es de 16 pies y la longitud es de 40 pies, calcule la ubicación de los puestos de susurro y escucha.
54. **Ancho focal** El ancho focal de la elipse es la longitud de una cuerda focal, es decir, un segmento de recta perpendicular al eje mayor que pasa por un foco y con sus extremos en la elipse. Vea la FIGURA 6.2.13.
a) Calcule el ancho focal de la elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$.
b) Demuestre que en general, el ancho focal de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es $2b^2/a$.

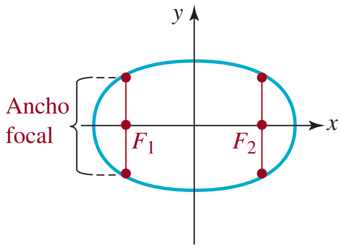


FIGURA 6.2.13 Ancho focal del problema 54

55. Deduzca una ecuación de la elipse cuyos focos están en (0, 2) y (8, 6), y la suma fija de las distancias $2a = 12$. [*Sugerencia:* En este caso, el eje mayor no es horizontal ni vertical; por consiguiente, no se aplica alguna de las formas normales de esta sección. Use la definición de la elipse.]
56. Proceda como en el problema 55 y deduzca la ecuación de la elipse cuyos focos están en $(-1, -3)$ y $(-5, 7)$, y la suma fija de distancias $2a = 20$.

Para discusión

57. La gráfica de la elipse $x^2/4 + (y - 1)^2/9 = 1$ se desplaza 4 unidades hacia la derecha. ¿Dónde están el centro, los focos, los vértices y los extremos del eje menor en la gráfica desplazada?

58. La gráfica de la elipse $(x - 1)^2/9 + (y - 4)^2 = 1$ se desplaza 5 unidades hacia la izquierda y 3 unidades hacia arriba. ¿Dónde están el centro, los focos, los vértices y los extremos del eje menor en la gráfica desplazada?

59. En ingeniería, con frecuencia se expresa la excentricidad de una elipse sólo en función de a y b. Demuestre que $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$.

60. Consulte la definición de **semielipse**. Las medias elipses de la figura 6.2.7, ¿son semielipses?

6.3 La hipérbola

Introducción La definición de la hipérbola es básicamente igual que la definición de la elipse, y la única excepción es que la palabra *suma* se cambia a la palabra *diferencia*.

HIPÉRBOLA

Una **hipérbola** es el conjunto de puntos $P(x, y)$ en el plano, tal que la diferencia de las distancias entre P y dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante. Los puntos fijos F_1 y F_2 se llaman **focos**. El punto medio del segmento de la recta que une los puntos F_1 y F_2 se llama **centro**.

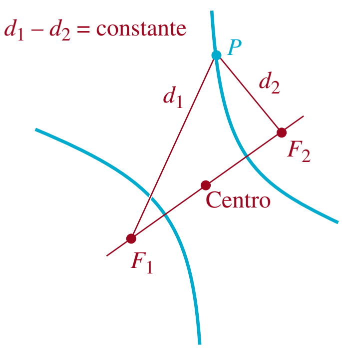


FIGURA 6.3.1 Una hipérbola

Como se ve en la FIGURA 6.3.1, una hipérbola consta de dos **ramas**. Si P es un punto de la hipérbola, entonces

$$|d_1 - d_2| = k, \tag{1}$$

en donde $d_1 = d(F_1, P)$ y $d_2 = d(F_2, P)$.

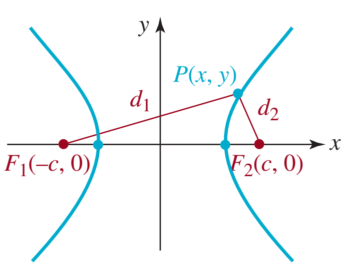


FIGURA 6.3.2 Hipérbola con centro en (0, 0) y focos en el eje x

Hipérbola con centro en (0, 0) Procediendo como en la elipse, se colocan los focos en el eje x, en $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, como se ve en la FIGURA 6.3.2 y definimos que la constante k sea igual a $2a$, por comodidad algebraica. Entonces, de acuerdo con (1),

$$d_1 - d_2 = \pm 2a. \tag{2}$$

Como se traza en la figura 6.3.2, P está en la rama derecha de la hipérbola, y así $d_1 - d_2 = 2a > 0$. Si P está en la rama izquierda, entonces la diferencia es $-2a$. Si (2) se escribe en la forma

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

o

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

se eleva al cuadrado, se simplifica y se eleva de nuevo al cuadrado:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

$$\pm a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = cx - a^2$$

$$a^2[(x - c)^2 + y^2] = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \tag{3}$$

De acuerdo con la figura 6.3.2, se ve que la desigualdad del triángulo da como resultado

$$d_1 < d_2 + 2c \qquad \text{y} \qquad d_2 < d_1 + 2c,$$

o

$$d_1 - d_2 < 2c \qquad \text{y} \qquad d_2 - d_1 < 2c.$$

Usando $d_1 - d_2 = \pm 2a$, las dos desigualdades implican que $2a < 2c$, o $a < c$; ya que $c > a > 0$, $c^2 - a^2$ es una constante positiva. Si se hace que $b^2 = c^2 - a^2$, la ecuación (3) se transforma en $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ o bien, después de dividir entre a^2b^2,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

La ecuación (4) se llama **forma normal** de la ecuación de una hipérbola con centro en $(0, 0)$ y focos en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, y c se define por $b^2 = c^2 - a^2$.

Cuando los focos están en el eje y, una repetición de las operaciones algebraicas anteriores conduce a

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

La ecuación (5) es la **forma normal** de la ecuación de una hipérbola centrada en $(0, 0)$ con los focos en $(0, -c)$ y $(0, c)$. Aquí, de nuevo, $c > a$ y $b^2 = c^2 - a^2$.

En el caso de la hipérbola, a diferencia de la elipse, téngase en cuenta, en (4) y (5), que no hay relación entre los tamaños relativos de a y b; más bien a^2 siempre es el denominador del *término positivo* y los cruces con los ejes coordenados *siempre* tienen a $\pm a$ como una coordenada.

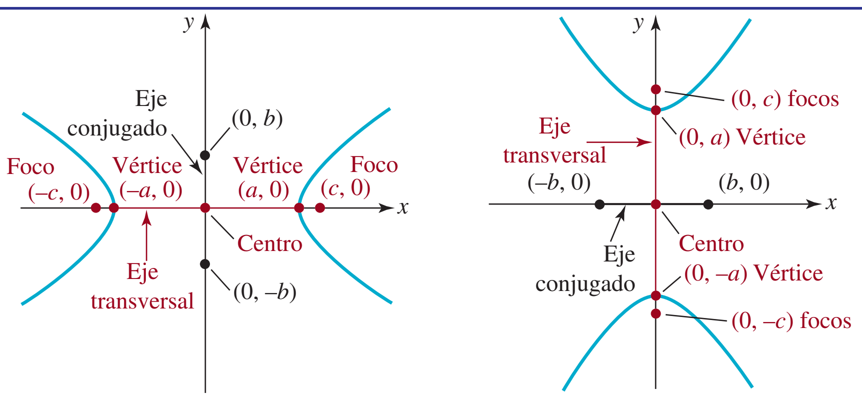
◀ Precaución.

☐ Ejes transversal y conjugado

El segmento de recta con los extremos en la hipérbola, y que está en la línea que pasa por los focos, se llama **eje transversal**; sus extremos se llaman **vértices** de la hipérbola. En la hipérbola que se describe con la ecuación (4), el eje transversal está en el eje x. Por consiguiente, las coordenadas de los vértices son las de las intersecciones con el eje x. Si se hace que $y = 0$ se obtiene $x^2/a^2 = 1$, es decir, $x = \pm a$. Así, como se ve en la FIGURA 6.3.3, los vértices están en $(-a, 0)$ y en $(a, 0)$; la **longitud del eje transversal** es $2a$. Nótese que si se hace que $y = 0$ en (4), se obtiene $-y^2/b^2 = 1$, o sea $y^2 = -b^2$, que no tiene soluciones reales. Entonces, la gráfica de cualquier ecuación en esa forma no tiene intersecciones con el eje y. Sin embargo, los números $\pm b$ son importantes. El segmento de recta que pasa por el centro de la hipérbola y es perpendicular al eje transversal, cuyos extremos están en $(0, -b)$ y $(0, b)$ se llama **eje conjugado**. En forma parecida, la gráfica de una ecuación, en la forma normal (5), no tiene intersecciones con el eje x. En el caso de (5) el eje conjugado es el segmento de recta cuyos extremos están en $(-b, 0)$ y $(b, 0)$.

La información de las ecuaciones (4) y (5) se resume en la figura 6.3.3.

Resumen gráfico de la información de las formas normales (4) y (5)



a) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *b)* $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

FIGURA 6.3.3 Resumen de la información de las formas normales (4) y (5)

□ **Asíntotas** Toda hipérbola posee un par de asíntotas inclinadas, que pasan por su centro. Esas asíntotas indican el comportamiento en los extremos, y como tales son una ayuda invaluable para trazar la gráfica de una hipérbola. Si de (4) se despeja a y en función de x se llega a

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Cuando $x \to -\infty$ o $x \to \infty$, entonces $a^2/x^2 \to 0$, por lo que $\sqrt{1 - a^2/x^2} \to 1$. Por consiguiente, para grandes valores de $|x|$, los puntos en la gráfica de la hipérbola se acercan a los puntos en las rectas

$$y = \frac{b}{a}x \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{b}{a}x. \tag{6}$$

Con un análisis parecido se ve que las asíntotas inclinadas de (5) son

$$y = \frac{a}{b}x \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{a}{b}x. \tag{7}$$

Cada par de asíntotas se cruza en el origen, que es el centro de la hipérbola. También obsérvese, en la **FIGURA 6.3.4*a*)**, que las asíntotas sólo son las *diagonales prolongadas* de un rectángulo de $2a$ de ancho (la longitud del eje transversal) y $2b$ de altura (la longitud del eje conjugado); en la figura 6.3.4*b*) las asíntotas son las diagonales prolongadas de un rectángulo de $2b$ de ancho y $2a$ de altura. Este rectángulo se denomina el **rectángulo auxiliar**.

Recomendamos al lector que *no* memorice las ecuaciones (6) y (7). Hay un método fácil para obtener las asíntotas de una hipérbola. Por ejemplo, como $y = \pm\frac{b}{a}x$ equivale a

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

las asíntotas de la hipérbola (4) se obtienen con una sola ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{8}$$

Note que la (8) se factoriza como la diferencia de dos cuadrados:

Éste es un método nemotécnico. No tiene importancia geométrica.

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0.$$

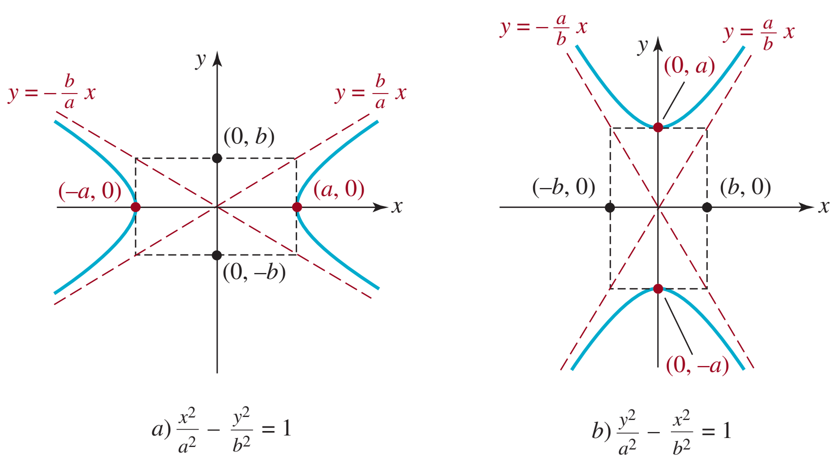


FIGURA 6.3.4 Hipérbolas (4) y (5) con las asíntotas inclinadas (en rojo) como las diagonales prolongadas de los rectángulos auxiliares (en negro).

Al igualar cada factor a cero y despejar y se obtiene la ecuación de una asíntota. El lector ni siquiera debe memorizar la ecuación (8), porque sólo es el lado izquierdo de la forma normal de la ecuación de una hipérbola, presentada en (4). De igual forma, para obtener las asíntotas en (5) sólo sustituya 1 por 0 en la forma normal, factorice $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 0$ y despeje y.

EJEMPLO 1 Hipérbola centrada en (0, 0)

Determinar la ubicación de vértices, focos y asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 25y^2 = 225$. Trazar la gráfica.

Solución Primero se lleva la ecuación a su forma normal, dividiendo entre 225:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1. \tag{9}$$

En esta ecuación se observa que $a^2 = 25$ y $b^2 = 9$, y entonces $a = 5$ y $b = 3$. Por consiguiente, los vértices están en $(-5, 0)$ y $(5, 0)$. Como $b^2 = c^2 - a^2$ implica que $c^2 = a^2 + b^2$, entonces $c^2 = 34$, y por lo tanto los focos están en $(-\sqrt{34}, 0)$ y $(\sqrt{34}, 0)$. Para determinar las asíntotas inclinadas se usa la forma normal (9), sustituyendo 1 por 0:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 0 \qquad \text{se factoriza como sigue:} \qquad \left(\frac{x}{5} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{5} + \frac{y}{3}\right) = 0.$$

Se iguala cada factor a cero y se despeja y; así se obtienen las asíntotas $y = \pm 3x/5$. Se grafican los vértices, y las dos rectas que pasan por el origen. Ambas ramas de la hipérbola deben acercarse arbitrariamente a las asíntotas cuando $x \to \pm\infty$. Vea la FIGURA 6.3.5. ■

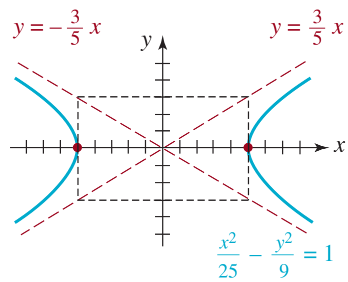


FIGURA 6.3.5 Hipérbola del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Deducción de la ecuación de una hipérbola

Deducir la ecuación de la hipérbola cuyos vértices están en $(0, -4)$, $(0, 4)$ y sus asíntotas son $y = -\frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x$.

Solución El centro de la hipérbola está en (0, 0). Eso se ve porque las asíntotas se cruzan en el origen. Además, los vértices están en el eje y y están a 4 unidades a cada lado del origen. Entonces, la ecuación que se busca tiene la forma (5). De acuerdo con (7), para la figura 6.3.4*b*), las asíntotas deben ser de la forma $y = \pm\frac{a}{b}x$, y entonces $a/b = 1/2$. Con los vértices indicados, se identifica que $a = 4$, y entonces

$$\frac{4}{b} = \frac{1}{2} \qquad \text{implica que} \qquad b = 8.$$

Entonces, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{8^2} = 1 \qquad \text{o sea} \qquad \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{64} = 1.$$ ■

□ Hipérbola con centro en (h, k)

Cuando el centro de la hipérbola está en (h, k), los análogos de la **forma normal** de las ecuaciones (4) y (5) son, respectivamente,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{10}$$

y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1. \tag{11}$$

Como en (4) y en (5), los números a^2, b^2 y c^2 se relacionan por $b^2 = c^2 - a^2$.

El lector puede ubicar vértices y focos aprovechando que a es la distancia del centro a un vértice, y c es la distancia del centro a un foco. Las asíntotas inclinadas de (10) se obtienen factorizando

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$$

en la forma
$$\left(\frac{x-h}{a} - \frac{y-k}{b}\right)\left(\frac{x-h}{a} + \frac{y-k}{b}\right) = 0.$$

De igual modo, las asíntotas de (11) se obtienen factorizando $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 0$, igualando cada factor a cero y despejando a y en función de x. Para comprobar su trabajo, recuerde que (h, k) debe ser un punto que esté en cada asíntota.

EJEMPLO 3 Hipérbola centrada en (h, k)

Determinar los lugares del centro, vértices, focos y asíntotas de la hipérbola $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$. Trazar la gráfica.

Solución Antes de completar cuadrados en x y y, sacaremos a 4 como factor común de los dos términos en x, y a -1 de los dos términos en y, para que el primer coeficiente de cada expresión sea 1. De esta forma,

$$\begin{aligned}
4(x^2 - 2x \quad) + (-1)(y^2 + 4y \quad) &= 4 \\
4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) &= 4 + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \\
4(x-1)^2 - (y+2)^2 &= 4 \\
\frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{4} &= 1.
\end{aligned}$$

Ahora se ve que el centro está en $(1, -2)$. Como el término en x de la forma normal tiene coeficiente positivo, el eje transversal es horizontal y está en la recta $y = -2$, y se identifican $a = 1$ y $b = 2$. Los vértices están 1 unidad hacia la izquierda y hacia la derecha del centro; están en $(0, -2)$ y $(2, -2)$ respectivamente. De $b^2 = c^2 - a^2$:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 4 = 5,$$

y así $c = \sqrt{5}$. Por consiguiente, los focos están a $\sqrt{5}$ unidades a la izquierda y a la derecha del centro que está en $(1, -2)$ en $(1 - \sqrt{5}, -2)$ y en $(1 + \sqrt{5}, -2)$.

Para determinar las asíntotas se despeja y:

$$\frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{4} = 0 \quad \text{o sea} \quad \left(x - 1 - \frac{y+2}{2}\right)\left(x - 1 + \frac{y+2}{2}\right) = 0.$$

De $y + 2 = \pm 2(x - 1)$ se ve que las ecuaciones de las asíntotas son $y = -2x$ y $y = 2x - 4$. Observe que si se sustituye $x = 1$, ambas ecuaciones dan $y = -2$, lo que quiere decir que las dos líneas pasan por el centro. A continuación se localiza el centro, se grafican los vértices y las asíntotas. Como se ve en la **FIGURA 6.3.6**, la gráfica de la hipérbola pasa por los vértices y se acerca cada vez más a las asíntotas, cuando $x \to \pm\infty$. ■

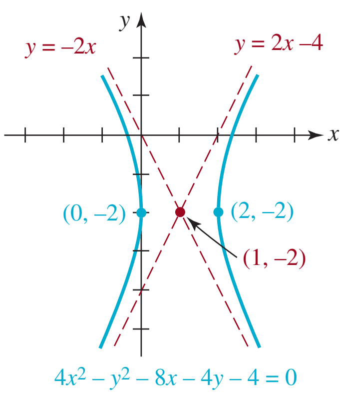


FIGURA 6.3.6 Hipérbola del ejemplo 3

EJEMPLO 4 Deducción de la ecuación de una hipérbola

Deducir la ecuación de una hipérbola cuyo centro está en $(2, -3)$, que pasa por el punto $(4, 1)$ y que tiene un vértice en $(2, 0)$.

Solución Ya que la distancia del centro a un vértice es a, entonces $a = 3$. De acuerdo con el lugar del centro y el vértice, el eje transversal debe ser vertical, y estar en la línea $x = 2$. Por consiguiente, la ecuación de la hipérbola debe tener la forma (11):

$$\frac{(y+3)^2}{3^2} - \frac{(x-2)^2}{b^2} = 1, \tag{12}$$

en donde se debe determinar b^2. Como el punto $(4, 1)$ está en la gráfica, en la hipérbola sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (12). De

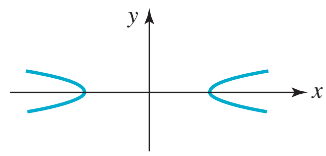
$$\frac{(1+3)^2}{3^2} - \frac{(4-2)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{16}{9} - \frac{4}{b^2} = 1$$

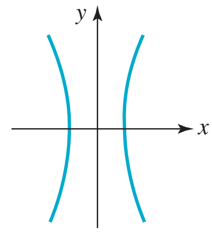
$$\frac{7}{9} = \frac{4}{b^2}$$

se ve que $b^2 = \frac{36}{7}$. La conclusión es que la ecuación que se busca es

$$\frac{(y+3)^2}{3^2} - \frac{(x-2)^2}{\frac{36}{7}} = 1.$$



a) e cercana a 1



b) e mucho mayor que 1

FIGURA 6.3.7 Efecto de la excentricidad sobre la forma de una hipérbola

Excentricidad

Como la elipse, la ecuación que define la **excentricidad** de una hipérbola es $e = c/a$. Excepto en este caso, el número c se define como $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ya que $0 < a < \sqrt{a^2 + b^2}$, la excentricidad de una elipse satisface $e > 1$. Como en el caso de la elipse, la magnitud de la excentricidad de una hipérbola es indicador de su forma. La **FIGURA 6.3.7** muestra ejemplos de dos casos extremos: $e \approx 1$ y e mucho mayor que 1.

EJEMPLO 5 Excentricidad de una hipérbola

Calcular la excentricidad de la hipérbola $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{(x-1)^2}{36} = 1$.

Solución Se identifican $a^2 = 2$ y $b^2 = 36$, y con ello se obtiene $c^2 = 2 + 36 = 38$. Entonces, la excentricidad de la hipérbola indicada es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{2}} = \sqrt{19} \approx 4.36.$$

La conclusión es que la hipérbola tiene sus ramas que se abren mucho, como en la figura 6.3.7*b*).

Aplicaciones de la hipérbola

La hipérbola tiene varias aplicaciones importantes en técnicas de sondeo. En particular, varios sistemas de navegación usan hipérbolas, como se describirá a continuación. Dos radiotransmisores fijos a distancia conocida entre sí transmiten señales sincronizadas. La diferencia entre los tiempos de recepción por parte de un navegante determina la diferencia $2a$ entre las distancias del navegante a los dos transmisores. Con esta información, el navegante se ubica en algún lugar de la hipérbola cuyos focos están en los transmisores, y la diferencia fija en las distancias a los focos es igual a $2a$. Usando dos conjuntos de señales obtenidas a partir de una sola estación maestra, apareadas con cada una de dos segundas estaciones, el sistema de navegación LORAN, de largo alcance, localiza un barco o un avión en la intersección de dos hipérbolas. Vea la **FIGURA 6.3.8**.

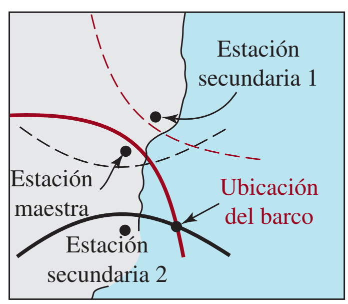


FIGURA 6.3.8 Concepto del LORAN

En el siguiente ejemplo se ilustra el uso de una hipérbola en otro caso que implica técnicas de sondeo.

EJEMPLO 6 Localización de una gran explosión

Dos observadores ubicados en los puntos A y B oyen el sonido de una explosión de dinamita en momentos distintos. Debido a que saben que la velocidad aproximada del sonido es de 1 100 pies/s o 335 m/s, determinan que la explosión sucedió a 1 000 metros más cerca del punto A que del punto B. Si A y B están a 2 600 metros de distancia, demostrar que el lugar de la explosión está en la rama de una hipérbola. Deducir una ecuación de esa hipérbola.

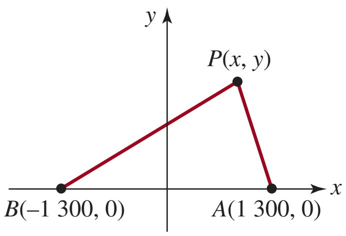


FIGURA 6.3.9 Gráfica del ejemplo 6

Solución En la FIGURA 6.3.9 se han colocado los puntos A y B en el eje x, en $(1\,300, 0)$ y $(-1\,300, 0)$, respectivamente. Si $P(x, y)$ indica el lugar de la explosión, entonces

$$d(P, B) - d(P, A) = 1\,000.$$

De acuerdo con la definición de la hipérbola en la página 342, y la deducción que le sigue, se ve que ésta es la ecuación de la rama derecha de una hipérbola, con la diferencia de distancias fijas $2a = 1\,000$ y $c = 1\,300$. Entonces, la ecuación tiene la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ donde } x \geq 0,$$

o bien, después de despejar x,

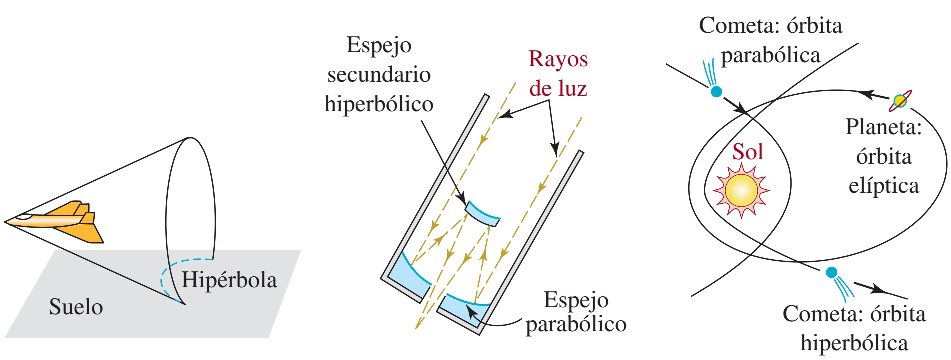
$$x = a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}.$$

Con $a = 500$ y $c = 1\,300$, $b^2 = (1\,300)^2 - (500)^2 = (1\,200)^2$. Al sustituir en la ecuación anterior se obtiene

$$x = 500\sqrt{1 + \frac{y^2}{(1\,200)^2}} \quad \text{o sea} \quad x = \frac{5}{12}\sqrt{(1\,200)^2 + y^2}.$$ ■

Para determinar el lugar exacto de la explosión del ejemplo 6 se necesitaría otro observador, que oyera la explosión en un tercer punto C. Conociendo el tiempo entre cuando este observador oye la explosión y cuando la oye el observador A, se determina una segunda hipérbola. El punto de la detonación es un punto de intersección de las dos hipérbolas.

Hay muchas otras aplicaciones de la hipérbola. Como se ve en la FIGURA 6.3.10*a*), un avión que vuele a velocidad supersónica, paralelo al nivel del suelo, deja una "huella" sónica hiperbólica en el suelo. Al igual que la parábola y la elipse, también la hipérbola posee una propiedad reflectora. El telescopio reflector Cassegrain que muestra la figura 6.3.10*b*) usa un espejo secundario hiperbólico para reflejar un rayo de luz a través de un agujero, que pasa a



a) Huella sónica *b*) Telescopio Cassegrain *c*) Órbitas en torno al Sol

FIGURA 6.3.10 Aplicaciones de las hipérbolas un ocular (o cámara) detrás del espejo parabólico principal. En esta construcción de telescopio se aprovecha que un rayo de luz dirigido a lo largo de una línea que pasa por un foco de un espejo hiperbólico se refleja en una línea que pasa por el otro foco.

En el universo, las órbitas de objetos pueden ser parabólicas, elípticas o hiperbólicas. Cuando un objeto pasa cerca del Sol (o de un planeta) no necesariamente es capturado por el campo gravitacional del objeto mayor. Bajo ciertas condiciones, toma una cantidad fraccionaria de energía orbital de ese cuerpo mucho mayor, y el "efecto de onda" que resulta hace que la órbita sea hiperbólica, al pasar el Sol. Vea la figura 6.3.10*c*).

6.3 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-19.

En los problemas 1 a 20, localice centro, focos y vértices y determine las asíntotas y la excentricidad de las hipérbolas. Trace la gráfica de la hipérbola.

1. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

2. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

3. $\dfrac{y^2}{64} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

4. $\dfrac{y^2}{6} - 4x^2 = 1$

5. $4x^2 - 16y^2 = 64$

6. $5x^2 - 5y^2 = 25$

7. $y^2 - 5x^2 = 20$

8. $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$

9. $\dfrac{(x-5)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{49} = 1$

10. $\dfrac{(x+2)^2}{10} - \dfrac{(y+4)^2}{25} = 1$

11. $\dfrac{(y-4)^2}{36} - x^2 = 1$

12. $\dfrac{(y-\frac{1}{4})^2}{4} - \dfrac{(x+3)^2}{9} = 1$

13. $25(x-3)^2 - 5(y-1)^2 = 125$

14. $10(x+1)^2 - 2(y-\frac{1}{2})^2 = 100$

15. $8(x+4)^2 - 5(y-7)^2 + 40 = 0$

16. $9(x-1)^2 - 81(y-2)^2 = 9$

17. $5x^2 - 6y^2 - 20x + 12y - 16 = 0$

18. $16x^2 - 25y^2 - 256x - 150y + 399 = 0$

19. $4x^2 - y^2 - 8x + 6y - 4 = 0$

20. $2y^2 - 9x^2 - 18x + 20y + 5 = 0$

En los problemas 21 a 44 deduzca una ecuación de la hipérbola que satisfaga las condiciones indicadas.

21. Focos en $(\pm 5, 0)$, $a = 3$

22. Focos en $(\pm 10, 0)$, $b = 2$

23. Focos en $(0, \pm 4)$, un vértice en $(0, -2)$

24. Focos en $(0, \pm 3)$, un vértice en $(0, -\frac{3}{2})$

25. Focos en $(\pm 4, 0)$, longitud del eje transversal 6

26. Focos en $(0, \pm 7)$, longitud del eje transversal 10

27. Centro en $(0, 0)$, un vértice en $(0, \frac{5}{2})$, un foco en $(0, -3)$

28. Centro en $(0, 0)$, un vértice en $(7, 0)$, un foco en $(9, 0)$

29. Centro en $(0, 0)$, un vértice en $(-2, 0)$, un foco en $(-3, 0)$

30. Centro en $(0, 0)$, un vértice en $(1, 0)$, un foco en $(5, 0)$

31. Vértices en $(0, \pm 8)$, asíntotas $y = \pm 2x$

32. Focos en $(0, \pm 3)$, asíntotas $y = \pm\frac{3}{2}x$

33. Vértices en $(\pm 2, 0)$, asíntotas $y = \pm\frac{4}{3}x$

34. Focos en $(\pm 5, 0)$, asíntotas $y = \pm\frac{3}{5}x$
35. Centro en $(1, -3)$, un foco en $(1, -6)$ y un vértice en $(1, -5)$
36. Centro en $(2, 3)$, un foco en $(0, 3)$ y un vértice en $(3, 3)$
37. Focos en $(-4, 2)$, $(2, 2)$, un vértice en $(-3, 2)$
38. Vértices en $(2, 5)$, $(2, -1)$, un foco en $(2, 7)$
39. Vértices en $(\pm 2, 0)$, pasa por $(2\sqrt{3}, 4)$
40. Vértices en $(0, \pm 3)$, pasa por $(\frac{16}{5}, 5)$
41. Centro en $(-1, 3)$, un vértice en $(-1, 4)$, pasa por $(-5, 3 + \sqrt{5})$
42. Centro en $(3, -5)$, un vértice en $(3, -2)$ y pasa por $(1, -1)$
43. Centro en $(2, 4)$, un vértice en $(2, 5)$ y una asíntota $2y - x - 6 = 0$
44. Excentricidad $\sqrt{10}$, extremos del eje conjugado en $(-5, 4)$, $(-5, 10)$

En los problemas 45 a 48, busque una función $y = f(x)$, resuelva la ecuación dada de la variable y y tome la raíz no negativa. Determine el dominio de la función. Describa el gráfico de $y = f(x)$ en palabras. Las ecuaciones son de los problemas 1, 3, 11 y 16.

45. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

46. $\dfrac{y^2}{64} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

47. $\dfrac{(y-4)^2}{36} - x^2 = 1$

48. $9(x-1)^2 - 81(y-2)^2 = 9$

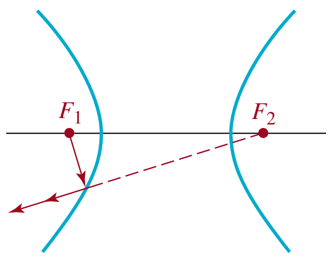


FIGURA 6.3.11 Propiedad reflectora en el problema 50

49. Tres puntos están ubicados en $A(-10, 16)$, $B(-2, 0)$ y $C(2, 0)$; las unidades son kilómetros. Se sabe que un cañón está emplazado en el segmento de recta entre A y C, y mediante técnicas de sondeo se determina que el cañón está 2 km más cerca de B que de C. Determine el punto donde está emplazado el cañón.
50. Se puede demostrar que un rayo de luz que emana de un foco de una hipérbola se reflejará a lo largo de la línea que pasa por el foco opuesto. Vea la **FIGURA 6.3.11**. Un rayo de luz que proviene del foco izquierdo de la hipérbola $x^2/16 - y^2/20 = 1$ llega a la hipérbola en el punto $(-6, -5)$. Deduzca la ecuación del rayo reflejado.
51. Deduzca la ecuación de una hipérbola con sus focos en $(0, -2)$ y $(8, 4)$, y con diferencia fija de distancias $2a = 8$. [*Sugerencia:* Vea el problema 55 en los ejercicios 6.2.]
52. El **ancho focal** de una hipérbola es la longitud de su cuerda focal, esto es, un segmento de recta perpendicular a la línea que contiene al eje transversal que pasa por un foco, con los extremos en la hipérbola. Vea la **FIGURA 6.3.12**.
    a) Calcule el ancho focal de la hipérbola $x^2/4 - y^2/9 = 1$.
    b) Demuestre que, en general, el ancho focal de la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ es $2b^2/a$.

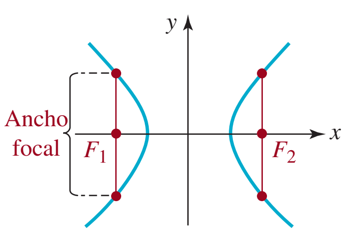


FIGURA 6.3.12 Ancho focal del problema 52

Para discusión

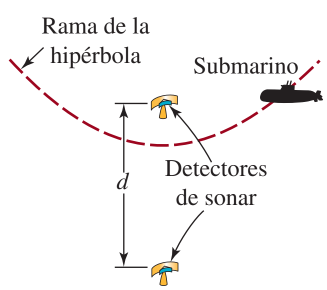


FIGURA 6.3.13 Detectores sónicos del problema 53

53. Dos detectores de sonar están a la distancia d entre sí. Suponga que un sonido (como el siseo de un submarino) se oye en los dos detectores con una demora de tiempo h. Vea la **FIGURA 6.3.13**. Suponga que el sonido viaja en línea recta hacia los dos detectores, a la velocidad v.
    a) Explique por qué h no puede ser mayor que d/v.
    b) Explique por qué, para valores dados de d, v y h, puede determinarse que la fuente sonora está en una rama de una hipérbola. [*Sugerencia:* ¿Dónde cree que estén los focos?]
    c) Deduzca la ecuación de la hipérbola del inciso *b*), suponiendo que los detectores están en los puntos $(0, d/2)$ y $(0, -d/2)$. Exprese el resultado en la forma normal $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$.

54. Se dice que las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

son **conjugadas** entre sí.

a) Determine la ecuación de la hipérbola conjugada de

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1.$$

b) Describa cómo se relacionan las gráficas de las hipérbolas conjugadas.

55. Una **hipérbola rectangular** es una en la cual las asíntotas son perpendiculares.

a) Demuestre que $y^2 - x^2 + 5y + 3x = 1$ es una hipérbola rectangular.

b) ¿Cuál(es) de las hipérbolas de los problemas 1 a 20 son rectangulares?

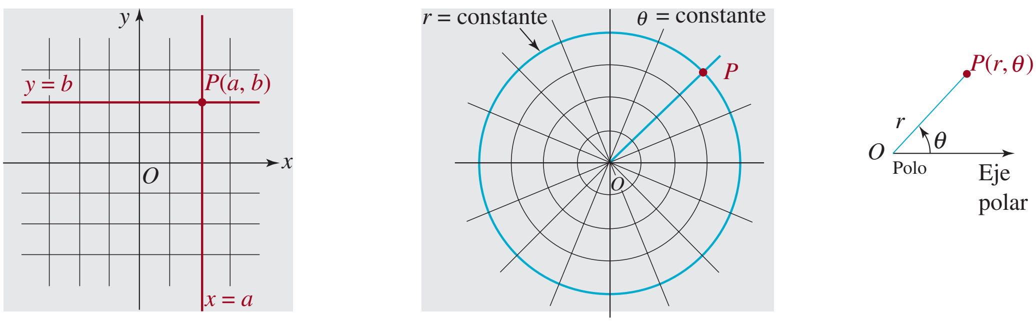
56. Suponga que una hipérbola sea rectangular. Vea el problema 55.

a) ¿Cómo están relacionadas las constantes a y b?

b) Demuestre que todas las hipérbolas rectangulares tienen la misma excentricidad.

6.4 Sistema de coordenadas polares

Introducción Hasta ahora hemos usado el sistema de coordenadas rectangulares para especificar un punto P en el plano. Este sistema se puede considerar como una red de rectas horizontales y verticales. Las coordenadas (a, b) de un punto P se determinan por la intersección de dos rectas: una recta, $x = a$, es perpendicular a la recta horizontal de referencia llamada eje x, y la otra, $y = b$, es perpendicular a la recta vertical de referencia llamada eje y. Vea la FIGURA 6.4.1*a*). Hay otro sistema para ubicar puntos en el plano, llamado **sistema de coordenadas polares**.



a) Sistema de coordenadas rectangulares *b*) Sistema de coordenadas polares *c*) Coordenadas polares de P

FIGURA 6.4.1 Comparación de coordenadas rectangulares y polares de un punto P

Coordenadas polares Para establecer un sistema de coordenadas polares se debe usar un sistema de círculos centrados en un punto O, llamado **polo** u origen, y líneas rectas o rayos, que emanen de O. Como eje de referencia se toma una semirrecta horizontal dirigida hacia la derecha del polo, que se llama **eje polar**. Si se especifica una distancia dirigida (es decir, con signo) r, de O, y un ángulo θ cuyo lado inicial sea el eje polar y cuyo lado terminal sea el rayo OP, el punto P quedará identificado por (r, θ). Se dice que el par ordenado (r, θ) son las **coordenadas polares** de P. Vea las figuras 6.4.1*b*) y 6.4.1*c*).

Aunque la medida del ángulo θ puede expresarse en grados o en radianes, en cálculo se usan casi exclusivamente los radianes. En consecuencia, en las descripciones sólo se usarán medidas en radianes.

En el sistema de coordenadas polares adoptaremos las siguientes convenciones.

CONVENCIONES SOBRE LAS COORDENADAS POLARES

i) Los ángulos $\theta > 0$ se miden en sentido contrario al de las manecillas del reloj, a partir del eje polar, mientras que los ángulos $\theta < 0$ se miden en sentido de las manecillas del reloj.
i) Para graficar un punto $(-r, \theta)$, donde $-r < 0$, se miden $|r|$ unidades a lo largo del rayo $\theta + \pi$.
iii) Las coordenadas del polo O son $(0, \theta)$, donde θ es cualquier ángulo.

EJEMPLO 1 Gráfica de puntos en coordenadas polares

Graficar los puntos cuyas coordenadas polares se indican.
a) $(4, \pi/6)$ ***b***) $(2, -\pi/4)$ ***c***) $(-3, 3\pi/4)$

Solución
a) Se miden 4 unidades a lo largo del rayo $\pi/6$, como se ve en la **FIGURA 6.4.2*a*)**.
b) Se miden 2 unidades a lo largo del rayo $-\pi/4$. Observe la figura 6.4.2*b*).
c) Se miden 3 unidades a lo largo del rayo $3\pi/4 + \pi = 7\pi/4$. En forma equivalente, se pueden medir 3 unidades a lo largo del rayo $3\pi/4$ prolongado *hacia atrás*, es decir, que pasa por el polo. Observe con cuidado, en la figura 6.4.2*c*), que el punto $(-3, 3\pi/4)$ no está en el mismo cuadrante que el lado terminal del ángulo indicado.

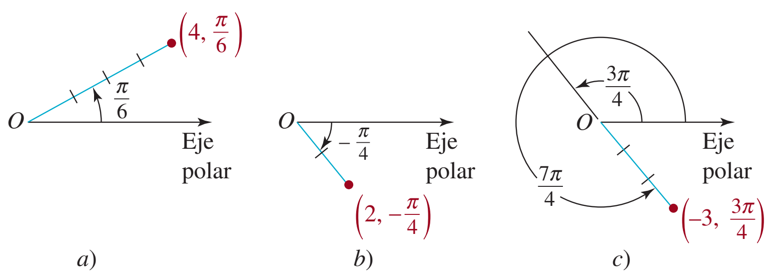


FIGURA 6.4.2 Puntos en coordenadas polares del ejemplo 1 ■

En contraste con el sistema de coordenadas rectangulares, la descripción de un punto en coordenadas polares no es única. Es por una consecuencia inmediata de que

$$(r, \theta) \qquad \text{y} \qquad (r, \theta + 2n\pi), \;\; n \text{ un entero,}$$

son equivalentes. Para empeorar el problema, se pueden usar valores negativos de r.

EJEMPLO 2 Puntos equivalentes en coordenadas polares

Las coordenadas siguientes son algunas representaciones alternativas del punto $(2, \pi/6)$:

$$(2, 13\pi/6), \qquad (2, -11\pi/6), \qquad (-2, 7\pi/6), \qquad (-2, -5\pi/6).$$ ■

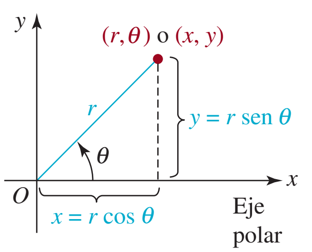


FIGURA 6.4.3 Relación entre coordenadas polares y rectangulares

☐ Conversión de coordenadas polares en rectangulares Si se sobrepone un sistema de coordenadas rectangulares a un sistema de coordenadas polares, como se ve en la **FIGURA 6.4.3**, se puede convertir una descripción polar de un punto en coordenadas rectangulares mediante

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta. \tag{1}$$

Estas fórmulas de conversión son válidas para todos los valores de r y θ en una representación polar equivalente de (r, θ).

EJEMPLO 3 De polares a rectangulares

Convertir $(2, \pi/6)$ en coordenadas polares, a coordenadas rectangulares.

Solución Con $r = 2$, $\theta = \pi/6$, y de acuerdo con (1),

$$x = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$y = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Por consiguiente, $(2, \pi/6)$ es equivalente a $(\sqrt{3}, 1)$ en coordenadas rectangulares. ■

□ Conversión de coordenadas rectangulares en polares

Debe ser evidente, por la figura 6.4.3, que x, y, r y θ también se relacionan por

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Las ecuaciones (2) se usan para convertir las coordenadas rectangulares (x, y) en coordenadas polares (r, θ).

EJEMPLO 4 De rectangulares a polares

Convertir $(-1, 1)$ de coordenadas rectangulares en coordenadas polares.

Solución Con $x = -1$, $y = 1$, y de acuerdo con (2),

$$r^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad \tan\theta = -1.$$

Ahora bien, $r^2 = 2$, o sea $r = \pm\sqrt{2}$, y dos de los muchos ángulos que satisfacen $\tan\theta = -1$ son $3\pi/4$ y $7\pi/4$. En la **FIGURA 6.4.4** se ve que dos representaciones polares de $(-1, 1)$ son

$$(\sqrt{2}, 3\pi/4) \qquad \text{y} \qquad (-\sqrt{2}, 7\pi/4).$$ ■

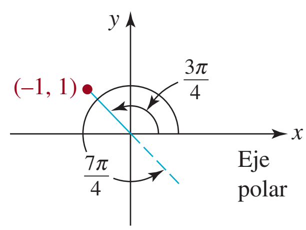


FIGURA 6.4.4 Punto del ejemplo 4

Obsérvese que en el ejemplo 4 no se pueden hacer corresponder *cualquier* ángulo θ con *cualquier* valor r que satisfaga (2); esas soluciones también deben ser consistentes con (1). Como los puntos $(-\sqrt{2}, 3\pi/4)$ y $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$ están en el cuarto cuadrante, no son representaciones polares del punto $(-1, 1)$, que está en el segundo cuadrante.

Hay casos, en cálculo, en que una ecuación rectangular se debe expresar como ecuación polar $r = f(\theta)$. En el ejemplo que sigue se indica cómo hacerlo, usando las fórmulas de conversión en (1).

EJEMPLO 5 Ecuación rectangular en ecuación polar

Determinar una ecuación polar que tenga la misma gráfica que el círculo $x^2 + y^2 = 8x$.

Solución Se sustituyen $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ en la ecuación indicada y se ve que

$$r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta = 8r\cos\theta$$

$$r^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta) = 8r\cos\theta \qquad \leftarrow \cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta = 1$$

$$r(r - 8\cos\theta) = 0.$$

La última ecuación implica que

$$r = 0 \qquad \text{o} \qquad r = 8\cos\theta.$$

Ya que $r = 0$ sólo determina el origen O, se concluye que una ecuación polar del círculo es $r = 8\cos\theta$. Note que el círculo $x^2 + y^2 = 8x$ pasa por el origen, ya que $x = 0$ y $y = 0$ satisfacen la ecuación. En relación con la ecuación polar $r = 8 \cos \theta$ del círculo, el origen o polo corresponde a las coordenadas polares $(0, \pi/2)$. ■

EJEMPLO 6 Ecuación rectangular en ecuación polar

Determinar una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la parábola $x^2 = 8(2 - y)$.

Solución Se sustituyen x y y en la ecuación indicada, por $x = r \cos \theta$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$, y se despeja r en función de θ:

$$\begin{aligned} r^2 \cos^2 \theta &= 8(2 - r \operatorname{sen} \theta) \\ r^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta) &= 16 - 8r \operatorname{sen} \theta \\ r^2 &= r^2 \operatorname{sen}^2 \theta - 8r \operatorname{sen} \theta + 16 \quad \leftarrow \text{el lado derecho es un cuadrado perfecto} \\ r^2 &= (r \operatorname{sen} \theta - 4)^2 \\ r &= \pm(r \operatorname{sen} \theta - 4). \end{aligned}$$

Al despejar r se obtienen dos ecuaciones,

$$r = \frac{4}{1 + \operatorname{sen} \theta} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{-4}{1 - \operatorname{sen} \theta}.$$

Recordemos ahora que por la convención *ii*), (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ representan el mismo punto. El lector debe verificar que si se sustituye (r, θ) por $(-r, \theta + \pi)$ en la segunda de estas dos ecuaciones, se puede obtener la primera. En otras palabras, las ecuaciones son equivalentes, y así podremos simplemente decir que la ecuación polar de la parábola es $r = 4/(1 + \operatorname{sen} \theta)$. ■

EJEMPLO 7 Ecuación polar en ecuación rectangular

Deducir la ecuación rectangular que tenga la misma gráfica que la ecuación polar $r^2 = 9 \cos 2\theta$.

Solución Primero, aplicaremos la identidad trigonométrica del coseno de un ángulo doble:

$$r^2 = 9(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta). \quad \leftarrow \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

Entonces, de $r^2 = x^2 + y^2$, $\cos \theta = x/r$, $\operatorname{sen} \theta = y/r$, se obtiene

$$x^2 + y^2 = 9\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right) \qquad \text{o} \qquad (x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2).$$ ■

La sección siguiente se dedicará a graficar ecuaciones polares.

6.4 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-20.

En los problemas 1 a 6 grafique el punto que tenga las coordenadas polares indicadas.

1. $(3, \pi)$
2. $(2, -\pi/2)$
3. $(-\frac{1}{2}, \pi/2)$
4. $(-1, \pi/6)$
5. $(-4, -\pi/6)$
6. $(\frac{2}{3}, 7\pi/4)$

En los problemas 7 a 12, determine coordenadas polares alternativas que satisfagan:

***a*)** $r > 0, \theta < 0$
***b*)** $r > 0, \theta > 2\pi$
***c*)** $r < 0, \theta > 0$
***d*)** $r < 0, \theta < 0$

de cada punto con las coordenadas polares indicadas.

7. $(2, 3\pi/4)$ **8.** $(5, \pi/2)$ **9.** $(4, \pi/3)$
10. $(3, \pi/4)$ **11.** $(1, \pi/6)$ **12.** $(3, 7\pi/6)$

En los problemas 13 a 18, determine las coordenadas rectangulares de cada punto cuyas coordenadas polares se indican.

13. $(\frac{1}{2}, 2\pi/3)$ **14.** $(-1, 7\pi/4)$ **15.** $(-6, -\pi/3)$
16. $(\sqrt{2}, 11\pi/6)$ **17.** $(4, 5\pi/4)$ **18.** $(-5, \pi/2)$

En los problemas 19 a 24 determine las coordenadas polares que satisfagan:

a) $r > 0, -\pi < \theta \leq \pi$ ***b***) $r < 0, -\pi < \theta \leq \pi$

de cada punto cuyas coordenadas rectangulares se indican.

19. $(-2, -2)$ **20.** $(0, -4)$ **21.** $(1, -\sqrt{3})$
22. $(\sqrt{6}, \sqrt{2})$ **23.** $(7, 0)$ **24.** $(1, 2)$

En los problemas 25 a 34 deduzca una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación rectangular indicada.

25. $y = 5$ **26.** $x + 1 = 0$
27. $y = 7x$ **28.** $3x + 8y + 6 = 0$
29. $y^2 = -4x + 4$ **30.** $x^2 - 12y - 36 = 0$
31. $x^2 + y^2 = 36$ **32.** $x^2 - y^2 = 1$
33. $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$ **34.** $x^3 + y^3 - xy = 0$

Para discusión

35. ¿Cómo expresaría usted la distancia d entre dos puntos (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) en términos de sus coordenadas polares?

36. Usted sabe cómo deducir una ecuación rectangular de una recta que pasa por dos puntos, en coordenadas rectangulares. ¿Cómo encontraría una ecuación polar de una recta que pase por dos puntos, cuyas coordenadas polares sean (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2)? Ponga en práctica sus ideas, deduciendo una ecuación polar de la recta que pasa por $(3, 3\pi/4)$ y $(1, \pi/4)$. Determine las coordenadas polares de los cruces de la recta con los ejes x y y.

6.5 Gráficas de ecuaciones polares

Introducción La gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ es el conjunto de puntos P con *cuando menos* un conjunto de coordenadas polares, que satisface la ecuación. Ya que lo más probable es que en el salón de clase no haya un retículo de coordenadas polares, para facilitar el trazo de gráficas y su descripción de una ecuación polar $r = f(\theta)$ como en la sección anterior, sobrepondremos un sistema de coordenadas rectangulares sobre el sistema de coordenadas polares.

Comenzaremos con algunas gráficas polares sencillas.

EJEMPLO 1 Círculo centrado en el origen

Graficar $r = 3$.

Solución Como no se especifica θ, el punto $(3, \theta)$ está en la gráfica de $r = 3$ para cualquier valor de θ, y está a 3 unidades del origen. En la FIGURA 6.5.1 se ve que la gráfica es el círculo de radio 3, con centro en el origen.

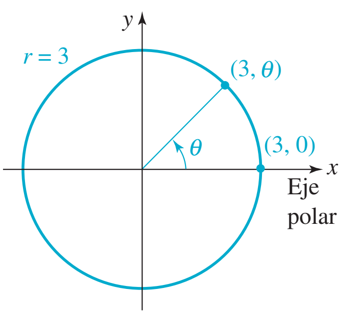


FIGURA 6.5.1 Círculo del ejemplo 1

También, de acuerdo con (2) de la sección 6.4, $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, por lo que $r = 3$ da como resultado la ecuación rectangular $x^2 + y^2 = 3^2$, que nos es familiar; es de un círculo de radio 3 centrado en el origen. ■

□ Círculos centrados en el origen En general, si a es cualquier constante distinta de cero, la gráfica polar de

$$r = a \tag{1}$$

es un círculo de radio $|a|$ con centro en el origen.

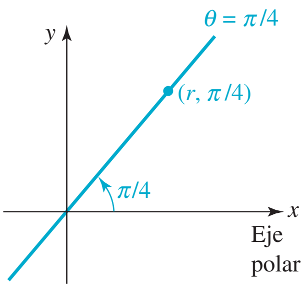


FIGURA 6.5.2 Recta del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Rayo que atraviesa el origen

Graficar $\theta = \pi/4$.

Solución Como no se especifica r, el punto $(r, \pi/4)$ está en la gráfica para todo valor de r. Si $r > 0$, este punto está en la semirrecta, en el primer cuadrante; si $r < 0$, el punto está en la semirrecta del tercer cuadrante. Para $r = 0$, el punto $(0, \pi/4)$ es el polo u origen. Por consiguiente, la gráfica polar de $\theta = \pi/4$ es la recta que pasa por el origen y que forma un ángulo $\pi/4$ con el eje polar, o con el eje x positivo. Vea la FIGURA 6.5.2. ■

□ Rectas que cruzan el origen En general, si α es cualquier constante real distinta de cero, la gráfica polar de

$$\theta = \alpha \tag{2}$$

es una recta que atraviesa el origen y forma un ángulo de α radianes con el eje polar.

EJEMPLO 3 Una espiral

Graficar $r = \theta$.

Solución A medida que crece $\theta \geq 0$, r aumenta y los puntos (r, θ) se desarrollan en torno al polo en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. Eso se ilustra por la parte azul de la gráfica en la FIGURA 6.5.3. La parte roja de la gráfica se obtiene graficando puntos para $\theta < 0$.

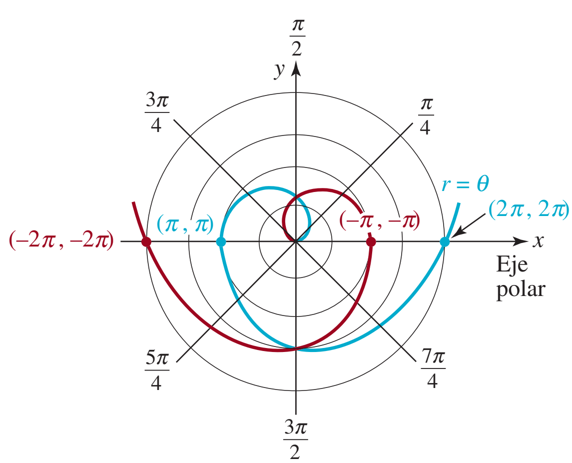


FIGURA 6.5.3 Gráfica de la ecuación del ejemplo 3 ■

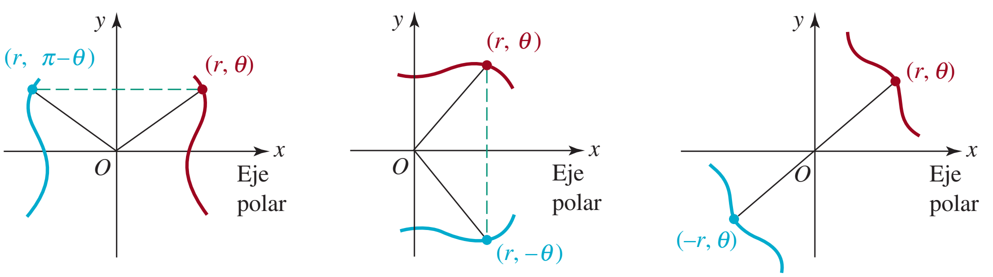
□ Espirales Muchas gráficas en coordenadas polares tienen nombres especiales. La gráfica del ejemplo 3 es un caso especial de

$$r = a\theta, \tag{3}$$

donde a es una constante. Una gráfica de esta ecuación se llama **espiral de Arquímedes**. Se pedirá al lector que grafique otros tipos de espirales, en los problemas 31 y 32 de los ejercicios 6.5.

Además del trazo básico de puntos, con frecuencia se puede aprovechar la simetría para graficar una ecuación polar.

□ Simetría Como se ve en la figura, una gráfica polar puede tener tres tipos de simetría. Una gráfica polar es **simétrica con respecto al eje y** si siempre que (r, θ) es un punto de la gráfica, $(r, \pi - \theta)$ también lo sea. Una gráfica polar es **simétrica con respecto al eje x** si, siempre que (r, θ) es un punto de la gráfica, $(r, -\theta)$ también lo sea. Por último, una gráfica polar es **simétrica con respecto al origen** sis, siempre que (r, θ) está en la gráfica, $(-r, \theta)$ también es un punto de ella. La **FIGURA 6.5.4** ilustra estos tres tipos de simetrías.



a) Simetría con respecto al eje y

b) Simetría con respecto al eje x

c) Simetría con respecto al origen

FIGURA 6.5.4 Simetrías de una gráfica polar

Existen las siguientes pruebas de las simetrías.

PRUEBAS DE SIMETRÍA EN COORDENADAS POLARES

La gráfica de una ecuación polar es:

i) **simétrica con respecto al eje y**, si al sustituir (r, θ) por $(r, \pi - \theta)$ se obtiene la misma ecuación;

ii) **simétrica con respecto al eje x** si al sustituir (r, θ) por $(r, -\theta)$ se obtiene la misma ecuación;

iii) **simétrica con respecto al origen** si al sustituir (r, θ) por $(-r, \theta)$ se obtiene la misma ecuación.

Simetrías de un cristal de nieve

Debido a que la descripción polar de un punto no es única, la gráfica de una ecuación polar podrá tener determinado tipo de simetría aun cuando falle su prueba respectiva. Por ejemplo, si al reemplazar (r, θ) por $(r, -\theta)$ no se llega a la ecuación polar original, puede ser que la gráfica de esa ecuación sí tenga simetría con respecto al eje x. En consecuencia, si una de las pruebas de reemplazo en *i*) - *iii*) no produce la misma ecuación polar, sólo se puede decir que "no es concluyente".

En coordenadas rectangulares, la descripción de un punto es única. Por consiguiente, si en coordenadas rectangulares falla una prueba para determinado tipo de simetría, se puede decir en definitiva que la gráfica no posee esa simetría.

EJEMPLO 4 Gráfica de una ecuación polar

Graficar $r = 4 - 4 \operatorname{sen} \theta$.

Solución De acuerdo con la fórmula trigonométrica de suma de la función seno, sen $(\pi - \theta) = \operatorname{sen} \theta$. Así, de acuerdo con *i*), la gráfica de $r = 3 - 3 \operatorname{sen} \theta$ es simétrica con respecto al eje y. A su vez, al reemplazar θ por $-\theta$ y r por $-r$, no se obtienen las ecuaciones que sean iguales que $r = 4 - 4 \operatorname{sen} \theta$. Por consiguiente no se puede sacar conclusión alguna acerca de la simetría con respecto al eje x o polar, ni respecto al origen o polo.

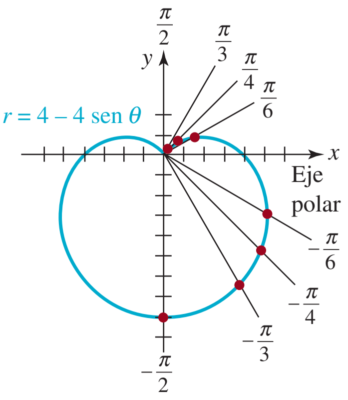


FIGURA 6.5.5 Gráfica de la ecuación del ejemplo 4

Como la gráfica es simétrica con respecto al eje y, que corresponde a la recta $\theta = \pi/2$, basta hacer una tabla de valores de r, usando $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Al graficar, en la siguiente tabla, los puntos que corresponden a los datos, y aprovechando la simetría, se obtiene la gráfica de la **FIGURA 6.5.5**.

θ	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
r	8	7.5	6.8	6	4	2	1.2	0.5	0

■

☐ Cardioides

La ecuación polar del ejemplo 4 forma parte de una familia de ecuaciones que tienen una gráfica "en forma de corazón", y que pasa por el origen. Una gráfica de cualquier ecuación polar que tenga la forma

$$r = a \pm a \operatorname{sen}\theta \qquad \text{o} \qquad r = a \pm a\cos\theta \tag{4}$$

se llama **cardioide**. La única diferencia en la gráfica de estas cuatro ecuaciones es su simetría con respecto al eje y ($r = a \pm a$ sen θ), o con respecto al eje x ($r = a \pm a \cos \theta$). Vea la **FIGURA 6.5.6**.

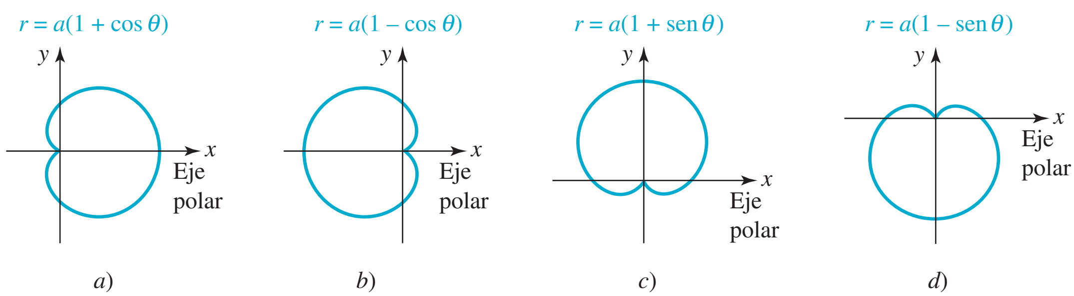


FIGURA 6.5.6 Cuatro cardioides definidos por las ecuaciones en (4)

Si se conocen la forma básica y la orientación de una cardioide se puede obtener una gráfica rápida y fiel, graficando los cuatro puntos que corresponden a $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$ y $\theta = 3\pi/2$.

☐ Caracoles

Las cardioides son casos especiales de curvas polares llamadas **caracoles**:

$$r = a \pm b \operatorname{sen}\theta \qquad \text{o} \qquad r = a \pm b\cos\theta. \tag{5}$$

La forma de un caracol depende de las magnitudes relativas de a y b. Supongamos que $a > 0$ y $b > 0$. Para $a/b < 1$, se obtiene un **caracol con bucle interno**, como se ve en la **FIGURA 6.5.7*a*)**. Cuando $a = b$, o lo que es igual, cuando $a/b = 1$, se obtiene una **cardioide**. Para $1 < a/b < 2$, se obtiene un **caracol aplanado**, como el de la figura 6.5.7*b*). Cuando $a/b \geq 2$, la curva se llama **caracol convexo**. Vea la figura 6.5.7*c*).

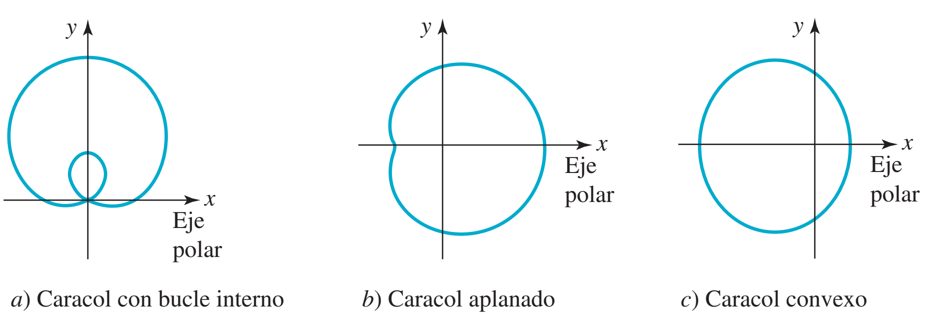


FIGURA 6.5.7 Tres clases de caracoles, definidos por las ecuaciones en (5).

EJEMPLO 5 Un caracol

La gráfica de $r = 3 - \text{sen}\,\theta$ es un caracol convexo, porque $a = 3$, $b = 1$ y $a/b = 3 > 2$. ■

EJEMPLO 6 Un caracol

La gráfica de $r = 1 + 2\cos\theta$ es un caracol con bucle interno, porque $a = 1$, $b = 2$ y $a/b = \frac{1}{2} < 1$. Para $\theta \geq 0$, observe, en la **FIGURA 6.5.8**, que el caracol comienza en $\theta = 0$, o en $(3, 0)$. La gráfica atraviesa el eje y en $(1, \pi/2)$ y después entra al origen ($r = 0$) del primer ángulo en el cual $r = 0$ o $1 + 2\cos\theta = 0$, es decir, en $\cos\theta = -\frac{1}{2}$. Esto implica que $\theta = 2\pi/3$. En $\theta = \pi$, la curva pasa por $(-1, \pi)$. El resto de la gráfica se puede trazar aprovechando que es simétrica con respecto al eje x. ■

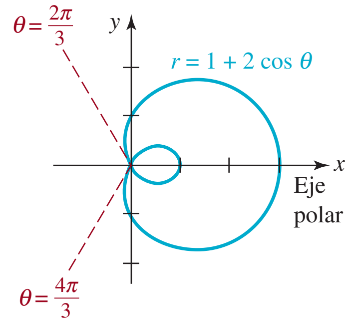


FIGURA 6.5.8 Gráfica de la ecuación del ejemplo 6

EJEMPLO 7 Una rosa

Graficar $r = 2\cos 2\theta$.

Solución Ya que

$$\cos(-2\theta) = \cos 2\theta \qquad \text{y} \qquad \cos 2(\pi - \theta) = \cos 2\theta$$

se llega a la conclusión, de acuerdo con *i)* y *ii)* de las pruebas de simetría, que la gráfica es simétrica con respecto a los ejes x y y. Reflexionando un momento, el lector se debería convencer de que sólo se debe considerar el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Si se usan los datos de la tabla siguiente, se verá que la parte interrumpida de la gráfica de la **FIGURA 6.5.9** es la que se completa por simetría. Esta gráfica se llama **curva de una rosa de cuatro pétalos**.

θ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
r	2	1.7	1	0	-1	-1.7	12

■

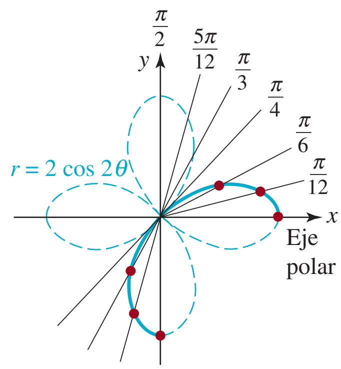


FIGURA 6.5.9 Gráfica de la ecuación del ejemplo 7

☐ Curvas de rosas

En general, si n es un entero positivo, las gráficas de

$$r = a\,\text{sen}\,n\theta \qquad \text{o} \qquad r = a\cos n\theta, \quad n \geq 2 \tag{6}$$

se llaman **curvas de rosas**, aunque, como se puede ver en la **FIGURA 6.5.10**, la curva se parece más a una margarita. Cuando n es impar, la cantidad de **pétalos** o **bucles** de la curva es n; si n es par, la curva tiene $2n$ pétalos. Para graficar una rosa se puede comenzar graficando un pétalo. Para empezar, primero se determina un ángulo θ para el cual r es uno máximo. Esto proporciona la línea central del pétalo. Después se determinan valores correspondientes de θ para los cuales la rosa curva entra al origen ($r = 0$). Para completar la gráfica se aprovecha que las líneas centrales de los pétalos están a la distancia de $2\pi/n$ radianes ($360/n$ grados) entre

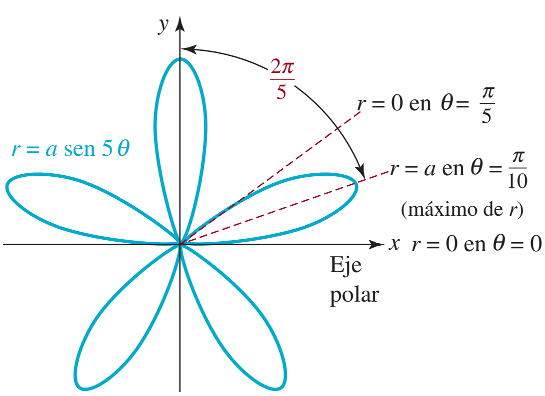


FIGURA 6.5.10 Curva de rosa

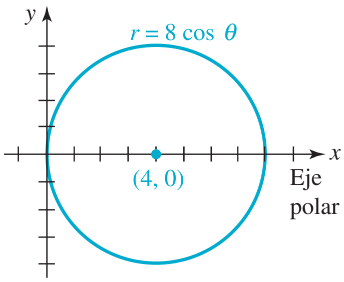


FIGURA 6.5.11 Gráfica de la ecuación $r = 8 \cos \theta$

sí, si n es impar, y $2\pi/2n = \pi/n$ radianes (180/n grados), si n es par. En la figura 6.5.10 se ha trazado la gráfica de $r = a \text{ sen } 5\theta$, $a > 0$. La distancia entre las líneas de centro de los pétalos es $2\pi/5$ radianes (72°).

En el ejemplo 5 de la sección 6.4, vimos que la ecuación polar $r = 8 \cos \theta$ equivale a la ecuación $x^2 + y^2 = 8x$, en coordenadas rectangulares. Al completar el cuadrado en x, en esa ecuación, se ve que

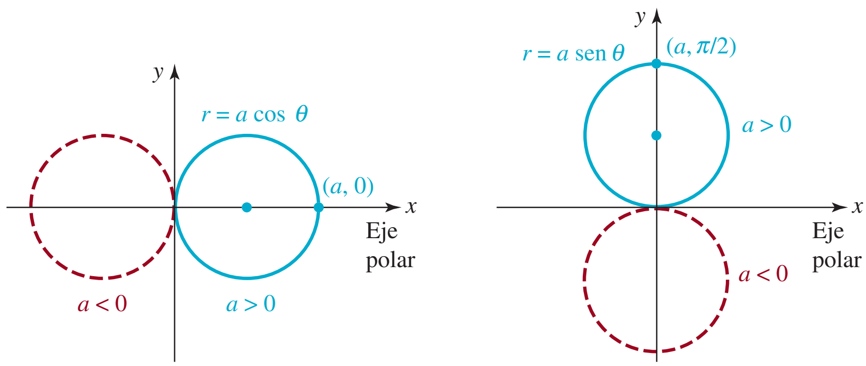
$$(x - 4)^2 + y^2 = 16$$

es un círculo de radio 4 centrado en (4, 0) en el eje x. Las ecuaciones polares como $r = 8 \cos \theta$ o $r = 8 \text{ sen } \theta$ son círculos, y también son casos especiales de rosas curvas. Vea la **FIGURA 6.5.11**.

☐ Círculos con centro en un eje Cuando $n = 1$ en las ecuaciones (6), se obtiene

$$r = a \text{ sen } \theta \quad \text{o} \quad r = a \cos \theta, \tag{7}$$

que son ecuaciones polares de círculos que pasan por el origen y con diámetro $|a|$ y centro en $(a/2, 0)$ en el eje x ($r = a \cos \theta$) o con centro en $(0, a/2)$ en el eje y ($r = a \text{ sen } \theta$). La **FIGURA 6.5.12** ilustra las gráficas de las ecuaciones (7) en casos en que $a > 0$ y $a < 0$.



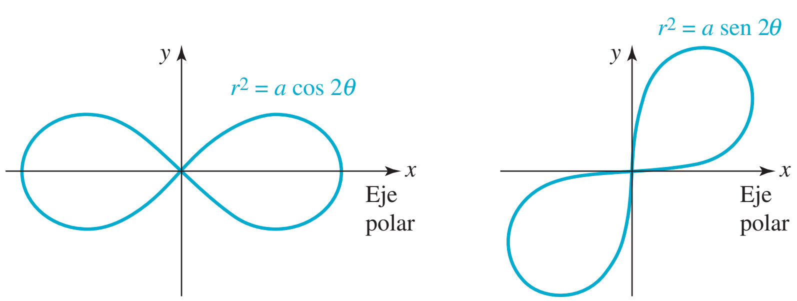
a) Centros en el eje x *b*) Centros en el eje y

FIGURA 6.5.12 Círculos que pasan por el origen con centros en un eje

☐ Lemniscatas Si n es un entero positivo, las gráficas de

$$r^2 = a \cos 2\theta \quad \text{o} \quad r^2 = a \text{ sen } 2\theta \tag{8}$$

en donde $a > 0$, se llaman **lemniscatas**. De acuerdo con *iii*) de las pruebas de simetría, se puede ver que las gráficas de las dos ecuaciones en (1) son simétricas con respecto al origen. Además, de acuerdo con *ii*) de las pruebas de simetría, la gráfica de $r^2 = a \cos 2\theta$ es simétrica con respecto al eje x. Las **FIGURAS 6.5.13*a*)** y 6.5.13*b*) muestran gráficas típicas de las ecuaciones $r^2 = a \cos 2\theta$ y $r^2 = a \text{ sen } 2\theta$, respectivamente.



a) *b*)

FIGURA 6.5.13 Lemniscatas

□ Puntos de intersección

En coordenadas rectangulares se pueden determinar los puntos (x, y) donde se cruzan las gráficas de dos funciones, $y = f(x)$ y $y = g(x)$, igualando los valores de y. Las soluciones reales de la ecuación $f(x) = g(x)$ corresponden a *todas* las intersecciones con el eje x de los puntos donde se cruzan las gráficas. En contraste, pueden surgir problemas, en coordenadas polares, cuando se trate de aplicar el mismo método para determinar el lugar donde se cruzan las gráficas de dos ecuaciones polares $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$.

EJEMPLO 8 Círculos que se cruzan

La **FIGURA 6.5.14** muestra que los círculos $r = \operatorname{sen}\theta$ y $r = \cos\theta$ tienen dos puntos de intersección. Al igualar los valores de r, la ecuación $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$ lleva a $\theta = \pi/4$. Si se sustituye este valor en cualquiera de las ecuaciones, se obtiene $r = \sqrt{2}/2$. En consecuencia sólo se ha determinado un punto polar $(\sqrt{2}/2, \pi/4)$ en donde las gráficas se cruzan. En la figura se ve que también las gráficas se cruzan en el origen. Pero aquí el problema es que el origen o polo está en $(0, \pi/2)$ en la gráfica de $r = \cos\theta$, pero está en $(0, 0)$ en la gráfica de $r = \operatorname{sen}\theta$. Este caso es análogo al de las curvas que llegan al mismo punto en momentos diferentes. ■

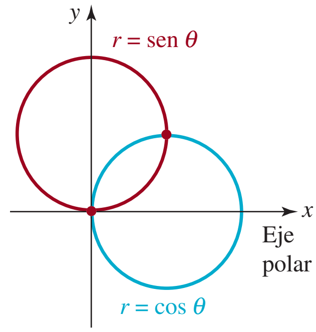


FIGURA 6.5.14 Círculos que se cruzan, del ejemplo 8

□ Rotación de gráficas polares

En la sección 2.2 hemos visto que si $y = f(x)$ es la ecuación rectangular de una función, entonces las gráficas de $y = f(x - c)$ y $y = f(x + c)$, $c > 0$, se obtienen mediante el *desplazamiento* de la gráfica de f en forma horizontal c unidades hacia la derecha y la izquierda, respectivamente. En contraste, si $r = f(\theta)$ es una ecuación polar, entonces las gráficas de $r = f(\theta - \gamma)$ y $r = f(\theta + \gamma)$, $\gamma > 0$, se pueden obtener mediante la *rotación* de la gráfica de f por una cantidad γ. En forma específica:

- La gráfica de $r = f(\theta - \gamma)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ rotada *en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj* alrededor del origen por una cantidad γ.
- La gráfica de $r = f(\theta + \gamma)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ rotada *en el sentido de las manecillas del reloj* alrededor del origen por una cantidad γ.

Por ejemplo, la gráfica de $r = a(1 + \cos(\theta - \pi/2))$ es la gráfica de $r = a(1 + \cos\theta)$, que se muestra en la figura 6.5.6*a*), rotada en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj alrededor del origen por una cantidad $\pi/2$. En consecuencia, su gráfica debe ser la que se da en la figura 6.5.6*c*). Esto tiene sentido, ya que la fórmula de diferencia del coseno da la ecuación

$$\begin{aligned} r = a[1 + \cos(\theta - \pi/2)] &= a[1 + \cos\theta\cos(\pi/2) + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\pi/2)] \\ &= a(1 + \operatorname{sen}\theta). \end{aligned}$$

◀ Vea la identidad en (5) de la sección 4.5.

De manera similar, si hace rotar $r = a(1 + \cos\theta)$ en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen por una cantidad π obtendrá la ecuación

$$r = a[1 + \cos(\theta + \pi)] = a[1 + \cos\theta\cos\pi - \operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\pi] = a(1 - \cos\theta)$$

cuya gráfica se da en la figura 6.5.6*b*). Finalmente, eche otro vistazo a la figura 6.5.13. Desde

$$r^2 = a\cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = a\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = a\operatorname{sen}2\theta$$

vemos que la gráfica de la lemniscata de la figura 6.5.13*b*) es la gráfica de la figura 6.5.13*a*) a la que se hizo rotar en sentido opuesto al de las manecillas del reloj alrededor del origen por una cantidad de $\pi/4$.

EJEMPLO 9 Gráficas polares rotadas

Graficar $r = 1 + 2\operatorname{sen}(\theta + \pi/4)$.

Solución La gráfica de la ecuación dada es la gráfica del caracol $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$ rotada en el sentido de las agujas del reloj alrededor de un origen por una cantidad de $\pi/4$. En la **FIGURA 6.5.15**, la gráfica azul es el de $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$ y el gráfico rojo es la gráfica rotada. ■

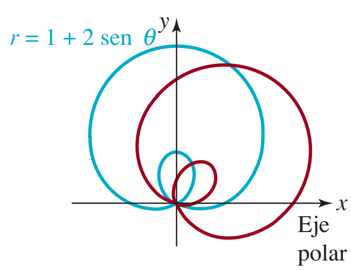


FIGURA 6.5.15 Gráficas de ecuaciones polares del ejemplo 9

NOTAS PARA EL SALÓN DE CLASE

i) El ejemplo 8 ilustra una de varias dificultades frustrantes del trabajo en coordenadas polares:

Un punto se puede encontrar sobre la gráfica de una ecuación polar aunque sus coordenadas no satisfagan la ecuación.

Se deberá verificar que $(2, \pi/2)$ es una descripción polar alternativa del punto $(-2, 3\pi/2)$. Además, verifique que $(-2, 3\pi/2)$ es un punto sobre la gráfica de $r = 1 + 3 \operatorname{sen} \theta$, lo que demuestra que las coordenadas satisfacen la ecuación. Sin embargo, observe que las coordenadas alternativas $(2, \pi/2)$ no lo hacen.

ii) La curva de la rosa de cuatro pétalos del ejemplo 7 se obtiene mediante el ploteo de r para valores θ que satisfacen a $0 \leq \theta < 2\pi$. Vea la **FIGURA 6.5.16**. No suponga que esto es cierto para cada curva de rosa. En realidad, la curva de rosa de cinco pétalos que se presenta en la figura 6.5.10 se obtuvo usando valores θ que satisfacen a $0 \leq \theta < \pi$. En general, una curva de rosa $r = a \operatorname{sen} n\theta$ o $r = a \cos n\theta$ es trazada exactamente una vez para $0 \leq \theta < 2\pi$ si n es par y una vez para $0 \leq \theta < \pi$ si n es impar.

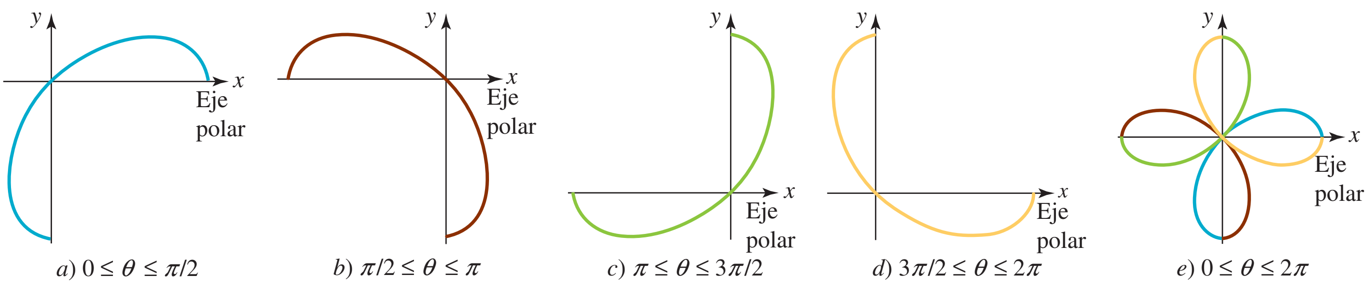


FIGURA 6.5.16 Ploteo de $r = 2 \cos 2\theta$

6.5 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-21.

En los problemas 1 a 30, identifique con su nombre la gráfica de la ecuación polar. A continuación haga un bosquejo de ella.

1. $r = 6$
2. $r = -1$
3. $\theta = \pi/3$
4. $\theta = 5\pi/6$
5. $r = 2\theta, \theta \leq 0$
6. $r = 3\theta, \theta \geq 0$
7. $r = 1 + \cos\theta$
8. $r = 5 - 5\operatorname{sen}\theta$
9. $r = 2(1 + \operatorname{sen}\theta)$
10. $2r = 1 - \cos\theta$
11. $r = 1 - 2\cos\theta$
12. $r = 2 + 4\operatorname{sen}\theta$
13. $r = 4 - 3\operatorname{sen}\theta$
14. $r = 3 + 2\cos\theta$
15. $r = 4 + \cos\theta$
16. $r = 4 - 2\operatorname{sen}\theta$
17. $r = \operatorname{sen} 2\theta$
18. $r = 3\operatorname{sen} 4\theta$
19. $r = 3\cos 3\theta$
20. $r = 2\operatorname{sen} 3\theta$
21. $r = \cos 5\theta$
22. $r = 2\operatorname{sen} 9\theta$
23. $r = 6\cos\theta$
24. $r = -2\cos\theta$
25. $r = -3\operatorname{sen}\theta$
26. $r = 5\operatorname{sen}\theta$

27. $r^2 = 4\,\text{sen}\,2\theta$

28. $r^2 = 4\cos 2\theta$

29. $r^2 = -25\cos 2\theta$

30. $r^2 = -9\,\text{sen}\,2\theta$

En los problemas 31 y 32, la gráfica de la ecuación es una espiral. Trace la gráfica.

31. $r = 2^\theta$, $\theta \geq 0$ (logarítmica)

32. $r\theta = \pi$, $\theta > 0$ (hiperbólica)

En los problemas 33 a 38, busque la ecuación de la gráfica polar dada.

33.

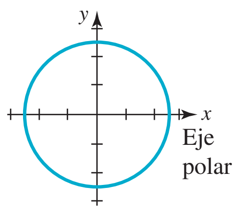


FIGURA 6.5.17 Gráfica del problema 33

34.

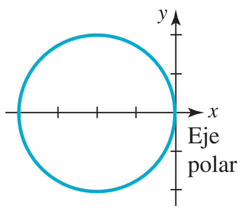


FIGURA 6.5.18 Gráfica del problema 34

35.

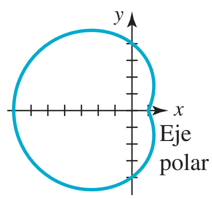


FIGURA 6.5.19 Gráfica del problema 35

36.

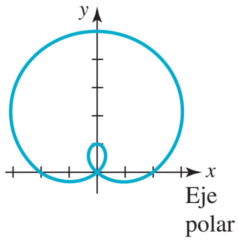


FIGURA 6.5.20 Gráfica del problema 36

37.

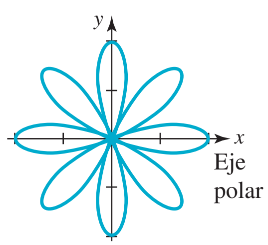


FIGURA 6.5.21 Gráfica del problema 37

38.

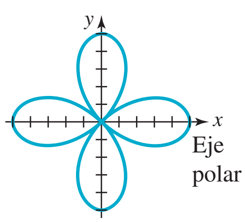


FIGURA 6.5.22 Gráfica del problema 38

En los problemas 39 a 42, determine los puntos de intersección de las gráficas del par de ecuaciones polares.

39. $r = 2$, $r = 4\,\text{sen}\,\theta$

40. $r = \text{sen}\,\theta$, $r = \text{sen}\,2\theta$

41. $r = 1 - \cos\theta$, $r = 1 + \cos\theta$

42. $r = 3 - 3\cos\theta$, $r = 3\cos\theta$

43. Suponga que el círculo rojo de la figura 6.5.14 sea rotado en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen por una cantidad de $\pi/4$. Demuestre que una ecuación polar de la gráfica rotada está dada por

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}(\text{sen}\,\theta + \cos\theta).$$

44. ***a***) Construya el círculo cuya ecuación se da en el problema 43.
b) Determine las coordenadas polares de todas las intersecciones.
c) Calcule las coordenadas rectangulares del centro del círculo.
d) Determine las coordenadas rectangulares del punto al final del diámetro que pasa a través del origen y el centro.

Problemas para calculadora o computadora

45. Use una función de graficación para obtener la gráfica del **bifolio** $r = 4 \text{ sen } \theta \cos^2\theta$ y el círculo $r = \text{sen } \theta$ en los mismos ejes. Determine todos los puntos de intersección de las gráficas.

46. Use una función de graficación para verificar que la cardioide $r = 1 + \cos \theta$ y la lemniscata $r^2 = 4 \cos \theta$ se cruzan en cuatro puntos. Determine esos puntos de intersección de las gráficas.

En los problemas 47 y 48, los gráficos de las ecuaciones *a*)-*d*) representan una rotación de la gráfica de la ecuación dada. Intente bosquejar estas gráficas en forma manual. Si tiene problemas, utilice una herramienta de graficar.

47. $r = 1 + \text{sen } \theta$

a) $r = 1 + \text{sen}(\theta - \pi/2)$ *b*) $r = 1 + \text{sen}(\theta + \pi/2)$

c) $r = 1 + \text{sen}(\theta - \pi/6)$ *d*) $r = 1 + \text{sen}(\theta + \pi/4)$

48. $r = 2 + 4 \cos \theta$

a) $r = 2 + 4\cos(\theta + \pi/6)$ *b*) $r = 2 + 4\cos(\theta - 3\pi/2)$

c) $r = 2 + 4\cos(\theta + \pi)$ *d*) $r = 2 + 4\cos(\theta - \pi/8)$

49. Use un CAS para obtener gráficas de la ecuación polar $r = a + \cos \theta$ para $a = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \ldots, 3$.

50. Identifique todas las curvas del problema 49. ¿Qué pasa con las gráficas conforme $a \to \infty$?

Para discusión

En los problemas 51 y 52, suponga que $r = f(\theta)$ es una ecuación polar. Interprete gráficamente la propiedad indicada.

51. $f(-\theta) = f(\theta)$ (función par) **52.** $f(-\theta) = -f(\theta)$ (función impar)

6.6 Secciones cónicas en coordenadas polares

Introducción En las tres primeras secciones de este capítulo se dedujeron las ecuaciones de la parábola, elipse e hipérbola usando la fórmula de la distancia, en coordenadas rectangulares. Al usar las coordenadas polares y el concepto de excentricidad podremos presentar una definición general de sección cónica que abarque las tres curvas.

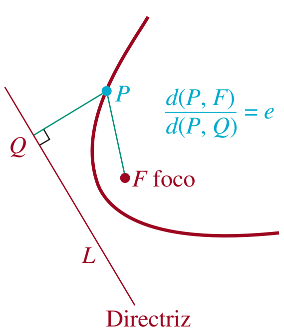


FIGURA 6.6.1 Interpretación geométrica de (1)

SECCIÓN CÓNICA

Sean L una recta fija en el plano, y F un punto que no esté en la recta. Una **sección cónica** es el conjunto de puntos P en el plano, para los cuales la distancia de P a F, dividida entre la distancia de P a L, es constante.

La recta fija L se llama **directriz** y el punto F es un **foco**. La constante fija es la **excentricidad** e de la cónica. Como se ve en la FIGURA 6.6.1, el punto P está en la cónica si, y sólo si

$$\frac{d(P, F)}{d(P, Q)} = e, \tag{1}$$

en donde Q representa el pie de la perpendicular de P a L. Si en (1)

- $e = 1$, la cónica es una **parábola**
- $0 < e < 1$, la cónica es una **elipse** y si
- $e > 1$, la cónica es una **hipérbola**.

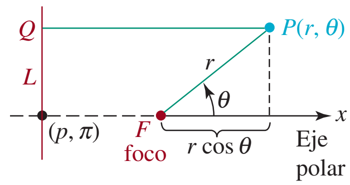


FIGURA 6.6.2 Interpretación de (2) en coordenadas polares

Ecuaciones polares de cónicas

La ecuación (1) se interpreta con facilidad usando coordenadas polares. Supongamos que F se coloca en el polo, y que L está a p unidades $(p > 0)$ a la izquierda de F, perpendicular al eje polar prolongado. En la **FIGURA 6.6.2** se ve que si se escribe (1) en la forma $d(P, F) = ed(P, Q)$, es igual que

$$r = e(p + r\cos\theta) \qquad \text{o} \qquad r - er\cos\theta = ep. \tag{2}$$

Al despejar r queda

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}. \tag{3}$$

Para comprobar que (3) da como resultado las ecuaciones familiares de las cónicas, se sobrepone un sistema de coordenadas rectangulares al sistema de coordenadas polares, con el origen en el polo y el eje x positivo coincidiendo con el eje polar. A continuación se expresa la primera ecuación de (2) en coordenadas rectangulares, y se simplifica:

$$\begin{aligned} &\pm\sqrt{x^2 + y^2} = ex + ep \\ &x^2 + y^2 = e^2x^2 + 2e^2px + e^2p^2 \\ &(1 - e^2)x^2 - 2e^2px + y^2 = e^2p^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Si se hace que $e = 1$, (4) se transforma en

$$-2px + y^2 = p^2 \qquad \text{o} \qquad y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right),$$

que es la ecuación de una parábola, en su forma normal, con su eje en el eje x, su vértice en $(-p/2, 0)$ y, de acuerdo con el emplazamiento de F, su foco está en el origen.

Es un buen ejercicio algebraico demostrar que (2) originan formas normales de ecuaciones de una elipse, en el caso de que $0 < e < 1$, y de una hipérbola, cuando $e > 1$. Vea el problema 45 en los ejercicios 6.6. Así, de acuerdo con el valor de e, la ecuación polar (3) puede tener tres gráficas posibles, como se ve en la **FIGURA 6.6.3**.

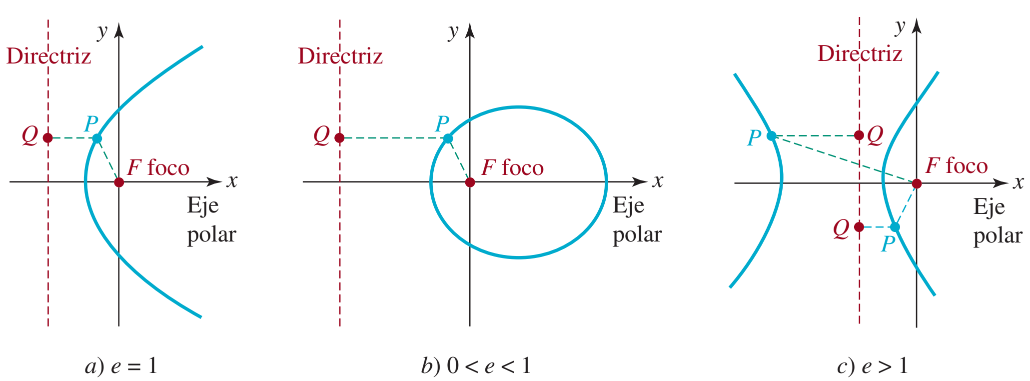


FIGURA 6.6.3 Gráficas de la ecuación (3)

Si se hubiera ubicado el foco F a la *izquierda* de la directriz, en la deducción de la ecuación polar (3), se hubiera obtenido la ecuación $r = ep/(1 + e \cos \theta)$. Cuando la directriz L se escoge paralela al eje polar (esto es, horizontal), se ve entonces que la ecuación de la cónica es $r = ep/(1 - e \operatorname{sen} \theta)$ o bien $r = ep/(1 + e \operatorname{sen} \theta)$. A continuación se presenta un resumen de la descripción anterior.

ECUACIONES POLARES DE CÓNICAS

Toda ecuación polar de la forma

$$r = \frac{ep}{1 \pm e \cos \theta} \tag{5}$$

o

$$r = \frac{ep}{1 \pm e \operatorname{sen} \theta} \tag{6}$$

es la de una sección cónica con foco en el origen y eje a lo largo de un eje coordenado. El eje de la sección cónica está a lo largo del eje x para las ecuaciones de la forma (5), y a lo largo del eje y para las ecuaciones de la forma (6). La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $0 < e < 1$ y una hipérbola si $e > 1$.

EJEMPLO 1 Identificación de cónicas

Identificar cada una de las cónicas siguientes:

a) $r = \dfrac{2}{1 - 2 \operatorname{sen} \theta}$ ***b***) $r = \dfrac{3}{4 + \cos \theta}$

Solución ***a***) Al comparar término a término la ecuación con la forma polar $r = ep/(1 - e \operatorname{sen} \theta)$ se puede ver que $e = 2$. Por consiguiente, la cónica es una hipérbola. ***b***) Para identificar la sección cónica, se dividen numerador y denominador de la ecuación entre 4. Eso pone a la ecuación en la siguiente forma:

$$r = \frac{\frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{4}\cos \theta}.$$

Entonces, al comparar con $r = ep/(1 + e \cos \theta)$ se ve que $e = \frac{1}{4}$. Por consiguiente, la cónica es una elipse. ■

□ **Gráficas** Una gráfica aproximada de una cónica definida por (5) o (6) se obtiene conociendo la orientación de su eje, determinando los cruces con x y y y localizando los vértices. En el caso de (5),

- los dos vértices de la **elipse** o la **hipérbola** están en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$; el vértice de una **parábola** sólo puede estar en uno de los valores: $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.

Para la (6),

- los dos vértices de una **elipse** o una **hipérbola** están en $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$; el vértice de una **parábola** sólo puede estar en uno de los valores: $\theta = \pi/2$ o $\theta = 3\pi/2$.

EJEMPLO 2 Gráfica de una cónica

Graficar $r = \dfrac{4}{3 - 2 \operatorname{sen} \theta}$.

Solución Si la ecuación se escribe en la forma $r = \dfrac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta}$, se puede ver que la excentricidad es $e = \frac{2}{3}$, por lo que la cónica es una elipse. Además, como la ecuación tiene la forma (6), se ve que el eje de la elipse es vertical, a lo largo del eje y. Entonces, en vista de la descripción anterior a este ejemplo, se obtienen:

$$\textit{vértices:}\quad (4, \pi/2), (\tfrac{4}{5}, 3\pi/2)$$

$$\textit{intersecciones con el eje x en:}\quad (\tfrac{4}{3}, 0), (\tfrac{4}{3}, \pi).$$ ■

La gráfica de la ecuación está en la **FIGURA 6.6.4**.

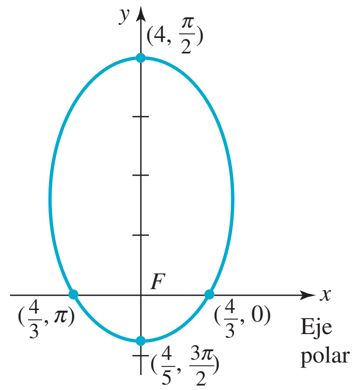


FIGURA 6.6.4 Gráfica de la ecuación polar en el ejemplo 2

EJEMPLO 3 Gráfica de una cónica

Graficar $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$.

Solución Al inspeccionar la ecuación se ve que tiene la forma (5), con $e = 1$. Por consiguiente, la cónica es una parábola cuyo eje es horizontal, a lo largo del eje x. Como r no está definido en $\theta = 0$, el vértice de la parábola está en $\theta = \pi$:

$$\textit{vértice:}\quad (\tfrac{1}{2}, \pi)$$

$$\textit{intersecciones con el eje y en:}\quad (1, \pi/2), (1, 3\pi/2).$$

La gráfica de la ecuación se ve en la **FIGURA 6.6.5**. ■

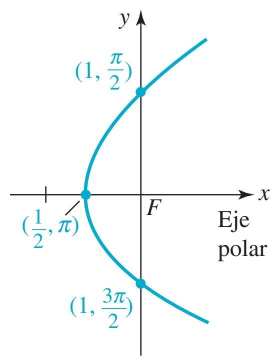


FIGURA 6.6.5 Gráfica de la ecuación polar del ejemplo 3

EJEMPLO 4 Gráfica de una cónica

Graficar $r = \dfrac{2}{1 + 2\cos\theta}$.

Solución De (5) se ve que $e = 2$, y entonces la cónica es una hipérbola cuyo eje es horizontal, a lo largo del eje x. Los vértices, que son los extremos del eje transversal de la hipérbola, están en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$:

$$\textit{vértices:}\quad (\tfrac{2}{3}, 0), (-2, \pi)$$

$$\textit{intersecciones con el eje y en:}\quad (2, \pi/2), (2, 3\pi/2).$$

La gráfica de la ecuación se ve en la **FIGURA 6.6.6**. ■

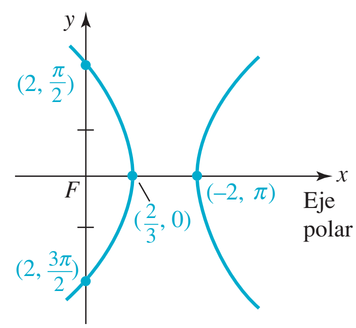


FIGURA 6.6.6 Gráfica de la ecuación polar del ejemplo 4

☐ Secciones cónicas rotadas

Vimos en la sección 6.5 que las gráficas de $r = f(\theta - \gamma)$ y $r = f(\theta + \gamma)$, $\gamma > 0$ son rotaciones de la gráfica de la ecuación polar $r = f(\theta)$ alrededor del origen por una cantidad γ. Por lo tanto,

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{ep}{1 \pm e\cos(\theta - \gamma)} \\ r &= \frac{ep}{1 \pm e\operatorname{sen}(\theta - \gamma)} \end{aligned}\right\} \text{secciones cónicas rotadas en sentido opuesto al de las manecillas del reloj alrededor del origen}$$

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{ep}{1 \pm e\cos(\theta + \gamma)} \\ r &= \frac{ep}{1 \pm e\operatorname{sen}(\theta + \gamma)} \end{aligned}\right\} \text{secciones cónicas rotadas en sentido de las agujas del reloj alrededor del origen}$$

EJEMPLO 5 Secciones cónicas rotadas

En el ejemplo 2 vimos que la gráfica de $r = \dfrac{4}{3 - 2\operatorname{sen}\theta}$ es una elipse con su eje mayor a lo largo del eje y. Esto es la gráfica azul de la **FIGURA 6.6.7**. La gráfica de $r = \dfrac{4}{3 - 2\operatorname{sen}(\theta - 2\pi/3)}$ es la gráfica roja de la figura 6.6.7 y es una rotación en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj de la gráfica azul por la cantidad de $2\pi/3$ (o 120°) alrededor del origen. El eje mayor de la elipse roja está situado a lo largo de la línea $\theta = 7\pi/6$. ■

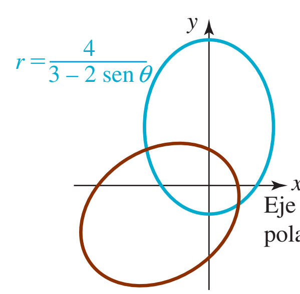


FIGURA 6.6.7 Gráficas de ecuaciones polares del ejemplo 5

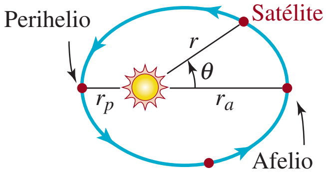
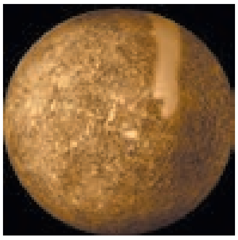


FIGURA 6.6.8 Órbita del satélite alrededor del Sol.

☐ **Aplicaciones** Las ecuaciones del tipo que aparecen en (5) y (6) son adecuadas para descubrir una órbita cerrada de un satélite alrededor del Sol (o la Tierra o la Luna), ya que tal órbita es una elipse con el Sol (o la Tierra o la Luna) en un foco. Suponga que una ecuación de la órbita está dada por $r = ep/(1 - e\cos\theta), 0 < e < 1$, y r_p es el valor de r en el perihelio (o perigeo, o perilunio), y r_a es el valor de r en el afelio (o apogeo o apolunio). Éstos son los puntos de la órbita, que ocurren en el eje x, en los cuales el satélite está más cercano y más lejano, respectivamente, del Sol (o de la Tierra o la Luna). Vea la FIGURA 8.68. Se deja como ejercicio demostrar que la excentricidad e de la órbita está relacionada con r_p y con r_a por

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}. \tag{7}$$



Mercurio es el planeta más cercano al Sol

EJEMPLO 6 Deducción de la ecuación polar de una órbita

Deducir la ecuación polar de la órbita de Mercurio en torno al Sol, si $r_p = 2.85 \times 10^7$ millas, y $r_a = 4.36 \times 10^7$ millas.

Solución Según (7), la excentricidad de la órbita de Mercurio es

$$e = \frac{4.36 \times 10^7 - 2.85 \times 10^7}{4.36 \times 10^7 + 2.85 \times 10^7} = 0.21.$$

Por consiguiente,

$$r = \frac{0.21p}{1 - 0.21\cos\theta}.$$

Todo lo que se necesita ahora es despejar la cantidad $0.21p$. Para hacerlo se aprovecha que el afelio se presenta cuando $\theta = 0$:

$$4.36 \times 10^7 = \frac{0.21p}{1 - 0.21}.$$

De la última ecuación, $0.21p = 3.44 \times 10^7$. Por consiguiente, una ecuación polar de la órbita de Mercurio es

$$r = \frac{3.44 \times 10^7}{1 - 0.21\cos\theta}.$$ ■

6.6 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-21.

En los problemas 1 a 10, determine la excentricidad, identifique la cónica y trace su gráfica.

1. $r = \dfrac{2}{1 - \operatorname{sen}\theta}$

2. $r = \dfrac{2}{2 - \cos\theta}$

3. $r = \dfrac{16}{4 + \cos\theta}$

4. $r = \dfrac{5}{2 + 2\operatorname{sen}\theta}$

5. $r = \dfrac{4}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$

6. $r = \dfrac{-4}{\cos\theta - 1}$

7. $r = \dfrac{18}{3 - 6\cos\theta}$

8. $r = \dfrac{4\csc\theta}{3\csc\theta + 2}$

9. $r = \dfrac{6}{1 - \cos\theta}$

10. $r = \dfrac{2}{2 + 5\cos\theta}$

En los problemas 11 a 14, determine la excentricidad e de la cónica. A continuación convierta la ecuación polar en ecuación rectangular, y verifique que $e = c/a$,

11. $r = \dfrac{6}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$

12. $r = \dfrac{10}{2 - 3\cos\theta}$

13. $r = \dfrac{12}{3 - 2\cos\theta}$

14. $r = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \operatorname{sen}\theta}$

En los problemas 15 a 20, deduzca la ecuación polar de la cónica, con foco en el origen, que satisfaga las condiciones indicadas.

15. $e = 1$, directriz $x = 3$

16. $e = \frac{3}{2}$, directriz $y = 2$

17. $e = \frac{2}{3}$, directriz $y = -2$

18. $e = \frac{1}{2}$, directriz $x = 4$

19. $e = 2$, directriz $x = 6$

20. $e = 1$, directriz $y = -2$

21. Busque una ecuación polar de la sección cónica en el problema 15 si la gráfica es rotada en el sentido de las agujas del reloj alrededor del origen por una cantidad de $2\pi/3$.

22. Busque una ecuación polar de la sección cónica en el problema 16 si la gráfica es rotada en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj alrededor del origen por una cantidad de $\pi/6$.

En los problemas 23 a 28, deduzca la ecuación polar de la parábola con foco en el origen y el vértice indicado.

23. $(\frac{3}{2}, 3\pi/2)$

24. $(2, \pi)$

25. $(\frac{1}{2}, \pi)$

26. $(2, 0)$

27. $(\frac{1}{4}, 3\pi/2)$

28. $(\frac{3}{2}, \pi/2)$

En los problemas 29 a 32, identifique la sección cónica rotada. Busque las coordenadas polares de su vértice o vértices.

29. $r = \dfrac{4}{1 + \cos(\theta - \pi/4)}$

30. $r = \dfrac{5}{3 + 2\cos(\theta - \pi/3)}$

31. $r = \dfrac{10}{2 - \operatorname{sen}(\theta + \pi/6)}$

32. $r = \dfrac{6}{1 + 2\operatorname{sen}(\theta + \pi/3)}$

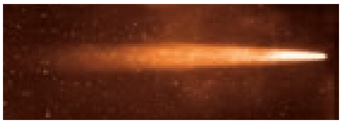
33. Un satélite de comunicaciones está a 12 000 km sobre la superficie terrestre en su apogeo. La excentricidad de su órbita elíptica es 0.2. Use (7) para calcular su distancia en perigeo.

34. Deduzca una ecuación polar $r = ep/(1 - e\cos\theta)$ de la órbita del satélite del problema 33.

35. Deduzca la ecuación polar de la órbita de la Tierra alrededor del Sol si $r_p = 1.47 \times 10^8$ km y $r_a = 1.52 \times 10^8$ km.

36. ***a***) La excentricidad de la órbita elíptica del cometa Halley es 0.97, y la longitud del eje mayor de su órbita es 3.34×10^9 mi. Deduzca la ecuación polar de su órbita, con la forma $r = ep/(1 - e\cos\theta)$.

b) Use la ecuación del inciso *a*) para obtener r_p y r_a de la órbita del cometa Halley.



La siguiente llegada del cometa Halley al Sistema Solar será en 2061

Problemas para calculadora o computadora

En los problemas 37 a 40, use una calculadora o una computadora para sobreponer las gráficas de las dos ecuaciones polares dadas en los mismos ejes coordenados.

37. $r = \dfrac{4}{4 + 3\cos\theta}$; $\quad r = \dfrac{4}{4 + 3\cos(\theta - \pi/2)}$

38. $r = \dfrac{4}{6 - 3\,\mathrm{sen}\,\theta}$; $\quad r = \dfrac{4}{6 - 3\,\mathrm{sen}(\theta - \pi)}$

39. $r = \dfrac{2}{1 - \mathrm{sen}\,\theta}$; $\quad r = \dfrac{2}{1 - \mathrm{sen}(\theta + 3\pi/4)}$

40. $r = \dfrac{8}{3 + 5\cos\theta}$; $\quad r = \dfrac{8}{3 + 5\cos(\theta - 2\pi/3)}$

Las características orbitales (excentricidad, perigeo y eje mayor) de un satélite cercano a la Tierra se degradan en forma gradual, al paso del tiempo, debido a muchas fuerzas pequeñas que actúan sobre el satélite, además de la fuerza gravitacional de la Tierra. Entre esas fuerzas se destacan la fricción atmosférica, las atracciones gravitacionales del Sol y la Luna, y fuerzas magnéticas. Alrededor de una vez al mes se activan cohetes diminutos, durante algunos segundos, para "regenerar" las características orbitales hasta los intervalos deseados. Se encienden los cohetes durante más tiempo para crear un cambio grande en la órbita de un satélite. La forma más eficiente de hacer pasar un satélite de una órbita interna a una externa se llama **transferencia de Hohmann**, que implica agregar velocidad en la dirección del vuelo, en el momento en que el satélite llega al perigeo de la órbita interna, siga la elipse de transferencia de Hohmann la mitad de su recorrido hasta su apogeo, y aumentar de nuevo la velocidad para estar en la órbita externa. El proceso similar (desacelerar en el apogeo, en la órbita externa y desacelerar en el perigeo, en la órbita de transferencia de Hohmann) se usa para mover un satélite de una órbita externa a una interna.

En los problemas 41 a 44 use una calculadora graficadora, o una computadora, para sobreponer las gráficas de las tres ecuaciones polares en los mismos ejes coordenados. Imprima su resultado y use colores para delinear la transferencia de Hohmann:

41. Órbita interna $r = \dfrac{24}{1 + 0.2\cos\theta}$, transferencia de Hohmann $r = \dfrac{32}{1 + 0.6\cos\theta}$,

órbita externa $r = \dfrac{56}{1 + 0.3\cos\theta}$

42. Órbita interna $r = \dfrac{5.5}{1 + 0.1\cos\theta}$, transferencia de Hohmann $r = \dfrac{7.5}{1 + 0.5\cos\theta}$,

órbita externa $r = \dfrac{13.5}{1 + 0.1\cos\theta}$

43. Órbita interna $r = 9$, transferencia de Hohmann $r = \dfrac{15.3}{1 + 0.7\cos\theta}$,

órbita externa $r = 51$

44. Órbita interna $r = \dfrac{73.5}{1 + 0.05\cos\theta}$, transferencia de Hohmann $r = \dfrac{77}{1 + 0.1\cos\theta}$,

órbita externa $r = \dfrac{84.7}{1 + 0.01\cos\theta}$

Para discusión

45. Demuestre que (2) da como resultado ecuaciones de una elipse en su forma normal, en el caso en que $0 < e < 1$, y una hipérbola en el caso en que $e > 1$.

46. Use la ecuación $r = ep/(1 - e\cos\theta)$ para derivar el resultado en (7).

6.7 Ecuaciones paramétricas

Introducción Las ecuaciones rectangulares no son las únicas, y con frecuencia no las más convenientes, para describir curvas en el plano coordenado. En esta sección expondremos una forma distinta de representar una curva que es importante en muchas aplicaciones de cálculo. Veamos un ejemplo. El movimiento de una partícula a lo largo de una curva, en contraste con a lo largo de una recta, se llama *movimiento curvilíneo*. Si se supone que una pelota de golf es golpeada desde el suelo, perfectamente en línea recta (sin curva ni efecto) y que su trayectoria permanece en un plano de coordenadas como el que se ve en la **FIGURA 6.7.1**, entonces, con ayuda de la física y del cálculo se puede demostrar que sus coordenadas x y y, en el momento t, se definen por

$$x = (v_0 \cos\theta_0)t, \qquad y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t, \tag{1}$$

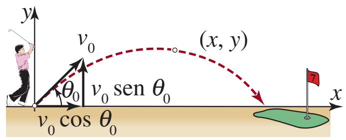


FIGURA 6.7.1 ¡Cuidado!

en donde θ_0 es el ángulo de lanzamiento, v_0 es la velocidad inicial y $g = 32$ pies/s^2 es la aceleración de la gravedad. Esas ecuaciones, que describen la posición de la pelota de golf en el plano coordenado cuando el tiempo es t, se llaman **ecuaciones paramétricas**. La tercera variable t en (1) se llama **parámetro** y se restringe a cierto intervalo $0 \leq t \leq T$, en donde $t = 0$ define al origen $(0, 0)$ y $t = T$ es el momento en el que la pelota llega al suelo.

En general, una curva en un plano coordenado se puede *definir* en términos de ecuaciones paramétricas.

CURVA PLANA

Una **curva plana**, o **curva en el plano**, es un conjunto C de pares ordenados $(f(t), g(t))$, donde f y g son funciones definidas en un intervalo común I. Las ecuaciones

$$x = f(t),\; y = g(t), \text{ para } t \text{ en } I,$$

se llaman **ecuaciones paramétricas** de C. La variable t se llama **parámetro**.

También se acostumbra llamar **parametrización** de C a $x = f(t)$, $y = g(t)$ para t en I.

La **gráfica** de una curva plana C es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano coordenado que corresponden a los pares ordenados $(f(t), g(t))$. En adelante, llamaremos **curva** o **curva parametrizada** a una curva plana.

EJEMPLO 1 Gráfica de una curva paramétrica

Graficar la curva C que tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2, \qquad y = t^3, \qquad -1 \leq t \leq 2.$$

Solución Como se ve en la tabla adjunta, para cualquier elección de t en el intervalo $[-1, 2]$, se obtiene un solo par ordenado (x, y). Al unir los puntos con una curva se obtiene la gráfica de la **FIGURA 6.7.2**.

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4
y	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	8

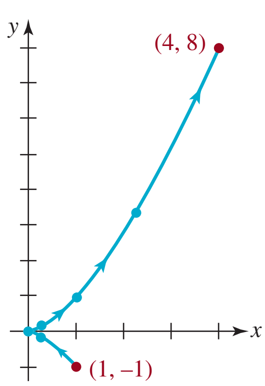


FIGURA 6.7.2 Curva del ejemplo 1

En el ejemplo 1, al pensar en términos de movimiento y t como tiempo, cuando aumenta t de -1 a 2, un punto P definido como (t^2, t^3) parte de $(1, -1)$, avanza subiendo por la rama inferior hasta el origen (0, 0), pasa a la rama superior y por último se detiene en (4, 8). En general, al graficar puntos correspondientes a *valores crecientes* del parámetro, la curva C es recorrida por $(f(t), g(t))$ en cierta *dirección* indicada por las flechas de la curva de la figura 6.7.2. A esta dirección se le llama **orientación** de la curva C.

No es necesario que un parámetro esté relacionado con el tiempo. Cuando el intervalo I dentro del cual f y g en (1) están definidos es un intervalo cerrado $[a, b]$, se dice que $(f(a), g(a))$ es el **punto inicial** de la curva C, y que $(f(b), g(b))$ es el **punto terminal**. En el ejemplo 1, el punto inicial es $(1, -1)$ y el punto terminal es (4, 8). Si el punto terminal es el mismo que el punto inicial, esto es,

$$(f(a), g(a)) = (f(b), g(b))$$

entonces C es una **curva cerrada**. Si C es cerrada pero no se cruza se llama **curva cerrada simple**. En la **FIGURA 6.7.3**, A y B representan los puntos inicial y terminal, respectivamente.

a) Curva plana *b*) Curva cerrada simple *c*) Curva cerrada, pero no simple

FIGURA 6.7.3 Algunas curvas planas

El siguiente ejemplo ilustra una curva cerrada simple.

EJEMPLO 2 Parametrización de un círculo

Definir una parametrización del círculo $x^2 + y^2 = a^2$.

Solución El círculo tiene centro en el origen y su radio es a. Si t representa el ángulo central, es decir, el ángulo con vértice en el origen y lado inicial coincidente con el eje x positivo, entonces, como se ve en la **FIGURA 6.7.4**, las ecuaciones

$$x = a\cos t, \qquad y = a\,\mathrm{sen}\,t, \qquad 0 \le t \le 2\pi \tag{2}$$

definen cada punto P en el círculo. Por ejemplo, cuando $t = 0$, se obtiene $x = a$ y $y = 0$; en otras palabras, el punto inicial es $(a, 0)$. El punto terminal corresponde a $t = 2\pi$, y también es $(a, 0)$. Como los puntos inicial y terminal son iguales, se demuestra lo que es obvio: que la curva C definida por las ecuaciones paramétricas (2) es una curva cerrada. Observe la orientación de C en la figura 6.7.4: cuando t aumenta de 0 a 2π, el punto P describe a C en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. ■

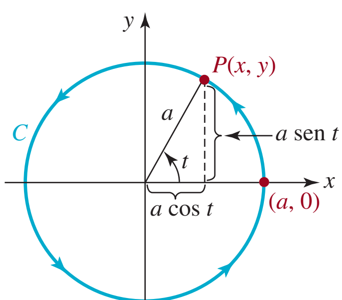


FIGURA 6.7.4 Círculo del ejemplo 2

En el ejemplo 2, el *semicírculo* superior $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \le y \le a$, se define en forma paramétrica restringiendo el intervalo del parámetro a $[0, \pi]$,

$$x = a\cos t, \qquad y = a\,\mathrm{sen}\,t, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Observe que cuando $t = \pi$, el punto terminal es ahora $(-a, 0)$. Por otra parte, si se desean describir *dos* revoluciones completas en sentido contrario al de las manecillas del reloj en torno al círculo, de nuevo se modifica el intervalo del parámetro escribiendo

$$x = a\cos t, \qquad y = a\,\mathrm{sen}\,t, \qquad 0 \le t \le 4\pi.$$

Eliminación del parámetro Dado un conjunto de ecuaciones paramétricas, a veces se desea eliminar o simplificar el parámetro para obtener la ecuación rectangular de la curva. Para eliminar el parámetro en (2) tan sólo se elevan al cuadrado x y y y se suman las dos ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2\operatorname{sen}^2 t \qquad \text{implica que} \qquad x^2 + y^2 = a^2$$

porque $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$.

EJEMPLO 3 Eliminación del parámetro

a) De la primera ecuación en (1), $t = x/(v_0\cos\theta_0)$. Esta expresión se sustituye en la segunda ecuación y entonces se obtiene

$$y = -\frac{g}{2(v_0\cos\theta_0)^2}x^2 + (\tan\theta_0)x.$$

Ya que v_0, θ_0 y g son constantes, la última ecuación tiene la forma $y = ax^2 + bx$ y entonces, la trayectoria de todo proyectil lanzado con el ángulo $0 < \theta_0 < \pi/2$ es un arco parabólico.
b) En el ejemplo 1 se puede eliminar el parámetro despejando a t de la segunda ecuación, en función de y para después sustituir en la primera ecuación. Se ve que

$$t = y^{1/3} \quad \text{y así} \quad x = (y^{1/3})^2 = y^{2/3}.$$

La curva de la figura 6.7.2 sólo es una parte de la gráfica de $x = y^{2/3}$. Para $-1 \le t \le 2$, se tiene que $-1 \le y \le 8$. Entonces, la ecuación rectangular de la curva del ejemplo 2 es $x = y^{2/3}$, $-1 \le y \le 8$. ■

Una curva C puede tener más de una parametrización. Por ejemplo, una parametrización alternativa del círculo del ejemplo 2 es

Una curva C puede tener muchas parametrizaciones diferentes.

$$x = a\cos 2t, \qquad y = a\operatorname{sen} 2t, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Nótese que el intervalo del parámetro es ahora $[0, \pi]$. Se ve que cuando t aumenta de 0 a π, el nuevo ángulo $2t$ aumenta de 0 a 2π.

EJEMPLO 4 Parametrizaciones alternativas

Se tiene la curva C, cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t$, $y = 2t^2$, $-\infty < t < \infty$. Se puede eliminar el parámetro usando $t = x$, y sustituyendo en $y = 2t^2$. De ese modo se obtiene la ecuación rectangular $y = 2x^2$, en la que reconocemos una parábola. Además, como $-\infty < t < \infty$ equivale a $-\infty < x < \infty$, el punto $(t, 2t^2)$ describe la parábola completa $y = 2x^2$, $-\infty < x < \infty$.

Una parametrización alternativa de C se obtiene con $x = t^3/4$, $y = t^6/8$, $-\infty < t < \infty$. Si se usa $t^3 = 4x$ y se sustituye en $y = t^6/8$, o $y = (t^3 \cdot t^3)/8$ se obtiene $y = ((4x)^2/8) = 2x^2$. Además, $-\infty < t < \infty$ implica que $-\infty < t^3 < \infty$, y así $-\infty < x < \infty$. ■

Se nota que en el ejemplo 4, un punto en C no necesita corresponder al mismo valor del parámetro en cada conjunto de ecuaciones paramétricas de C. Por ejemplo, se obtiene $(1, 2)$ para $t = 1$ en $x = t$, $y = 2t^2$, pero $t = \sqrt[3]{4}$ produce $(1, 2)$ en $x = t^3/4$, $y = t^6/8$.

EJEMPLO 5 Regreso al ejemplo 4

Se debe tener cuidado al trabajar con ecuaciones paramétricas. Parecería que la eliminación del parámetro en $x = t^2$, $y = 2t^4$, $-\infty < t < \infty$ llegaría a la misma parábola $y = 2x^2$ que en el ejemplo 4. Sin embargo *no* es así, porque para todo valor de t, $t^2 \ge 0$ y entonces $x \ge 0$. En otras palabras, el último conjunto de ecuaciones es una representación paramétrica sólo de la rama derecha de la parábola, esto es, $y = 2x^2$, $0 \le x < \infty$. ■

Proceda con precaución cuando elimine el parámetro.

EJEMPLO 6 Eliminación del parámetro

Se tiene la curva C, definida paramétricamente por

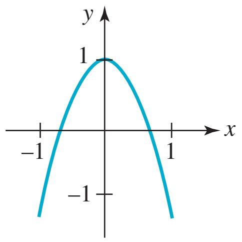
$$x = \operatorname{sen} t, \qquad y = \cos 2t, \qquad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Eliminar el parámetro y obtener una ecuación rectangular de C.

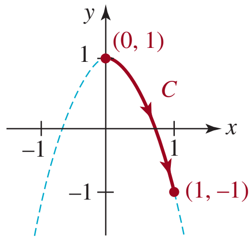
Solución Se aplica la fórmula de ángulo doble, $\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$, y se puede escribir que

$$\begin{aligned} y &= \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t \\ &= (1 - \operatorname{sen}^2 t) - \operatorname{sen}^2 t \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 t && \leftarrow \text{sustituir } \operatorname{sen} t = x \\ &= 1 - 2x^2. \end{aligned}$$

Ahora la curva C descrita por las ecuaciones paramétricas no consiste en la parábola completa; esto es, $y = 1 - 2x^2$, $-\infty < x < \infty$. Vea la **FIGURA 6.7.5*a*)**. Para $0 \leq t \leq \pi/2$ sucede que $0 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$, y $-1 \leq \cos 2t \leq 1$. Eso quiere decir que C sólo es la porción de la parábola para la cual las coordenadas de un punto $P(x, y)$ satisfacen $0 \leq x \leq 1$ *y también* $-1 \leq y \leq 1$. La curva C, con su orientación, se ve en la figura 6.7.5*b*). Una ecuación rectangular de C es $y = 1 - 2x^2$, con el dominio restringido $0 \leq x \leq 1$. ■



a) $y = 1 - 2x^2$



b) $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos 2t$, $0 \leq t \leq \pi/2$

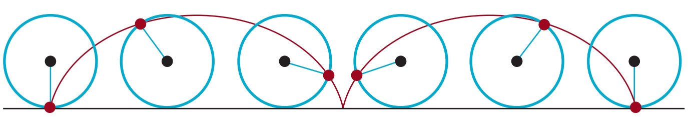
FIGURA 6.7.5 Curva C del ejemplo 6

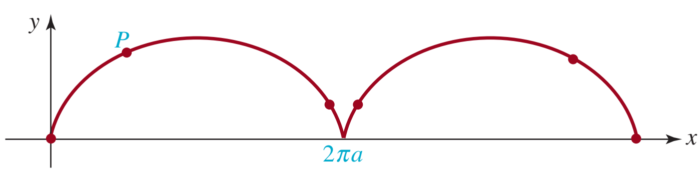
☐ Intersecciones con los ejes coordenados

Se obtienen las intersecciones con los ejes coordenados de una curva C sin determinar su ecuación rectangular. En el ejemplo 6 se puede determinar la intersección con el eje x encontrando el valor de t en el intervalo del parámetro para el cual $y = 0$. La ecuación $\cos 2t = 0$ da como resultado $2t = \pi/2$, así que $t = \pi/4$. El punto correspondiente donde C cruza al eje x es $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$. De igual manera, la intersección con el eje y de C se determina resolviendo $x = 0$. De $\operatorname{sen} t = 0$ se ve de inmediato que $t = 0$ y entonces la intersección con el eje y está en $(0, 1)$.

☐ Aplicaciones de las ecuaciones paramétricas

En el siglo XVII, las curvas cicloidales fueron un tema de estudio difundido entre los matemáticos. Suponga que un punto $P(x, y)$ marcado en un círculo de radio a, está en el origen cuando su diámetro está a lo largo del eje y. Cuando el círculo rueda por el eje x, el punto P describe una curva C llamada **cicloide**. Vea la **FIGURA 6.7.6**.[1]


a) Círculo que rueda en el eje x



b) En el círculo, el punto P traza esta curva

FIGURA 6.7.6 Cicloide

También en el siglo XVII se estudiaron extensamente dos problemas. Imagine un alambre flexible y sin fricción fijo en los puntos A y B, y una cuenta libre que resbala por el alambre a partir de P. Vea la **FIGURA 6.7.7**. ¿Hay alguna forma en particular del alambre para la cual, in-

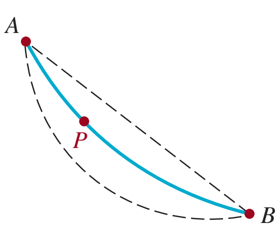


FIGURA 6.7.7 Cuenta deslizante

[1] Se puede ver una animación del círculo rodante en http://mathworld.wolfram.com/Cycloid.html.

dependientemente de dónde parta la cuenta, el tiempo para resbalar por el alambre hasta B sea el mismo? También, ¿cuál sería la forma del alambre para que la cuenta resbale de P a B en el tiempo más corto? Se demostró que las curvas llamadas **tautócrona** (igual tiempo) y **braquistócrona** (tiempo mínimo) son un medio arco de cicloide invertida.

EJEMPLO 7 Parametrización de una cicloide

Definir una parametrización de la cicloide de la figura 6.7.6*b*).

Solución Un círculo de radio a cuyo diámetro esté inicialmente a lo largo del eje y rueda por el eje x sin resbalar. Tomaremos como parámetro el ángulo θ (en radianes) que ha rodado por el círculo. El punto $P(x, y)$ comienza en el origen, que corresponde a $\theta = 0$. A medida que el círculo rueda el ángulo θ, su distancia al origen es el arco $PE = \overline{OE} = a\theta$. Entonces, se ve en la **FIGURA 6.7.8** que la intersección con el eje x de P es

$$x = \overline{OE} - \overline{QE} = a\theta - a\operatorname{sen}\theta.$$

Entonces, se ve que la ordenada y de P es

$$y = \overline{CE} - \overline{CD} = a - a\cos\theta.$$

Por lo anterior, las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

$$x = a\theta - a\operatorname{sen}\theta, \qquad y = a - a\cos\theta.$$

Como se ve en la figura 6.7.6*a*), un arco de una cicloide se genera por una rotación del círculo, y corresponde al intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ del parámetro. ■

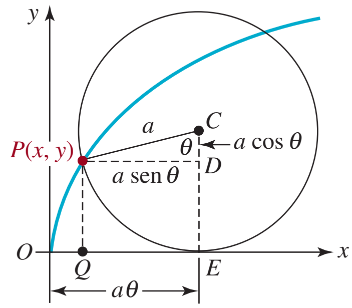


FIGURA 6.7.8. El ángulo θ es el parámetro para la cicloide

□ Parametrización de curvas rectangulares y polares

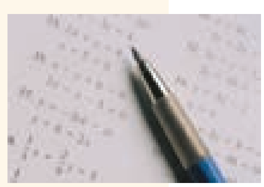
Una curva C descrita por una función continua $y = f(x)$ siempre se puede parametrizar haciendo que $x = t$. Entonces, las ecuaciones paramétricas de C son

$$x = t, \qquad y = f(t). \tag{3}$$

También, a veces conviene usar ecuaciones paramétricas para trazar las gráficas de ecuaciones polares. Eso se hace usando las fórmulas de conversión $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$. Si $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ describe una curva polar C, entonces, una parametrización de C es

$$x = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta, \qquad \alpha \leq \theta \leq \beta. \tag{4}$$

NOTAS PARA EL SALÓN DE CLASE



En esta sección nos hemos concentrado en las **curvas planas**, que son curvas C definidas paramétricamente en dos dimensiones. En el cálculo de varias variables se verán curvas y superficies en tres dimensiones, que se definen mediante ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, una **curva en el espacio** C consiste en un conjunto de tercias ordenadas $(f(t), g(t), h(t))$, donde f, g y h están definidas en un intervalo común. Las ecuaciones paramétricas de C son $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$. Por ejemplo, una **hélice circular** como la de la **FIGURA 6.7.9** es una curva en el espacio cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = a\cos t, \quad y = a\cos t, \quad z = bt, \quad t \geq 0. \tag{5}$$

Se pueden representar superficies en tres dimensiones con un conjunto de ecuaciones paramétricas que contengan *dos* parámetros, $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$. Por ejemplo, la **helicoide circular** de la FIGURA 6.7.10 se presenta en el estudio de superficies mínimas, y se define con el conjunto de ecuaciones paramétricas parecido a las (5):

$$x = u\cos v, \quad y = u\,\mathrm{sen}\,v, \quad z = bv,$$

en donde b es una constante. La helicoide circular tiene una hélice circular como contorno. El lector podría reconocer que la helicoide es el modelo de un gusano en maquinaria como excavadoras de agujeros, taladradora de hielo, transportadores de sólidos a granel, etcétera.

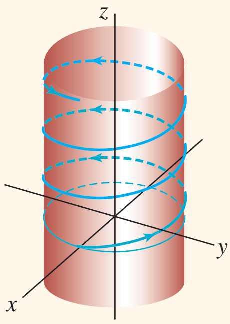


FIGURA 6.7.9 Hélice circular

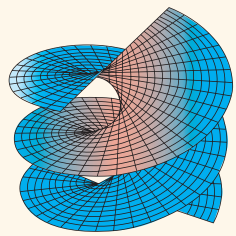
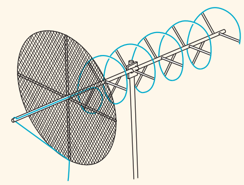


FIGURA 6.7.10 Helicoide circular


El ADN es una doble hélice


Antena helicoidal

6.7 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-22.

En los problemas 1 y 2 llene la tabla para el conjunto de ecuaciones paramétricas indicado. Determine las coordenadas de los puntos de cruce con los ejes x y y. Trace la curva e indique su orientación.

1. $x = t + 2, y = 3 + \frac{1}{2}t, \quad -\infty < t < \infty$

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x							
y							

2. $x = 2t + 1, y = t^2 + t, \quad -\infty < t < \infty$

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x							
y							

En los problemas 3 a 10, trace la curva que tenga el conjunto de ecuaciones paramétricas indicadas.

3. $x = t - 1, y = 2t - 1, \quad -1 \leq t \leq 5$

4. $x = t^2 - 1, y = 3t, \quad -2 \leq t \leq 3$

5. $x = \sqrt{t}, y = 5 - t, \quad t \geq 0$

6. $x = t^3 + 1, y = t^2 - 1, \quad -2 \leq t \leq 2$

7. $x = 3\cos t, y = 5\,\mathrm{sen}\,t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

8. $x = 3 + 2\operatorname{sen} t, y = 4 + \operatorname{sen} t, \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$
9. $x = e^t, y = e^{3t}, \quad 0 \le t \le \ln 2$
10. $x = -e^t, y = e^{-t}, \quad t \ge 0$

En los problemas 11 a 18, elimine el parámetro del conjunto indicado de ecuaciones paramétricas, y obtenga una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica.

11. $x = t^2, y = t^4 + 3t^2 - 1$
12. $x = t^3 + t + 4, y = -2(t^3 + t)$
13. $x = \cos 2t, y = \operatorname{sen} t, \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$
14. $x = e^t, y = \ln t, \quad t > 0$
15. $x = t^3, y = 3\ln t, \quad t > 0$
16. $x = \tan t, y = \sec t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
17. $x = 4\cos t, y = 2\operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$
18. $x = -1 + \cos t, y = 2 + \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

En los problemas 19 a 24, indique gráficamente la diferencia entre las curvas indicadas.

19. $y = x$ y $x = \operatorname{sen} t, y = \operatorname{sen} t$
20. $y = x^2$ y $x = -\sqrt{t}, y = t$
21. $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ y $x = 2t, y = t^2 - 1, \quad -1 \le t \le 2$
22. $y = -x^2$ y $x = e^t, y = -e^{2t}, \quad t \ge 0$
23. $x^2 - y^2 = 1$ y $x = \cosh t, y = \operatorname{senh} t$ ← Vea (14) y (15) en la sección 5.4.
24. $y = 2x - 2$ y $x = t^2 - 1, y = 2t^2 - 4$

En los problemas 25 a 28, indique gráficamente la diferencia entre las curvas dadas. Suponga que $a > 0$ y $b > 0$.

25. $x = a\cos t, y = a\operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi$
    $x = a\operatorname{sen} t, y = a\cos t, \quad 0 \le t \le \pi$
26. $x = a\cos t, y = b\operatorname{sen} t, a > b, \quad \pi \le t \le 2\pi$
    $x = a\operatorname{sen} t, y = b\cos t, a > b, \quad \pi \le t \le 2\pi$
27. $x = a\cos t, y = a\operatorname{sen} t, \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$
    $x = a\cos 2t, y = a\operatorname{sen} 2t, \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$
28. $x = a\cos\frac{t}{2}, y = a\operatorname{sen}\frac{t}{2}, \quad 0 \le t \le \pi$
    $x = a\cos\left(-\frac{t}{2}\right), y = a\operatorname{sen}\left(-\frac{t}{2}\right), \quad -\pi \le t \le 0$

En los problemas 29 y 30, determine las intersecciones de las curvas con los ejes x y y.

29. $x = t^2 - 2t, y = t + 1, \quad -2 \le t < 4$
30. $x = t^2 + t, y = t^2 + t - 6, \quad -5 \le t < 5$

31. Demuestre que las ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \quad -\infty < t < \infty.$$

¿Qué representan esas ecuaciones cuando $0 \le t \le 1$?

32. ***a***) Use el resultado del problema 31 para deducir ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(-2, 5)$ y $(4, 8)$.
    b) Elimine el parámetro del inciso *a*) para obtener la ecuación rectangular de la recta.
    c) Deduzca las ecuaciones paramétricas del segmento de recta cuyo punto inicial es $(-2, 5)$ y punto terminal $(4, 8)$.

33. Un golfista famoso puede generar una velocidad aproximada de 130 mi/h o sea $v_0 =$ 190 pies/s en la cabeza del palo. Si la pelota sale del suelo en el ángulo $\theta_0 = 45°$, use (1) para deducir ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la pelota. ¿Cuáles son las coordenadas de la pelota cuando $t = 2$ s?

34. Use las ecuaciones paramétricas que obtuvo en el problema 33 para determinar

a) cuánto tiempo dura la pelota en el aire,

b) su altura máxima y

c) la distancia horizontal que recorre la pelota.

35. Como se ve en la **FIGURA 6.7.11**, un pistón se fija, mediante una biela de longitud L, a un mecanismo de cigüeñal de radio r. Parametrice las coordenadas del punto P en función del ángulo ϕ que muestra la figura.

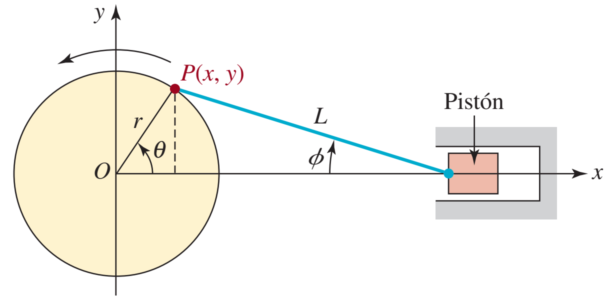


FIGURA 6.7.11 Mecanismo de cigüeñal del problema 35

36. Imagine un círculo de radio a, tangente al eje x en el origen. Sea B un punto en la recta horizontal $y = 2a$, y sea un segmento de recta OB que corte el círculo en el punto A. Como se ve en la **FIGURA 6.7.12**, la proyección de AB sobre la vertical define al segmento de recta BP. Use el ángulo θ de la figura como parámetro y deduzca las ecuaciones paramétricas de la curva descrita por el punto P, cuando A varía alrededor del círculo. La curva, más históricamente famosa que útil, se llama **bruja de Agnesi**.[2]

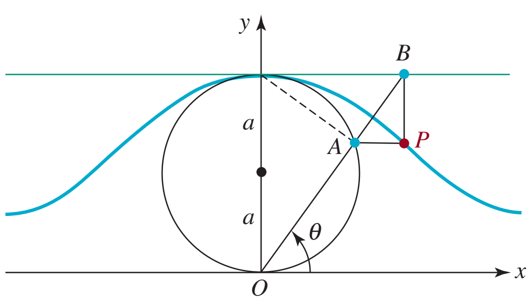


FIGURA 6.7.12 Bruja de Agnesi, del problema 36

Problemas para calculadora o computadora

En los problemas 37 a 42 use una función de graficación para obtener la gráfica del conjunto de ecuaciones paramétricas indicadas.

37. $x = 4\operatorname{sen} 2t,\ y = 2\operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

38. $x = 6\cos 3t,\ y = 4\operatorname{sen} 2t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

39. $x = 6\operatorname{sen} 4t,\ y = 4\operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

---

[2] La curva no tiene nada que ver con brujas y duendes. Esta curva se llamó *versoria*, que en latín quiere decir cualquier clase de cuerda, y fue incluida en un texto de geometría analítica escrito por **Maria Agnesi**, matemática italiana, en 1748. Un traductor del texto confundió *versoria* con la palabra italiana *versiera*, que quiere decir *duende femenino*. En inglés, *duende femenino* se convirtió en *bruja*.

40. $x = \cos t + t\,\mathrm{sen}\,t,\ y = \mathrm{sen}\,t - t\cos t, \quad 0 \le t \le 3\pi$

41. $x = 4\cos t - \cos 4t,\ y = 4\,\mathrm{sen}\,t - \mathrm{sen}\,4t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

42. $x = \cos^3 t,\ y = \mathrm{sen}^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

En los problemas 43 a 46, use (4) para parametrizar la curva cuya ecuación polar se presenta. Use una función graficadora para obtener la gráfica del conjunto resultante de ecuaciones paramétricas.

43. $r = 2\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\theta}{2}, \quad 0 \le \theta \le 4\pi$

44. $r = 2\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\theta}{4}, \quad 0 \le \theta \le 8\pi$

45. $r = 2\cos\dfrac{\theta}{5}, \quad 0 \le \theta \le 6\pi$

46. $r = 2\cos\dfrac{3\theta}{2}, \quad 0 \le \theta \le 6\pi$

6.8 Espacio tridimensional

Avance DE CÁLCULO

☐ En el plano, o **espacio bidimensional**, una manera de describir la posición de un punto P es la de asignarle coordenadas relativas a dos ejes coordenados perpendiculares que se llaman ejes x y y. La intersección de los dos ejes se llama el origen y es denotada O. Recuerde:

- una línea vertical $x = a$ consiste en todos los puntos de la forma (a, y) y
- una línea horizontal $y = b$ consiste en todos los puntos de la forma (x, b). (1)

Si P es el punto de intersección de la línea vertical $x = a$ (perpendicular al eje x) y la línea horizontal $y = b$ (perpendicular al eje y), se dice que el par ordenado (a, b) son las coordenadas rectangulares o cartesianas del punto. Vea la **FIGURA 6.8.1**. En esta sección extendemos este método de representación de un punto a tres dimensiones.

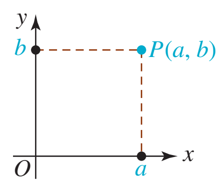


FIGURA 6.8.1 Un punto en el espacio bidimensional

☐ El sistema de coordenadas rectangulares en el espacio tridimensional

En tres dimensiones, o en el **espacio tridimensional**, se construye un sistema de coordenadas rectangulares, usando tres **ejes de coordenadas** mutuamente perpendiculares. El punto en el que estos ejes se cruzan se llama **origen** O. Los ejes dibujados como líneas sólidas en la **FIGURA 6.8.2a)** representan los ejes positivos y se marcan de acuerdo con la llamada **regla de la mano derecha** que se ilustra en la figura 6.8.2b):

- Si los dedos de la mano derecha, apuntando en la dirección del eje positivo x, están doblados hacia el eje positivo y, entonces el pulgar apuntará en la dirección de un nuevo eje perpendicular al plano de los ejes x y y. Este nuevo eje se llama eje z.

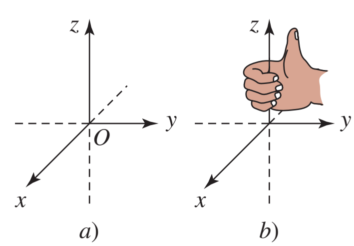


FIGURA 6.8.2 Ejes de coordenadas tridimensionales

Las líneas discontinuas de la figura 6.8.2a) representan los ejes negativos. Si los ejes x y y de la figura 6.8.2 se intercambian, se dice que el sistema de coordenadas está **manieto**. En el espacio tridimensional, el gráfico de las ecuaciones $x = a$, $y = b$ y $z = c$ consiste de todos los **triples ordenados** o puntos de la forma (a, y, z), (x, b, z) y (x, y, c), respectivamente. A su vez, las gráficas de las ecuaciones $x = a$, $y = b$ y $z = c$ son planos perpendiculares a los ejes x, y y z. El punto P donde estos planos se cruzan puede ser representado por un **triple ordenado** de números (a, b, c) que son **coordenadas rectangulares** o **cartesianas** del punto. Los números a, b y c se llaman coordenadas x, y y z de $P(a, b, c)$, respectivamente. Vea la **FIGURA 6.8.3**.

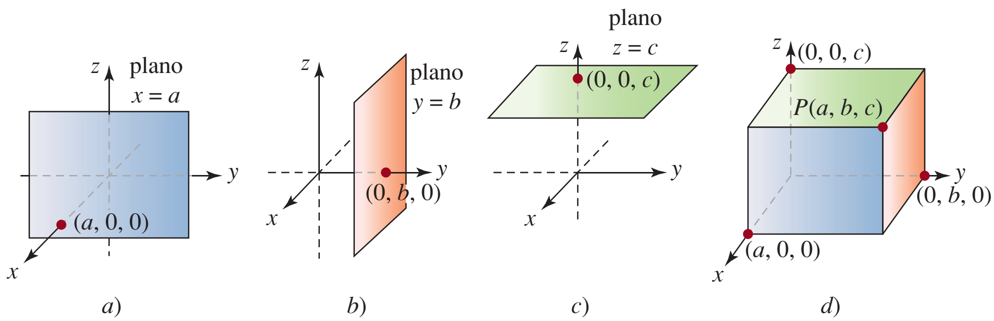


FIGURA 6.8.3 Tres planos mutuamente perpendiculares se cruzan en un punto

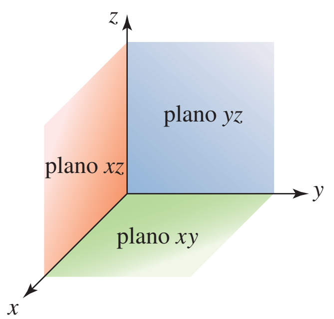


FIGURA 6.8.4 Planos coordenados

☐ Octantes

Cada par de ejes de coordenadas determina un **plano coordenado**. Como se muestra en color verde en la **FIGURA 6.8.4**, los ejes x y y determinan el **plano coordenado *xy*** o simplemente el **plano *xy***. De manera similar, los ejes x y y determinan el **plano *yz***, y los ejes x y z determinan el **plano *xz***. El plano coordenado divide el espacio tridimensional en ocho regiones conocidos como **octantes**. El octante donde las tres coordenadas de un punto $P(a, b, c)$ son *positivas* se llama **primer octante**. No hay ninguna convención para nombrar los otros siete octantes.

La tabla que sigue a continuación resume las coordenadas de un punto ya sea sobre un eje coordenado o sobre un plano coordenado. Como se ve en la tabla, también podemos describir el plano xy, por ejemplo, mediante la ecuación sencilla $z = 0$. En forma similar, el plano xz es $y = 0$ y el plano yz es $x = 0$. No se considera que un punto sobre un eje coordenado se encuentre en cualquier octante.

Ejes	Coordenadas	Plano	Coordenadas
x	$(x, 0, 0)$	xy	$(x, y, 0)$
y	$(0, y, 0)$	xz	$(x, 0, z)$
z	$(0, 0, z)$	yz	$(0, y, z)$

EJEMPLO 1 Graficar puntos en el espacio tridimensional

Graficar los puntos $(4, 5, 6)$, $(3, -3, -1)$ y $(-2, -2, 0)$.

Solución De los tres puntos que se muestran en la **FIGURA 6.8.5**, sólo $(4, 5, 6)$ se encuentra en el primer octante. El punto $(-2, -2, 0)$ se encuentra en el plano xy.

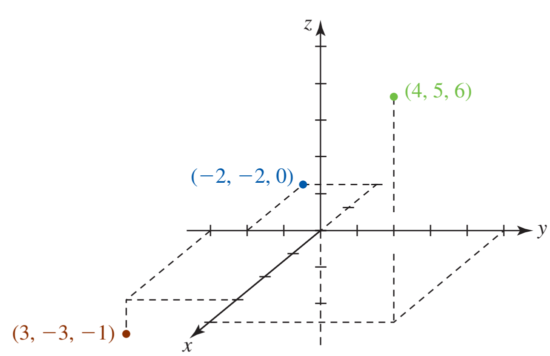


FIGURA 6.8.5 Los puntos del ejemplo 1 ■

☐ Fórmula de la distancia

Para encontrar la **distancia** entre dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ en el espacio tridimensional, primero vamos a considerar sus proyecciones al plano xy. Como se ve en la **FIGURA 6.8.6**, la distancia entre $(x_1, y_1, 0)$ y $(x_2, y_2, 0)$ se da mediante la fórmula de distancia usual en el plano, $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Por lo tanto, según el teorema pitagórico aplicado al triángulo de la derecha $P_1P_3P_2$, tenemos

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}]^2 + |z_2 - z_1|^2$$

o

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{1}$$

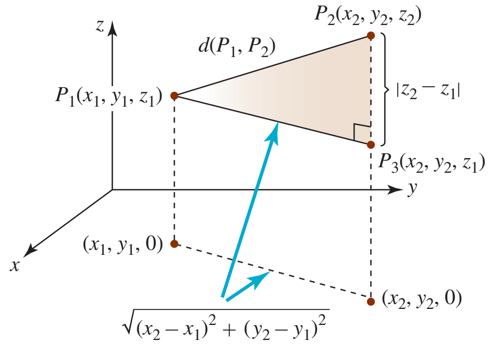


FIGURA 6.8.6 Distancia entre dos puntos en el espacio tridimensional

EJEMPLO 2 Distancia entre puntos en el espacio tridimensional

Busque la distancia entre $(2, -3, 6)$ y $(-1, -7, 4)$.

Solución Según (1), la distancia es

$$d = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-3 - (-7))^2 + (6 - 4)^2} = \sqrt{29}.$$

□ Fórmula del punto medio

La fórmula de la distancia se puede usar para demostrar que las coordenadas del **punto medio del segmento de la línea** en el espacio tridimensional que conectan los puntos distintos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right). \tag{2}$$

Vea el problema 68 en los ejercicios 6.8.

EJEMPLO 3 Punto medio en el espacio tridimensional

Busque las coordenadas del punto medio del segmento de la línea entre los dos puntos del ejemplo 2.

Solución Según (2) obtenemos

$$\left(\frac{2 + (-1)}{2}, \frac{-3 + (-7)}{2}, \frac{6 + 4}{2}\right) \quad \text{o} \quad \left(\tfrac{1}{2}, -5, 5\right).$$

□ Esfera

Como un círculo, una esfera se puede definir en términos de la fórmula de la distancia.

◀ Repase la sección 1.4.

ESFERA

Una **esfera** es el conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ que se encuentran a una distancia fija dada r, llamada **radio**, de un punto fijo dado C llamado **centro**.

Si el centro es $P_1(h, k, l)$, entonces un punto $P(x, y, z)$ se encuentra en la esfera exclusivamente si P_1 y P satisfacen $[d(P_1, P)]^2 = r^2$, o

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2. \tag{3}$$

La ecuación (3) se llama **forma normal** de la ecuación de una esfera.

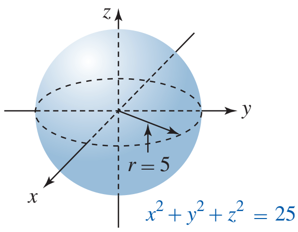


FIGURA 6.8.7 Esfera del ejemplo 4

EJEMPLO 4 Gráfica de una esfera

Graficar $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Solución Identificamos $h = 0$, $k = 0$, $l = 0$ y $r^2 = 25 = 5^2$ en (3), así que la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ es una esfera del radio 5 cuyo centro se encuentra en el origen. La gráfica de la ecuación se muestra en la FIGURA 6.8.7. ■

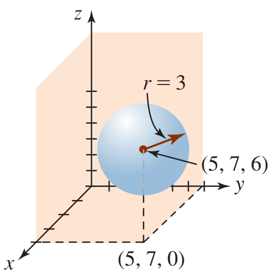


FIGURA 6.8.8 Esfera del ejemplo 5

EJEMPLO 5 Gráfica de una esfera

Grafique $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 + (z - 6)^2 = 9$.

Solución En este caso, identificamos $h = 5$, $k = 7$, $l = 6$ y $r^2 = 9$. Por (3), vemos que la gráfica de $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 + (z - 6)^2 = 3^2$ es una esfera con centro (5, 7, 6) y radio 3. Su gráfica está comprendida por completo en el primer octante y se muestra en la FIGURA 6.8.8. ■

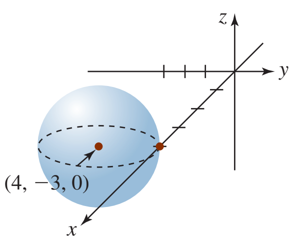


FIGURA 6.8.9 La esfera tangencial al plano $y = 0$ del ejemplo 6

EJEMPLO 6 Ecuación de una esfera

Busque una ecuación de la esfera cuyo centro es $(4, -3, 0)$ que es tangencial al plano xz.

Solución La distancia perpendicular del punto $(4, -3, 0)$ al plano xz $(y = 0)$, y por ende el radio de la esfera, es el valor absoluto de la coordenada y $|-3| = 3$. Por lo tanto, la forma normal de la ecuación de la esfera es

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 3^2.$$

Vea la FIGURA 6.8.9. ■

A fin de poner una ecuación de una esfera en la forma normal (3), será necesario completar el cuadrado en las tres variables x, y y z.

EJEMPLO 7 Centro y radio

Busque el centro y radio de la esfera cuya ecuación es

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + y - 4z + 2 = 0.$$

Solución Primero dividimos entre 2, agrupamos términos iguales, y luego completamos el cuadrado en x, y y z:

$$\begin{aligned}
(x^2 - x \quad) + (y^2 + \tfrac{1}{2}y \quad) + (z^2 - 2z \quad) &= -1\\
\left[x^2 - x + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2\right] + \left[y^2 + \tfrac{1}{2}y + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2\right] + \left[z^2 - 2z + (-1)^2\right] &\\
&= -1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + (-1)^2\\
\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \tfrac{1}{4}\right)^2 + (z - 1)^2 &= \tfrac{5}{16}.
\end{aligned}$$

Según la última ecuación, vemos que el centro y radio de la esfera son $\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}, 1\right)$ y $\tfrac{1}{4}\sqrt{5}$, respectivamente. ■

□ **La ecuación lineal de tres variables** En la introducción a la sección 2.3 definimos una ecuación lineal de dos variables como $Ax + By + C = 0$. Para varias alternativas de los coeficientes A, B y C, la gráfica de una ecuación lineal es una línea en el espacio bidimensional. La gráfica de una **ecuación lineal de tres variables**

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{4}$$

donde A, B, C no son todos cero, es un **plano** en el espacio tridimensional. Nos damos cuenta de que las ecuaciones sencillas $x = x_0$, $y = y_0$ y $z = z_0$, donde x_0, y_0 y z_0 son constantes, son casos especiales de (4). Aquí tenemos dos directrices para graficar planos:

- Las gráficas de $x = x_0$, $y = y_0$ y $z = z_0$ son planos perpendiculares a los ejes x, y y z, respectivamente. Vea la figura 6.8.3.
- Con el fin de graficar una ecuación lineal (4), determine las intersecciones x, y y z o, en caso necesario, busque la traza del plano en los planos coordenados.

Una **traza** de un plano en un plano coordenado es la línea de intersección del plano con el plano coordenado. Por ejemplo, si fijamos $z = 0$, vemos que la traza del plano $2x + 3y + 6z = 18$ en el plano xy es la línea $2x + 3y = 18$. Para encontrar las **intersecciones** de un plano usamos el hecho de que puntos sobre los ejes x, y y z son de la forma $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$ y $(0, 0, z)$, respectivamente.

EJEMPLO 8 Gráfica

Graficar la ecuación $2x + 3y + 6z = 18$.

Solución Configuración:

$$\begin{array}{lcl} y = 0, z = 0 & \text{da} & x = 9 \\ x = 0, z = 0 & \text{da} & y = 6 \\ x = 0, y = 0 & \text{da} & z = 3. \end{array}$$

Como se muestra en la FIGURA 6.8.10, usamos las intersecciones x, y y z $(9, 0, 0)$, $(0, 6, 0)$ y $(0, 0, 3)$ para dibujar la gráfica de la porción del plano en el primer octante. ■

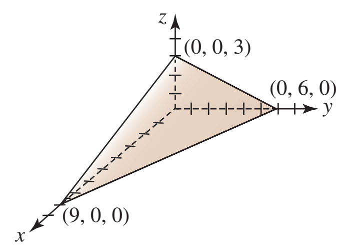


FIGURA 6.8.10 Plano del ejemplo 8

EJEMPLO 9 Gráfica

Graficar la ecuación $x + y - z = 0$.

Solución Primero observe que el plano pasa a través del origen $(0, 0, 0)$. Ahora, el trazo del plano en el plano xz $(y = 0)$ es $z = x$, mientras que su trazo en el plano yz $(x = 0)$ es $z = y$. Los trazos son las dos líneas negras en la FIGURA 6.8.11. ■

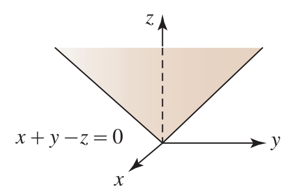


FIGURA 6.8.11 Plano del ejemplo 9

☐ Variables faltantes

Si *dos* de las variables faltan en la ecuación (4), entonces, como hemos visto, el plano es perpendicular al eje coordenado correspondiente a la variable presente. Por ejemplo, $z = 1$ es la ecuación del plano perpendicular al eje z en el punto $(0, 0, 1)$. De manera alternativa podemos interpretar $z = 1$ como la ecuación del plano a través del punto $(0, 0, 1)$ paralelo al plano coordenado correspondiente a las dos variables faltantes, en este caso paralelo al plano xy. Si *una* de las variables falta en la ecuación (4), la ecuación es la misma que la ecuación del trazo del plano en el plano coordenado apropiado. En consecuencia, el plano es paralelo al eje coordenado correspondiente a la variable faltante. El siguiente ejemplo ilustra esta última idea.

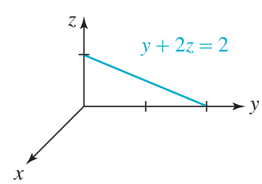
EJEMPLO 10 Gráfica

Graficar la ecuación $y + 2z = 2$.

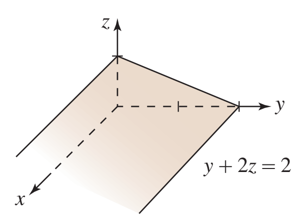
Solución En el espacio tridimensional, la gráfica de la ecuación $y + 2z = 2$ es la gráfica del conjunto de triples ordenados:

$$\{(x, y, z) \mid y + 2z = 2, x \text{ arbitrario}\}.$$

Todo lo que tenemos que hacer es dibujar la línea $2z + y = 2$ en el plano yz. Como la variable x falta en la ecuación dada, el plano se dibuja paralelo al eje x. Inevitablemente, el plano es perpendicular al plano yz. Vea la FIGURA 6.8.12. ■



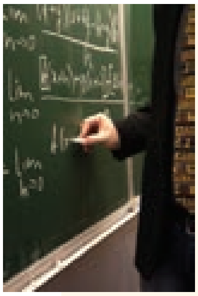
a) Trazo en el plano yz



b) Un plano paralelo al eje x

FIGURA 6.8.12 Trazo y plano del ejemplo 10

NOTAS PARA EL SALÓN DE CLASE



i) Hemos incluido esta breve sección sobre el espacio tridimensional porque en un típico curso de tres semestres de cálculo, el tercer semestre versa principalmente sobre cálculo y vectores en tres dimensiones.

ii) Como sabemos, en el espacio bidimensional dos puntos distintos determinan una línea. En forma análoga, en el espacio tridimensional no colineal, tres puntos colineales $(x_1\ y_1, z_1)$, $(x_1\ y_1, z_1)$, $(x_2\ y_2, z_2)$ determinan un plano. Una forma de buscar una ecuación del plano es sustituir las coordenadas de los tres puntos en (4) y resolver las tres ecuaciones lineales simultáneas

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D &= 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

para A, B y C en términos de D. Luego podemos elegir que D sea un número real no cero. Vea los problemas 59 a 64 en los ejercicios 6.8.

iii) El seguimiento natural de esta introducción al espacio tridimensional es la consideración de **funciones de múltiples variables**. La gráfica de una función f de una variable independiente $y = f(x)$ es una curva en el espacio bidimensional, mientras que la de una función $z = f(x, y)$ de dos variables independientes es una superficie en el espacio tridimensional. Por ejemplo, si resolvemos para z en el ejemplo 8, la ecuación resultante $z = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y + 3$ es una **función lineal** cuyo gráfico, como hemos visto, es un plano. Si resolvemos la ecuación en el ejemplo 4 para z, entonces un resultado es una función $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ que describe el hemisferio superior de la esfera.

Graficar una función $z = f(x, y)$ puede ser difícil y podrá a veces requerir una computadora. Si usted tiene acceso a un laboratorio de cómputo, revise si las computadoras tienen software de gráficos 3D. Los gráficos de la función polinomial $z = 2x^2 - 2y^2 + 2$ y la función trigonométrica $z = \operatorname{sen} xy$ que se muestran en la FIGURA 6.8.13 y la FIGURA 6.8.14 fueron obtenidos usando el sistema de álgebra computada (CAS) *Mathematica*.

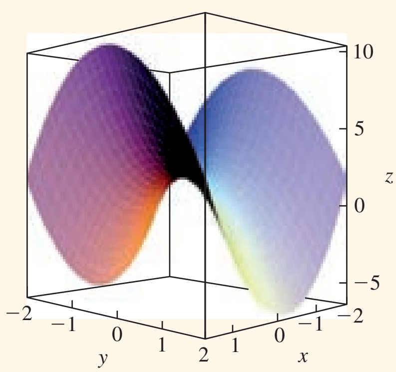


FIGURA 6.8.13 Gráfica de $z = 2x^2 - 2y^2 + 2$ para $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$

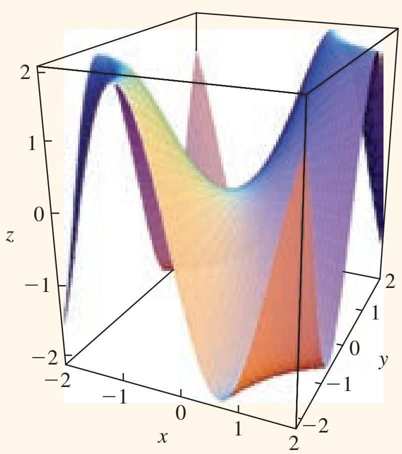


FIGURA 6.8.14 Gráfica de $z = \operatorname{sen} xy$ para $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$

6.8 Ejercicios

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-22.

En los problemas 1 a 6, grafique el punto dado.

1. $(1, 1, 5)$ **2.** $(0, 0, 4)$ **3.** $(3, 4, 0)$
4. $(6, 0, 0)$ **5.** $(6, -2, 0)$ **6.** $(5, -4, 3)$

En los problemas 7 a 10, describa geométricamente todos los puntos $P(x, y, z)$ cuyas coordenadas satisfagan las condiciones dadas.

7. $z = 5$ **8.** $x = 1$
9. $x = 2, y = 3$ **10.** $x = 4, y = -1, z = 7$

11. Indique las coordenadas de los vértices paralelepípedos cuyos lados están en los planos coordenados y los planos $x = 2$, $y = 5$, $z = 8$.

12. En la **FIGURA 6.8.15** se muestran dos vértices de un paralelepípedo rectangular con lados paralelos a los planos coordenados. Busque las coordenadas de los seis vértices restantes.

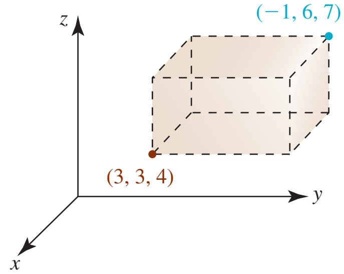


FIGURA 6.8.15 Paralelepípedo del problema 12

13. Considere el punto $P(-2, 5, 4)$.
   a) Si se dibujan líneas de P perpendicular a los planos coordenados, ¿cuáles son las coordenadas del punto en la base de cada perpendicular?
   b) Si se dibuja una línea de P al plano $z = -2$, ¿cuáles son las coordenadas del punto en la base de la perpendicular?
   c) Busque el punto en el plano $x = 3$ que esté más cercano a P.

14. Determine la ecuación de un plano paralelo a un plano coordenado que contiene el par de puntos dado.
   a) $(3, 4, -5), (-2, 8, -5)$
   b) $(1, -1, 1), (1, -1, -1)$
   c) $(-2, 1, 2), (2, 4, 2)$

En los problemas 15 a 20, describa el conjunto de puntos $P(x, y, z)$ en el espacio tridimensional cuyas coordenadas satisfagan la ecuación dada.

15. $xyz = 0$ **16.** $x^2 + y^2 + z^2 = 0$
17. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 0$ **18.** $(x - 2)(z - 8) = 0$
19. $z^2 - 25 = 0$ **20.** $x = y = z$

En los problemas 21 y 22, calcule la distancia entre los puntos dados.

21. $(3, -1, 2), (6, 4, 8)$ **22.** $(-1, -3, 5), (0, 4, 3)$

23. Determine la distancia desde el punto $(7, -3, -4)$ al
   a) plano yz y ***b***) eje x.

24. Determine la distancia desde el punto $(-6, 2\ -3)$ al
   a) plano xz y ***b***) origen.

En los problemas 25 a 28, los tres puntos dados forman un triángulo. Determine cuáles de los triángulos son isósceles y cuáles son ortogonales.

25. $(0, 0, 0), (3, 6, -6), (2, 1, 2)$ **26.** $(0, 0, 0), (1, 2, 4), (3, 2, 2\sqrt{2})$
27. $(1, 2, 3), (4, 1, 3), (4, 6, 4)$ **28.** $(1, 1, -1), (1, 1, 1), (0, -1, 1)$

En los problemas 29 a 32, use la fórmula de la distancia para determinar si los puntos dados son colineales.

29. $P_1(1, 2, 0), P_2(-2, -2, -3), P_3(7, 10, 6)$
30. $P_1(1, 2, -1), P_2(0, 3, 2), P_3(1, 1, -3)$

31. $P_1(1, 0, 4)$, $P_2\,(-4, -3, 5)$, $P_3\,(-7, -4, 8)$

32. $P_1(2, 3, 2)$, $P_2\,(1, 4, 4)$, $P_3\,(5, 0, -4)$

En los problemas 33 y 34, resuelva para los desconocidos.

33. $P_1(x, 2, 3)$, $P_2\,(2, 1, 1)$; $d(P_1, P_2) = \sqrt{21}$

34. $P_1(x, x, 1)$, $P_2\,(0, 3, 5)$; $d(P_1, P_2) = 5$

En los problemas 35 y 36, busque las coordenadas del punto medio del segmento de línea entre los puntos dados.

35. $(1, 3, \frac{1}{2})$, $(7, -2, \frac{5}{2})$

36. $(0, 5, -8)$, $(4, 1, -6)$

37. Las coordenadas del punto medio del segmento de línea entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(2, 3, 6)$ son $(-1, -4, 8)$. Calcule las coordenadas de P_1.

38. El P_3 es el punto medio del segmento de línea entre $P_1(-3, 4, 1)$ y $P_2(-5, 8, 3)$. Determine las coordenadas del punto medio del segmento de línea

a) entre P_1 y P_3 y

b) entre P_3 y P_2.

En los problemas 39 a 42, dibuje la gráfica de la ecuación dada.

39. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

40. $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 16$

41. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$

42. $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 + (z - 5)^2 = 4$

En los problemas 43 a 46, complete el cuadrado en x, y y z para encontrar el centro y radio de la esfera dada.

43. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y - 4z - 7 = 0$

44. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4x - 12z + 9 = 0$

45. $x^2 + y^2 + z^2 - 16z = 0$

46. $x^2 + y^2 + z^2 - x + y = 0$

En los problemas 47 a 52, busque una ecuación de una esfera que satisfaga las condiciones dadas.

47. Centro $(-1, 4, 6)$; radio $\sqrt{3}$

48. Centro $(0, -3, 0)$; diámetro $\frac{5}{2}$

49. Centro $(1, 1, 4)$, tangencial al plano xy

50. Centro $(5, 2, -2)$; tangencial al plano yz

51. Centro en el eje y positivo; radio 2; tangencial a $x^2 + y^2 + z^2 = 36$

52. Centro $(-3, 1, 2)$; pasa a través del origen

En los problemas 53 a 58, grafique el plano cuya ecuación es dada.

53. $5x + 2y + z = 10$

54. $3x + 2z = 9$

55. $3x + z - 6 = 0$

56. $3x + 4y - 2z - 12 = 0$

57. $-x + 2y + z = 4$

58. $3x - y - 6 = 0$

En los problemas 59 a 64, use (4) y (5) para encontrar una ecuación de un plano que contenga los puntos dados.

59. $(3, 5, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(-1, -1, 4)$

60. $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 3, -1)$

61. $(-1, -1, 2)$, $(1, 1, 1)$, $(3, 2, -1)$

62. $(0, 0, 3)$, $(0, -1, 0)$, $(6, 0, 0)$

63. $(1, 2, -1)$, $(4, 3, 1)$, $(7, 4, 1)$

64. $(2, 1, 2)$, $(4, 1, 0)$, $(5, 2, -5)$

Para discusión

En los problemas 65 y 66, explique cómo el procedimiento utilizado en los problemas 59 a 64 se puede usar para encontrar la ecuación de un plano que contiene los puntos dados. Ponga en acción sus ideas.

65. $(0, 0, 0), (1, 1, -1), (3, 2, 1)$ **66.** $(0, 0, 1), (0, 0, 5), (0, 2, 1)$

67. Si jamás se ha sentado en una mesa de cuatro patas que tambalea, podrá considerar reemplazarla por una de tres patas. ¿Por qué?

68. Use la fórmula de distancia para comprobar que

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

es el punto medio del segmento de línea entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$. [*Sugerencia:* Demuestre que $d(P_1, M) = d(M, P_2)$ y $d(P_1,P_2) = d(P_1, M) + d(M, P_2)$.]

En los problemas 69 a 74, describa geométricamente la superficie del espacio tridimensional definida por el conjunto de puntos dado.

69. $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4, 1 \leq z \leq 3$
70. $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4, z = 2$
71. $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$
72. $0 < (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 < 1$
73. $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$
74. $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ z \leq 0$

En los problemas 75 y 76, describa la superficie en espacio tridimensional, definida por el conjunto dado de puntos.

75. $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1\}$ **76.** $\{(x, y, z) | z = 1 - y^2\}$

CAPÍTULO 6 Ejercicios de repaso

Las respuestas a problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-23.

En los problemas 1 a 20, llene los espacios en blanco.

1. La ecuación en la forma normal $y^2 = 4cx$ de una parábola con foco en $(5, 0)$ es______.
2. La ecuación en la forma normal $x^2 = 4cy$ de una parábola que pasa por $(2, 6)$ es______.
3. La ecuación rectangular de una parábola con foco en $(1, -3)$ y directriz $y = -7$ es ______.
4. La directriz y el vértice de una parábola son $x = -3$ y $(-1, -2)$, respectivamente. El foco de la parábola está en _________.
5. El foco y la directriz de una parábola son $(0, \frac{1}{4})$ y $y = -\frac{1}{4}$, respectivamente. El vértice de la parábola está en ________.
6. El vértice y el foco de la parábola $8(x + 4)^2 = y - 2$ están en ________.
7. La excentricidad de una parábola es $e =$ ______.
8. El centro y los vértices de la elipse $\dfrac{(x - 2)^2}{16} + \dfrac{(y + 5)^2}{4} = 1$ están en ______.
9. El centro y los vértices de la hipérbola $y^2 - \dfrac{(x + 3)^2}{4} = 1$ están en ________.
10. Las asíntotas oblicuas de la hipérbola $y^2 - (x - 1)^2 = 1$ son _________.

11. Las intersecciones con el eje y de la hipérbola $y^2 - (x - 1)^2 = 1$ están en _______.

12. La excentricidad de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ es ________.

13. Si la gráfica de una elipse es muy alargada, su excentricidad e es cercana a ____. (Escriba 0 o 1.)

14. Las coordenadas rectangulares del punto cuyas coordenadas polares son $(-\sqrt{2}, 5\pi/4)$ son ______.

15. Las coordenadas polares del punto cuyas coordenadas rectangulares son $(0, -10)$ son _____.

16. Las coordenadas polares aproximadas del punto con coordenadas rectangulares $(-1, 3)$ son ______.

17. En la gráfica de la ecuación polar $r = 4 \cos \theta$, dos pares de coordenadas del polo u origen son _________.

18. Las ecuaciones $x = t + 2$, $y = 3 + \frac{1}{2}t$, $-\infty < t < \infty$, son una representación paramétrica de un(a) ________.

19. El punto de la curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = -4 + 2 \cos t$, $y = 2 + \text{sen } t$, $-\infty < t < \infty$, correspondiente a $t = 5\pi/2$ está en ______.

20. Las intersecciones con el eje y de la curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = t^2 - 4$, $y = t^3 - 3t$, $-\infty < t < \infty$ están en ________.

En los problemas 21 a 36 conteste cierto o falso.

21. Las coordenadas rectangulares de un punto en el plano son únicas. _____

22. En una elipse, la longitud del eje mayor siempre es mayor que la del eje menor. _____

23. El vértice y el foco están en el eje de simetría de una parábola. ______

24. Las asíntotas de $(x - h)^2/a^2 - (y - k)^2/b^2 = 1$ deben pasar por (h, k). _________

25. Una elipse con excentricidad $e = 0.01$ es casi circular. ________

26. El eje transversal de la hipérbola $x^2/9 - y^2/49 = 1$ es vertical. ______

27. Las dos hipérbolas $x^2 - y^2/25 = 1$ y $y^2/25 - x^2 = 1$ tienen el mismo par de asíntotas inclinadas. _______

28. La gráfica de la ecuación polar $r = 5 \sec \theta$ es una recta. _______

29. $(3, \pi/6)$ y $(-3, -5\pi/6)$ son las coordenadas polares del mismo punto. _______

30. La gráfica de la elipse $r = 90/(15 - \text{sen } \theta)$ es casi circular. ___________

31. La gráfica de la curva $x = t^2$, $y = t^4 + 1$ es igual que la gráfica de $y = x^2 + 1$. ________

32. Si P es un punto en una parábola, la distancia perpendicular de P a la directriz es igual a la distancia de P al vértice. __________

33. La gráfica de $r = 2 + 4 \text{ sen } \theta$ es un caracol con bucle interno. _______

34. La gráfica de rosa curva $r = 5 \text{ sen } 6\theta$ tiene 6 pétalos. _______

35. La gráfica polar $r^2 = 4 \text{ sen } 2\theta$ es simétrica con respecto al origen. ______

36. La curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 1 + \cos t$, $y = 1 + \text{sen } t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ es un círculo de radio 1, centrado en $(1, 1)$. _________

En los problemas 37 y 38, deduzca la ecuación rectangular que tenga la misma gráfica que la ecuación polar indicada.

37. $r = \cos\theta + \text{sen}\,\theta$

38. $r(\cos\theta + \text{sen}\,\theta) = 1$

En los problemas 39 y 40, deduzca la ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación rectangular indicada.

39. $x^2 + y^2 - 4y = 0$

40. $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 9(x^2 + y^2)$.

41. Determine las coordenadas rectangulares de los vértices de la elipse cuya ecuación polar es $r = 2/(2 - \operatorname{sen}\theta)$.

42. Deduzca la ecuación polar de la hipérbola con foco en el origen, vértices (en coordenadas rectangulares) en $(0, -\frac{4}{3})$ y $(0, -4)$, y excentricidad 2.

En los problemas 43 y 44, determine las coordenadas polares que satisfagan ***a***) $r > 0, -\pi < \theta \leq \pi$ y ***b***) $r < 0, -\pi < \theta \leq \pi$ para cada punto expresado en coordenadas rectangulares.

43. $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

44. $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

En los problemas 45 a 50, trace la gráfica de la sección cónica indicada. Según sea la cónica, determine la ubicación del centro, vértice o vértices, extremos el eje menor y las ecuaciones de las asíntotas.

45. $(x - 1)^2 + 4(y - 1)^2 = 16$

46. $4y^2 - x^2 = 4$

47. $4x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$

48. $y^2 + 10y + 8x + 41 = 0$

49. $16y^2 - 9x^2 - 64y - 80 = 0$

50. $x^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

En los problemas 51 a 62, identifique y trace la gráfica de la ecuación polar indicada.

51. $r = 5$

52. $\theta = -\pi/3$

53. $r = 5\operatorname{sen}\theta$

54. $r = -4\cos\theta$

55. $r = 4 - 4\cos\theta$

56. $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

57. $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$

58. $r = 1 - 2\cos\theta$

59. $r = \operatorname{sen}3\theta$

60. $r = 3\operatorname{sen}4\theta$

61. $r = \dfrac{8}{3 - 2\cos\theta}$

62. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$

63. Un satélite está en órbita en torno al planeta Neptuno; la órbita es elíptica con el planeta en uno de los focos. Si la longitud del eje mayor de la órbita es 2×10^9 m y la longitud del eje menor es 6×10^8 m, calcule la distancia máxima entre el satélite y el centro del planeta.

64. Determine la ecuación de la elipse (en rojo) inscrita en el rectángulo auxiliar de la hipérbola que se muestra en la **FIGURA 6.E.1**.

65. Un espejo parabólico tiene 7 cm de profundidad en su centro, y el diámetro es de 20 cm. Calcule la distancia del vértice al foco.

66. Calcule e identifique la sección cónica que aparece en el dibujo de un lápiz de madera en la **FIGURA 6.E.2**.

En los problemas 67 y 68, la gráfica de la ecuación polar dada es rotada alrededor del origen por la cantidad indicada.

a) Busque la ecuación polar de la nueva gráfica.
b) Determine la ecuación rectangular de la nueva gráfica.

67. $r = 2\cos\theta$; en contra del reloj, $\pi/3$

68. $r = 1/(1 + \operatorname{sen}\theta)$; en el sentido de las agujas del reloj, $\pi/6$

69. Calcule la ecuación de una esfera que tiene un diámetro con los puntos finales $(0, -4, 7)$ y $(2, 12, -3)$.

70. Determine la ecuación del plano cuyos puntos (x, y, z) sobre el plano son equidistantes de $(1, -2, 3)$ y $(2, 5, -1)$.

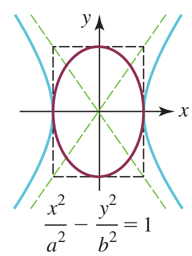
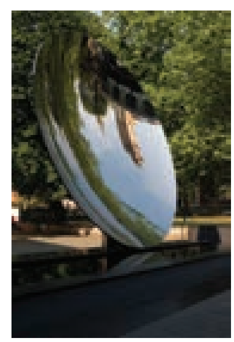


FIGURA 6.E.1 Elipse del problema 64



Espejo parabólico

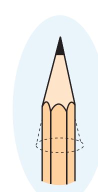


FIGURA 6.E.2 Lápiz del problema 66

Examen final

Las respuestas a estas preguntas se encuentran en el Centro del Educación Online, de este libro en: *www.mhe.es/index_mx.html.*

Trate de contestar las siguientes preguntas sin consultar el libro.

En los problemas 1 a 14 llene el espacio en blanco.

1. Al completar el cuadrado en x, en $2x^2 + 6x + 5$ se obtiene_____.
2. En el desarrollo binomial de $(1 - 2x)^3$, el coeficiente de x^2 es _________.
3. En notación de intervalos, el conjunto de soluciones de $\dfrac{x(x^2 - 9)}{x^2 - 25} \geq 0$ es ______.
4. Si $a - 3$ es un número negativo, entonces $|a - 3| =$ _______.
5. Si $|5x| = 80$, entonces $x =$ ____.
6. Si (a, b) es un punto en el tercer cuadrante, entonces $(-a, b)$ es un punto en el _______ cuadrante.
7. El punto $(1, 7)$ está en una gráfica del plano cartesiano. Indique las coordenadas de otro punto en la gráfica, si la gráfica es:
  a) simétrica con respecto al eje x. ____
  b) simétrica con respecto al eje y. _____
  c) simétrica con respecto al origen. _______
8. Las rectas $6x + 2y = 1$ y $kx - 9y = 5$ son paralelas si $k =$ ______. Esas rectas son perpendiculares si $k =$ _____.
9. La factorización completa de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 6x$ es ___________.
10. Los únicos ceros racionales potenciales de $f(x) = x^3 + 4x + 2$ son ________.
11. El desplazamiento de fase de la gráfica de $y = 5 \text{ sen } (4x + \pi)$ es _____.
12. Si $f(x) = x^4 \arctan(x/2)$, entonces, el valor exacto de $f(-2)$ es _______.
13. $5 \ln 2 - \ln \frac{2}{3} = \ln$ _____.
14. La gráfica de $y = \ln(2x + 5)$ tiene la asíntota vertical $x =$ _______.

En los problemas 15 a 32 conteste cierto o falso.

15. El valor absoluto de todo número real x es positivo. _______
16. La desigualdad $|x| > -1$ no tiene soluciones. ________
17. Para cualquier función f, si $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$. _______
18. La gráfica de $y = f(x + c)$, $c > 0$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada c unidades hacia la derecha. _______
19. Los puntos $(1, 3)$, $(3, 11)$ y $(5, 19)$ son colineales. ________
20. La función $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2$ es función impar. _______
21. $x + \frac{1}{4}$ es un factor de la función $f(x) = 64x^4 + 16x^3 + 48x^2 - 36x - 12$. _________
22. Si $b^2 - 4ac < 0$, la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ no cruza al eje x. _______
23. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x + 1}$ es una función racional. ________
24. Si $f(x) = x^5 + 3x - 1$, entonces existe un número c en $[-1, 1]$ tal que $f(c) = 0$. _____

25. La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$ no tiene intersecciones con el eje x. __________

26. $x = 0$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función racional

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x}$. ______

27. La gráfica de $y = \cos(x/6)$ es la de $y = \cos x$ estirada horizontalmente. ________

28. $f(x) = \csc x$ no está definida en $x = \pi/2$. ________

29. La función $f(x) = e^{-4x^2}$ no es uno a uno. _________

30. La función exponencial $f(x) = (\frac{3}{2})^x$ aumenta en el intervalo $(-\infty, \infty)$. ______

31. El dominio de la función $f(x) = \ln x + \ln(x - 4)$ es $(4, \infty)$. _________

32. Las soluciones de la ecuación $\ln x^2 = \ln 3x$ son $x = 0$ y $x = 3$. _________

33. Indique la correspondencia entre el intervalo y la desigualdad respectiva.

i) $[2, 4]$ *ii*) $[2, 4)$

iii) $(2, 4)$ *iv*) $(2, 4]$

a) $|x - 3| \leq 1$ ***b***) $1 < x - 1 \leq 3$

c) $-2 < 2 - x \leq 0$ ***d***) $|x - 3| < 1$

34. Escriba la solución de la desigualdad de valor absoluto $|3x - 1| > 7$, usando notación de intervalos.

35. La respuesta de un problema que había en un libro anterior de matemáticas era $1 + \sqrt{3}$, pero usted contestó $2/(\sqrt{3} - 1)$. ¿Era lo mismo?

36. ¿En qué cuadrantes, en el plano cartesiano, el cociente x/y es negativo?

37. ¿Cuál(es) de las siguientes ecuaciones describe mejor a un círculo que pasa por el origen? Los símbolos a, b, c, d y e representan distintas constantes reales diferentes de cero.

a) $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ ***b***) $ax^2 + ay^2 + cx + dy + e = 0$

c) $ax^2 + ay^2 + cx + dy = 0$ ***d***) $ax^2 + by^2 + cx + dy = 0$

e) $ax^2 + ay^2 + e = 0$ ***f***) $ax^2 + ay^2 + cx + e = 0$

38. Indique la correspondencia entre la función racional f y la frase más adecuada.

i) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 - 2}$ *ii*) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 2}$

iii) $f\ \ x\ \ = \dfrac{x^5}{x^2 + 2}$ *iv*) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 2}$

a) asíntota inclinada   ***b***) sin asíntotas

c) asíntota horizontal   ***d***) asíntota vertical

39. ¿Cuál es el contradominio de la función racional $f(x) = \dfrac{10}{x^2 + 1}$?

40. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 2}}{x^2}$?

41. Deduzca una ecuación de la recta que pasa por el origen y por el punto de intersección de las gráficas de $x + y = 1$ y $2x - y = 7$.

42. Deduzca una función cuadrática f cuya gráfica cruce al eje de las y en $(0, -6)$ y su vértice esté en $(1, 4)$.

En cálculo, se le pedirá con frecuencia reformular una función, ya sea en una forma más simple o en una que sea más útil para resolver el problema. En los problemas 43 a 48, reformule cada función apegándose a la indicación. En cálculo se espera que usted reconozca qué hacer, por el contexto del problema real.

43. $f(x) = \sqrt{x^6 + 4} - x^3$. Exprese f como cociente, usando racionalización y simplificación.

44. $f(x) = \dfrac{5x^3 - 4x^2\sqrt{x} + 8}{\sqrt[3]{x}}$. Haga la división indicada, y exprese cada término como potencia de x.

45. $f(x) = \dfrac{7x^2 - 7x - 6}{x^3 - x^2}$. Descomponga f en fracciones parciales.

46. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$. Exprese f en función de $\sec x$ y $\tan x$.

47. $f(x) = e^{3 \ln x}$. Exprese f como potencia de x.

48. $f(x) = |x^2 - 3x|$. Exprese f sin signos de valores absolutos.

En cálculo, se le pedirá con frecuencia determinar los ceros de una función. En los problemas 49 y 50 resuelva la ecuación $f(x) = 0$ apegándose a la indicación.

49. $f(x) = x^2 \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x) + 2x\sqrt{4 - x^2}$. Reformule f como una sola expresión, sin exponentes negativos.

50. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x$. Determine los ceros de f en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

En los problemas 51 y 52, calcule y simplifique el cociente de diferencia

$\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ de la función indicada.

51. $f(x) = \dfrac{3x}{2x + 5}$

52. $f(x) = -x^3 + 10x^2$

53. ¿Cuál es la amplitud de la función trigonométrica $y = -8 \operatorname{sen}(\pi x/3)$? Indique un intervalo en el cual se complete un ciclo de la gráfica.

54. Si $\tan\theta = \sqrt{5}$ y $\pi < \theta < 3\pi/2$, ¿cuál es el valor de $\cos \theta$?

55. Suponga que $f(x) = \operatorname{sen} x$, y que $f(c) = 0.7$. ¿Cuál es el valor de

$$2f(-c) + f(c + 2\pi) + f(c - 6\pi)?$$

56. Suponga que $f(x) = \operatorname{sen} x$, y que $g(x) = \ln x$. Resuelva $(f \circ g)(x) = 0$.

57. Determine los puntos de cruce de la parábola cuya ecuación es $(y + 4)^2 = 4(x + 1)$, con los ejes coordenados.

58. Determine la ubicación del centro, focos, vértices y extremos del eje menor de la elipse cuya ecuación es

$$x^2 + 2y^2 + 2x - 20y + 49 = 0.$$

59. Las asíntotas inclinadas de una hipérbola tienen ecuaciones $y = -5x + 2$ y $y = 5x - 8$. ¿Dónde está el centro de la hipérbola?

60. Desde un punto a 220 pies de la base de una antena de telefonía celular, una persona mide un ángulo de inclinación de 30°, del suelo hasta la punta de la antena. ¿Cuál es el ángulo de inclinación a la punta de la antena, si la persona se acerca 100 pies a su base?

61. El yodo 131 es radiactivo, y se usa en ciertos procedimientos médicos. Suponga que el yodo 131 decae exponencialmente. Si la vida media del ^{131}I es 8 días, ¿cuánto de una muestra de 5 gramos queda al final de 15 días?

62. La ecuación polar coordenada $r = 3 \cos 4\theta$ es de una rosa curva con ocho pétalos. Determine todos los ángulos, en radianes, que satisfagan $0 \leq \theta \leq 2\pi$, para los cuales $|r| = 3$.

63. Indique las tres identidades pitagóricas.

64. Sin ayuda de una calculadora, calcule el valor exacto de

$$\cos 80° \cos 50° + \operatorname{sen} 80° \operatorname{sen} 50°.$$

65. Indique el punto común de las gráficas de todas las funciones exponenciales $f(x) = b^x, b > 0, b \neq 1$.

66. Indique la intersección y, la intersección x y la asíntota horizontal de la gráfica de $f(x) = 4^x - 3$.

67. Describa cómo se puede obtener la gráfica de $y = \ln(-x)$ a partir de la gráfica de $y = \ln x$.

68. Calcule las asíntotas de la hipérbola

$$-x^2 + 10x + 9y^2 - 54y + 47 = 0.$$

69. Dibuje la gráfica de la función dada.

a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

70. Sin hacer ningún trabajo, describa en detalle la gráfica de

$$r = \frac{10}{3 + 2\operatorname{sen}(\theta + 3\pi/4)}.$$

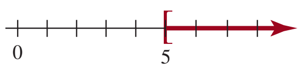
Respuestas a problemas impares seleccionados

Ejercicios 1.1 Página 9

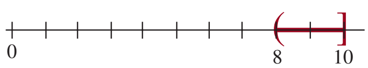
1. $a + 2 > 0$ **3.** $a + b \geq 0$ **5.** $2b + 4 \geq 100$

7. $(-\infty, 0)$

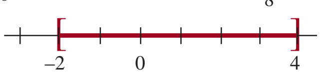
9. $[5, \infty)$



11. $(8, 10]$



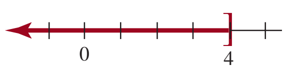
13. $[-2, 4]$



15. $-7 \leq x \leq 9$ **17.** $x < 2$

19. $(-5, \infty)$

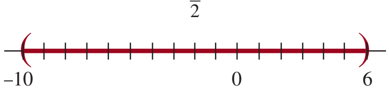
21. $(-\infty, 4]$



23. $(-\infty, \frac{3}{4})$

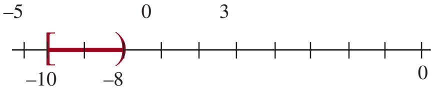
25. $(-\infty, \frac{5}{2}]$

27. $(-10, 6)$



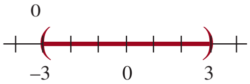
29. $(-5, 3)$

31. $[-10, -8)$

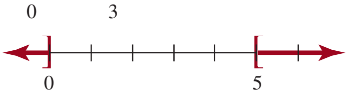


33. $[0, 6)$

35. $(-3, 3)$



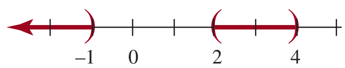
37. $(-\infty, 0] \cup [5, \infty)$



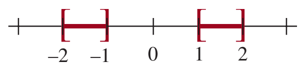
39. $(2, 6)$

41. $[-\frac{3}{2}, 6]$

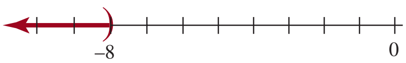
43. $(-\infty, -1) \cup (2, 4)$



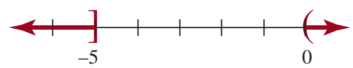
45. $[-2, -1] \cup [1, 2]$



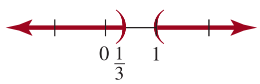
47. $(-\infty, -8)$



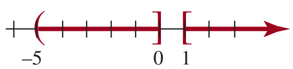
49. $(-\infty, -5] \cup (0, \infty)$



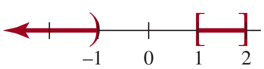
51. $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$



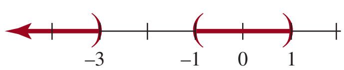
53. $(-5, 0] \cup [1, \infty)$



55. $(-\infty, -1) \cup [1, 2]$



57. $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$



59. Si x es el número, entonces $x < 8$. **61.** $n > 10$

63. Si x representa el ancho, entonces $x > 7$. **65.** $R > \frac{10}{3}$

Ejercicios 1.2 Página 16

1. $4 - \pi$ **3.** $8 - \sqrt{63}$ **5.** 4 **7.** $-h$

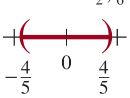
9. $-x + 6$ **11.** 0 **13.** $-2x + 7$ **15.** 3

17. $2x - 2$ **19.** 4 **21.** 4; 5 **23.** 3; 0

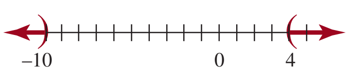
25. $a = 2, b = 8$ **27.** $m = 4 + \pi, b = 4 + 2\pi$

29. $-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ **31.** $-\frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ **33.** $\frac{2}{3}, 2$

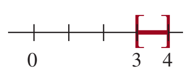
35. $(-\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$



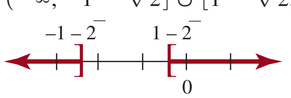
37. $(-\infty, -10) \cup (4, \infty)$



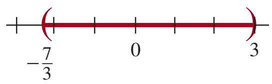
39. $[3, 4]$



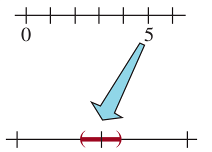
41. $(-\infty, -1 - \sqrt{2}] \cup [1 - \sqrt{2}, \infty)$



43. $\left(-\frac{7}{3}, 3\right)$



45. $(4.99, 5.01)$



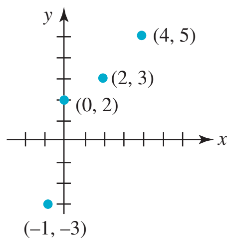
47. $|x - 4| < 7$ **49.** $|x - 5| > 4$

51. $|x + 3| \geq 2, (-\infty, -5] \cup [-1, \infty)$

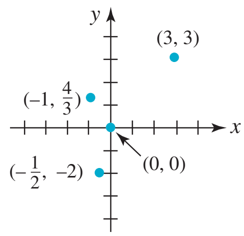
53. $|A_B - A_M| \leq 3$ **55.** $(11.95, 12.05)$

Ejercicios 1.3 Página 22

1.



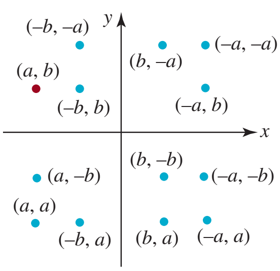
3.



5. II **7.** III **9.** II **11.** I

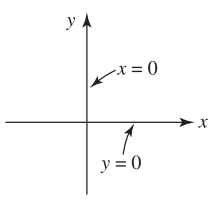
13. III **15.** IV

17.

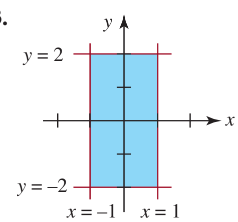


19. $(3, 6)$

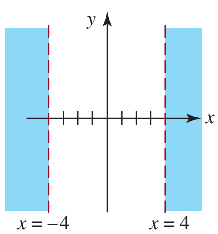
21.



23.



25.



27. $2\sqrt{5}$ **29.** 10

31. 5 **33.** no es triángulo rectángulo

35. es triángulo rectángulo **37.** es triángulo isósceles

39. ***a)*** $2x + y - 5 = 0$

b) Los puntos (x, y) están en la bisectriz del segmento de recta que une A con B

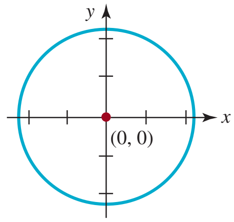
41. $(6, 8)$ y $(6, -4)$ **43.** $\left(1, \frac{5}{2}\right)$

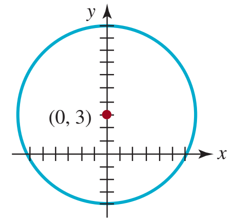
45. $\left(-\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$ **47.** $\left(3a, -\frac{3}{2}b\right)$ **49.** $(5, -1)$ **51.** $(-7, -10)$

53. 6 **55.** $(2, -5)$ **57.** $\left(\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right), (4, 7), \left(\frac{9}{2}, \frac{15}{2}\right)$

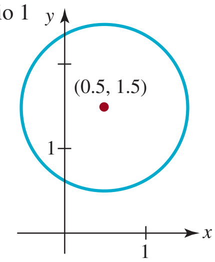
Ejercicios 1.4 Página 31

1. centro en $(0, 0)$, radio $\sqrt{5}$ **3.** centro en $(0, 3)$, radio 7





5. centro en $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, radio 1



7. centro en $(0, -4)$, radio 4 **9.** centro en $(-1, 2)$, radio 3

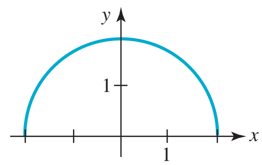
11. centro en $(10, -8)$, radio 6 **13.** centro en $(-1, -4)$, radio $\sqrt{\frac{33}{2}}$

15. $x^2 + y^2 = 1$ **17.** $x^2 + (y - 2)^2 = 2$

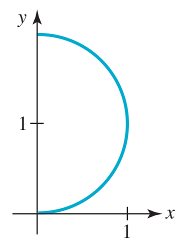
19. $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 8$ **21.** $x^2 + y^2 = 5$

23. $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 36$

25.

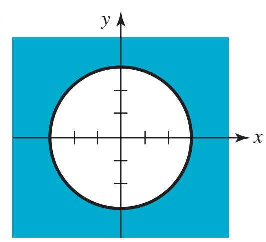


27.

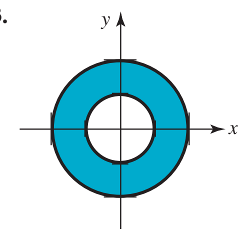


29. $y = 3 + \sqrt{4 - x^2}$; $x = \sqrt{4 - (y - 3)^2}$

31.



33.



35. $(3 - \sqrt{13}, 0), (3 + \sqrt{13}, 0), (0, -6 - 2\sqrt{10}), (0, -6 + 2\sqrt{10})$

37. $(0, 0)$, origen **39.** $(-1, 0), \left(0, \frac{1}{2}\right)$, no tiene simetría

41. $(0, 0)$, eje x **43.** $(-2, 0), (2, 0), (0, 4)$, eje y

45. $(1 - \sqrt{3}, 0), (1 + \sqrt{3}, 0), (0, -2)$, no tiene simetría

47. $(0, 0), (-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, 0)$, origen

49. $(0, -4), (0, 4)$, eje x

51. $(0, -3), (0, 3)$, eje x, eje y y origen

53. $(-\sqrt{7}, 0), (\sqrt{7}, 0)$, origen

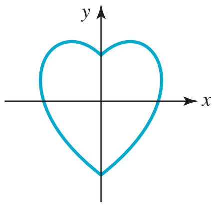
55. $(-4, 0), (5, 0), \left(0, -\frac{10}{3}\right)$, no tiene simetría

57. $(9, 0), (0, -3)$, no tiene simetría **59.** $(9, 0), (0, 9)$, no tiene simetría

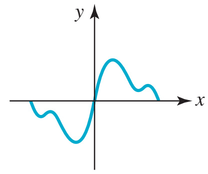
61. $(-4, 0), (4, 0), (0, -4), (0, 4)$, eje x, eje y y origen

63. eje x, eje y y origen **65.** eje y

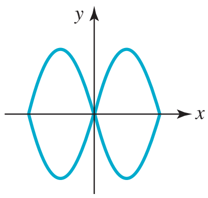
67.



69.



71.



Ejercicios 1.5 Página 43

1. *a)* $x + 5$ *b)* 10 **3.** *a)* $x - 6$ *b)* -5
5. *a)* $\dfrac{x+3}{x-3}$ *b)* -5 **7.** *a)* $x^2 + x + 1$ *b)* 3
9. *a)* $\dfrac{x^2+x+1}{x+4}$ *b)* $\frac{3}{5}$ **11.** *a)* $\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$ *b)* 0
13. *a)* $4 + h$ *b)* 4 **15.** *a)* $4(x+2)$ *b)* 12
17. *a)* $3 + 3x + x^2$ *b)* 3 **19.** *a)* $2h^2 + h - 4$ *b)* -4
21. *a)* $\dfrac{1}{x+4}$ *b)* $\frac{1}{6}$ **23.** *a)* $\dfrac{1}{x+10}$ *b)* $\frac{1}{20}$
25. *a)* $-\dfrac{4+h}{4(2+h)^2}$ *b)* $-\frac{1}{4}$ **27.** *a)* $\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$ *b)* $\frac{1}{6}$
29. *a)* $\sqrt{7+x} + \sqrt{7}$ *b)* $2\sqrt{7}$ **31.** *a)* $5 + \sqrt{t}$ *b)* 10
33. *a)* $4(\sqrt{y^2+y+1} + \sqrt{y+1})$ *b)* 8
35. $\dfrac{ax-1}{ax}$
37. $2(2x-3)^3(2x-1)(9x+10)$
39. $\dfrac{6x(2-x)}{(-4x+6)^{3/2}}$ **41.** $y' = \dfrac{x+y}{3y^2-x}$
43. $y' = \dfrac{2x}{1-2y}$ **45.** $y' = \dfrac{x^2-2xy+2y+y^2}{2x}$

Ejercicios de repaso Capítulo 1 Página 46

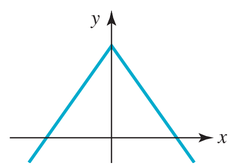
1. $x \le 9$ **3.** II
5. $(2, -3)$ **7.** $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 36$
9. $\sqrt{10}$ **11.** $(-\frac{5}{2}, 0), (\frac{5}{2}, 0), (0, -5)$
13. centro en $(8, 0)$, radio 8 **15.** $(-3, 4), (-3, -4)$
17. $x^2 + y^2 > 36$ **19.** $|x - \sqrt{2}| > 3$
21. falso **23.** verdadero **25.** falso **27.** vefdadero
29. verdadero **31.** verdadero **33.** falso **35.** verdadero
37. verdadero **39.** verdadero **41.** $a^2 < ab$ **43.** $a < a + b$
45. 10 **47.** $\le$ **49.** $-4 \le x \le 3$
51. $a = 4, b = 6$ **53.** $(-\infty, -3]$
55. $(4, 12)$ **57.** $(-\infty, -10) \cup (10, \infty)$
59. $(-\frac{1}{3}, 3)$ **61.** $[-1, \frac{5}{2}]$ **63.** $(-1, 0) \cup (1, \infty)$
65. $(0, 1) \cup (1, \infty)$ **67.** $\dfrac{1}{2x+1}, x \ne \dfrac{1}{2}$ *b)* $\frac{1}{2}$
69. *a)* $(x+4)(\sqrt{x}+2), x \ne 4b$ *b)* 32

Ejercicios 2.1 Página 55

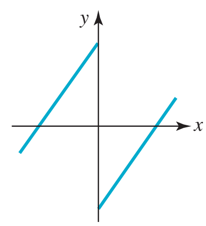
1. 24, 2, 8, 35 **3.** $0, 1, 2, \sqrt{6}$
5. $-\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, \sqrt{2}$
7. $-2x^2 + 3x, -8a^2 + 6a, -2a^4 + 3a^2, -50x^2 - 15x,$
$-8a^2 - 2a + 1, -2x^2 - 4xh - 2h^2 + 3x + 3h$
9. $-2, 2$ **11.** $[\frac{1}{2}, \infty)$
13. $(-\infty, 1)$ **15.** $\{x \mid x \ne 0, x \ne 3\}$
17. $\{x \mid x \ne 5\}$ **19.** $(-\infty, \infty)$
21. $[-5, 5]$ **23.** $(-\infty, 0] \cup [5, \infty)$
25. $(-2, 3]$ **27.** no es una función
29. función **31.** $[-4, 4], [0, 5]$
33. $[1, 9], [1, 6]$ **35.** $-\frac{6}{5}$
37. 2, 3 **39.** $0, \frac{1}{3}, -9$
41. $-1, 1$ **43.** $(8, 0), (0, -4)$
45. $(\frac{3}{2}, 0), (\frac{5}{2}, 0), (0, 15)$ **47.** $(0, -\frac{1}{4})$
49. $(-2, 0), (2, 0), (0, 3)$
51. $f_1(x) = \sqrt{x+5}, f_2(x) = -\sqrt{x+5}; [-5, \infty)$
53. 0, −3.4, 0.3, 2, 3.8, 2.9; (0, 2)
55. 3.6, 2, 3.3, 4.1, 2, −4.1; (−3.2, 0), (2.3, 0), (3.8, 0)
57. *a)* 2; 6; 120; 5 040 *c)* $(n+1)(n+2)$

Ejercicios 2.2 Página 64

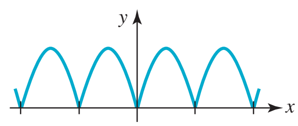
1. par **3.** ni par ni impar
5. impar **7.** par **9.** par **11.** impar
13. ni par ni impar
15. *a)*



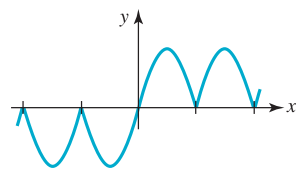
b)



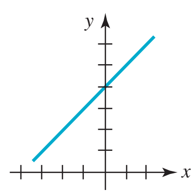
17. *a)*



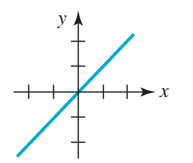
b)



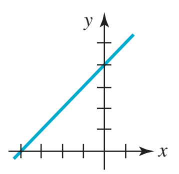
19. $f(2) = 4, f(-3) = 7$ **21.** $g(1) = 5, g(-4) = -8$
23. $(-2, 3), (3, -2)$ **25.** $(-8, 1), (-3, -4)$
27. $(-6, 2), (-1, -3)$ **29.** $(2, 1), (-3, -4)$
31. $(-2, 15), (3, -60)$
33. *a)*



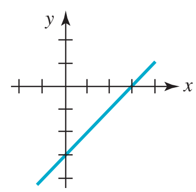
b)

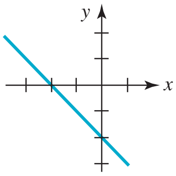


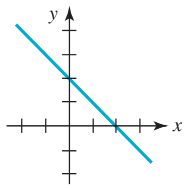
c)

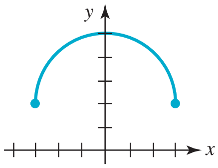


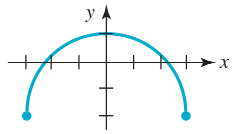
d)

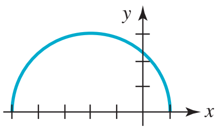


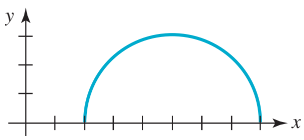
e)


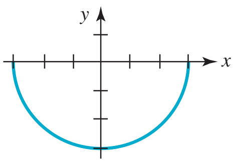
f)


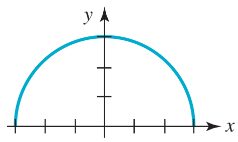
35. *a)*


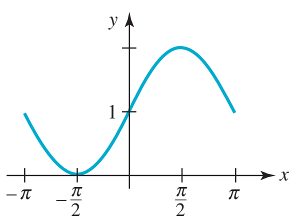
b)


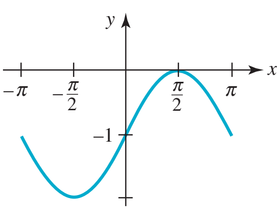
c)


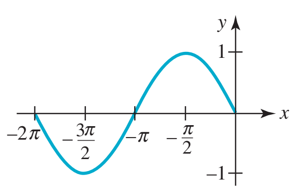
d)


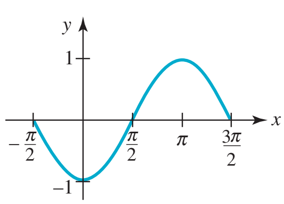
e)


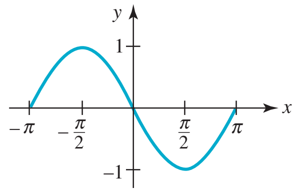
f)


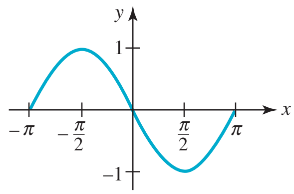
37. *a)*


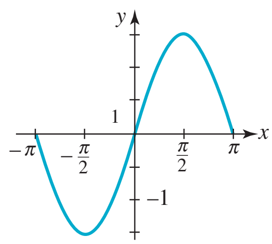
b)


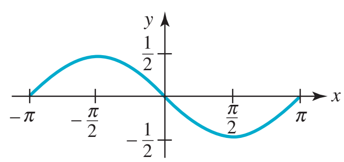
c)


d)


e)


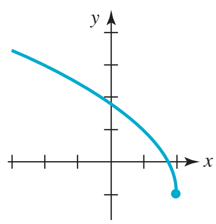
f)


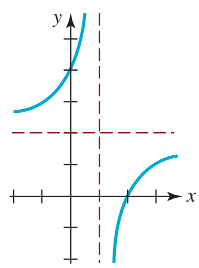
g)


h)


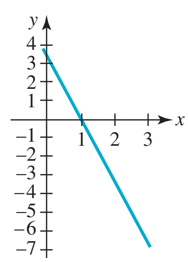
39. $y = (x - 1)^3 + 5$

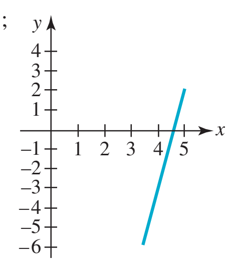
41. $y = -(x + 7)^4$

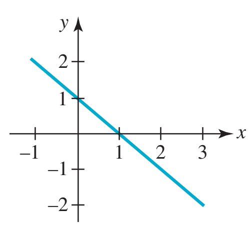
43.


45.


Ejercicios 2.3 Página 72

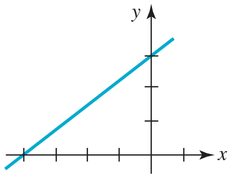
1. $-\frac{7}{2}$;


3. 5;


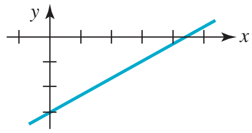
5. -1;


7. $-\frac{5}{12}$

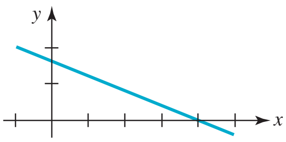
9. $\frac{3}{4}$; $(-4, 0)$, $(0, 3)$;



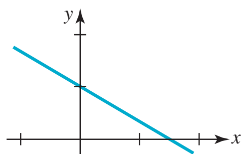
11. $\frac{2}{3}$; $(\frac{9}{2}, 0)$, $(0, -3)$;



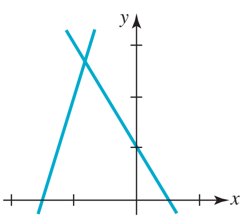
13. $-\frac{2}{5}$; $(4, 0)$, $(0, \frac{8}{5})$;



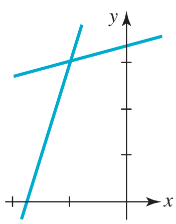
15. $-\frac{2}{3}$; $(\frac{3}{2}, 0)$, $(0, 1)$



17. $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ **19.** $y = 2$
21. $y = -x + 3$ **23.** $y = -2x + 7$
25. $y = 1$ **27.** $x = -2$ **29.** $y = -3x - 2$ **31.** $x = 5$
33. $y = -4x + 11$ **35.** $y = -\frac{1}{5}x - 5$ **37.** $(\frac{63}{16}, \frac{31}{8})$
39. *a)* y *c)* son paralelas, *b)* y *e)* son paralelas; *a)* y *c)* son perpendiculares *b)* y *e)*; *d)* es perpendicular a *f)*
41. *a)* y *d)* son perpendiculares, *b)* y *c)* son perpendiculares, *e)* y *f)* son perpendiculares
43. $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$
45. $(-\frac{5}{6}, \frac{8}{3})$;



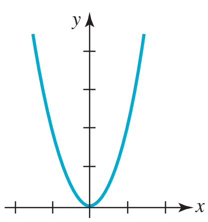
47. $(-1, 3)$;



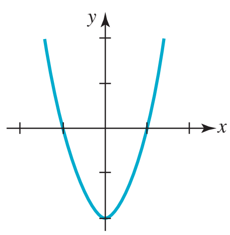
49. -9 **51.** $y = x + 3$ **53.** ***a)*** $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$
55. 1 680; aproximadamente 35.3 años

Ejercicios 2.4 Página 81

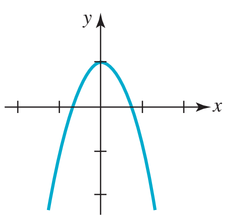
1.



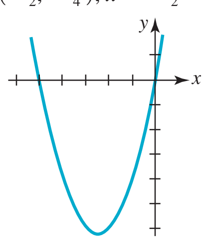
3.



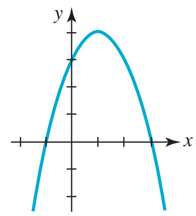
5.



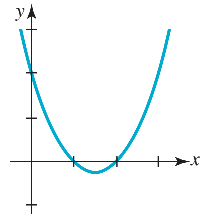
7. ***a)*** $(0, 0)$, $(-5, 0)$
b) $y = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}$
c) $(-\frac{5}{2}, -\frac{25}{4})$, $x = -\frac{5}{2}$
d)



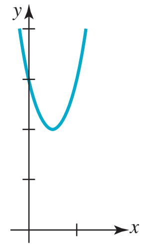
9. ***a)*** $(-1, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$
b) $y = -(x - 1)^2 + 4$
c) $(1, 4)$, $x = 1$
d)



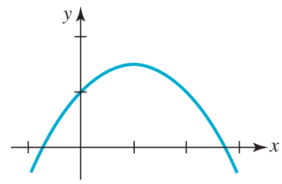
11. ***a)*** $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$
b) $y = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$
c) $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$, $x = \frac{3}{2}$
d)



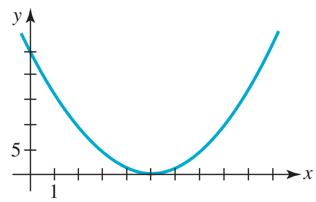
13. ***a)*** $(0, 3)$
b) $y = 4(x - \frac{1}{2})^2 + 2$
c) $(\frac{1}{2}, 2)$, $x = \frac{1}{2}$
d)



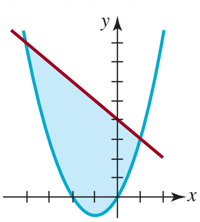
15. ***a)*** $(1 - \sqrt{3}, 0)$, $(1 + \sqrt{3}, 0)$, $(0, 1)$
b) $y = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{3}{2}$ ***c)*** $(1, \frac{3}{2})$, $x = 1$
d)



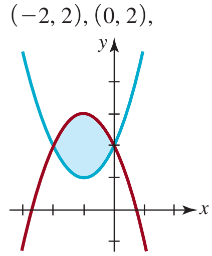
17. ***a)*** $(5, 0)$, $(0, 25)$ ***b)*** $y = (x - 5)^2$
c) $(5, 0)$, $x = 5$
d)



19. El valor mínimo de la función es $f(\frac{4}{3}) = -\frac{13}{3}$; $[-\frac{13}{3}, \infty)$
21. Creciente en $[0, \infty)$, decreciente en $(-\infty, 0]$
23. Creciente en $(-\infty, -3]$, decreciente en $[-3, \infty)$
25. La gráfica de $y = x^2$ se desplaza horizontalmente diez unidades a la derecha.
27. La gráfica de $y = x^2$ comprime verticalmente y después se refleja en el eje *x*; después tiene una traslación horizontal de cuatro unidades hacia la izquierda, seguida por una traslación vertical de nueve unidades hacia arriba.
29. Como se muestra, la ecuación se puede interpretar como la gráfica de $y = x^2$ desplazada horizontalmente seis unidades hacia la derecha, seguida por una reflexión en el eje *y* y después un desplazamiento vertical de cuatro unidades hacia abajo.
31. $y = (x + 2)^2$ **33.** $y = -x^2 - 1$
35. $y = -(x - 1)^2 + 5$ **37.** $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$
39. $f(x) = 4(x - 1)^2 + 2$
41. $(-4, 8)$, $(1, 3)$,



43. $(-2, 2)$, $(0, 2)$,



45. 19
47. ***a)*** $d^2 = 5x^2 - 10x + 25$ ***b)*** $(1, 2)$

49. ***a)*** $s(t) = -16t^2 + 64t + 6, v(t) = -32t + 64$
b) 70pies, 0 pies/s ***c)*** 4 s, -64 pies/s

51. ***a)*** 117.6 m, -9.8 m/s
b) en 5 segundos
c) -49 m/s

53. ***a)*** La gráfica de $R(D) = -kD^2 + kPD$ es una parábola con vértice en $-b/2a = (-kP)/(-2k) = P/2$. Como k es positivo, la gráfica se habre hacia abajo, y entonces $R(D)$ es máxima en este valor. Ya que $R(D)$ determina la rapidez con que se difunde la enfermedad, la conclusión es que se difunde con más rapidez exactamente cuando está infectada la mitad de la población.
b) 3×10^{-5} ***c)*** aproximadamente 48
d) aproximadamente 62, 79, 102 y 130

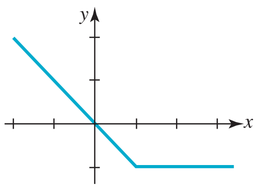
Ejercicios 2.5 Página 88

1. 2, 4, -5 **3.** 3, 0, 8, $2 + 2\sqrt{2}$

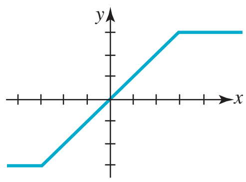
5. ***a)*** 1 ***b)*** 1 ***c)*** 0 ***d)*** 1
e) 1 ***f)*** 0

7. ***a)*** 3 ***b)*** $-1, \sqrt{2}$ ***c)*** $\sqrt[3]{-2}, 1$ ***d)*** $\sqrt[3]{-3}, 0$
e) $\sqrt{3}$ ***f)*** -2

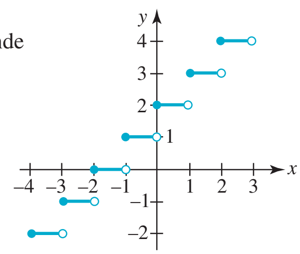
9. $(0, 0)$, continua,



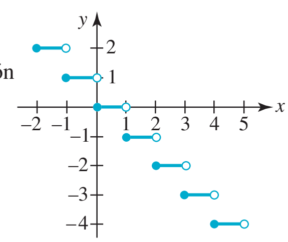
11. $(0, 0)$, continua,



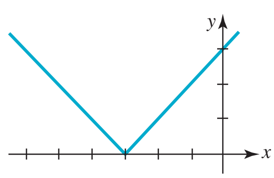
13. Las intersecciones con el eje x están en los puntos $(x, 0)$, donde $-2 \le x < -1$, la intersección con el eje y está en $(0, 2)$, la función es dicontinua en todo valor entero de x,



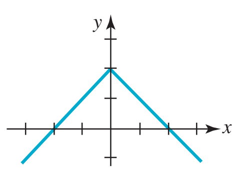
15. Las intersecciones con el eje x están en los puntos $(x, 0)$, donde $0 \le x < 1$, la intersección con el eje y está en $(0, 0)$, la función es discontinua en todo valor entero de x,



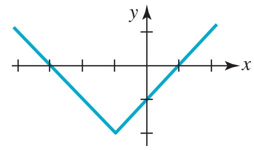
17. $(-3, 0)$, $(0, 3)$, continua,



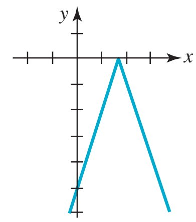
19. $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, continua,



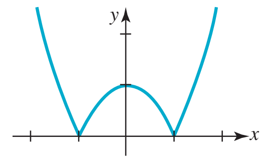
21. $(-3, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$, continua,



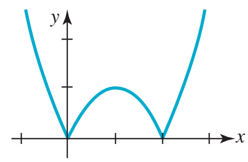
23. $(\frac{5}{3}, 0)$, $(0, -5)$, continua,



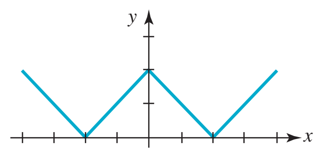
25. $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, continua,



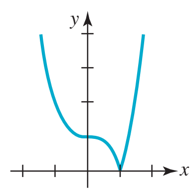
27. $(0, 0)$, $(2, 0)$, continua,



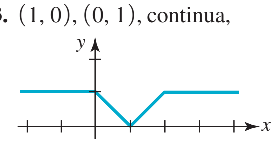
29. $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, continua,



31. $(1, 0)$, $(0, 1)$, continua,



33. $(1, 0)$, $(0, 1)$, continua,

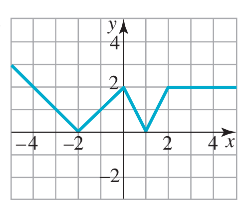


35. $\{-1, 1\}$

37. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ -2x + 2, & 0 \le x < 2 \\ -2, & x \ge 2 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} -x, & x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2}, & -3 \le x < 3 \\ x, & x \ge 3 \end{cases}$

41.



43. $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

45. $k = 1$

$$\textbf{47. } g(x) = \lceil x \rceil = \begin{cases} -2, & -3 < x \le -2 \\ -1, & -2 < x \le -1 \\ 0, & -1 < x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \\ 2, & 1 < x \le 2 \\ 3, & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

Ejercicios 2.6 Página 95

1. $(f+g)(x) = 3x^2 - x + 1$, dominio: $(-\infty, \infty)$
$(f-g)(x) = -x^2 + x + 1$, dominio: $(-\infty, \infty)$
$(fg)(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x$, dominio: $(-\infty, \infty)$
$(f/g)(x) = (x^2+1)/(2x^2 - x)$,
dominio: números reales excepto: $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$

3. $(f+g)(x) = x + \sqrt{x-1}$, dominio: $[1, \infty)$,
$(f-g)(x) = x - \sqrt{x-1}$, dominio: $[1, \infty)$,
$(fg)(x) = x\sqrt{x-1}$, dominio: $[1, \infty)$,
$(f/g)(x) = x/\sqrt{x-1}$, dominio: $(1, \infty)$

5. $(f+g)(x) = 3x^3 - 3x^2 + 3x + 1$, dominio: $(-\infty, \infty)$,
$(f-g)(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 1$, dominio: $(-\infty, \infty)$,
$(fg)(x) = 3x^5 - 10x^4 + 16x^3 - 14x^2 + 5x$,
dominio: $(-\infty, \infty)$,
$(f/g)(x) = (3x^3 - 4x^2 + 5x)/(1-x)^2$,
dominio: números reales excepto $x = 1$

7. $(f+g)(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{5-5x}$, dominio: $[-2, 1]$,
$(f-g)(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{5-5x}$, dominio: $[-2, 1]$,
$(fg)(x) = \sqrt{5(x+2)(1-x)}$, dominio: $[-2, 1]$,
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{x+2}{5-5x}}$, dominio: $[-2, 1)$

9. 10, 8, -1, 2, 0

11. $(f \circ g)(x) = x$, dominio: $[1, \infty)$,
$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, dominio: $(-\infty, \infty)$

13. $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{2x^2+1}$, dominio: $(-\infty, \infty)$,
$(g \circ f)(x) = \dfrac{4x^2 - 4x + 2}{4x^2 - 4x + 1}$,
dominio: números reales excepto $x = \frac{1}{2}$

15. $(f \circ g)(x) = x$, $(g \circ f)(x) = x$

17. $(f \circ g)(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$, $(g \circ f)(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$

19. $(f \circ g)(x) = x + 1 + \sqrt{x-1}$, $(g \circ f)(x) = x + 1 + \sqrt{x}$

21. $(f \circ f)(x) = 4x + 18$, $\left(f \circ \dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{6x+19}{x+3}$

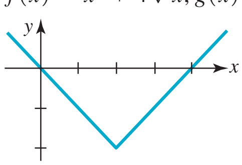
23. $(f \circ f)(x) = x^4$, $\left(f \circ \dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{x^4}$

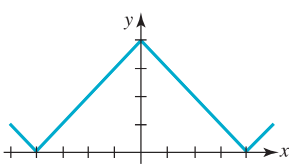
25. $(f \circ g \circ h)(x) = |x - 1|$ **27.** $(f \circ g \circ g)(x) = 54x^4 + 7$

29. $(f \circ f \circ f)(x) = 8x - 35$ **31.** $f(x) = x^5$, $g(x) = x^2 - 4x$

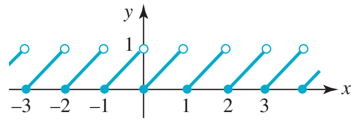
33. $f(x) = x^2 + 4\sqrt{x}$, $g(x) = x - 3$

35.

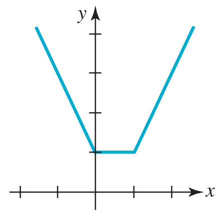




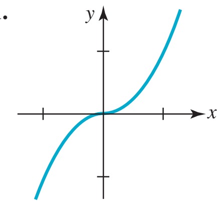
$$\textbf{37. } y = \begin{cases} x+3, & -3 \le x < -2 \\ x+2, & -2 \le x < -1 \\ x+1, & -1 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ x-1, & 1 \le x < 2 \\ x-2, & 2 \le x < 3 \end{cases}$$



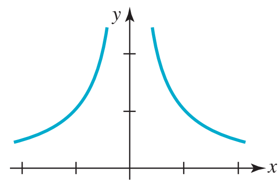
39.



41.



43.



45. *a)* $(-2, 3)$, $(1, 0)$ *b)* $d = -x^2 - x + 2$ *c)* $\frac{9}{4}$

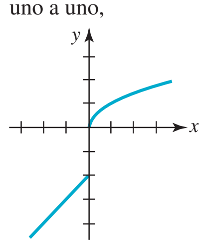
47. $d = \sqrt{10\ 000 + 250\ 000t^2}$; aproximadamente 2 502 pies

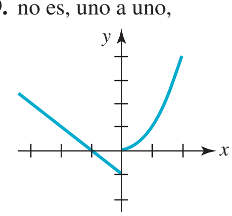
Ejercicios 2.7 Página 104

1. no es, uno a uno **3.** no es, uno a uno

5. uno a uno

7. uno a uno, **9.** no es, uno a uno,

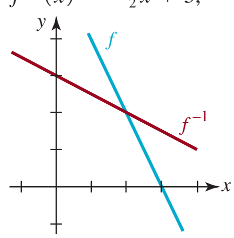


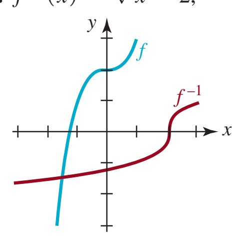


25. El dominio es $[4, \infty)$; el contradominio es $[0, \infty)$

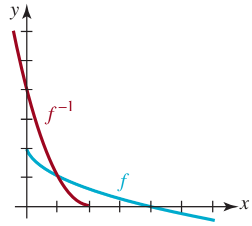
27. $f^{-1}(x) = \dfrac{4}{x^2}$, $x > 0$, $y > 0$

29. $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 3$, **31.** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$,





33. $f^{-1}(x) = (2 - x)^2, (-\infty, 2]$

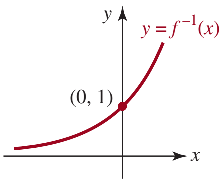


35. $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 1}{2x}$, el dominio de f^{-1} es el conjunto de los números reales excepto $x = 0$, el contradominio de f^{-1} es el conjunto de los números reales excepto $y = \frac{1}{2}$, contradominio de f es el conjunto de números reales excepto $y = 0$

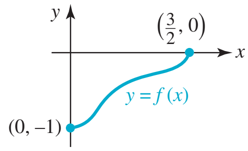
37. $f^{-1}(x) = \dfrac{3x}{2x - 7}$, dominio de f^{-1} es el conjunto de números reales excepto $x = \frac{7}{2}$, contradominio de f^{-1} es el conjunto de números reales excepto $y = \frac{3}{2}$, contradominio de f es el conjunto de números reales $y = \frac{7}{2}$

39. $(20, 2)$ **41.** $(12, 9)$

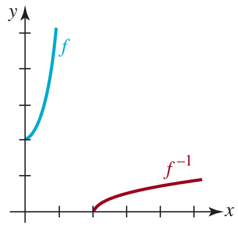
43.



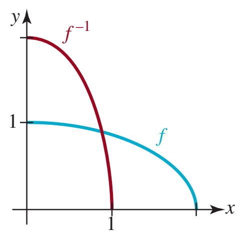
45.



47. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x - 2}, [2, \infty)$



49. $f^{-1}(x) = 2\sqrt{1 - x^2}, [0, 1]$



Ejercicios 2.8 Página 111

1. $S(x) = x + \dfrac{50}{x}; (0, \infty)$ **3.** $S(x) = 3x^2 - 4x + 2; [0, 1]$

5. $A(x) = 100x - x^2; [0, 100]$ **7.** $A(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2; [0, 4]$

9. $d(x) = \sqrt{2x^2 + 8}; (-\infty, \infty)$ **11.** $P(A) = 4\sqrt{A}; (0, \infty)$

13. $d(C) = C/\pi; (0, \infty)$ **15.** $A(h) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}h^2; (0, \infty)$

17. $A(x) = \dfrac{1}{4\pi}x^2; (0, \infty)$ **19.** $s(h) = \dfrac{30h}{25 - h}; [0, 25)$

21. $S(w) = 3w^2 + \dfrac{1\,200}{w}; (0, \infty)$

23. $d(t) = 20\sqrt{13t^2 + 8t + 4}; (0, \infty)$

25. $V(h) = \begin{cases} 120h^2, & 0 \le h < 5 \\ 1\,200\,h - 3\,000, & 5 \le h \le 8 \end{cases}; [0, 8]$

27. $f(x) = x - x^2; (-\infty, \infty)$ **29.** $F(x) = 2x + \dfrac{16\,000}{x}; (0, \infty)$

31. $C(x) = 4x + \dfrac{640\,000}{x}; (0, \infty)$

33. $A(x) = \frac{1}{2}xp - x^2; [0, \frac{1}{2}p]$

35. *a)* $A(x) = x^2 + \dfrac{128\,000}{x}; (0, \infty)$

b) $A(x) = 2x^2 + \dfrac{128\,000}{x}; (0, \infty)$

37. $V(x) = 20x - 40x^2; [0, \frac{1}{2}]$

39. $A(x) = 40 + 4x + \dfrac{64}{x}; (0, \infty)$

41. $L(x) = x + \dfrac{8x}{\sqrt{x^2 - 64}}; (8, \infty)$

43. $L(x) = \dfrac{1}{4\pi}(L^2x - x^3); [0, L]$

45. $V(x) = 5x\sqrt{64 - x^2}; [0, 8]$

47. $T(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 8x + 17}; [0, 4]$

Ejercicios 2.9 Página 121

1. *a)* $6 + h$ *b)* 6 *c)* $y = 6x - 15$

3. *a)* $-1 + h$ *b)* -1 *c)* $y = -x - 1$

5. *a)* $-23 - 12h - 2h^2$ *b)* -23 *c)* $y = -23x + 32$

7. *a)* $\dfrac{1}{2(-1 + h)}$ *b)* $-\frac{1}{2}$ *c)* $y = -\frac{1}{2}x - 1$

9. *a)* $\dfrac{1}{\sqrt{4 + h} + 2}$ *b)* $\frac{1}{4}$ *c)* $y = \frac{1}{4}x + 1$

11. **a)** 0 *b)* $f'(x) = 0$

13. *a)* $-8x - 4h$ *b)* $f'(x) = -8x$

15. *a)* $6x + 3h - 1$ *b)* $f'(x) = 6x - 1$

17. *a)* $3x^2 + 3xh + h^2 + 5$ *b)* $f'(x) = 3x^2 + 5$

19. *a)* $\dfrac{1}{(4 - x)(4 - x - h)}$ *b)* $f'(x) = \dfrac{1}{(4 - x)^2}$

21. *a)* $\dfrac{-1}{(x - 1)(x + h - 1)}$ *b)* $f'(x) = \dfrac{-1}{(x - 1)^2}$

23. *a)* $1 - \dfrac{1}{x(x + h)}$ *b)* $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

25. *a)* $\dfrac{2}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}$ *b)* $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

27. $(2, 17); 11; y = 11x - 5$

29. $(1, 2); 8; y = 8x - 6$ **31.** $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}); -3; y = -3x + 4$

33. *a)* $3x + 3a$ *b)* $f'(a) = 6a$

35. *a)* $10(x^2 + ax + a^2)$ *b)* $f'(a) = 30a^2$

37. *a)* $\dfrac{-1}{ax}$ *b)* $f'(a) = \dfrac{-1}{a^2}$

39. *a)* $\dfrac{7}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$ *b)* $f'(a) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{a}}$

Ejercicios de repaso Capítulo 2 Página 123

1. $-\frac{1}{3}$ **3.** $(-\infty, 5)$

5. $x = 0, x = 2$ **7.** $k = -\frac{6}{5}$

9. $m = -\frac{3}{2}$

11. $(1 - \sqrt{2}, 0), (1 + \sqrt{2}, 0), (0, -1)$

13. $f(x) = \frac{7}{4}(x + 2)^2$ **15.** $(10, 2)$

17. $(0, 5)$ **19.** $a = -\frac{1}{4}$ y $a = 8$

21. verdadero **23.** falso **25.** verdadero **27.** verdadero

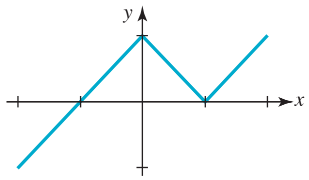
29. verdadero **31.** verdadero **33.** verdadero **35.** falso

37. falso **39.** verdadero **41.** $f(x) = x^2, g(x) = \dfrac{3x - 5}{x}$

43. ***a)*** $y = (x + 3)^3 - 2$ ***b)*** $y = x^3 - 7$
c) $y = (x - 1)^3$ ***d)*** $y = -x^3 + 2$
e) $y = -x^3 - 2$ ***f)*** $y = 3x^3 - 6$

45. dominio: $(\pi/2, 3\pi/2)$, contradominio: $(-\infty, \infty)$

47. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ -x + 1, & 0 \le x < 1, \\ x - 1, & x \ge 1 \end{cases}$



49. En la gráfica de f se ve que $f(x) > 0$ para toda x. Por consiguiente, el dominio de g es $(-\infty, \infty)$.

51. $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt[3]{x}$ **53.** $A(h) = h^2(1 - \pi/4)$

55. $d(s) = \sqrt{3}s$

57. ***a)*** $d(t) = 6t$ ***b)*** $d(t) = \sqrt{90^2 + (90 - 6t)^2}$

59. $S(x) = 20x + \dfrac{5}{x}, x > 0$

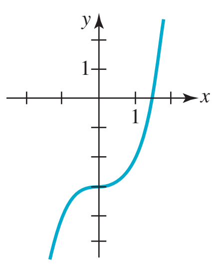
61. $A(x) = 2x(1 - \pi x)$, donde x es el radio de semicírculo

63. $f'(x) = -6x + 16, y = 4x + 24$

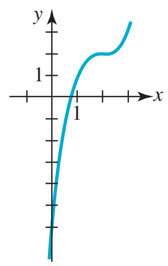
65. $f'(x) = \dfrac{1}{x^3}, y = 8x - 6$

Ejercicios 3.1 Página 135

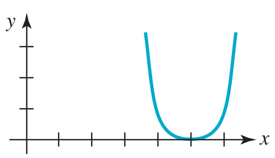
1.



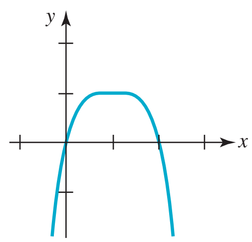
3.



5.



7.

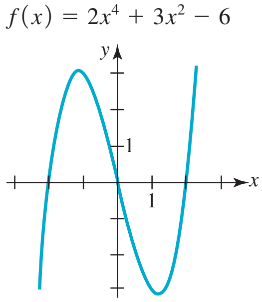


9. impar **11.** ni par ni impar

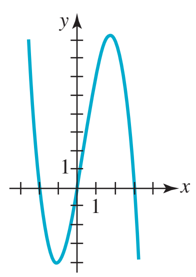
13. *f)* **15.** *e)* **17.** *b)*

19. $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 6$ **21.** $f(x) = -7x(x - 1)(x + 3)^2$

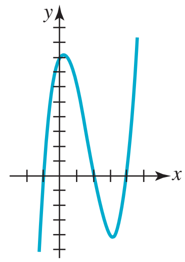
23.



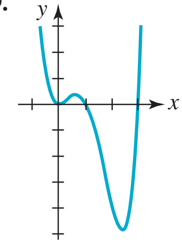
25.



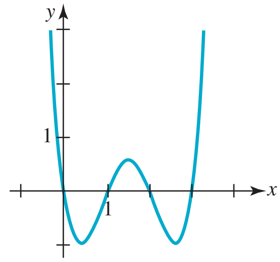
27.



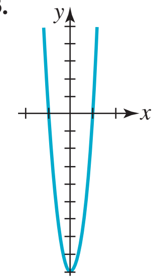
29.



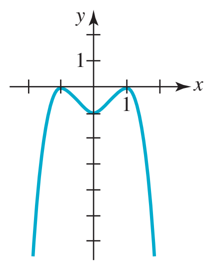
31.



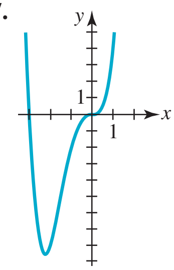
33.



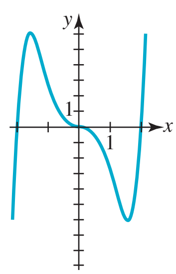
35.



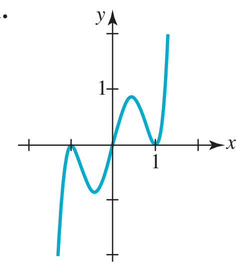
37.



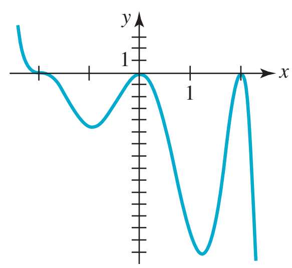
39.



41.



43.



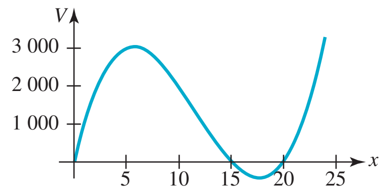
45. ***b)*** $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$

47. $k = -\frac{7}{16}$ **49.** $k = -\frac{10}{3}$

51. los enteros positivos impares

53. $[-2, -1], [-1, 0], [1, 2]$

55. $[0, 15]$;



57. $V(h) = \frac{1}{3}\pi(R^2h - h^3)$

Ejercicios 3.2 Página 141

1. $f(x) = x^2 \cdot 8 + 4x - 7$
3. $f(x) = (x^2 + x - 1) \cdot (5x - 12) + 21x - 11$
5. $f(x) = (x + 2)^2 \cdot (2x - 4) + 5x + 21$
7. $f(x) = (3x^2 - x) \cdot (9x + 3) + 4x - 2$
9. $f(x) = (6x^2 + 4x + 1) \cdot (x^3 - 2) + 12x^2 + 8x + 2$
11. $r = 6$ **13.** $r = \frac{29}{8}$ **15.** $r = 76$ **17.** $f(2) = 2$
19. $f(-5) = -74$ **21.** $f(\frac{1}{2}) = \frac{303}{16}$
23. $q(x) = 2x + 3, r = 11$
25. $q(x) = x^2 - 4x + 12, r = -34$
27. $q(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8, r = 32$
29. $q(x) = x^4 - 4x^3 + 16x^2 - 8x + 32, r = -132$
31. $q(x) = x^2 - 2x + \sqrt{3}, r = 0$
33. $f(-3) = 51$ **35.** $f(1) = 1$
37. $f(4) = 5\,369$ **39.** $k = -1$ **41.** $k = -\frac{1}{5}$ **43.** $k = -4$

Ejercicios 3.3 Página 148

1. $f(x) = 4(x - \frac{1}{4})(x - 1)^2$ **3.** 5 no es un cero
5. $f(x) = 3(x + \frac{2}{3})(x - 2 + \sqrt{2})(x - 2 - \sqrt{2})$
7. $f(x) = 4(x + 3)(x - 5)(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$
9. $f(x) = 9(x - 1)(x + \frac{1}{3})^2(x + 8)$
11. $x - 5$ no es un factor
13. $f(x) = (x - 1)(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}i)(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}i)$
15. $x - \frac{1}{3}$ no es un factor
17. $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 2i)(x + 2i)$
19. $f(x) = 2(x - 1)^2(x + 1)(x + \frac{3}{2})$
21. $f(x) = 3(x - \frac{5}{3})(x + 2i)(x - 2i)$
23. $f(x) = 5(x - \frac{2}{5})(x + 1 - i)(x + 1 + i)$
25. $f(x) = (x - 3)(x + 3)(x - 1 + 2i)(x - 1 - 2i)$
27. $f(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 3)^2$
$= x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 15x + 18$
29. $f(x) = x^5 - 6x^4 + 10x^3$ **31.** $f(x) = x^2 - 2x + 37$
33. 0 es un cero simple, $\frac{5}{4}$ es un cero de multiplicidad dos, $\frac{1}{2}$ es un cero de multiplicidad tres
35. $-\frac{2}{3}$ es un cero de multiplicidad dos, $\frac{2}{3}$ es un cero de multipliidad dos
37. $k = -36$ **39.** $f(x) = -\frac{1}{16}(x - 4)(x + 2)^2$

Ejercicios 3.4 Página 155

1. $\frac{2}{5}$ **3.** 3
5. $\frac{1}{2}$ (multiplicidad 2) **7.** no tiene ceros racionales
9. $\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ **11.** 0, 1 **13.** $-3, 0, 2$ **15.** $\frac{3}{2}$
17. $-\frac{1}{5}$ **19.** $-\frac{1}{2}$ (multiplicidad 2), $\frac{1}{3}$ (multiplicidad 2)
21. $\frac{3}{8}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$;
$f(x) = (8x - 3)(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})$
23. $\frac{4}{5}, \frac{5}{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$;
$f(x) = (5x - 4)(2x - 5)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$
25. $-4, -1, 1, -\sqrt{5}, \sqrt{5}$;
$f(x) = (x + 4)(x + 1)(x - 1)(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$
27. $0, 1, 3, -1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}$;
$f(x) = 4x(x - 1)(x - 3)(x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})$
29. $-1, \frac{1}{4}$ (multiplicidad 2);
$f(x) = (x + 1)(4x - 1)^2(x^2 - 2x + 3)$

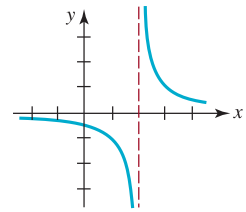
31. $-\frac{1}{2}$ **33.** $-\frac{3}{2}, 2, -2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}$
35. 1 (multiplicidad 3)
37. $f(x) = 3x^4 - x^3 - 39x^2 + 49x - 12$
39. $\frac{3}{4}$ **41.** $f(x) = -\frac{1}{6}(x - 1)(x - 2)(x - 3)$
43. 3 pulgadas o $\frac{1}{2}(7 - \sqrt{33}) \approx 0.63$ pulgadas

Ejercicios 3.5 Página 168

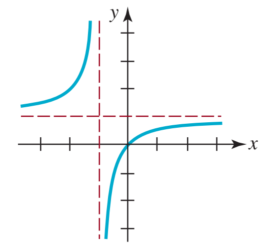
1.

x	3.1	3.01	3.001	3.0001	3.00001
$f(x)$	62	602	6,002	60,002	600,002
x	2.9	2.99	2.999	2.9999	2.99999
$f(x)$	−58	−598	−5 998	−59 998	−599 998

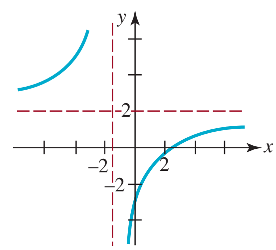
3. Asíntotas: $x = 2, y = 0$
Intersecciones: $(0, -\frac{1}{2})$



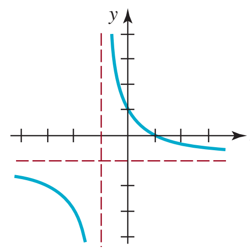
5. Asíntotas: $x = -1, y = 1$
Intersecciones: $(0, 0)$



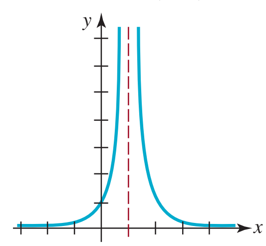
7. Asíntotas: $x = -\frac{3}{2}, y = 2$
Intersecciones: $(\frac{9}{4}, 0), (0, -3)$



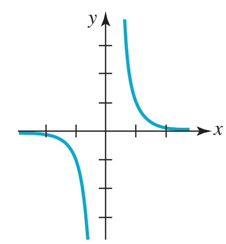
9. Asíntotas: $x = -1, y = -1$
Intersecciones: $(1, 0), (0, 1)$



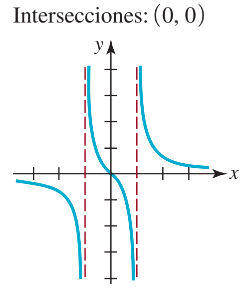
11. Asíntotas: $x = 1, y = 0$
Intersecciones: $(0, 1)$



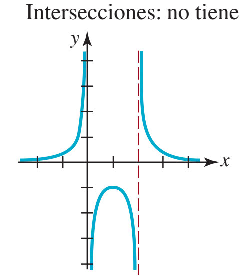
13. Asíntotas: $x = 0, y = 0$
Intersecciones: no tiene



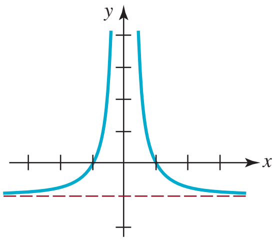
15. Asíntotas: $x = 1, x = -1,$
$y = 0$
Intersecciones: $(0, 0)$



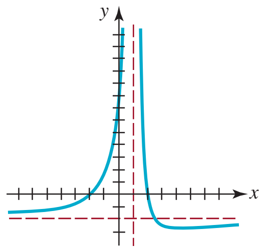
17. Asíntotas: $x = 0, x = 2,$
$y = 0$
Intersecciones: no tiene



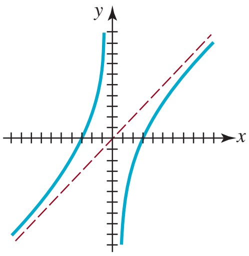
19. Asíntotas: $x = 0, y = -1$
Intersecciones: $(-1, 0), (1, 0)$



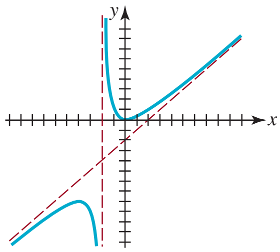
21. Asíntotas: $x = 1, y = -2$
Intersecciones: $(-2, 0), (2, 0), (0, 8)$



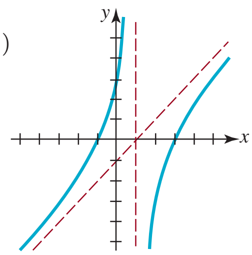
23. Asíntotas: $x = 0, y = x$
Intersecciones: $(-3, 0), (3, 0)$



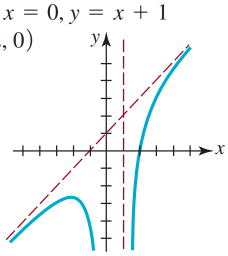
25. Asíntotas: $x = -2,$
$y = x - 2$
Intersecciones: $(0, 0)$



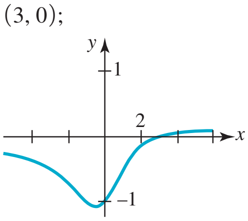
27. Asíntotas: $x = 1, y = x - 1$
Intersecciones: $(3, 0), (-1, 0), (0, 3)$



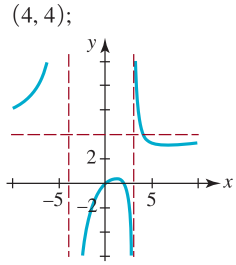
29. Asíntotas: $x = 1, x = 0, y = x + 1$
Intersecciones: $(2, 0)$



31. $(3, 0)$;



33. $(4, 4)$;

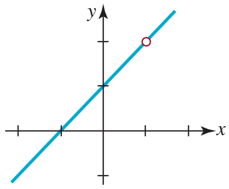


35. $(-3, -6)$

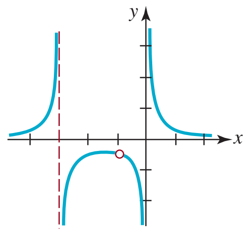
37. $y = \dfrac{x - 5}{x - 2}$

39. $y = \dfrac{3x(x - 3)}{(x + 1)(x - 2)}$

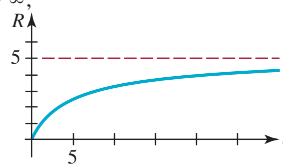
41. Agujero en la gráfica de $x = 1$
Intersecciones: $(-1, 0), (0, 1)$



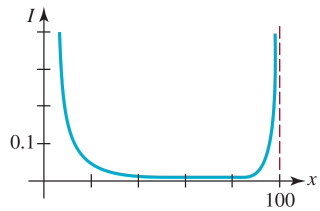
43. Agujero en la gráfica de $x = -1$
Intersecciones: no tiene



45. $R \to 5$ cuando $r \to \infty$;



47. $I(x) \to \infty$ cuando $x \to 0^+$; $I(x) \to \infty$ cuando $x \to 100^-$



Ejercicios 3.6 Página 175

1. $\dfrac{\frac{1}{2}}{x} - \dfrac{\frac{1}{2}}{x + 2}$

3. $-\dfrac{6}{x + 1} - \dfrac{3}{x - 5}$

5. $\dfrac{\frac{3}{2}}{x + 1} - \dfrac{10}{x + 2} + \dfrac{\frac{21}{2}}{x + 3}$

7. $\dfrac{\frac{3}{2}}{x + 4} + \dfrac{\frac{3}{2}}{x - 4}$

9. $\dfrac{5}{x - 3} + \dfrac{9}{(x - 3)^2}$

11. $-\dfrac{\frac{1}{4}}{x} + \dfrac{\frac{1}{4}}{x^2} + \dfrac{\frac{1}{4}}{x + 2} + \dfrac{\frac{1}{4}}{(x + 2)^2}$

13. $-\dfrac{\frac{11}{27}}{x} - \dfrac{\frac{7}{9}}{x^2} + \dfrac{\frac{1}{3}}{x^3} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x - 1} - \dfrac{\frac{5}{54}}{x + 3}$

15. $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{5x - 2}{x^2 + 9}$

17. $\dfrac{\frac{36}{7}}{2x - 3} + \dfrac{-\frac{4}{7}x + \frac{26}{7}}{x^2 - x + 1}$

19. $-\dfrac{\frac{7}{4}}{t + 1} + \dfrac{\frac{9}{4}}{t - 1} + \dfrac{-\frac{1}{2}t - 4}{t^2 + 1}$

21. $\dfrac{2x}{x^2 + 2} - \dfrac{x}{x^2 + 1}$

23. $\dfrac{1}{x^2 + 1} + \dfrac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

25. $x^3 + x + \dfrac{\frac{1}{2}}{x - 1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x + 1}$

27. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\frac{13}{3}}{x + 2} + \dfrac{\frac{13}{6}}{2x + 1}$

29. $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 + \dfrac{\frac{64}{5}}{x - 2} + \dfrac{\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}}{x^2 + 1}$

Ejercicios 3.7 Página 181

1. $\frac{7}{16}$

3. $\frac{1}{2}$

5. ***a)*** $\frac{27}{4}$ ***b)*** $\frac{33}{4}$

7. ***a)*** 20 ***b)*** 20

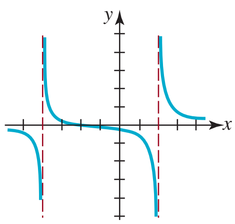
9. $\frac{85}{4}$

11. 6.85; 7.15

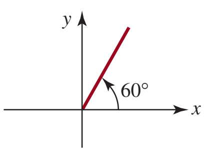
13. 9.32 acres; 8.48 acres

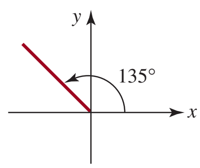
Ejercicos de repaso Capítulo 3 Página 183

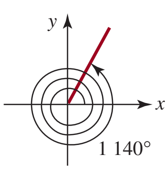
1. $(1, 0); (0, 0), (5, 0)$ **3.** $f(x) = x^4$
5. $k = \frac{2}{3}$ **7.** $x = 1, x = 4$
9. $y = -\frac{1}{2}$ **11.** $n = 0, n = 1, n = 2$
13. $-i, -1 + i, -1 - i$ **15.** 4
17. verdadero **19.** verdadero **21.** verdadero **23.** verdadero
25. verdadero **27.** falso **29.** falso **31.** falso
33. verdadero **35.** $3x^3 - \frac{1}{2}x + 1 + \dfrac{-\frac{1}{2}x + 5}{2x^2 - 1}$
37. $7x^3 + 14x^2 + 22x + 53 + \dfrac{109}{x - 2}$
39. $r = f(-3) = -198$ **41.** n entero positivo impar
43. $\pm1, \pm3, \pm5, \pm15, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{15}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{5}{4}, \pm\frac{15}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{8}, \pm\frac{5}{8}, \pm\frac{15}{8}$
45. $f(x) = (x - 2)(x - \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i)(x - \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i)$
47. $k = -\frac{21}{2}$ **49.** $k = \frac{3}{2}$
51. $\dfrac{\frac{1}{3}}{x} + \dfrac{\frac{1}{4}}{x - 1} - \dfrac{\frac{7}{12}}{x + 3}$ **53.** $\dfrac{1}{x^2 + 4} - \dfrac{4}{(x^2 + 4)^2}$
55. $f(x) = 3x^2(x + 2)^2(x - 1)$ **57.** $f(x) = \dfrac{4(x + 2)}{(x - 2)(x + 4)}$
59. *f)* **61.** *d)* **63.** *h)* **65.** *c)*
67. *b)* **69.** $y = 0, x = -4, x = 2, (-2, 0), (0, -\frac{1}{4})$,

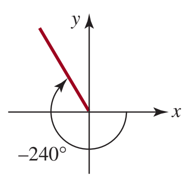


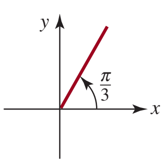
Ejercicios 4.1 Página 194

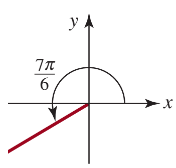
1.


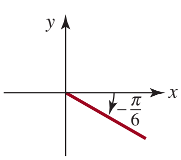
3.


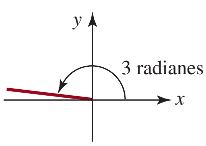
5.


7.


9.


11.


13.


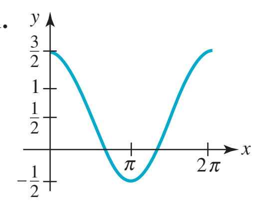
15.


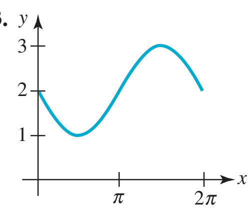
17. $\pi/18$ **19.** $\pi/4$ **21.** $3\pi/2$ **23.** $-23\pi/18$
25. 40° **27.** 120° **29.** 225° **31.** 177.62°
33. 155°, −205° **35.** 110°, −250°
37. $7\pi/4, -\pi/4$ **39.** $1.3\pi, -0.7\pi$
41. *a)* $2\pi - 4 \approx 2.28$ *b)* -4
43. *a)* 41.75° *b)* 131.75°
45 *a)* Triángulo obtuso no tiene complemento. *b)* 81.6°
47. *a)* $\pi/4$ *b)* $3\pi/4$
49. *a)* Triángulo obtuso no tiene complemento. *b)* $\pi/3$
51. *a)* 216°, 1.2π *b)* −1 845°, $-10.25\,\pi$
53. 60°, $\pi/3$
55. *a)* 16 h *b)* 2 h **57.** *a)* 9 *b)* 15
59. *a)* 1.5 *b)* 85.94°
63. *a)* 5.17° *b)* 10.42° *c)* 10.6547° *d)* 143.1172°
65. 1.15 millas
67. *a)* $\frac{3}{26}$ radián *b)* 975 cm^2
69. *a)* 3π radianes/s *b)* 180π cm/s

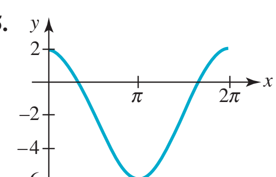
Ejercicios 4.2 Página 202

1. $\sqrt{21}/5$ **3.** $-\sqrt{5}/3$
5. $\pm3\sqrt{5}/7$ 7. $\pm2\sqrt{6}/5 \approx \pm0.98$
9. $\operatorname{sen} t = \pm1/\sqrt{5}, \cos t = \pm2/\sqrt{5}$
11. *a)* -1 *b)* 0 **13.** *a)* 0 *b)* 1
15. $\pi/3, \sqrt{3}/2, -\frac{1}{2}$ **17.** $\pi/4, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2$
19. $\pi/6, -\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2$ **21.** $\pi/4, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2$
23. $\pi/6, -\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2$ **25.** $\pi/3, \sqrt{3}/2, \frac{1}{2}$
27. $\sqrt{3}/2$ **29.** $\sqrt{2}/2$ **31.** -1
33. $\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t$ para $t = \pi$
35. $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$ para $t = 3 + \pi$
37. $\cos(-t) = \cos t$ para $t = 0.43$ **39.** $\sqrt{2}/2$
41. $-\sqrt{3}/2$ **43.** $\sqrt{3}/2$ **45.** $-\sqrt{3}/2$ **47.** $0, \pi$
49. $\pi/4, 7\pi/4$ **51.** 30°, 330° **53.** 225°, 315° **55.** 4.81 m
57. *a)* 978.0309 cm/s^2 *b)* 983.21642 cm/s^2
c) 980.61796 cm/s^2

Ejercicios 4.3 Página 211

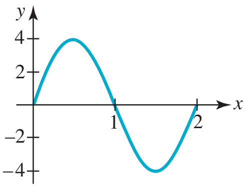
1.


3.


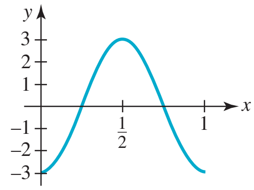
5.


7. $y = -3\operatorname{sen} x$
9. $y = 1 - 3\cos x$
11. $(n, 0)$, donde n es un entero
13. $((2n + 1)\pi, 0)$, donde n es un entero
15. $(\pi/4 + n\pi, 0)$, donde n es un entero
17. $(\pi/2, 0)$; $(\pi/2 + 2n\pi, 0)$, donde n es un entero
19. $y = 3\operatorname{sen} 2x$ **21.** $y = \frac{1}{2}\cos \pi x$
23. $y = -\operatorname{sen} \pi x$

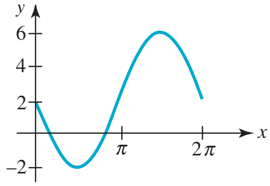
25. amplitud: 4; periodo: 2



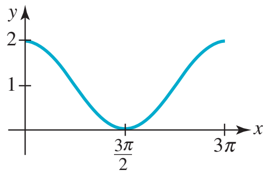
27. amplitud: 3; periodo: 1



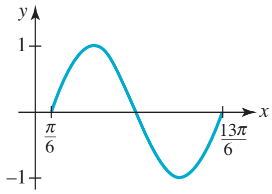
29. amplitud: 4; periodo: 2π



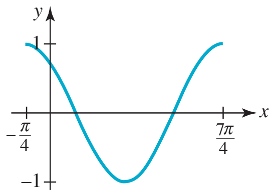
31. amplitud: 1; periodo: 3π



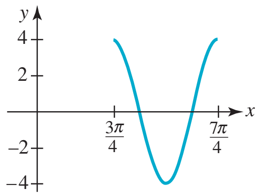
33. amplitud: 1; periodo: 2π



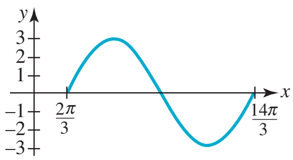
35. amplitud: 1; periodo: 2π



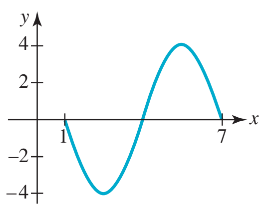
37. amplitud: 4; periodo: π



39. amplitud: 3; periodo: 4π

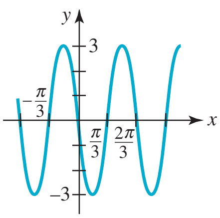


41. amplitud: 4; periodo: 6

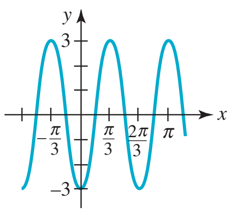


43. $y = -5 + 3\cos\left(6x + \dfrac{3\pi}{2}\right)$

45.

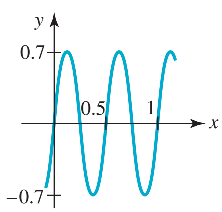


$y = 3\,\mathrm{sen}\,(3x - \pi)$

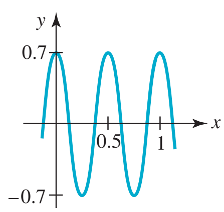


$y = 3\cos\,(3x - \pi)$

47.

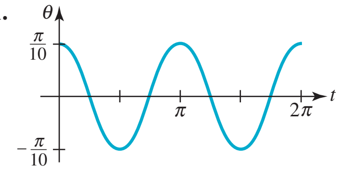


$y = 0.7\ \mathrm{sen}\ [4\pi(x - 4)]$

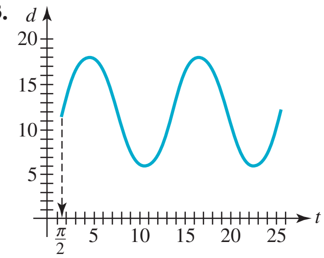


$y = 0.7\ \cos\ [4\pi(x - 4)]$

51.



53.



Ejercicios 4.4 Página 221

1.

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\cot x$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

3. $\sqrt{3}$ **5.** indefinida **7.** $-2/\sqrt{3}$ **9.** -1
11. -2 **13.** indefinida **15.** -2 **17.** $\sqrt{2}$

19. $\cot x = -\dfrac{1}{2}$, $\sec x = -\sqrt{5}$, $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,
$\mathrm{sen}\ x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\csc x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

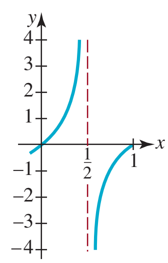
21. $\mathrm{sen}\ x = \frac{3}{4}$, $\cos x = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan x = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$,
$\cot x = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$, $\sec x = \dfrac{4}{\sqrt{7}}$

23. $\csc x = 3$, $\cos x = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sec x = -\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$,
$\tan x = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $\cot x = -2\sqrt{2}$

25. $\sec x = \frac{13}{12}$, $\mathrm{sen}\ x = -\frac{5}{13}$, $\csc x = -\frac{13}{5}$,
$\tan x = -\frac{5}{12}$, $\cot x = -\frac{12}{5}$

27. $\tan x = 3$, $\cot x = \frac{1}{3}$, $\sec x = \pm\sqrt{10}$, $\csc x = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

29. periodo: 1; intersecciones con el eje x: $(n, 0)$, donde n es un entero; asíntotas: $x = \dfrac{2n + 1}{2}$, n es un entero;



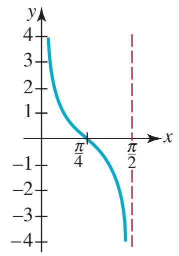
Respuestas a problemas impares seleccionados, CAPÍTULO 4

31. periodo: $\pi/2$;

intersecciones con el eje x en: $\left(\dfrac{2n+1}{4}\pi, 0\right)$,

donde n es un entero;

asíntotas: $x = n\pi/2$, n es un entero;



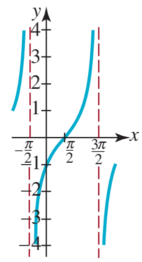
33. periodo: 2π;

intersecciones con el eje x en: $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi, 0\right)$,

donde n es un entero;

asíntotas: $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi$,

n es un entero;



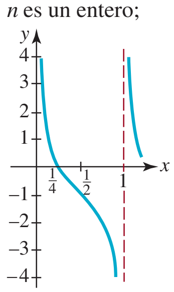
35. periodo: 1;

intersecciones con el eje x en: $(\frac{1}{4} + n, 0)$,

donde n es un entero;

asíntotas: $x = n$,

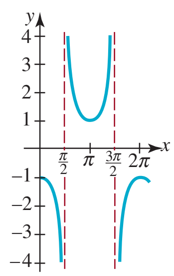
n es un entero;



37. periodo: 2π;

asíntotas: $x = \dfrac{2n+1}{2}\pi$,

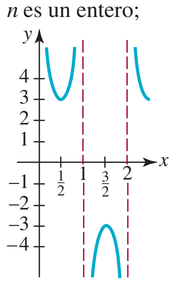
n es un entero;



39. periodo: 2;

asíntotas: $x = n$,

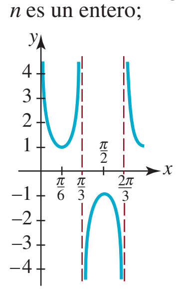
n es un entero;



41. periodo: $2\pi/3$;

asíntotas: $x = \dfrac{n\pi}{3}$,

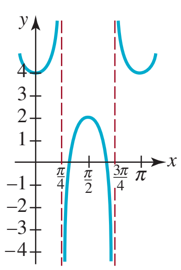
n es un entero;



43. periodo: π;

asíntotas: $x = \dfrac{2n-1}{4}\pi$,

n es un entero;



45. $\cot x = -\tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

Ejercicios 4.5 Página 230

1. $a \operatorname{sen}\theta$ **3.** $a\tan\theta$ **5.** $\tan\theta$ **7.** $\dfrac{\sqrt{7}}{7}\cos\theta$

9. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$ **11.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$

13. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$ **15.** $2+\sqrt{3}$

17. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$ **19.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$

21. $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$ **23.** $-2+\sqrt{3}$

25. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$ **27.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$

29. $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$ **31.** $\operatorname{sen} 2\beta$

33. $\cos\dfrac{2\pi}{5}$

35. ***a)*** $\frac{5}{9}$ ***b)*** $-\dfrac{2\sqrt{14}}{9}$ ***c)*** $-\dfrac{2\sqrt{14}}{5}$

37. ***a)*** $\frac{3}{5}$ ***b)*** $\frac{4}{5}$ ***c)*** $\frac{4}{3}$

39. ***a)*** $-\frac{119}{169}$ ***b)*** $-\frac{120}{169}$ ***c)*** $\frac{120}{119}$

41. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ **43.** $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

45. $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ **47.** $\dfrac{-2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

49. ***a)*** $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$ ***b)*** $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$ ***c)*** $\frac{3}{2}$

51. ***a)*** $-\sqrt{(5-\sqrt{5})/10}$ ***b)*** $\sqrt{(5+\sqrt{5})/10}$

c) $-(1+\sqrt{5})/2$

53. ***a)*** $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$ ***b)*** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ***c)*** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

55. ***a)*** $-2(\sqrt{10}+1)/9$ ***b)*** $(\sqrt{5}-4\sqrt{2})/9$

c) $2(1-\sqrt{10})/9$ ***d)*** $(\sqrt{5}+4\sqrt{2})/9$

57. $2\sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 3.86$

Ejercicios 4.6 Página 238

1. $x = \dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$ o $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi$, donde n es un entero

3. $x = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi$ o $x = \dfrac{7\pi}{4} + 2n\pi$, donde n es un entero

5. $x = \dfrac{5\pi}{6} + n\pi$, donde n es un entero

7. $x = \pi + 2n\pi = (2n+1)\pi$, donde n es un entero

9. $x = n\pi$, donde n es un entero

11. $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi$, donde n es un entero

13. $\theta = 60° + 360°n$ o $\theta = 120° + 360°n$, donde n es un entero

15. $\theta = 135° + 180°n$, donde n es un entero

17. $\theta = 120° + 360°n$ o $\theta = 240° + 360°n$, donde n es un entero

19. $x = n\pi$, donde n es un entero

21. no tiene soluciones

23. $\theta = 120° + 360°n$ o $\theta = 240° + 360°n$, donde n es un entero

25. $\theta = 90° + 180°n$ o $\theta = 135° + 180°n$, donde n es un entero

27. $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, donde n es un entero

29. $\theta = 10° + 120°n$ o $\theta = 50° + 120°n$, donde n es un entero

31. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, donde n es un entero

33. $x = n\pi, x = \dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi$, o $x = \dfrac{4\pi}{3} + 2n\pi$, donde n es un entero

35. $\theta = 30° + 360°n, \theta = 150° + 360°n$, o $\theta = 270° + 360°n$, donde n es un entero

37. $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, donde n es un entero

39. $x = n\pi$, donde n es un entero

41. $\theta = 90° + 180°n$, donde n es un entero

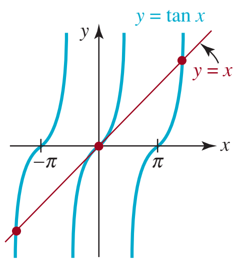
43. $x = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi$ o $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi$, donde n es un entero

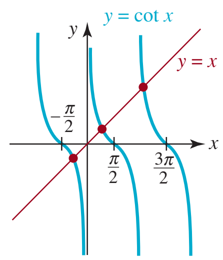
45. $\theta = 90° + 180°n$ o $\theta = 360°n$, donde n es un entero

47. $(\pi/3, 0), (2\pi/3, 0), (\pi, 0)$ **49.** $(\frac{2}{3}, 0), (\frac{10}{3}, 0), (\frac{14}{3}, 0)$

51. $(\pi, 0), (2\pi, 0), (3\pi, 0)$ **53.** $(\pi/3, 0), (\pi, 0), (5\pi/3, 0)$

55. La ecuación tiene una cantidad infinita de soluciones. **57.** La ecuación tiene una cantidad infinita de soluciones.





59. 30° o 150° **61.** 60°

63. $t = \frac{1}{120}(\frac{1}{6} + n)$, donde n es un entero.

65. ***a)*** 36.93 millones de kilómetros cuadrados ***b)*** 31 semanas ***c)*** Agosto

Ejercicios 4.7 Página 246

1. 0 **3.** π **5.** $\pi/3$ **7.** $-\pi/3$

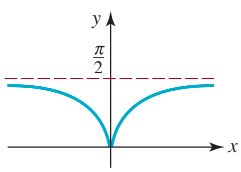
9. $\pi/4$ **11.** $-\pi/6$ **13.** $-\pi/4$ **15.** $\frac{4}{5}$

17. $-\sqrt{5}/2$ **19.** $\sqrt{5}/5$ **21.** $\frac{5}{3}$ **23.** $\frac{1}{5}$

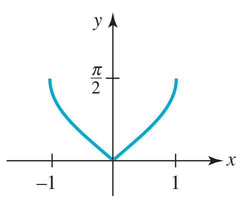
25. 1.2 **27.** $\pi/16$ **29.** 0 **31.** $\pi/4$

33. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ **35.** $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ **37.** $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ **39.** $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

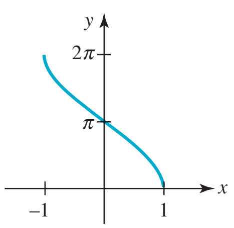
41.



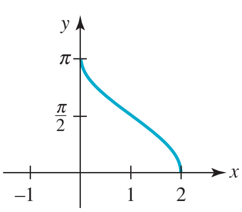
43.



45.



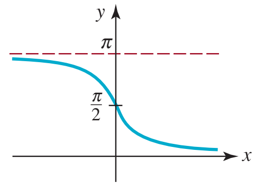
47.



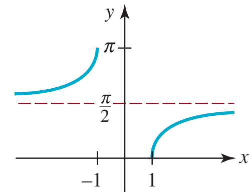
49. 1.37, 1.82 **51.** -1.02, 0.55

53. 0.58, 1.57, 1.81

55. dominio: $(-\infty, \infty)$, contradominio: $(0, \pi)$



57. dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, contradominio: $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$



59. ***a)*** x en $(-\infty, \infty)$ ***b)*** x en $(0, \pi)$

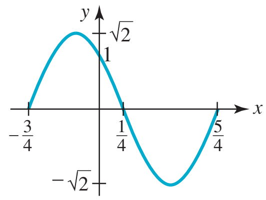
61. ***a)*** x en $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ***b)*** x en $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$

65. 0.9273 **67.** -0.7297 **69.** 2.5559 **71.** 19.9°, 70.1°

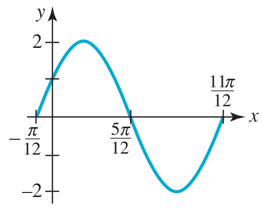
73. 5.76° **75.** $\phi = 0.5404$ radián $\approx 31°$

Ejercicios 4.8 Página 253

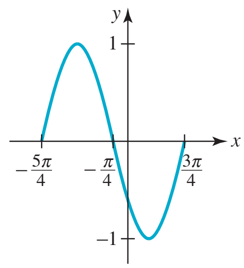
1. $y = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\pi x + 3\pi/4)$; amplitud: $\sqrt{2}$; periodo: 2; cambio de fase: $\frac{3}{4}$; un ciclo de la gráfica es



3. $y = 2\,\mathrm{sen}(2x + \pi/6)$; amplitud: 2; periodo: π; cambio de fase: $\pi/12$; un ciclo de la gráfica es



5. $y = \mathrm{sen}(x + 5\pi/4)$; amplitud: 1; periodo: 2π; cambio de fase: $5\pi/4$; un ciclo de la gráfica es



7. $y = \frac{\sqrt{13}}{4}\mathrm{sen}(2t + 0.5880)$; amplitud: $\frac{\sqrt{13}}{4}$ pie; periodo: π segundos; frecuencia: $1/\pi$ ciclos por segundo

9. $y = \frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{sen}(4t + 4.2487)$; amplitud: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ pie; periodo: $\pi/2$ segundos; frecuencia: $2/\pi$ ciclos por segundo

11. $y_0 = -\frac{5\sqrt{3}}{4}, v_0 = \frac{5}{2}$ **13.** $I(t) = I_0\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta + \phi)$

Ejercicios 4.9 Página 259

1. $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{4}{5}, \cos\theta = \frac{3}{5}, \tan\theta = \frac{4}{3}, \csc\theta = \frac{5}{4}, \sec\theta = \frac{5}{3}, \cot\theta = \frac{3}{4}$

3. $\mathrm{sen}\,\theta = 3\sqrt{10}/10, \cos\theta = \sqrt{10}/10, \tan\theta = 3,$ $\csc\theta = \sqrt{10}/3, \sec\theta = \sqrt{10}, \cot\theta = \frac{1}{3}$

5. $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{2}{5}, \cos\theta = \sqrt{21}/5, \tan\theta = 2\sqrt{21}/21, \csc\theta = \frac{5}{2},$ $\sec\theta = 5\sqrt{21}/21, \cot\theta = \sqrt{21}/2$

7. $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{3}, \cos\theta = 2\sqrt{2}/3, \tan\theta = \sqrt{2}/4, \csc\theta = 3,$ $\sec\theta = 3\sqrt{2}/4, \cot\theta = 2\sqrt{2}$

9. $\mathrm{sen}\,\theta = y/\sqrt{x^2+y^2}, \cos\theta = x/\sqrt{x^2+y^2}, \tan\theta = y/x,$ $\csc\theta = \sqrt{x^2+y^2}/y, \sec\theta = \sqrt{x^2+y^2}/x, \cot\theta = x/y$

11. $b = 2.04, c = 4.49$ **13.** $a = 11.71, c = 14.19$

15. $\alpha = 60°, \beta = 30°, a = 2.6$ **17.** $\alpha = 21.8°, \beta = 68.2°, c = 10.8$
19. $\alpha = 48.6°, \beta = 41.4°, c = 7.9$
21. $a = 8.5, c = 21.7$
23. 36.53 **25.** 52.1 m **27.** 66.4 ft
29. 409.7 pies **31.** altura: 15.5 pies; distancia: 12.6 pies
33. 8.7° **35.** 34 157 pies ≈ 6.5 mi
37. 20.2 pies **39.** 6 617 pies
41. Si, porque la altura de la tormenta es de 6.3 km.
45. 227 100 mi **47.** $h = c/(\cot\alpha + \cot\beta)$
49. altura aprox. del avión P' es 1 552 pies, altura aprox. del avión P es 2 635 pies.
51. $h(\theta) = 1.25\tan\theta$
53. $\theta(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{2x}\right)$, donde x está en metros

Ejercicios 4.10 Página 270

1. $\gamma = 80°, a = 20.16, c = 20.16$
3. $\alpha = 92°, b = 3.01, c = 3.89$
5. $\alpha = 79.6°, \gamma = 28.4°, a = 12.41$
7. no tiene solución
9. $\alpha = 24.46°, \beta = 140.54°, b = 12.28$; $\alpha = 155.54°, \beta = 9.46°, b = 3.18$
11. $\alpha = 37.59°, \beta = 77.41°, c = 7.43$
13. $\alpha = 52.62°, \beta = 83.33°, \gamma = 44.05°$
15. $\alpha = 25°, \beta = 57.67°, c = 7.04$
17. $\alpha = 76.45°, \beta = 57.1°, \gamma = 46.45°$
19. $\alpha = 27.66°, \beta = 40.54°, \gamma = 111.8°$
21. no tiene solución
23. $\alpha = 36.87°, \beta = 53.13°, \gamma = 90°$
25. $\alpha = 45.58°, \gamma = 104.42°, c = 13.56$; $\alpha = 134.42°, \gamma = 15.58°, c = 3.76$
27. $\alpha = 26.38°, \beta = 36.34°, \gamma = 117.28°$
29. $\beta = 10.24°, \gamma = 147.76°, a = 6.32$
31. no tiene solución **33.** 15.80 pies
35. 9.1 m **37.** 10.35 pies
39. 35.94 millas náuticas
41. ***a)*** S33.66°W ***b)*** S2.82°E
43. $\alpha = 119.45°, \beta = 67.98°$

Ejercicios 4.11 Página 278

1. $\frac{1}{2}$ **3.** -1 **5.** $-\sqrt{3}/2$ **7.** 5
9. 0 **11.** -2 **13.** 0 **15.** 1
17. 1 **19.** $y = x$
21. $y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6})$ **23.** $f'(x) = -\operatorname{sen} x$
25. $f'(x) = 5\cos 5x$

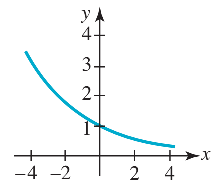
Ejercicios de repaso Capítulo 4 Página 280

1. 36° **3.** $(-\sqrt{3}/2, 1/2)$
5. $\sqrt{3}$ **7.** $3/(2\sqrt{2})$ **9.** $(0, -2)$ **11.** $2/\sqrt{5}$
13. $6\operatorname{sen}(\pi x/2)$ **15.** $\sqrt{2}$ **17.** 10 **19.** $\pi/5$
21. falso **23.** verdadero **25.** verdadero **27.** verdadero
29. verdadero **31.** verdadero **33.** verdadero **35.** falso
37. falso **39.** falso
41. $\pi/2, \pi$ **43.** $\pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$ **45.** $0, \pi/2, 2\pi$
47. $\gamma = 80°, a = 5.32, c = 10.48$
49. $a = 15.76, \beta = 99.44°, \gamma = 29.56°$

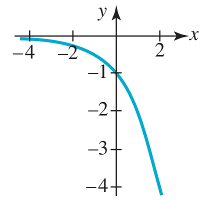
51. $2\pi/3$ **53.** $3/\sqrt{7}$ **55.** 0 **57.** $\frac{12}{13}$
59. $\sqrt{1 - x^2}$ **61.** $y = -\operatorname{sen} x$; $y = \cos(x + \pi/2)$
63. $y = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x + \pi/2)$; $y = 1 + \frac{1}{2}\cos x$
65. 42.61 m **67.** 118 pies **69.** ***a)*** 42.35° **71.** 16 927.6 km
73. frente: 18.88°; atrás: 35.12° **75.** 80.87°
77. $V(\theta) = 160\operatorname{sen} 2\theta$ **79.** $L(\theta) = 3\csc\theta + 4\sec\theta$
81. $V(\theta) = 360 + 75\cot\theta$ **83.** $A(\phi) = 100\cos\phi + 50\operatorname{sen} 2\phi$

Ejercicios 5.1 Página 293

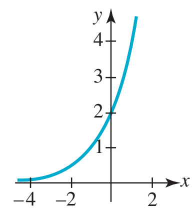
1. $(0, 1)$, $y = 0$, decreciente



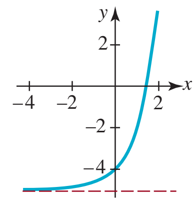
3. $(0, -1)$, $y = 0$, decreciente



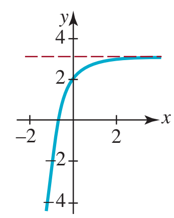
5. $(0, 2)$, $y = 0$, creciente



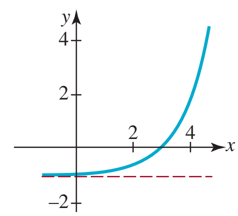
7. $(0, -4)$, $y = -5$, creciente



9. $(0, 2)$, $y = 3$, creciente

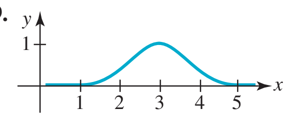


11. $(0, -1 + e^{-3})$, $y = -1$, creciente

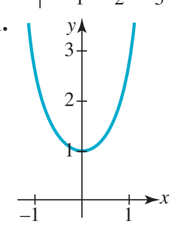


13. $f(x) = 6^x$ **15.** $f(x) = (e^{-2})^x = e^{-2x}$
17. $(5, \infty)$ **19.** $(2, 0), (0, -3)$
21. $(-10, 0), (0, 10)$ **23.** $(-2, 0), (-3, 0), (0, 0)$
25. $x > 4$ **27.** $x < 2$

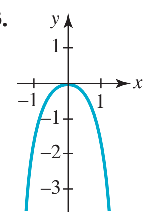
29.



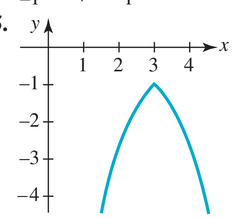
31.



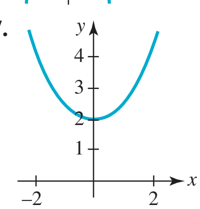
33.



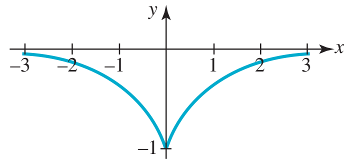
35.



37.

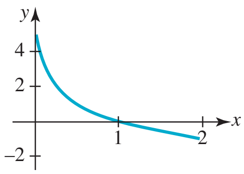


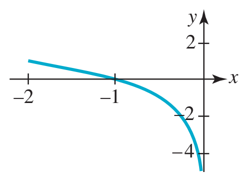
39. $\frac{3}{2}$ **41.** 7 **43.** 2 **45.** $0, \frac{1}{3}$
47. 0, 2 **49.** 0 **51.** $(-3, 0)$
53.



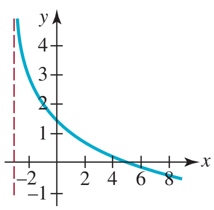
Ejercicios 5.2 Página 301

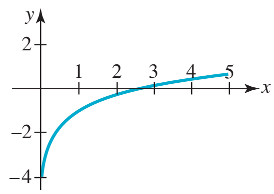
1. $-\frac{1}{2} = \log_4 \frac{1}{2}$ **3.** $4 = \log_{10} 10\,000$
5. $-s = \log_t v$ **7.** $2^7 = 128$ **9.** $(\sqrt{3})^8 = 81$
11. $b^v = u$ **13.** -7 **15.** 3 **17.** e
19. 36 **21.** $\frac{1}{7}$ **23.** $f(x) = \log_7 x$
25. $(0, \infty)$; $(1, 0)$, $x = 0$ **27.** $(-\infty, 0)$; $(-1, 0)$, $x = 0$



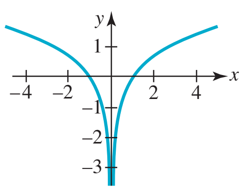


29. $(-3, \infty)$; $(5, 0)$, $x = -3$ **31.** $(0, \infty)$; $(e, 0)$, $x = 0$

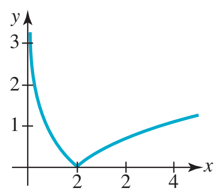




33. $-1 < x < 0$ **35.** $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $x = 0$



37.

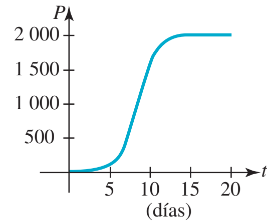


39. $(\frac{3}{2}, \infty)$ **41.** $(-3, 3)$

43. $[1, \infty)$ **45.** $\log_{10} 50$ **47.** $\ln(x^2 - 2)$ **49.** $\ln 1 = 0$
51. $\ln y = 10 \ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 5) - \frac{1}{3} \ln(8x^3 + 2)$
53. $\ln y = 5 \ln(x^3 - 3) + 8 \ln(x^4 + 3x^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln x - 9 \ln(7x + 5)$
55. 93 **57.** 3 **59.** $\frac{13}{2}$
61. $\log_5(1 + \sqrt{2}) = \dfrac{\ln(1 + \sqrt{2})}{\ln 5}$
63. e^{-2}, e **65.** $\frac{1}{100}$ **67.** 81 **69.** 2, 8
71. $\frac{3}{2}$ **73.** $\log_6 51 = \dfrac{\ln 51}{\ln 6} \approx 2.1944$
75. $-5 + \dfrac{\ln 9}{\ln 2} \approx -1.8301$ **77.** $\dfrac{1 + \ln 2}{-1 + \ln 5} \approx 2.7782$
79. *iii*)

Ejercicios 5.3 Página 310

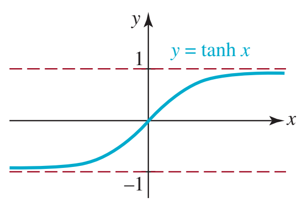
1. ***a***) $P(t) = P_0 e^{0.3466t}$ ***b***) $5.66P_0$ ***c***) 8.64 h
3. 2 344 **5.** 201
7. ***a***) 82
b) 8.53 days
c) 2 000
d)



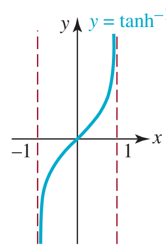
9. $A(t) = 200e^{-0.005077t}$; 177 mg
11. aproximadamente 100 g, 50 g, 25 g
13. aproximadamente $k = -0.08664$, 34.58 días
15. $0.6730\ A_0$; $0.2264\ A_0$
17. aproximadamente 16 253 años
19. aproximadamente 92%
21. ***a***) 220.2° F ***b***) 9.2 minutos ***c***) 80° F
23. 8.74 minutos **25.** aproximadamente 1.6 horas
27. \$4 851 651.95; \$2.35 $\times 10^{15}$ **29.** \$3 080.37 en intereses
31. ***a***) 6 días ***b***) 19.84%
33. $t = -\dfrac{L}{R} \ln\left(1 - \dfrac{IR}{E}\right)$
35. aproximadamente 25 veces más fuerte
37. 5.5 **39.** 6 **41.** 7.6 **43.** 5×10^{-4}
45. 2.5×10^{-7} **47.** 10 veces más ácida
49. 158.5 veces más ácida **51.** 5.62×10^{25} ergs
53. 10^{-2} watts/cm^2 **55.** 65 db
57. ***a***) 2.46 mm ***b***) 0.79 mm, 0.19 mm ***c***) 7.7×10^{-6} mL

Ejercicios 5.4 Página 319

3. $\dfrac{1}{x} \log_{10} e = \dfrac{1}{x \ln 10}$ **5.** $\dfrac{1}{x}$
7. $e^{5x}\left(\dfrac{e^{5h} - 1}{h}\right)$ **15.** $\pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
21.



23. dominio: $(-1, 1)$, contradominio: $(-\infty, \infty)$

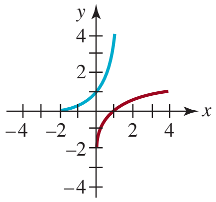


25. $5e^{5x}$

Ejercicios de repaso Capítulo 5 Página 322

1. $(0, 5)$, $y = 6$ **3.** $(-3, 0)$, $x = -4$
5. -1 **7.** 1 000
9. 6 **11.** $\frac{1}{9}$
13. 3 **15.** $3 + e$
17. -7.8577 **19.** 64
21. 8 **23.** verdadero
25. verdadero **27.** verdadero
29. falso **31.** verdadero

33. falso **35.** verdadero
37. $-1 = \log_5 0.2$ **39.** $9^{1.5} = 27$
41. -2 **43.** $-\frac{1}{2}$
45. $1 - \log_2 7 = 1 - \dfrac{\ln 7}{\ln 2}$ **47.** $-2 + \ln 6$
49.

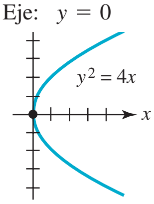


51. C, D, A, B

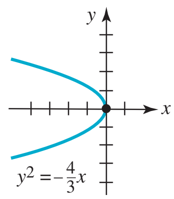
53. $\dfrac{3^{1-h} - 3}{h}$ **55.** *ii)* **57.** *iv)* **59.** *iii)*
63. $f(x) = 5e^{(-\frac{1}{6}\ln 5)x} = 5e^{-0.2682x}$ **65.** $f(x) = 5 + (\frac{1}{2})^x$
67. Después de duplicarse tardará otras 9 horas en duplicarse de nuevo. En otras palabras, pasará un total de 18 horas para que la población crezca 4 veces.
69. $0.0625A_0$ o $6\frac{1}{4}\%$ de la cantidad inicial **71.** 4.3%
73. $t = \dfrac{1}{c}[\ln b - \ln(\ln a - \ln y)]$ **75.** \$51 955.78

Ejercicios 6.1 Página 332

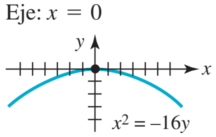
1. Vértice: $(0, 0)$
Foco: $(1, 0)$
Directriz: $x = -1$
Eje: $y = 0$



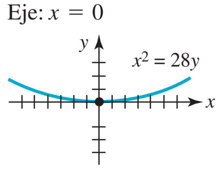
3. Vértice: $(0, 0)$
Foco: $(-\frac{1}{3}, 0)$
Directriz: $x = \frac{1}{3}$
Eje: $y = 0$



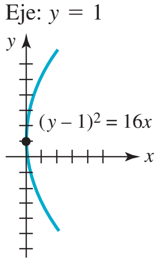
5. Vértice: $(0, 0)$
Foco: $(0, -4)$
Directriz: $y = 4$
Eje: $x = 0$



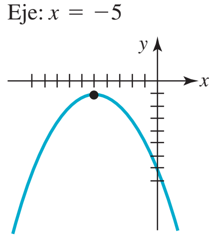
7. Vértice: $(0, 0)$
Foco: $(0, 7)$
Directriz: $y = -7$
Eje: $x = 0$



9. Vértice: $(0, 1)$
Foco: $(4, 1)$
Directriz: $x = -4$
Eje: $y = 1$

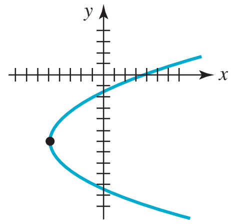


11. Vértice: $(-5, -1)$
Foco: $(-5, -2)$
Directriz: $y = 0$
Eje: $x = -5$



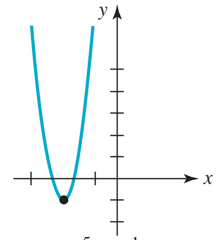
$(x + 5)^2 = -4(y + 1)$

13. Vértice: $(-5, -6)$
Foco: $(-4, -6)$
Directriz: $x = -6$
Eje: $y = -6$



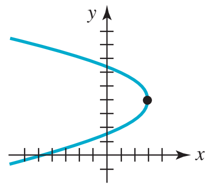
$(y + 6)^2 = 4(x + 5)$

15. Vértice: $(-\frac{5}{2}, -1)$
Foco: $(-\frac{5}{2}, -\frac{15}{16})$
Directriz: $y = -\frac{17}{16}$
Eje: $x = -\frac{5}{2}$



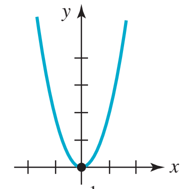
$(x + \frac{5}{2})^2 = \frac{1}{4}(y + 1)$

17. Vértice: $(3, 4)$
Foco: $(\frac{5}{2}, 4)$
Directriz: $x = \frac{7}{2}$
Eje: $y = 4$



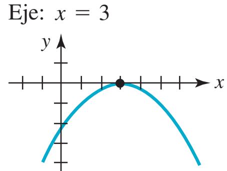
$(y - 4)^2 = -2(x - 3)$

19. Vértice: $(0, 0)$
Foco: $(0, \frac{1}{8})$
Directriz: $y = -\frac{1}{8}$
Eje: $x = 0$



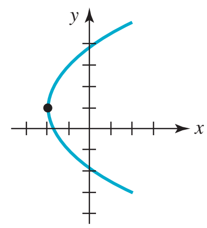
$x^2 = \frac{1}{2}y$

21. Vértice: $(3, 0)$
Foco: $(3, -1)$
Directriz: $y = 1$
Eje: $x = 3$



$(x - 3)^2 = -4y$

23. Vértice: $(-2, 1)$
Foco: $(-1, 1)$
Directriz: $x = -3$
Eje: $y = 1$

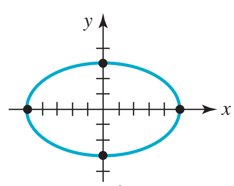


$(y - 1)^2 = 4(x + 2)$

25. $x^2 = 28y$ **27.** $y^2 = -16x$ **29.** $y^2 = 10x$
31. $(x - 2)^2 = 12y$ **33.** $(y - 4)^2 = -12(x - 2)$
35. $(x - 1)^2 = 32(y + 3)$ **37.** $(y + 3)^2 = 32x$
39. $x^2 = 7y$ **41.** $(x - 5)^2 = -24(y - 1)$
43. $x^2 = \frac{1}{2}y$ **45.** $(3, 0), (0, -2), (0, -6)$
47. $(-3\sqrt{2}, 0), (3\sqrt{2}, 0), (0, 9)$
49. En el foco 6 pulgadas del vértice
51. $y = -2$ **53.** 27 pies **55.** 4.5 pies **57.** ***a)*** 8

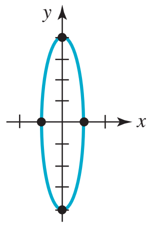
Ejercicios 6.2 Página 340

1. Centro: $(0, 0)$
Focos: $(\pm 4, 0)$
Vértices: $(\pm 5, 0)$
Extremos del eje menor: $(0, \pm 3)$
Excentricidad: $\frac{4}{5}$



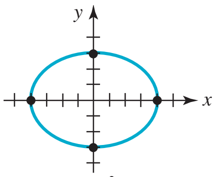
$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

3. Centro: $(0, 0)$
Foco: $(0, \pm\sqrt{15})$
Vértices: $(0, \pm 4)$
Extremos del eje menor: $(\pm 1, 0)$
Excentricidad: $\sqrt{15}/4$



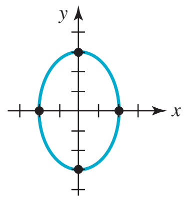
$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{16} = 1$

5. Centro: $(0, 0)$
Foco: $(\pm\sqrt{7}, 0)$
Vértices: $(\pm 4, 0)$
Extremos del eje menor: $(0, \pm 3)$
Excentricidad: $\sqrt{7}/4$



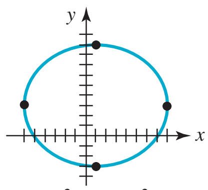
$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

7. Centro: $(0, 0)$
Foco: $(0, \pm\sqrt{5})$
Vértices: $(0, \pm 3)$
Extremos del eje menor: $(\pm 2, 0)$
Excentricidad: $\sqrt{5}/3$



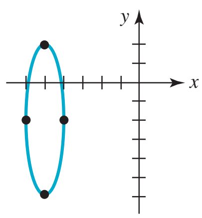
$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

9. Centro: $(1, 3)$
Foco: $(1 \pm \sqrt{13}, 3)$
Vértices: $(-6, 3), (8, 3)$
Extremos del eje menor: $(1, -3), (1, 9)$
Excentricidad: $\sqrt{13}/7$



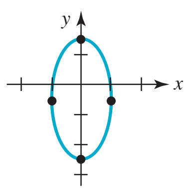
$\frac{(x-1)^2}{49} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$

11. Centro: $(-5, -2)$
Foco: $(-5, -2 \pm \sqrt{15})$
Vértices: $(-5, -6), (-5, 2)$
Extremos del eje menor: $(-6, -2)$, $(-4, -2)$
Excentricidad: $\sqrt{15}/4$



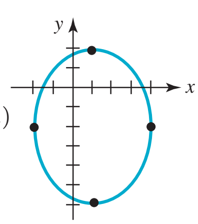
$\frac{(x+5)^2}{1} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

13. Centro: $(0, -\frac{1}{2})$
Foco: $(0, -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3})$
Vértices: $(0, -\frac{5}{2}), (0, \frac{3}{2})$
Extremos del eje menor: $(-1, -\frac{1}{2}), (1, -\frac{1}{2})$
Excentricidad: $\sqrt{3}/2$



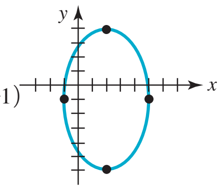
$\frac{x^2}{1} + \frac{(y+\frac{1}{2})^2}{4} = 1$

15. Centro: $(1, -2)$
Foco: $(1, -2 \pm \sqrt{6})$
Vértices: $(1, -2 \pm \sqrt{15})$
Extremos del eje menor: $(-2, -2), (4, -2)$
Excentricidad: $\sqrt{\frac{2}{5}}$



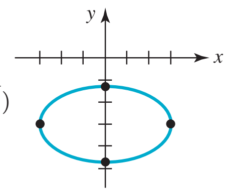
$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{15} = 1$

17. Centro: $(2, -1)$
Foco: $(2, -5), (2, 3)$
Vértices: $(2, -6), (2, 4)$
Extremos del eje menor: $(-1, -1), (5, -1)$
Excentricidad: $\frac{4}{5}$



$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$

19. Centro: $(0, -3)$
Foco: $(\pm\sqrt{6}, -3)$
Vértices: $(-3, -3), (3, -3)$
Extremos del eje menor: $(0, -3 \pm \sqrt{3})$
Excentricidad: $\sqrt{6}/3$

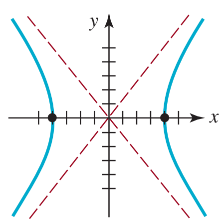


$\frac{x^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{3} = 1$

21. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
23. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} = 1$
25. $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$
27. $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$
29. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{13} = 1$
31. $\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{9} = 1$
33. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1$
35. $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$
37. $\frac{(x-1)^2}{7} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$
39. $\frac{x^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$
41. $f(x) = -\frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$, dominio es $[-5, 5]$
43. $f(x) = 3 + \frac{6}{7}\sqrt{49 - (x-1)^2}$, dominio es $[-6, 8]$
45. la distancia máxima es 43.5 millones de millas; la distancia mínima es 28.5 millones de millas
47. aproximadamente 0.97
49. 12 pies
51. El tramo de alambre debe tener 4 pies de longitud. Los clavos deben colocarse $\sqrt{7}/2$ pies del centro del rectángulo sobre el eje mayor de la elipse.
53. en el eje mayor 12 pies a cada lado del centro del recinto.
55. $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 24x - 48y = 0$

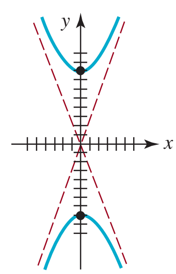
Ejercicios 6.3 Página 349

1. Centro: $(0, 0)$
Foco: $(\pm\sqrt{41}, 0)$
Vértices: $(\pm 4, 0)$
Asíntotas: $y = \pm\frac{5}{4}x$
Excentricidad: $\sqrt{41}/4$



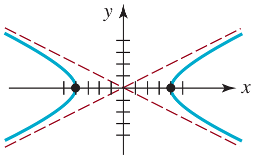
$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

3. Centro: $(0, 0)$
Foco: $(0, \pm\sqrt{73})$
Vértices: $(0, \pm 8)$
Asíntotas: $y = \pm\frac{8}{3}x$
Excentricidad: $\sqrt{73}/8$



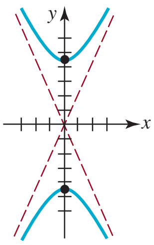
$\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{9} = 1$

5. Centro: $(0, 0)$
Foco: $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$
Vértices: $(\pm 4, 0)$
Asíntotas: $y = \pm\frac{1}{2}x$
Excentricidad: $\sqrt{5}/2$



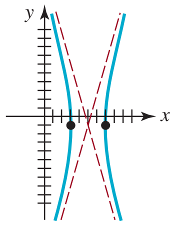
$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

7. Centro: $(0, 0)$
Foco: $(0, \pm 2\sqrt{6})$
Vértices: $(0, \pm 2\sqrt{5})$
Asíntotas: $y = \pm\sqrt{5}\,x$
Excentricidad: $\sqrt{\frac{6}{5}}$



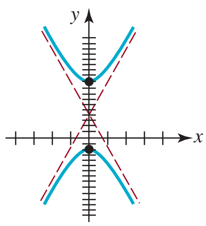
$\frac{y^2}{20} - \frac{x^2}{4} = 1$

9. Centro: $(5, -1)$
Foco: $(5 \pm \sqrt{53}, -1)$
Vértices: $(3, -1), (7, -1)$
Asíntotas: $y = -1 \pm \frac{7}{2}(x - 5)$
Excentricidad: $\sqrt{53}/2$



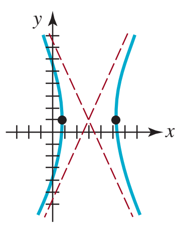
$\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{49} = 1$

11. Centro: $(0, 4)$
Foco: $(0, 4 \pm \sqrt{37})$
Vértices: $(0, -2), (0, 10)$
Asíntotas: $y = 4 \pm 6x$
Excentricidad: $\sqrt{37}/6$



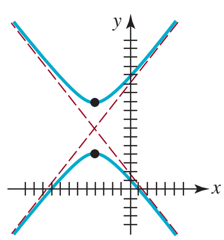
$\frac{(y-4)^2}{36} - \frac{x^2}{1} = 1$

13. Centro: $(3, 1)$
Foco: $(3 \pm \sqrt{30}, 1)$
Vértices: $(3 \pm \sqrt{5}, 1)$
Asíntotas: $y = 1 \pm \sqrt{5}(x - 3)$
Excentricidad: $\sqrt{6}$



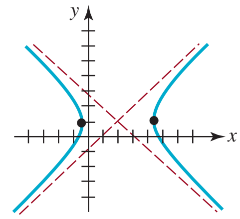
$\frac{(x-3)^2}{5} - \frac{(y-1)^2}{25} = 1$

15. Centro: $(-4, 7)$
Foco: $(-4, 7 \pm \sqrt{13})$
Vértices: $(-4, 7 \pm 2\sqrt{2})$
Asíntotas: $y = 7 \pm \sqrt{\frac{8}{5}}(x + 4)$
Excentricidad: $\sqrt{\frac{13}{8}}$



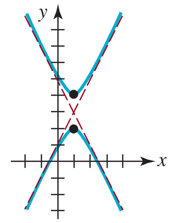
$\frac{(y-7)^2}{8} - \frac{(x+4)^2}{5} = 1$

17. Centro: $(2, 1)$
Foco: $(2 \pm \sqrt{11}, 1)$
Vértices: $(2 \pm \sqrt{6}, 1)$
Asíntotas: $y = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{6}}(x - 2)$
Excentricidad: $\sqrt{\frac{11}{6}}$



$\frac{(x-2)^2}{6} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1$

19. Centro: $(1, 3)$
Foco: $(1, 3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{5})$
Vértices: $(1, 2), (1, 4)$
Asíntotas: $y = 3 \pm 2(x - 1)$
Excentricidad: $\sqrt{5}/2$



$\frac{(y-3)^2}{1} - \frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} = 1$

21. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ **23.** $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$ **25.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

27. $\frac{y^2}{\frac{25}{4}} - \frac{x^2}{\frac{11}{4}} = 1$ **29.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ **31.** $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{16} = 1$

33. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{64}{9}} = 1$ **35.** $\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{5} = 1$

37. $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$ **39.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$

41. $\frac{(y-3)^2}{1} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$ **43.** $\frac{(y-4)^2}{1} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$

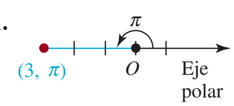
45. $f(x) = \frac{5}{4}\sqrt{x^2 - 16}$, dominio es $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$

47. $f(x) = 4 + 6\sqrt{x^2 + 1}$, dominio es $(-\infty, \infty)$

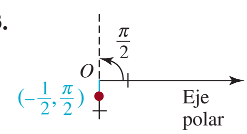
49. $(-7, 12)$ **51.** $7y^2 - 24xy + 24x + 82y + 55 = 0$

Ejercicios 6.4 Página 354

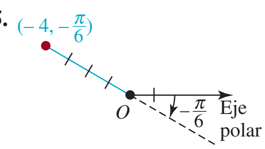
1.



3.



5.



7. *a)* $(2, -5\pi/4)$ *b)* $(2, 11\pi/4)$
c) $(-2, 7\pi/4)$ *d)* $(-2, -\pi/4)$

9. *a)* $(4, -5\pi/3)$ *b)* $(4, 7\pi/3)$
c) $(-4, 4\pi/3)$ *d)* $(-4, -2\pi/3)$

11. *a)* $(1, -11\pi/6)$ *b)* $(1, 13\pi/6)$
c) $(-1, 7\pi/6)$ *d)* $(-1, -5\pi/6)$

13. $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\sqrt{3})$ **15.** $(-3, 3\sqrt{3})$ **17.** $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

19. *a)* $(2\sqrt{2}, -3\pi/4)$ *b)* $(-2\sqrt{2}, \pi/4)$

21. *a)* $(2, -\pi/3)$ *b)* $(-2, 2\pi/3)$

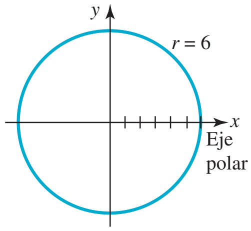
23. *a)* $(7, 0)$ *b)* $(-7, \pi)$

25. $r = 5\csc\theta$ **27.** $\theta = \tan^{-1}7$ **29.** $r = 2/(1 + \cos\theta)$

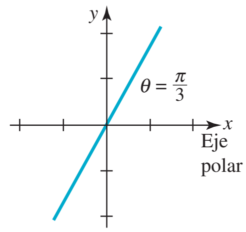
31. $r = 6$ **33.** $r = 1 - \cos\theta$

Ejercicios 6.5 Página 362

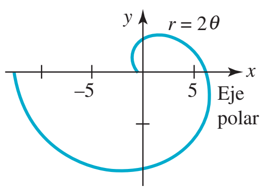
1. círculo



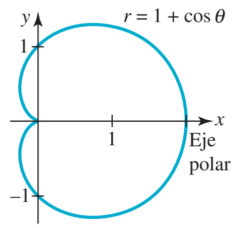
3. línea por el polo



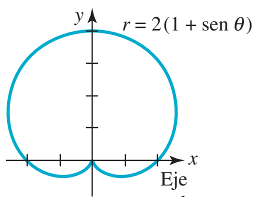
5. espiral



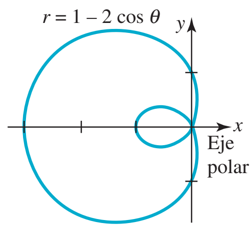
7. cardioide



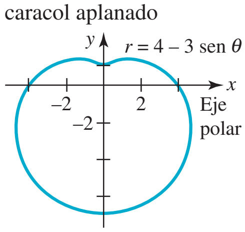
9. cardioide



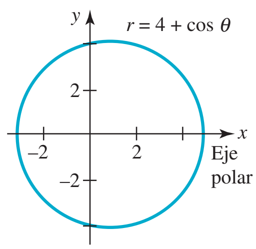
11. caracol con bucle interno



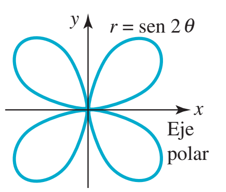
13. caracol aplanado



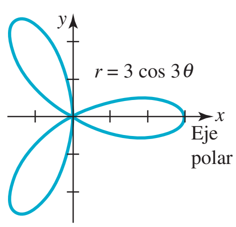
15. caracol convexo



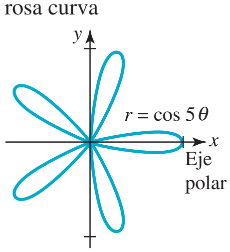
17. rosa curva



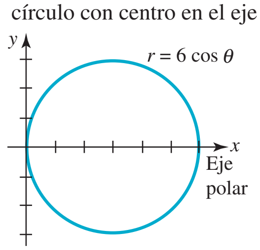
19. rosa curva



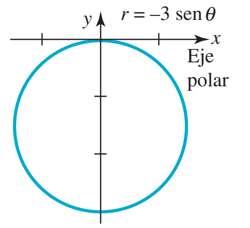
21. rosa curva



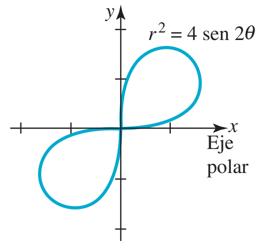
23. círculo con centro en el eje x



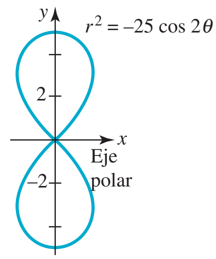
25. círculo con centro en eje y



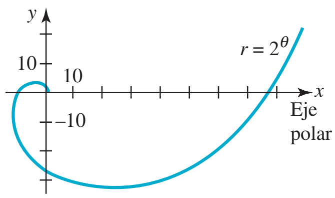
27. lemniscata



29. lemniscata



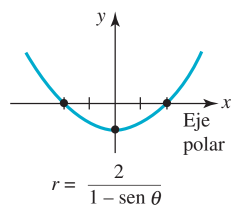
31.



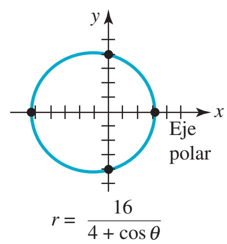
33. $r = \frac{5}{2}$
35. $r = 4 - 3\cos\theta$
37. $r = 2\cos 4\theta$
39. $(2, \pi/6), (2, 5\pi/6)$
41. $(1, \pi/2), (1, 3\pi/2)$, origen
45. $(\sqrt{3}/2, \pi/3), (\sqrt{3}/2, 2\pi/3)$, origen

Ejercicios 6.6 Página 368

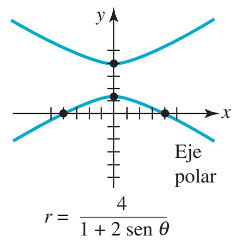
1. $e = 1$, parábola



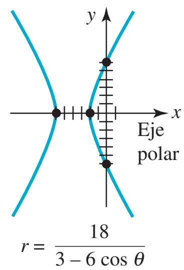
3. $e = \frac{1}{4}$, elipse



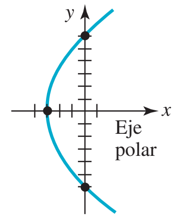
5. $e = 2$, hipérbola



7. $e = 2$, hipérbola



9. $e = 1$, parábola **11.** $\dfrac{(y-4)^2}{4} - \dfrac{x^2}{12} = 1, e = 2, c = 4, a = 2$



$r = \dfrac{6}{1 - \cos\theta}$

13. $\dfrac{(x - \frac{24}{5})^2}{\frac{1\,296}{25}} + \dfrac{y^2}{\frac{144}{5}} = 1, e = \frac{2}{3}, c = \frac{24}{5}, a = \frac{36}{5}$ **15.** $r = \dfrac{3}{1 + \cos\theta}$

17. $r = \dfrac{4}{3 - 2\,\text{sen}\,\theta}$ **19.** $r = \dfrac{12}{1 + 2\cos\theta}$

21. $r = \dfrac{3}{1 + \cos(\theta + 2\pi/3)}$ **23.** $r = \dfrac{3}{1 - \text{sen}\,\theta}$

25. $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$ **27.** $r = \dfrac{1}{2 - 2\,\text{sen}\,\theta}$ **29.** $(2, \pi/4)$

31. $(10, \pi/3), (\frac{10}{3}, 4\pi/3)$ **33.** 8 000 km

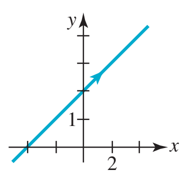
35. $r = \dfrac{1.495 \times 10^8}{1 - 0.0167\cos\theta}$

Ejercicios 6.7 Página 376

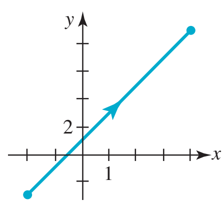
1.

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-1	0	1	2	3	4	5
y	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$

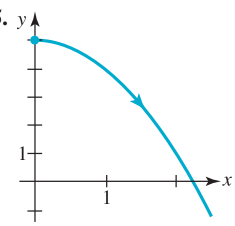
intersecciones: $(-4, 0), (0, 2)$



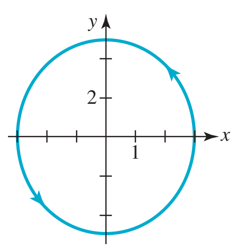
3.



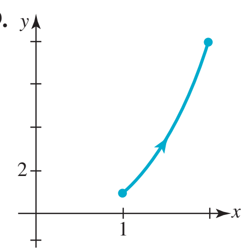
5.



7.



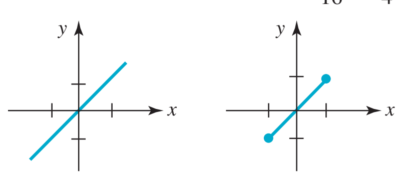
9.



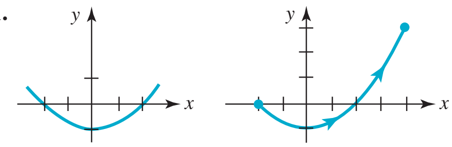
11. $y = x^2 + 3x - 1, x \geq 0$ **13.** $x = 1 - 2y^2, -1 \leq x \leq 1$

15. $y = \ln x, x > 0$ **17.** $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

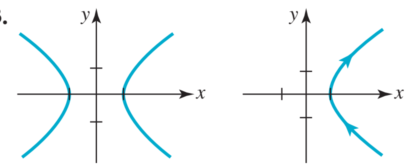
19.



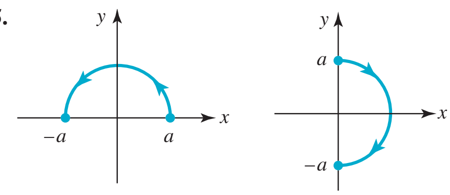
21.



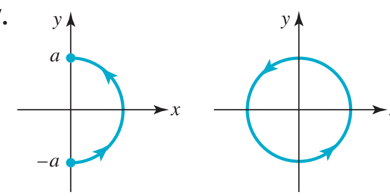
23.



25.



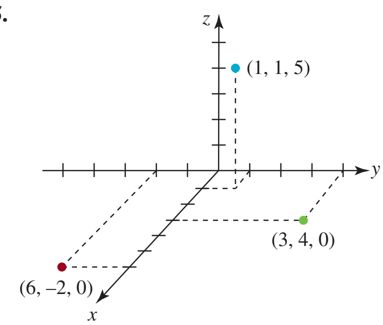
27.



29. $(3, 0); (0, 1), (0, 3)$
31. el segmento de recta entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2)
33. $x = 95\sqrt{2}t, y = -16t^2 + 95\sqrt{2}t, t \geq 0$;
$(190\sqrt{2}, 190\sqrt{2} - 64) \approx (268.70, 204.70)$
35. $x = \pm\sqrt{r^2 - L^2\,\text{sen}^2\phi}, y = L\,\text{sen}\,\phi$

Ejercicios 6.8 Página 385

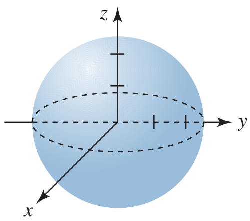
1, 3, 5.



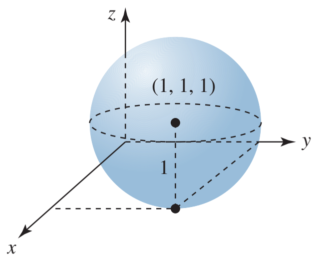
7. El conjunto $\{(x, y, 5) \mid x, y$ números reales$\}$ es un plano perpendicular al eje z, 5 unidades arriba del plano xy
9. El conjunto $\{(2, 3, z) \mid z$ un número real$\}$ es una línea perpendicular al plano xy en $(2, 3, 0)$.
11. $(2, 0, 0), (2, 5, 0,) (2, 0, 8), (2, 5, 8), (0, 5, 0), (0, 5, 8), (0, 0, 8), (0, 0, 0)$
13. *a)* $(-2, 5, 0), (-2, 0, 4), (0, 5, 4)$ *b)* $(-2, 5, -2)$ *c)* $(3, 5, 4)$
15. La unión de tres planos coordenados
17. El punto $(-1, 2, -3)$
19. La unión de los planos $z = 5$ y $z = -5$
21. $\sqrt{70}$ **23.** *a)* 7 *b)* 5
25. triángulo equilátero **27.** triángulo isósceles

29. colinear
31. no colinear
33. 6 o -2
35. $(4, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
37. $(-4, -11, 10)$

39.

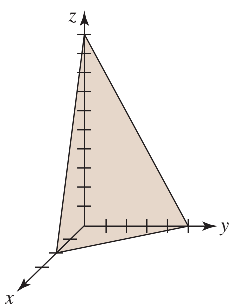


41.

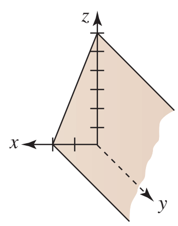


43. centro $(-4, 3, 2)$, radio 6
45. centro $(0, 0, 8)$, radio 8
47. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 6)^2 = 3$
49. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 = 16$
51. $x^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 4$ or $x^2 + (y - 8)^2 + z^2 = 4$

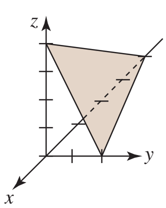
53.



55.



57.

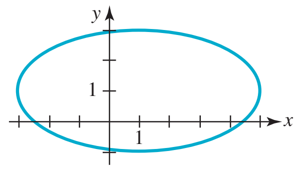


59. $5x - 3y + z = 2$
61. $3x - 2y + 2z = 3$
63. $-x + 3y = 5$

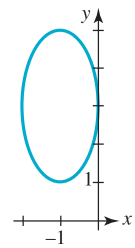
Ejercicios de repaso Capítulo 6 Página 387

1. $y^2 = 20x$
3. $(x - 1)^2 = 8(y + 5)$
5. $(0, 0)$
7. 1
9. $(-3, 0)$; $(-3, -1)$, $(-3, 1)$
11. $(0, -\sqrt{2})$, $(0, \sqrt{2})$
13. 1
15. $(10, 3\pi/2)$
17. $(0, \pi/2)$, $(0, 3\pi/2)$
19. $(-4, 3)$
21. verdadero
23. verdadero
25. verdadero
27. verdadero
29. verdadero
31. falso
33. verdadero
35. verdadero
37. $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$
39. $r = 4\operatorname{sen}\theta$
41. $(0, 2)$, $(0, -\frac{2}{3})$
43. ***a)*** $(\sqrt{6}, -\pi/4)$ ***b)*** $(-\sqrt{6}, 3\pi/4)$

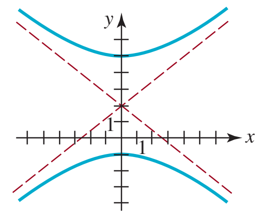
45. Centro $(1, 1)$,
Vértices $(-3, 1)$, $(5, 1)$,
Extremos del eje menor
$(1, 3)$, $(1, -1)$



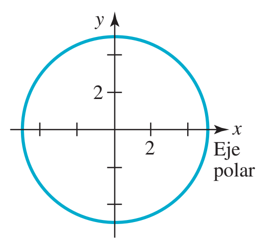
47. Centro $(-1, 3)$,
Vértices $(-1, 5)$, $(-1, 1)$,
Extremos del eje menor
$(-2, 3)$, $(0, 3)$



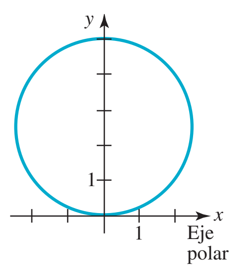
49. Centro $(0, 2)$,
Vértices $(0, -1)$, $(0, 5)$,
Asíntotas $y = 2 - \frac{3}{4}x$,
$y = 2 + \frac{3}{4}x$



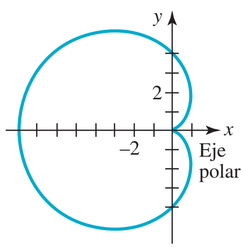
51. círculo de radio 5 con centro en el origen



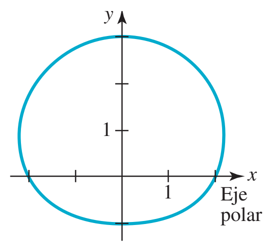
53. círculo con centro en el eje y



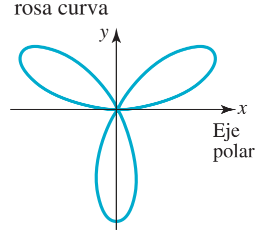
55. cardioide



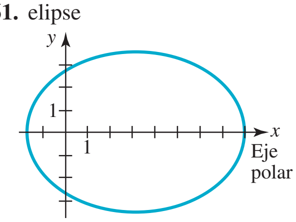
57. caracol convexo



59. rosa curva



61. elipse



63. 1.95×10^9 m
65. $\frac{25}{7}$ cm
67. ***a)*** $r = 2\cos(\theta - \pi/3)$ o $r = \cos\theta + \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta$
b) $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1$
69. $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = 90$

Índice analítico

A

Abscisa, 18
al origen, 54, 71
Afelio de la Tierra, 339
Agujero(s), 86, 90, 134, 169, 176, 184
en la gráfica, 86, 167
Algoritmo de división, 138, 139, 141, 143
de polinomios, 138
Amplitud de
cada gráfica, 209
las funciones, 206
Ancho focal de
la elipse, 341
una hipérbola, 350
una parábola, 334
Ángulo, 189-204, 215, 224, 225, 227-232, 234-240, 242, 245, 248, 249, 254-273, 275, 280-285
agudo, 192, 200, 254, 255, 256, 258, 269, 270
central, 193, 195
coterminal, 190, 191, 194
de depresión, 258, 260, 262, 271
de elevación, 258, 260, 262, 264, 266, 271, 282-284
de nivel, 258
de referencia, 200-202, 234-237, 266, 280
en posición normal, 190
obtuso, 192, 194
óptimo para un peralte, 249
que sea coterminal, 237
recto, 192, 254, 256, 273, 285
doble, 192
x1 x2 en posición normal, 224
Ángulos
coterminales, 190, 191
cuadrantales, 198
de referencia, 200, 201, 234, 238
especiales, 238
expresados en radianes, 196, 224
Aplicaciones de la
elipse, 339
hipérbola, 347, 348
parábola, 331
Aproximar los ceros de la función, 54
Arco
de longitud, 193, 195
parabólico, 327, 332, 333, 334, 373
seno de *x*, 241
Área bajo una gráfica, 176
Asignación de 360 grados, 189
Asíntota
horizontal, 289, 291-293, 296, 308, 322, 324
de la gráfica, 159, 160, 163, 164, 168, 184
inclinada, 161, 166, 167, 169
oblicua, 161, 165-167, 169, 170, 185
vertical, 296, 297, 302, 322, 324
de la gráfica, 159-161, 166, 168
Asíntotas, 158, 160-162, 164-166, 168, 169, 184, 187
de la hipérbola, 344-346, 393

B

Base, 287-290, 292, 295-300, 309-311, 316-318
de las funciones exponenciales y logarítmicas, 316
Bases constructivas fundamentales, 181
Binomio, 36
desarrollo del, 143
desarrollos de, 36
Bucles de la curva, 359

C

Cálculo
de límites trigonométricos, 273
del área bajo la gráfica de una función, 115
diferencial, 67, 115, 121
integral, 80, 115
Cambio de *x*, 68
Cambio de *y*, 68
Cancelación, 35. *Véase también* Propiedad de simplificación
Cantidad adimensional, 193
Capacidad límite, 305
Caracol, 358, 359, 361, 388
aplanado, 358
con bucle interno, 358, 359, 388
convexo, 358, 359

Cardioide, 358, 364
Caso ambiguo, 267, 270
Catenaria, 319
Cateto(s), 192, 254, 257
 adyacente, 254, 255
 opuesto, 254, 255
Centro, 25
 de la elipse, 335, 337, 339, 341
 de la hipérbola, 342-345, 392
Cero de la función *f*, 53
Ciclo
 compresión horizontal del, 207
 de la función, 207
 de la gráfica, 205, 207, 211-213, 218-220, 222
  del seno básica, 211
Círculo, 327, 339, 353, 355, 356, 360, 363, 364, 372-375, 378, 381, 388, 391
 definición de, 25
 forma canónica de la ecuación de un, 25
 unitario, 190, 191, 196-200, 202, 204, 205, 234, 254, 280
Cociente, 138-142, 144, 146, 151, 153, 154, 157, 158, 162, 164-166, 175, 181, 184
 de diferencia, concepto de, 316
 diferencial, 116-118, 121, 122
Coeficiente principal, 127, 157
Combinaciones aritméticas, 92
Comodín, 50
Comportamiento
 en los extremos, 128-130, 132, 134, 137, 161, 162, 184
 final, 52
 global
  concepto de, 52
  de la función, 52
 local, 128, 130
Composición de
 f con *f*, 94
 f y *g*, 93
 funciones, 92, 93, 94, 124, 290
 g y *f*, 93
Compresión
 horizontal del ciclo, 207
 vertical, 63, 67, 76, 128
Concepto de
 cociente de diferencia, 316
 comportamiento global, 52
 continuidad, 176
 excentricidad, 364
 función uno a uno, 99
 la integral definida, 176, 180
 límite, 40, 188, 273
 logaritmo, 301
Cónicas, 326, 327, 364-367
Conjugado, 143, 147
Conjunto
 de los números reales, 3, 189, 196, 289, 291, 295, 296, 297
  positivos, 289, 295-297
 de números comunes a ambos dominios, 93
 de todos los números reales, 287
 solución, 25
  de la desigualdad, 4
Conjuntos
 intersección de dos, 6
 unión de, 8
Cono doble invertido, 327
Constante
 de crecimiento, 304, 311
 de decaimiento, 305
 k de decaimiento, 307, 312
Continuidad, concepto de, 176
Contradominio, 49-53, 56, 58, 62, 78, 81, 86, 89, 99-103, 105, 106, 123, 124, 197, 204, 215, 240, 241, 243-245, 248, 281
 de la función secante, 215
Coordenadas
 al origen del círculo unitario, 198
 cartesianas, 19, 379
 polares, 326, 351-356, 361-365, 369, 388, 389
 rectangulares, 18, 351-353, 355, 357, 360, 361, 363-365, 379, 388, 389
 x, 19
 y, 19
Correspondencia unívoca entre valores, 49
Coseno
 de *t*, 196
 hiperbólico, 318, 320
Cuadrantes, 18
Cuerda focal, 329, 330, 334, 341, 350. *Véase también* Diámetro
Curva, 358, 359, 362, 371-376, 378, 379, 384, 388, 393
 braquistócrona, 375
 bucles de la, 359
 cerrada, 372
  simple, 372
 cicloide, 374
 de Gompertz, 325
 de una rosa de cuatro pétalos, 359
 en el espacio, 375, 384
 en el plano, 371
 parametrizada, 371
 plana, 371
 tautócrona, 375
Curvas
 cicloidales, 374
 de rosas, 359
 planas, 372, 375

D

Decimal
 que no termina y que no se repite, 3
 que no termina y que se repite, 3
 que termina, 3
Declaración
 cierta, 238
 falsa, 238
Definición
 formal de
  continuidad de una función, 86
  una función polinomial, 127
 usual del número *e*, 290

Definición de
círculo, 25
elipse, 335
esfera, 381
hipérbola, 342, 348
parábola, 328, 334
sección cónica, 364
Depreciación lineal, 74
Derivada de una función, 118
Derrotero, 269
Desarrollo del binomio, 143
Desarrollos de binomios, 36
Descomposición en fracciones parciales, 171-175
Descripción
de un punto en coordenadas polares, 352
verbal acerca del producto de dos números, 107
Desfasamiento de la gráfica, 209
Desigualdad(es), 4
conjunto solución de la, 4
del triángulo, 12
equivalentes, 4
estrictas, 9
gráfica de la, 4
lineales, 7
no estrictas, 9
no lineales, 7
propiedades de las, 4
símbolos de, 4
simultánea, 6
solución de la, 4
Desplazamiento, 128, 158, 159
de fase, 209, 210, 213
horizontal hacia la
derecha, 61
izquierda, 61
vertical hacia
abajo, 61
arriba, 61
Determinación de
límites, 39
una recta tangente a una función *f*, 115
Diagonal de un polígono, 11
Diámetro, 330, 333, 341, 360, 363, 374, 375, 389. *Véase también* Cuerda focal
Diferenciación logarítmica, 301
Dirección
negativa de la recta numérica, 3
positiva de la recta numérica, 3
Directriz, 328-332, 364, 387, 388
Distancia
del vértice al foco, 330, 389
entre dos números, 13
fórmula de, 21
Dividendo, 138-140
Dividir entre una expresión variable, 236
División
algoritmo de, 138, 139, 141, 143
de enteros positivos, 138
de polinomios, algoritmo de, 138
larga, 141, 142, 147
sintética, 140-142, 144-148, 151, 153-154, 165-166, 185
Divisor, 138, 139, 165
Dominio, 196-198, 204, 215, 240-241, 243-244, 246, 248
de cada función, 215
de *f*, 49-54, 84-87, 90, 92-94, 99, 100, 103, 105, 106, 116, 123
de la función seno, 204
de las funciones $f + g$, 92
de toda función polinomial, 127
de una combinación aritmética, 92
de una composición, 94
de una exponencial, 287
de una función, 50, 53, 118
constante, 68
cuadrática, 75
exponencial, 287
lineal, 68
logarítmica, 295
potencia, 59
racional, 158
implícito de la función, 50
restringido, 103, 106

E

Ecuación
con dos variables, 24
cuadrática, 327
de la elipse, 335-338, 340, 341, 389
de un círculo, forma canónica de la, 25
de una hipérbola, 343, 345, 346, 350
de una recta
horizontal, 70
vertical, 70
lineal, 67, 71
de dos variables, 382
de tres variables, 382
logarítmica, 299, 301, 303
pendiente-ordenada al origen, 69
pruebas de simetría de una, 30
punto-pendiente, 69
de la recta, 69
Ecuaciones
de las cónicas, 327
de periodicidad, 201
equivalentes, 25
paramétricas, 371-379, 388
polares de cónicas, 365
rectangulares, 371
trigonométricas condicionales, 234
Efecto de onda, 349
Eje
conjugado de la hipérbola, 343
de la parábola, 76, 328, 332, 334
de la sección cónica, 366
de simetría, 76, 81, 82
mayor de una elipse, 336
menor de la elipse, 336, 392
polar, 351, 352, 356, 365, 366

transversal de la hipérbola, 343, 367, 388
x, 18
y, 18
Ejes de coordenadas, 379, 380
Eliminación del parámetro, 373
Elipse, 326, 327, 334-343, 347, 348, 364-367, 370, 388
ancho focal de la, 341
aplicaciones de la, 339
centro de la, 335, 337, 339, 341
definición de, 335
Error común en álgebra, 236
Escala de Ricther, 309
Esfera, definición de, 381
Espacio
bidimensional, 379, 382, 384
tridimensional, 379-381, 383-385, 387
Espacios vacíos finitos, 86
Espiral de Arquímedes, 357
Espirales, 357
Estiramiento/compresión horizontal, 219
Estiramiento/compresión/reflexión vertical, 219
Estiramiento vertical, 63, 64, 80, 128, 159
Excentricidad
concepto de, 364
de la cónica, 364
de una elipse, 338, 342, 347
de una hipérbola, 347
Existencia de una asíntota oblicua, 165
Exponente, 287, 288, 295, 301
Exponentes de número real, 288
Expresión
algebraica, 35
exponencial, 295, 299-301, 304, 323
factorización de una, 35
fraccionaria, límite de una, 40
logarítmica, 295, 299-301, 323
racional, 139, 171, 175, 186
propia, 171
Expresiones fraccionarias, 34
Extremo
local, 131
relativo, 131
Extremos
del intervalo, 6
en la hipérbola, 343, 350

F

Factor conjugado, 38
del numerador, 276
Factorización, 235, 273
completa, 145-149, 154, 185
de una expresión, 35
fórmulas de, 35
Foco, 328-334, 336-337, 339-341, 346, 349-350, 364-366, 369, 387-389
de una superficie reflectora parabólica, 332
Focos de la
elipse, 335, 336
hipérbola, 342
Forma
canónica de la ecuación de un círculo, 25
especial de escritura del dividendo, 138
normal de la ecuación
de una elipse, 335
de una parábola, 328
parabólica básica, 329
punto-pendiente de la ecuación de una recta, 69
Fórmula
cuadrática, 145, 146, 151, 153, 173
de ángulo doble, 228, 230, 236, 237, 275
del coseno, 237
del seno, 236
de distancia, 21
usual, 381
de Herón, 272
de la distancia, 328, 364, 381, 385
de suma de la función seno, 276
del punto medio, 22, 381
trigonométrica de suma de la función seno, 357
Fórmulas de
ángulo doble, 227, 228
factorización, 35
mitad de ángulo, 228, 229
suma y diferencia, 223, 226, 227
de la tangente, 226
del coseno, 224
del seno, 225
Fracción
compuesta, límite de una, 41
impropia, 138, 175
propia, 138, 139, 171, 175
Fracciones parciales, 171-176, 186
individuales, 171
Función
algebraica, 181
arco
coseno, 243
seno, 241, 242
tangente, 244, 245
ciclo de la, 207
comportamiento global de la, 52
con una base variable, 287
constante, 67, 72, 95, 127, 128, 287
cosecante, 215
coseno, 199, 205, 243, 246, 256, 282
es par, 199
inverso, 243, 246
creciente, 72
cuadrática, 75, 76, 78-84, 88, 98, 103, 123, 124, 128, 145
de la pendiente, 118
de un conjunto *x* a un conjunto *y*, 49
decreciente, 72
definida en
intervalos, 84-86, 89, 90, 98, 104, 124
secciones o partes, 84
derivada de una, 118
discontinua, 160
entero mayor, 85
exponencial, 287-291, 293, 295, 296, 299, 301, 317, 318, 325

natural, 290, 291, 301
Gompertz, 325
impar, 59, 60, 63, 65, 96, 98, 122, 131, 132, 158, 165, 185
inversa, 241, 242, 295, 296
de *f*, 100
única, 241
lineal, 68, 70, 71, 73, 74, 75, 80, 87, 88, 102, 103, 128, 384
logarítmica, 295-297, 300, 302
logaritmo natural, 297
logística, 305, 311
máximo entero, 85, 86, 91
no es uno a uno, 99
objetivo, 108-112, 125
par, 59, 60, 65, 87, 122, 124, 131, 133, 158, 292, 293, 302
piso, 86
polinomial, 128-131, 135, 137, 155-158, 183-186
cuadrática, 151
cuadrática simple, 291
de segundo grado, 145
de un solo término, 128
por optimizar, 108
potencia, 58, 59, 128, 129
racional, 157, 158, 160-171, 181, 184-187
general, 161
reversa, 100
secante, 248
seno, 199, 205, 225, 234, 241, 242, 249, 256, 266, 281, 282
es impar, 199
inverso, 242
tangente, 217, 218, 226, 256, 257, 259
trascendente, 181
uno a uno, 99-101, 103, 106, 123, 124, 241, 243, 244, 289, 292
concepto de, 99
valor absoluto, 87, 88
Funciones
algebraicas, 181
amplitud de las, 206
circulares, 196, 197, 199
cuadráticas, 75, 76, 82
cúbicas, 128
de múltiples variables, 384
escalón, 85
exponenciales, 181
hiperbólicas, 286, 316, 318, 319
inversas, 318, 322
polinomiales de tercer grado, 151
recíprocas, 215
sencillas de potencia, 59
trascendentes, 181
trigonométricas, 181, 188-189, 196, 200, 202-205, 214, 217, 219, 222-223, 229, 233, 238, 240-241, 245-246, 254-256 259, 273, 319
de cualquier ángulo, 202, 254
inversas, 238, 240, 245, 246

G

Grado, 127-130, 133-136, 138, 139, 144-147, 149-156, 162-166, 171, 175, 183-186
Gráfica
agujero en la, 86, 167
amplitud de cada, 209
área bajo una, 176
ciclo de la, 205, 207, 211-213, 218-220, 222
de cualquier función periódica, 204
de cualquier parábola con la forma normal, 328
de la desigualdad, 4
de la función coseno, 205
de una curva plana, 371
de una ecuación, 51, 52
de una ecuación polar, 355, 357, 362
de valor absoluto de una función, 87
del bifolio, 364
del coseno, 205, 208, 212
comprimida horizontalmente, 207
hiperbólico, 319, 320
reflejada en el eje *x*, 208
del seno, 205, 208
estirada horizontalmente, 208
desfasamiento de la, 209
en forma de corazón, 358
polar simétrica con respecto
al eje *x*, 357
al eje *y*, 357
al origen, 357
simetría de una, 29, 59
simétrica con respecto al
eje *x*, 30
eje *y*, 30
origen, 30
Gráfica de una función, 51-55, 58-62, 67, 72, 76, 99, 102, 104, 106, 115, 116, 122-124
continua, 86
de Gompertz, 325
definida en intervalos, 85
periódica, 205
polinomial de grado *n*, 128, 131
trigonométrica, 234
Graficación de puntos, 19
Graficar puntos adicionales, 132
Gráficas
con forma de campana, 292
de las funciones constantes y lineales, 68

H

Hélice circular, 375, 376
Helicoide circular, 376
Hipérbola, 326, 327, 342-351, 364-367, 370, 387-389, 392
ancho focal de una, 350
aplicaciones de la, 347, 348
asíntotas de la, 344-346, 393
centro de la, 342-345, 392
conjugada, 351
definición de, 342, 348
rectangular, 351
Hipotenusa, 192, 200, 254-257, 267, 273
Hueco finito en la gráfica, 86
Huecos, 130, 134, 176

I

Identidad
 fundamental, 238
 pitagórica, 197, 216, 226, 242, 245, 275, 276
  básica de trigonometría, 319
 trigonométrica, 223, 237, 275
Identidades
 par-impar, 224
 pitagóricas, 216, 223
 trigonométricas, 319
  básicas, 273
Imagen
 de x, 49
 especular, 29, 62
Incremento
 de x, 68
 de y, 68
Índice de suma, 179
Infinito, símbolos de, 5, 6
Integral definida
 concepto de la, 176, 180
 de una función, 176
Integrales de productos, 229
Intercepciones de un plano, 383
Interés
 compuesto, 308, 313
 continuamente, 308
Interrupciones, 134, 176
 infinitas, 86
Intersección
 de dos conjuntos, 6
 del dominio de f y el dominio de g, 92
 en el eje y, 53
Intersecciones, 128, 130-134, 136, 158, 164, 165, 168, 169, 184, 187
 con el eje x, 210
 de las gráficas de seno y coseno con el eje x, 205
 en el eje x, 28
 en el eje y, 29
Intervalo(s)
 abierto, 6
 cerrado, 6
 extremos del, 6
 no acotado, 5
 notación de, 5, 50, 51, 108
 semiabierto, 5
Inversa
 de f, 100, 101, 103
 de la función, 241, 243
 de una función f uno a uno, 100
 de una función uno a uno, 100

L

Lado
 inicial, 189, 190
 terminal, 189, 190, 196-200, 231, 233-235, 280
Lemniscata, 360, 361, 364
Ley
 de la gravitación universal de Newton, 339
 de Lambert-Bouguer, 325
 de los cosenos, 188, 265, 268-271
 de los senos, 265-267, 269-271
 de Newton de calentamiento/enfriamiento, 307
 distributiva, 35, 206, 300
Leyes de los
 exponentes, 133, 216, 288-290, 292, 294, 297, 309
  enteros, 288
 logaritmos, 297-302, 310, 319, 320
Límite, 39
 concepto de, 40, 188, 273
 de forma indeterminada *0/0*, 40
 de la función seno, 273
 de una expresión fraccionaria, 40
 de una fracción compuesta, 41
 del cociente diferencial, 118
Límites
 de expresiones fraccionarias, 274
 determinación de, 39
 tienen la forma indeterminada *0/0*, 274
Línea recta, 67
Lineales, desigualdades, 7
Logaritmo, 295, 297-302, 316, 320, 322
 común, 300
 concepto de, 301
 natural, 297, 299-301, 320, 322
Logaritmos
 base 10, 297, 309
 comunes, 297, 309
 con base $b = e$, 297
Longitud
 del arco, 193, 195
 eje conjugado, 344
 eje transversal, 343, 344

M

Máximo local, 131, 132, 133, 134, 165
Mayor potencia de x de un polinomio, 127
Mediatriz del segmento de recta, 102
Medición de un ángulo en grados, 189
Medida de un ángulo en radianes, 189, 190
Medidas en radianes, 351
Método
 de aproximación sistemática de A, 177
 de fechado con carbono, 306
 de la tabla de signos, 7
 llamado datación, 306
Mínimo local, 131, 132, 133
Modelo
 de crecimiento, 304
 de una población en crecimiento, 304
 matemático, 304, 307, 325
Modelos
 exponenciales, 286, 304, 314
 logarítmicos, 309, 315
 matemáticos, 304, 318
Movimiento curvilíneo, 371

N

Nivel de intensidad, 315, 316
Noción de
  la derivada de la función, 176
  simultaneidad, 9
Notación de
  intervalos, 5, 50, 51, 108
  suma, 179
  sumatoria, 179, 183
Número
  complejo, 143, 148, 150
  de Mach, 231
  e, 290
  irracional, 151, 155, 287, 290, 316
  negativo, 4
  no negativo, 4
  positivo, 4
  racional, 151, 152, 287
  real, 134, 143, 148-150, 152, 157, 161, 166, 179, 181
  valor absoluto de un, 12
Números
  distancia entre dos, 13
  irracionales, 3
  negativos, 3
  positivos, 3
  racionales, 287
  reales, 3
    conjunto de los, 3, 189, 196, 289, 291, 295, 296, 297

O

Objeto en caída libre, 80
Oblicuo, 270
Octante, 380, 383
Operaciones aritméticas, 92
Órbita parabólica, 334
Ordenada, 19
  de un punto en la gráfica, 63, 118
Orientación de la curva, 372
Origen, 18, 328-329, 340-341, 344-345, 351, 353, 355-361, 363, 365, 367, 369, 371-372, 374-375, 378-379, 382-383, 385-386, 388-391. *Véase también* Polo
  abscisa al, 54, 71
  de la recta numérica, 3

P

Parábola, 29, 59, 76-79, 97, 123, 128, 178, 326-334, 339, 348, 354, 364-367, 369, 373, 374, 387, 388, 392
  ancho focal de una, 334
  aplicaciones de la, 331
  con vértice en (0,0), 328
  definición de, 328, 334
  se abre hacia abajo, 328
  se abre hacia arriba, 328
Paraboloides, 331
Parametrización, 371, 372, 373, 375
  alternativa, 373
Parámetro, 371, 372, 373, 374, 375, 377, 378
Pares conjugados, 147, 150
Par-impar, 201
Parte
  de cálculo, 108
  de precálculo, 108
  imaginaria de *z*, 143
  real de *z*, 143
Partición regular del intervalo, 177
Pendiente de la recta, 68, 69, 118, 120
  secante, 120
Pendientes de rectas secantes, 116
Pérdida de soluciones, 236
Perigeo, 369, 370
Perihelio de la Tierra, 339
Periodicidad de
  la función seno, 234, 235
  las funciones trigonométricas, 234
Periodo de
  cada gráfica, 209
  la función, 198, 204, 207, 212, 214, 233, 281
Pétalos de la curva, 359
Plano, 327, 328, 335, 342, 351, 364, 371, 379-391
  cartesiano, 19, 67, 189, 218
  coordenado, 19, 371, 380, 383, 385
  xy, 19
Población inicial, 304, 311
Polígono, diagonal de un, 11
Polinomio
  cuadrático, 151, 153, 166, 171
  lineal, 139, 141-143, 148, 165, 166
  nulo, 128, 158
Polo, 351-352, 354, 356-357, 361, 365, 388. *Véase también* Origen
Potencia entera no negativa, 127
Potencial hidrógeno o *pH* de una solución, 310
Primer método para determinar f^{-1}, 101
Primera ley de Kepler, 339
Principio del telescopio reflector, 332
Problema(s)
  aplicados de máximo y mínimo, 108
  con palabras, 108
  de optimización, 108
  del área, 126, 176, 179, 180
Proceso de completar el cuadrado, 26, 27
Producto de las raíces cuadradas de los factores, 110
Propiedad
  de reflexión de las parábolas, 331
  de simplificación, 35. *Véase también* Cancelación
  reflectora de la elipse, 339
  reflectora de la hipérbola, 348
  uno a uno, 292, 294, 299, 303
    de la función logarítmica, 299
Propiedades
  de las desigualdades, 4
  de las funciones
    inversas, 100, 241, 245
    trigonométricas inversas, 246
  de las parábolas, 331

Índice analítico

de periodicidad, 201
del valor absoluto, 12, 14
importantes de la función
exponencial, 289
logarítmica, 296
par-impar, 199, 202, 207
reflectoras de los espejos parabólicos, 327
Prueba de la recta
horizontal, 99, 103, 289
vertical, 52
Pruebas de simetría de una ecuación, 30
Punto
crítico, 131, 133
de intersección de la parábola con el eje, 328
de tangencia, 276, 277
inicial de la curva, 372
medio, 13
del segmento de la línea, 381
terminal de la curva, 372
Puntos
críticos, 131-134, 184
de intersección, 72
de muestra, 177, 178, 180
equivalentes en coordenadas polares, 352
graficación de, 19

R

Racionalización, 217, 273
Racionalizar un
denominador, 37
numerador, 37, 38
Radián(es), 190-193, 197, 222, 249, 351, 356, 359, 375, 393
Raíces
complejas, 143, 147, 149-151, 155
de funciones polinomiales de cuarto grado, 151
del denominador, 172, 173
racionales potenciales, 154, 155
reales, 131, 137, 144, 150-156, 158, 162, 173-174, 184
de funciones polinomiales con coeficientes reales, 150
Raíz
compleja, 147, 149, 151
cuadrada de un producto, 110
de multiplicidad dos, 131-134, 144, 146, 154
de multiplicidad impar, 131
de multiplicidad *m*, 131, 144
de multiplicidad par, 131, 132
de multiplicidad tres, 134, 144
de multiplicidad uno, 144
de una función, 131, 143, 144, 149-151
polinomial, 143
irracional real, 166
real, 131, 150, 151, 154, 155, 166
repetida, 131, 153, 154
simple, 131-134, 144, 166
Rama(s) de la hipérbola, 342, 345, 348, 350
Rango de la función, 49
Recíproca negativa, 71
Recorrido horizontal de la recta, 68
Recta, 48, 52, 59, 68-76, 84-85, 87, 93, 99, 102-104, 109, 111, 113, 116-124
con pendiente, 128
de coordenadas, 3
horizontal, 128, 159, 167
numérica, 3
dirección negativa de la, 3
dirección positiva de la, 3
origen de la, 3
Rectas
horizontales, 160
inclinadas, 160
perpendiculares, 71
verticales, 160, 162
Reflexión respecto a un eje coordenado, 29, 62
Regla de
correspondencia, 49, 84, 99
la mano derecha, 379
Relación pitagórica, 192
Residuo, 138-143, 146, 151, 153, 165, 166, 184-186
Resolver triángulos rectángulos, 256, 265
Restricción, 107-111
Rumbo, 269, 272, 273

S

Salto infinito en la gráfica, 86
Sección cónica
con foco en el origen, 366
definición de, 364
Segundo método para determinar f^{-1}, 101
Semicírculo, 27
Seno
de t, 196
hiperbólico, 318, 320
inverso de x, 241
Signos de los valores de las funciones, 197
Símbolo integral, 180
Símbolos de
desigualdad, 4
infinito, 6
Simetría, 128, 131-134, 158, 163-166, 170
de una gráfica, 29, 59
del círculo unitario, 199, 200
Simultaneidad, noción de, 9
Sistema, 301, 304, 325
de círculos centrados en un punto, 351
de coordenadas
manieto, 379
polares, 351, 352, 355, 365
rectangulares, 18, 327-328, 351-352, 355, 365, 379
de navegación LORAN, 347
Solución(es)
adicional no válida, 238
adicionales, 238
de la desigualdad, 4
extrañas, 237
Soporte del sistema, 305
Subida de la recta, 68
Sustitución trigonométrica, 223

T

Tabla de signos, método de la, 7
Tangente, 48, 53, 74, 78, 115-122, 125
 inversa, 244, 245, 259
Tasa de crecimiento, 304, 305
Temperatura ambiente, 307, 308
Teorema
 de la factorización completa, 145
 de las raíces
  racionales, 152, 155
  complejas, 147
 de pitágoras, 20, 109-110, 197, 199-200, 254-257, 267-268, 273
 del factor, 143, 145, 150, 151, 166
 del residuo, 139-143, 185
 del valor intermedio, 134, 136, 156
 fundamental del álgebra, 145, 150
Término constante de la función polinomial, 127
Tipos de
 comportamiento en los extremos, 130
 rectas, 67
 simetría de una gráfica polar, 357
 simetrías, 59
Transferencia de Hohmann, 370
Transformación
 no rígida, 79, 95
 rígida, 290, 303
  de una gráfica, 60
Transformaciones
 gráficas, 60
 no rígidas, 63
 rígidas, 67, 79, 81, 95, 330, 337
Trayectoria, 240, 264, 269
Traza de un plano, 383
Triángulo
 acutángulo, 268
 de Pascal, 36
 desigualdad del, 12
 equilátero, 200
 isósceles, 199
Triángulos
 acutángulos, 265
 congruentes, 200
 rectángulos congruentes, 200
 semejantes, 68, 109, 114
Trigonometría, 109, 116
 del triángulo rectángulo, 270
Triple ordenado de números, 379
Triples ordenados, 379, 383

U

Unidad imaginaria, 143
Unión de
 conjuntos, 8
 intervalos ajenos, 51
 una cantidad infinita de intervalos ajenos, 86

V

Valor
 absoluto
  de un número, 12
  propiedades del, 12, 14
 de la función en *x*, 49
 de una función polinomial, 140
 futuro del principal, 308
 máximo, 131
Valores
 correspondencia unívoca entre, 49
 crecientes del parámetro, 372
 de la variable, 233, 234
 de las funciones trigonométricas, 202, 240, 256
Variable(s)
 dependiente, 49
 ecuación con dos, 24
 independiente, 49
 valores de la, 233, 234
Variaciones de la gráfica exponencial, 290
Vértice, 76-82, 84, 88, 97, 108, 112, 123, 189, 193, 231, 240, 256, 265, 267-268, 328-334, 337, 339-341, 346-347, 365-367, 369, 372, 387-389, 391
 de la parábola, 78, 366, 387
 de una elipse, 366
 de una hipérbola, 366
Vértices de la
 elipse, 336, 366, 387, 389
 hipérbola, 343, 387
Vida media, 306, 311, 312, 314, 324

Créditos

Créditos de fotos

Página v (ecuaciones de cálculo) © ojka/ShutterStock, Inc.; **(Tower Bridge of London)** © Stephen Finn/ShutterStock, Inc.; **Página vi (Golden Gate Bridge)** © Can Balcioglu/ShutterStock, Inc.; **(guitarra)** © Aija Avotina/ShutterStock, Inc.; **(The Gateway Arch)** © Brian Weed/ShutterStock, Inc.; **Página vii (eclipse)** © Molodec/ShutterStock, Inc.

Capítulo 1: Página 2 © ojka/ShutterStock, Inc.; **Página 9** © Tomasz Trojanowski/ShutterStock, Inc.; **Página 11** © Blend Images/Jupiterimages; **Página 42** © Stock4B GmbH/Alamy Images

Capítulo 2: Página 48 © Stephen Finn/ShutterStock, Inc.; **Página 49** © Lorraine Swanson/ShutterStock, Inc.; **Página 54** Cortesía de Texas Instruments; **Página 62 (arriba)** © Stephen Finn/ShutterStock, Inc.; **(abajo)** © Joanna Lee, Flickr.com; **Página 70** © Andrew G. Davis/ShutterStock, Inc.; **Página 83** © James Klotz/ShutterStock, Inc.; **Página 95** Cortesía de NASA; **Página 111** © MIXA/age fotostock; **Página 114** © haveseen/ShutterStock, Inc.

Capítulo 3: Página 126 © Can Balcioglu/ShutterStock, Inc.; **Página 151** Impreso con autorización de Norway Post, Philatelic Service; **Página 167** © Comstock Images/Alamy Images; **Página 175** © Corbis; **Página 181** © UpperCut Images/age fotostock

Capítulo 4: Página 188 © Aija Avotina/ShutterStock, Inc.; **Página 203** © Pétur Ásgeirsson/ShutterStock, Inc.; **Página 229** © chlorophylle/ShutterStock, Inc.; **Página 249** Cortesía de National Park Service; **Página 262 (arriba)** © Paul Fries/ShutterStock, Inc.; **(abajo)** © Peter Elvidge/ShutterStock, Inc. **Página 263** © Mary Lane/ShutterStock, Inc.; **Página 264** © George Bailey/Dreamstime.com; **Página 270** © Dana Bartekoske/ShutterStock, Inc.

Capítulo 5: Página 286 © Brian Weed/ShutterStock, Inc.; **Página 301** © Matty Symons/ShutterStock, Inc.; **Página 304** © Phototake/Alamy Images; **Página 305 (arriba)** © National Library of Medicine; **(abajo)** © Mary Evans Picture Library/Alamy Images; **Página 306 (centro)** © Jules le Baron, cortesía de Emilio Segre Visual Archives; **(abajo)** Cortesía de Israel Antiquities Authority; **Página 307** © Johanna Goodyear/ShutterStock, Inc.; **Página 309** © AP Photos; **Página 301** Cortesía de The Carlsberg Group; **Página 312 (arriba)** © siloto/ShutterStock, Inc.; **(centro)** © Targa/age fotostock; **(abajo)** Foto cortesía de Photo Archives South Tyrol Museum of Archaeology – www.iceman.it; **Página 313 (arriba)** © Ron Hilton/ShutterStock, Inc.; **(abajo)** © Thomas Weißenfels/ShutterStock, Inc.; **Página 314** Cortesía de USGS; **Página 315** © Edi Engeler, *Keystone*/AP Photos; **Página 316** © The Print Collector/age fotostock; **Página 319** © Jose Gil/ShutterStock, Inc.

Capítulo 6: Página 326 © Molodec/ShutterStock, Inc.; **Página 327** Cortesía de NASA/JPL; **Página 332 (arriba)** © Popperfoto/Alamy Images; **(centro arriba)** © Soundsnaps/ShutterStock, Inc.; **(centro abajo)** © where-@tiscali.it/ShutterStock, Inc.; **(abajo)** © Corbis; **Página 339** © Brand X Pictures/Alamy Images; **Página 357** © Jgroup/Dreamstime.com; **Página 362** © Cristian M/ShutterStock, Inc.; **Página 368** Cortesía de Mariner 10, Astrogeology Team, and USGS; **Página 369** Cortesía de Observatories of the Carnegie Institution of Washington; **Página 386** © Corbis; **Página 376 (DNA)** Cortesía de Robert Guy/National Cancer Institute; **Página 384** © Tomas Skopal/ShutterStock, Inc.; **Página 389** © David Página/Alamy Images

Si no se indica otro crédito, todas las fotografías e ilustraciones tienen derechos reservados de Jones & Bartlett Learning o fueron proporcionadas por los autores.

Repaso de álgebra

Enteros
$\{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Enteros positivos (números naturales)
$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Enteros no negativos (números enteros)
$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Números racionales
Un número racional tiene la forma p/q, donde p y $q \neq 0$ son enteros

Números irracionales
Un número irracional es uno que no se puede escribir en la forma p/q, donde p y $q \neq 0$ son enteros

Números reales
El conjunto R de los números reales es la unión de los conjuntos de los números racionales y los números irracionales

Leyes de los exponentes
$$a^m a^n = a^{m+n}, \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}, \qquad (ab)^n = a^n b^n,$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \qquad a^0 = 1,\ a \neq 0$$

Exponente negativo
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ n > 0$$

Radical
$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, $n > 0$ es un entero

Exponentes y radicales racionales
$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = (a^{1/n})^m$$
$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$
$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Fórmula cuadrática
Las raíces de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, son
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Desarrollos de binomio
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Triángulo de Pascal
Los coeficientes del desarrollo de $(a + b)^n$ siguen la pauta siguiente:
$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

Cada número del interior de este conjunto es la suma de los dos números que están directamente arriba de él:
$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

El último renglón es el de los coeficientes del desarrollo de $(a + b)^5$.

Fórmulas para factorizar
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

Definición de valor absoluto
$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \text{ es no negativo } (a \geq 0) \\ -a & \text{si } a \text{ es negativo } (a < 0) \end{cases}$$

Propiedades de las desigualdades
Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

Si $a < b$, entonces $ac < bc$ cuando $c > 0$.

Si $a < b$, entonces $ac > bc$ cuando $c < 0$.

Desigualdades de valor absoluto
$|x - a| < b$ equivale a $-b < x - a < b$

$|x - a| > b$ equivale a $x - a > b$ y $x - a <- b$

El número e
$e = 2.718281828459\ldots$

Definiciones del número e
$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$e = \lim_{h\to 0}(1 + h)^{1/h}$$

Definición de un logaritmo
$y = \log_b x$ equivale a $x = b^y$

Logaritmo natural
$\log_e x = \ln x$

$y = \ln x$ equivale a $x = e^y$

Leyes de los logaritmos
$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

$\log_b \dfrac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$

$\log_b M^c = c \log_b M$

Propiedades de los logaritmos
$\log_b b = 1$

$\log_b 1 = 0$

$\log_b b^x = x$

$b^{\log_b x} = x$

Cambio de la base b a la base e
$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Repaso de gráficas

Para determinar intersecciones
Intersecciones al eje x: Igualar $x = 0$ en una ecuación, y despejar y

Intersecciones al eje y: Igualar $y = 0$ en una ecuación, y despejar x

Vértice (h, k) de una parábola
Completar el cuadrado en x para $f(x) = ax^2 + bx + c$ y obtener $f(x) = a(x - h)^2 + k$. O también, calcular las coordenadas

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

Funciones pares e impares
Par: $f(-x) = f(x)$; Simetría de la gráfica: eje y

Impar: $f(-x) = -f(x)$; Simetría de la gráfica: origen

Transformaciones rígidas
Gráfica de $y = f(x)$ para $c > 0$:

$y = f(x) + c$, desplazada c unidades hacia arriba

$y = f(x) - c$, desplazada c unidades hacia abajo

$y = f(x + c)$, desplazada c unidades hacia la izquierda

$y = f(x - c)$, desplazada c unidades hacia la derecha

$y = f(-x)$, reflexión en el eje y

$y = -f(x)$,), reflexión en el eje x

Asíntotas
Si las funciones polinomiales P y Q no tienen factores comunes, entonces la gráfica de una función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

tiene una asíntota vertical donde $Q(x) = 0$. La gráfica tiene la asíntota horizontal

$$y = a_n/b_m \text{ cuando } n = m,$$

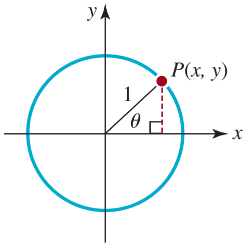
y la asíntota horizontal

$$y = 0 \text{ cuando } n < m.$$

La gráfica no tiene asíntota horizontal cuando $n > m$. La gráfica tiene una asíntota oblicua cuando $n = m + 1$.

Repaso de trigonometría

Definición de seno y coseno con el círculo unitario



$y = \text{sen}\,\theta$

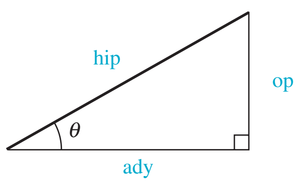
$x = \cos\theta$

Otras funciones trigonométricas

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \csc\theta = \frac{1}{y} = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}$$

Definición de seno y coseno con un triángulo rectángulo



$\text{sen}\,\theta = \dfrac{\text{op}}{\text{hip}}$

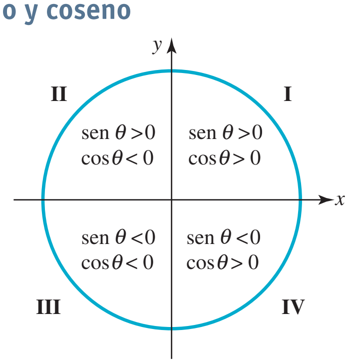
$\cos\theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{hip}}$

Otras funciones trigonométricas

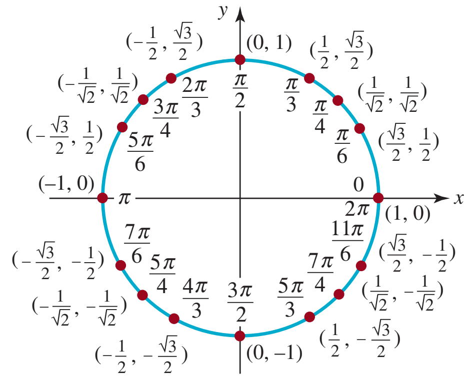
$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}, \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}, \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

Signos de seno y coseno



Valores de seno y coseno para ángulos especiales



Cotas de seno y coseno

$-1 \le \text{sen}\,\theta \le 1 \quad \text{y} \quad -1 \le \cos\theta \le 1$

Periodicidad de las funciones trigonométricas

$$\text{sen}(\theta + 2\pi) = \text{sen}\,\theta, \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

$$\sec(\theta + 2\pi) = \sec\theta, \qquad \csc(\theta + 2\pi) = \csc\theta$$

$$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta, \qquad \cot(\theta + \pi) = \cot\theta$$

Identidades de cofunciones

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{sen}\,\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

Identidades pitagóricas

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Identidades pares/impares

Pares	*Impares*
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$
$\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\csc(-\theta) = -\csc\theta$
	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

Fórmulas de suma

$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$$

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

Fórmulas de diferencia

$$\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) = \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$$

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$$

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

Fórmulas de ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$

Fórmulas alternas de ángulo doble para coseno

$$\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

Fórmulas de mitad de ángulo

$$\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{2}$$

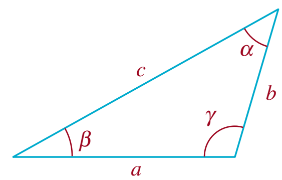
$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2}$$

Fórmulas de mitad de ángulo que se usan en cálculo

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

Solución de triángulos



Ley de los senos

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

Ley de los cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Funciones trigonométricas inversas

$y = \operatorname{arcsen} x$ si, y sólo si $x = \operatorname{sen} y$, $\; -\pi/2 \le y \le \pi/2$

$y = \arccos x$ si, y sólo si $x = \cos y$, $\; 0 \le y \le \pi$

$y = \arctan x$ si, y sólo si $x = \tan y$, $\; -\pi/2 < y < \pi/2$

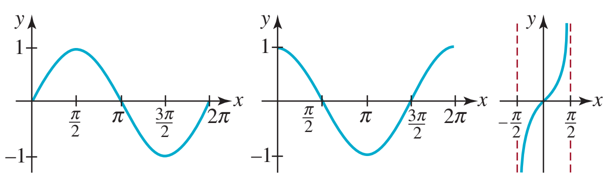
Fórmula de reducción para un seno desplazado

$$c_1 \cos Bt + c_2 \operatorname{sen} Bt = A \operatorname{sen}(Bt + \phi)$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, y ϕ se define por

$$\operatorname{sen}\phi = c_1/A, \quad \cos\phi = c_2/A$$

Ciclos de seno, coseno y tangente



seno   coseno   tangente