

Métodos numéricos con Excel

Guía práctica para ingenieros

Métodos numéricos con Excel

Guía práctica para ingenieros

Néstor Humberto Agudelo Díaz



Bogotá D. C., Colombia, 2021

Agudelo Díaz, Néstor Humberto

Métodos numéricos con Excel: Guía práctica para ingenieros / Néstor Humberto

Agudelo Díaz – Bogotá, D.C Publicaciones Universidad de América, 2021.

286 páginas: figuras, tablas.

1. Aproximación (Matemáticas) 2. Ecuaciones lineales 3. Interpolación. 4. Métodos numéricos.

ISBN impreso 978-958-53030-2-7

ISBN digital 978-958-53030-3-4

CDD A282

Título: Métodos numéricos con excel

Guía práctica para ingenieros

Primera edición, 2021

© Néstor Humberto Agudelo Díaz

DOI: <https://doi.org/10.29097/9789585303034>

© 2020 Fundación Universidad de América

Dirección de Investigaciones

www.uamerica.edu.co

Eco Campus de Los Cerros:

Avenida Circunvalar # 20 - 53 - Bogotá D.C., Colombia

PBX: (57 1) 3376680 Ext. 220

Sede Norte, Calle 106 # 19 - 18

PBX: (57 1) 6580658

Correo electrónico: coordinador.editorial@uamerica.edu.co

Libro electrónico publicado a través de la plataforma

Open Monograph Press.

Tiraje de 500 ejemplares

Impreso en Colombia - *Printed in Colombia*

ISBN impreso 978-958-53030-2-7

ISBN digital 978-958-53030-3-4

Todos los derechos reservados. Esta publicación no puede ser reproducida ni en su totalidad ni en sus partes, tampoco registrada o transmitida por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio sea mecánico, foto-químico, electrónico, magnético, electro-óptico, por fotocopia o cualquier otro, sin el permiso previo por escrito de la editorial.

Cuerpo Directivo

MARIO POSADA GARCÍA-PEÑA
Presidente Institucional y Rector del Claustro

LUIS JAIME POSADA GARCÍA-PEÑA
Consejero Institucional

ALEXANDRA MEJÍA GUZMÁN
Vicerrectora Académica y de Investigaciones

RICARDO ALFONSO PEÑARANDA CASTRO
Vicerrector Administrativo y Financiero

JOSÉ LUIS MACÍAS RODRÍGUEZ
Secretario General

LUIS FERNANDO SÁNCHEZ-HUERTAS
Director de Investigaciones

MARÍA MARGARITA ROMERO ARCHBOLD
Decana Facultad de Arquitectura

MARCEL HOFSTETTER GASCÓN
Decano Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas

JULIO CÉSAR FUENTES ARISMENDI
Decano Facultad de Ingenierías

CARLOS MAURICIO VELOZA VILLAMIL
Decano Facultad de Ciencias y Humanidades



Fundación
Universidad de América

Código SNIES 1715

A mi esposa e hijos:
fuentes constantes de inspiración y progreso

*Entrego esta obra a la Fundación Universidad
de América, trabajo que, a través de la
enseñanza de los métodos numéricos, he venido
construyendo durante más de quince años.*

Contenido

Introducción	11
------------------------	----

CAPÍTULO 1. Aproximaciones y errores

Lección 1. Aproximaciones y errores	14
Cifras significativas	14
Exactitud y precisión.	15
Definición de error	16
Cálculo de errores	17
Reglas de redondeo	18
Ejercicios	19
Distribución normal	20
Distribución t de Student	29
Propagación de errores	36
Teorema de Taylor	49
Actividades propuestas	69

CAPÍTULO 2. Solución de ecuaciones no lineales de una variable

Lección 1. Métodos de intervalo cerrado	72
Método de bisección	74
Valores iniciales en la función	101
Método de la regla falsa o <i>regula falsi</i>	105
Lección 2. métodos de intervalo abierto	113
Método de Newton-Raphson	113
Método de la secante.	128
Método de punto fijo.	138
Lección 3. Aplicaciones a la ingeniería y ciencias	150
Actividades propuestas	160

CAPÍTULO 3. Solución de sistemas de ecuaciones lineales y no lineales

Métodos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales	166
Método de Jacobi	166

Método de Gauss-Seidel	170
Método de Newton para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales	180
Problemas de aplicación en ingeniería y ciencias	195
Una aplicación a la Ingeniería Civil	195
Actividades propuestas	198
Preguntas abiertas	198
Preguntas cerradas	198

CAPÍTULO 4. Interpolación

Lección 1. Regresión lineal	202
Lección 2. Regresión polinomial	206
Lección 3. Polinomio de Lagrange	223
Actividades propuestas	236

CAPÍTULO 5. Derivación, integración y ecuaciones diferenciales

Lección 1. Derivación numérica	241
Método de diferencia progresiva	242
Método de los tres puntos	244
Método de los cinco puntos	245
Derivadas de datos	250
Lección 2. Integración numérica	251
Integración por el método de trapecio	251
Integración por regla de Simpson	256
Lección 3. Ecuaciones diferenciales	263
Método de Euler de segundo orden	266
Métodos de Taylor de orden superior	271
Método de Runge-Kutta de orden cuatro	276
Actividades propuestas	282
Preguntas abiertas	282
Preguntas cerradas	282
Referencias	285

Introducción

Los métodos numéricos son técnicas que usan operaciones aritméticas para resolver problemas matemáticos que no tienen solución analítica; estas operaciones, por su parte, puedan ser programadas en una computadora. *Métodos numéricos con Excel. Guía práctica para ingenieros* es el resultado de más de diez años de trabajo académico e investigativo en la Fundación Universidad de América. Esta guía presenta un curso dinámico e interactivo que se basa en el uso de la computadora digital. Es de anotar que los resultados de los algoritmos se compararán, en la medida de lo posible, con los valores de la solución analítica, para establecer el error, la exactitud, la precisión y la estabilidad de dicho método. La mayoría de los modelos que trabaja un ingeniero no tiene solución analítica, por lo que adquieren relevancia las aproximaciones numéricas para la solución de problemas. Igualmente, hay que resaltar que cada algoritmo implica numerosas operaciones aritméticas y lógicas, que requieren pseudocódigos para que el estudiante programe en Excel los métodos propuestos en cada capítulo. Además, el texto está orientado hacia la solución de problemas, dado que los estudiantes de ingeniería apropian mejor el aprendizaje cuando están motivados por la solución de modelos con aplicaciones hacia sus áreas de interés. También se enfatiza en una metodología pedagógica, en la que se formulan el algoritmo y su demostración, y se proponen ejemplos prácticos, que son desarrollados de forma clara y explícita con tablas, figuras y análisis de resultados.

El objetivo de la obra es aplicar métodos numéricos para la solución de modelos en ciencias e ingeniería, teniendo en cuenta que los algoritmos generan una

solución aproximada y, por ende, se debe buscar reducir el error y sus causas. Aquí se enfatiza en la programación de los métodos por medio de la herramienta computacional Excel. *Métodos numéricos con Excel* se estructura en seis objetivos específicos: interpretar el concepto de error, cifras significativas, redondeos y la serie de Taylor; programar algoritmos para solución de ecuaciones no lineales; solucionar sistemas de ecuaciones lineales y no lineales mediante la utilización de diferentes métodos iterativos; modelar una función polinómica a partir de unos datos experimentales para realizar estimaciones entre los datos no observados; aplicar algunos métodos iterativos para el cálculo de derivadas e integrales, y utilizar algunos métodos numéricos en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

CAPÍTULO 1

Aproximaciones y errores

En muchos problemas de ciencias e ingeniería es imposible llegar a la solución analítica de un modelo que se ajuste a un fenómeno específico. Es por esto por lo que se trata de aproximar estas soluciones mediante algoritmos numéricos que tienen errores. En tales casos se deben usar estimaciones de dichos errores. En esta unidad se presentan varios algoritmos para producir el resultado requerido, que el lector podrá escoger según sus necesidades y teniendo en cuenta la rapidez y exactitud.

Al resolver un problema matemático con una calculadora estándar, los números decimales calculados son inexactos. Estos números casi siempre se redondean según la mantisa, lo que hace que se produzcan errores de propagación si realizamos cálculos a partir del dato redondeado.

En cualquier *software* de cálculo numérico se producen errores de truncamiento o redondeo, que causan graves efectos en las operaciones iterativas y generan resultados incoherentes en la solución final. Es aquí donde es fundamental el estudio de los errores sistemáticos y accidentales y de su incidencia en los cálculos que realiza la computadora.

El objetivo de esta unidad es manejar los conceptos de error, exactitud, precisión y redondeo, así como conocer la forma de aproximar una función al polinomio de Taylor. Concretamente, aquí se trata de determinar los diferentes tipos de errores que se pueden presentar en la evaluación de una función, establecer la propagación de errores en una función de varias variables y representar una función mediante la serie de Taylor y el error en que se incurre, dependiendo del número de términos del polinomio.

LECCIÓN 1. Aproximaciones y errores

En ciencias e ingeniería cometer errores en un proceso puede resultar costoso e incluso catastrófico. Ante esta posibilidad los métodos numéricos hacen una aproximación para la solución de un modelo matemático, por lo que siempre se verán involucrados errores, los cuales, si su distribución es aleatoria y se agrupan muy cerca de una predicción, se pueden considerar insignificantes y la solución al modelo será la adecuada. En este sentido, es necesario evaluar qué tantos errores se pueden presentar en los cálculos y cuántos son tolerables.

Cifras significativas

Si se tiene un valor que se empleará en un cálculo, se debe tener la certeza de que pueda utilizarse con confianza. El concepto de cifras o dígitos significativos de una medida se puede especificar como la representación de una o más escalas de incertidumbre en determinadas aproximaciones. Por ejemplo, si tenemos 5.12 tiene tres cifras significativas o 8000 que se puede escribir como $8 \cdot 10^3$, tendrá una cifra significativa.

El concepto de cifras o dígitos significativos se define como los dígitos que se consideran no nulos, es decir, los valores diferentes de cero situados entre dos cifras significativas. Los ceros a la izquierda de la primera cifra significativa no se consideran valores significativos. Veamos el siguiente caso:

0.00003146

0.0003146

0.003146

0.03146

0.3146

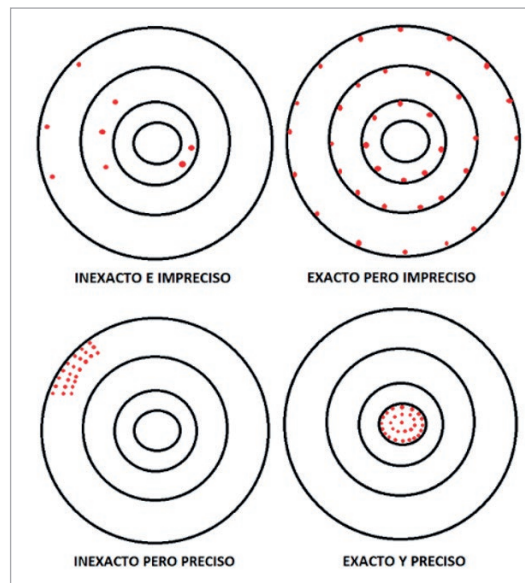
Los anteriores números tienen cuatro cifras significativas: 3, 1, 4 y 6. Analicemos otros dos casos: 0.0040021 tiene cinco cifras significativas: 4, 0, 0, 2 y 1, y 6.002 tiene cuatro cifras significativas: 6, 0, 0 y 2.

Ciertas cantidades, por ejemplo, π , e \wedge $\mathbb{E}2$, son llamadas irracionales, representan medidas específicas, pero no se pueden reproducir con un número finito de dígitos. En los computadores, la mantisa (diferencia entre un número y su parte entera) es la que permite representar la exactitud de una cifra. Por otra parte, dependiendo de este atributo, la omisión de cifras significativas se denomina error de redondeo.

Exactitud y precisión

La exactitud se refiere a qué tan cercano está el valor calculado o medido del valor verdadero. Por su parte, la precisión se describe como qué tan cercanos se encuentran diversos valores calculados o medidos. Los cálculos numéricos deben garantizar los protocolos de modelos de ciencias o ingeniería en cuanto a exactitud y precisión. En la figura 1 se hace una analogía entre un tiro al blanco y estos conceptos:

Figura 1. *Exactitud vs precisión*



Nota. Creación propia del autor. Relaborado a partir de Chapra y Canale (2011).

Definición de error

Cuando se menciona el término «aproximación» se hace referencia al acercamiento a un valor teórico o parámetro. Los errores numéricos se presentan por la utilización de aproximaciones en cálculos sobre modelos. Según Nieves y Domínguez (2006, p. 12), existen cuatro formas en las que se generan los errores:

- a) *Error de redondeo*. Se debe a que la computadora solo puede representar cantidades con un número limitado de dígitos; por lo tanto, los valores verdaderos no son expresados exactamente, ya que parte de la fracción decimal está redondeada, pues ha sido acortada después del dígito final.
- b) *Error de truncamiento*. Se debe a las aproximaciones utilizadas en la fórmula matemática del modelo. Los errores de truncamiento representan la diferencia entre una formulación matemática exacta del problema y la aproximación dada por un método numérico. Por ejemplo, el resultado exacto de un problema es 7.6784231 y el método numérico arroja 7.678.
- c) *Error significativo*. Ocurre cuando al ejecutar una operación en una máquina calculadora, el número de cifras válidas es menor que lo esperado. Por ejemplo, la operación $7.898845 - 7.898732 = 0.000113$, en una máquina que maneje notación de punto flotante para seis dígitos genera como resultado 0.113000×10^{-3} y los tres últimos dígitos no son significativos.
- d) *Error propagado*. Es el error que se obtiene en la salida (respuesta) generada en los pasos sucesivos debido a la ocurrencia de un error anterior.

Cálculo de errores

- *Error absoluto.* Diferencia en el valor absoluto entre el valor exacto y calculado.

$$E_a = |V_e - V_c|$$

- *Error relativo.* Cociente entre el error absoluto y el valor exacto en porcentaje.

$$E_r = \left| \frac{V_e - V_c}{V_e} \right| \times 100\%$$

Ejemplo 1

La distancia que recorre una partícula que se suelta desde el reposo está dada por:

$$y = 4.9t^2$$

Donde y , quedara en metros y t , es el tiempo en segundos desde cuando se libera la partícula. Si transcurridos $t=13.95$, se redondea a 14 calcular: a) cuál es el error en t , y b) cuál es el error en y .

Se supone que se debe evaluar la velocidad con la que se desplaza una partícula al cabo de $t = 13.95$, sabiendo que la función aceleración está expresada como $a(t) = 4.9t^2$. Si se redondea $t = 14$, determinar: a) cuál es el error en t y b) cuál es el error en $a(t)$.

Solución a

$$V_e = 13.95 \quad V_c = 14$$

$$E_a = |13.95 - 14| = 0.05 \text{ seg.}$$

$$E_r = \left| \frac{13.95 - 14}{13.95} \right| \times 100 \% = 0.00358 \times 100 \% = 0.36 \%$$

Solución b

$$V_e \rightarrow y(13.95) = 4.9 * (13.95)^2 = 953.55225$$

$$V_c \rightarrow y(14) = 4.9 * (14)^2 = 960,4$$

$$E_a = |960.4 - 953.55225| = 6,84775$$

$$E_r = \left| \frac{960.4 - 953.55225}{953.55225} \right| * 100 \% = 0.00718 * 100 \% = 0.72 \%$$

Observe que el error absoluto que se propaga para $y(t)$ es 6.84775, lo que es producto del error cometido al aproximar t en 0.05 segundos.

La tolerancia se establece como el menor valor entre la diferencia de la iteración actual menos la anterior, lo que garantiza que la cantidad de decimales para la aproximación se puede definir en términos absolutos $(x_n - x_{n-1})$ o en términos relativos: $(x_n - x_{n-1}) / x_n$.

$$T_x = \left| \frac{\text{valor actual} - \text{valor previo}}{\text{valor actual}} \right| * 100\%$$

Si se fija según los protocolos del experimento, un número específico de decimales, cuando la tolerancia sea menor que los decimales prefijados (t), se deben realizar las iteraciones hasta que cumpla $|T_x| < t$.

Reglas de redondeo

Se deben tener en cuenta tres reglas para la función redondeo:

- Si el dígito que sigue al redondeo por aplicar es mayor de 5, se aumenta en 1, y si es menor que 5, se conserva el dígito por redondear.
- Si el dígito que sigue al redondeo es 5 y el punto decimal por redondear es impar, se aumenta en 1.

- c) Si el dígito que sigue al redondeo es 5 y el punto decimal por redondear es par, se conserva el dígito por redondear.

Ejercicios

- Redondee cada uno de los números a las cifras significativas dadas:
 - 8.1823 a 3 cifras significativas = 8.182
 - 8.1823 a 2 cifras significativas = 8.18
 - 10.406 a 4 cifras significativas = 10.4060
 - 7.3500 a 2 cifras significativas = 7.35
 - 45.35250 a 5 cifras significativas = 45.35250
 - 7289 a 2 cifras significativas = 7289.00
- Calcular: $2.68 \times 10^{-6} + 4.36 \times 10^{-4} - 1.35 \times 10^{-4}$. Se deben trabajar todos los términos con el mismo exponente, tomando el que más se repita, en este caso: $0.0268 \times 10^{-4} + 4.36 \times 10^{-4} - 1.35 \times 10^{-4} = 3.0368 \times 10^{-4}$.
- Si se tiene 0.15486, hallar el error relativo de truncamiento y de redondeo con cuatro decimales en los casos a y b descritos a continuación.
 - Truncando al cuarto decimal si el valor teórico o real es 0.15486 y la aproximación equivale a 0.1548.

$$E_R = \left| \frac{0.15486 - 0.1548}{0.15486} \right| * 100$$

$$E_R = 0.0387 \%$$

- b) Redondear al cuarto decimal si el valor teórico o real es 0.15486 y la aproximación equivale a 0.1549.

$$E_R = \left| \frac{0.15486 - 0.1549}{0.15486} \right| * 100$$

$$E_R = 0.0258 \%$$

Observe que en el cálculo del redondeo se realiza una operación más; es por esto por lo que la mayoría de los computadores truncan los cálculos.

Distribución normal

Al tener una variable aleatoria continua X donde hay más de treinta observaciones, generalmente todo fenómeno sigue una distribución normal o curva de Gauss (llamada así en honor al famoso matemático alemán que la publicó en 1809). La distribución normal considera la media μ en el centro de la distribución y la desviación típica σ . Si se define $N(\mu, \sigma)$, se cumplirá que *la variable continua puede tomar cualquier real*.

La función de distribución de probabilidad es normal con media μ y desviación típica σ , si se designa por $N(\mu, \sigma)$, se cumplen las siguientes condiciones:

- La variable aleatoria toma cualquier real $(-\infty, +\infty)$.
- La función de densidad de probabilidad está dada por la distribución gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi * \sigma}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$$

Se utilizará la distribución para la depuración de datos. Los datos depurados serán aquellos cuyo número de desviación estándar (Z_i) sea mayor a -1 y menor a 1, es decir, a más o menos una desviación estándar de la media $-1 \leq Z_i \leq 1$. Z_i lo que se calcula con la fórmula:

$$Z_i = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Donde μ es la media; σ , la desviación estándar, y x , el dato por analizar.

Ejemplo 1

Depurar y seleccionar los datos que estén dentro de la distribución normal de la siguiente tabla:

	B
3	X_i
4	6,32
5	6,34
6	6,31
7	6,33
8	6,38

Se calcula el promedio y la desviación estándar de la muestra (tabla del ejercicio).

	B	C
3	X_i	
4	6,32	
5	6,34	
6	6,31	
7	6,33	
8	6,38	
9	PROMEDIO	=PROMEDIO(B4:B8)
10	DESVIACION EST.	=DESVEST(B4:B8)

Ejecutando los comandos tenemos:

	B	C
9	PROMEDIO	6,336
10	DESVIACION EST.	0,02702

Se establece Z_i para determinar cuáles son los datos más lejanos de la medida de tendencia central (promedio) para luego descartarlos.

	B	C
3	X_i	Z_i
4	6,32	$= (B4 - \$C\$9) / (\$C\$10)$

Al evaluar los Z_i se obtiene:

	B	C
3	X_i	Z_i
4	6,32	-0,592186568
5	6,34	0,148046642
6	6,31	-0,962303173
7	6,33	-0,222069963
8	6,38	1,628513062

Los datos en rojo son los depurados al utilizar la distribución normal y Z_i . Se utilizará un condicional para obtener todos los datos resultantes de la depuración y que cumplan con el criterio: $-1 \leq Z_i \leq 1$.

	B	C	D
3	X_i	Z_i	X_i Depurados
4	6,32	-0,592186568	6,32
5	6,34	0,148046642	6,34
6	6,31	-0,962303173	6,31
7	6,33	-0,222069963	6,33
8	6,38	1,628513062	

Condicional para la depuración de las observaciones:

	B	C	D	E
3	Xi	Zi	Xi Depurados	
4	6,32	-0,592186568	=SI(Y(C4<1;C4>=-1);B4;"")	

Se obtienen cuatro datos de la depuración.

Ejemplo 2

La fórmula de Manning¹ para un canal rectangular se expresa:

$$Q = \frac{1}{n} \frac{(B * H)^{\frac{5}{3}}}{(B + 2H)^{\frac{2}{3}}} S^{\frac{1}{2}}$$

Donde Q es flujo (m^3/s); n , coeficiente de rugosidad; B , ancho (m); H , profundidad (m), y S , pendiente. Se tienen los siguientes datos para la profundidad del canal:

	A
6	Hi
7	2,59
8	2,71
9	2,72
10	2,58
11	2,79
12	2,56
13	2,66
14	2,66
15	2,71
16	2,63

Para depurar los datos utilizando la distribución normal se calcula el promedio y la desviación estándar de la muestra (ver tabla del ejercicio).

¹ La fórmula de Manning, postulada por Robert Manning en 1889, es una evolución de la fórmula de Chézy para calcular la velocidad del agua en tuberías y canales abiertos.

	A	B
6	Hi	
7	2,59	
8	2,71	
9	2,72	
10	2,58	
11	2,79	
12	2,56	
13	2,66	
14	2,66	
15	2,71	
16	2,63	
17	Promedio	=PROMEDIO(A7:A16)
18	Desviacion Estandar	=DESVEST(A7:A16)

Al evaluar el promedio y la desviación estándar se obtiene:

	A	B
17	Promedio	2,661
18	Desviacion Estandar	0,072793467

Se establece Z_i para determinar cuáles son los datos más lejanos de la medida de tendencia central (promedio) y luego descartarlos.

	A	B
6	Hi	zi
7	2,59	=(A7-\$B\$17)/(\$B\$18)

Resaltados en rojo aparecen los valores que no cumplen con el criterio:
 $-1 \leq Z_i \leq 1$:

	A	B
6	Hi	zi
7	2,59	-0,975362249
8	2,71	0,673137327
9	2,72	0,810512291
10	2,58	-1,112737213
11	2,79	1,772137043
12	2,56	-1,387487142
13	2,66	-0,013737496
14	2,66	-0,013737496
15	2,71	0,673137327
16	2,63	-0,42586239
17	Promedio	2,661
18	Desviacion Estandar	0,072793467

Los datos en rojo son los datos depurados al utilizar la distribución normal y Z_i . Se utilizará un condicional y la función contará para obtener todos los resultantes de la depuración y que cumplan con el criterio $-1 \leq Z_i \leq 1$.

	A	B	C
6	Hi	zi	Datos Depurados
7	2,59	-0,975362249	=SI(Y(B7<1;B7>=-1);A7;"")

Al aplicar la función condicional en la columna «C», el que incumpla con el criterio no aparecerá como dato.

	A	B	C
6	Hi	zi	Datos Depurados
7	2,59	-0,975362249	2,59
8	2,71	0,673137327	2,71
9	2,72	0,810512291	2,72
10	2,58	-1,112737213	
11	2,79	1,772137043	
12	2,56	-1,387487142	
13	2,66	-0,013737496	2,66
14	2,66	-0,013737496	2,66
15	2,71	0,673137327	2,71
16	2,63	-0,42586239	2,63

Se obtienen siete datos de la depuración.

Ejemplo 3

La velocidad hacia arriba de un cohete se calcula con la siguiente fórmula:

$$v = u \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - qt} \right) - gt$$

Donde v es velocidad del cohete hacia arriba; u , velocidad con la que el combustible sale del cohete; m_0 , masa inicial del cohete en el $t = 0$; g , 9.8 m/s^2 , y q consumo de combustible².

Si para u se realizaron las mediciones que están en la tabla, depurar los datos, utilizando la distribución normal.

² Adaptado del ejercicio 4.15 de Chapra y Canale (2011).

U
2200
2000
2500
2300
2600
2100
2250
1900
2400

Se calcula el promedio y la desviación estándar de la muestra (tabla del ejercicio).

	A	B
1	U	
2	2200	
3	2000	
4	2500	
5	2300	
6	2600	
7	2100	
8	2250	
9	1900	
10	2400	
11	PROMEDIO	=PROMEDIO(A2:A10)
12	D. ESTANDAR	=DESVEST(A2:A10)

Se establece Z_i para determinar cuáles son los datos atípicos a la medida de tendencia central (promedio) y luego descartarlos.

	A	B	C
1	U	Z_i	
2	2200	$=(A2-\$B\$11)/(\$B\$12)$	

Al ejecutar los Z_i se obtiene:

	A	B
1	U	Zi
2	2200	-0,21821789
3	2000	-1,09108945
4	2500	1,09108945
5	2300	0,21821789
6	2600	1,52752523
7	2100	-0,65465367
8	2250	0
9	1900	-1,52752523
10	2400	0,65465367

Los datos en rojo son los depurados al utilizar la distribución normal y Z_i . Se utilizarán un condicional y la «función contar» para obtener todos los resultados de la depuración y que cumplan con el criterio $-1 \leq Z_i \leq 1$.

	A	B	C	D
1	U	Zi	Datos Depurados	
2	2200	-0,21821789	=SI(Y(B2<1;B2>=-1);A2;"")	

Al ejecutar el comando condicional se obtiene:

	A	B	C
1	U	Zi	Datos Depurados
2	2200	-0,21821789	2200
3	2000	-1,09108945	
4	2500	1,09108945	
5	2300	0,21821789	2300
6	2600	1,52752523	
7	2100	-0,65465367	2100
8	2250	0	2250
9	1900	-1,52752523	
10	2400	0,65465367	2400

Se obtienen cinco datos de la depuración.

Distribución t de Student

La distribución t de Student se trabaja cuando se requiere estimar la media poblacional y no se conoce la desviación estándar, siempre y cuando la distribución original sea aproximadamente normal o el número de observaciones sea mayor de 30.

Ejemplo 4

Realizar la estimación por intervalos de los siguientes datos en un intervalo de confianza del 95 %.

	B
5	X_i
6	6,32
7	6,34
8	6,31
9	6,33
10	6,38

Se depuran los datos utilizando la distribución normal (ver depuración, distribución normal en ejemplo 1).

1) Los valores depurados son los siguientes:

	F
5	X_i
6	6,32
7	6,34
8	6,31
9	6,33

Se calcula el promedio de los datos (función promedio), número de datos de la muestra (función contar), grados de libertad (número de datos -1) y la desviación estándar de la muestra (función DESVEST).

1	Xi		
2	6,32	PROMEDIO	=PROMEDIO(A2:A5)
3	6,34	NÚMERO DE DATOS	=CONTAR(A2:A5)
4	6,31	GRADOS DE LIBERTAD "V"	=C3-1
5	6,33	DESVIACIÓN ESTANDART	=DESVEST(A2:A5)

Al ejecutar los comandos se obtiene:

1	Xi		
2	6,32	PROMEDIO	6,325
3	6,34	NÚMERO DE DATOS	4
4	6,31	GRADOS DE LIBERTAD "V"	3
5	6,33	DESVIACIÓN ESTANDART	0,01290994

Se establece el intervalo de confianza $1 - \alpha$ (0.95). Después se calcula el valor crítico (función distribución t inversa) con la sustracción entre 1 y el intervalo de confianza (1-0.95) y los grados de libertad. Se determina el error de estimación con la fórmula:

$$t_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Donde $t_{\alpha/2}$ es el valor crítico en la distribución de Student; s , la desviación estándar, y \sqrt{n} la raíz del número de datos.

	A	B
1	INTERVALO DE CONFIANZA "1- α "	0,95
2	VALOR CRÍTICO	=DISTR.T.INV((1-B1);3)
3	ERROR DE ESTIMACIÓN	=B2*(0,01290944/RAIZ(4))

Al ejecutar los comandos se obtiene:

	A	B
1	INTERVALO DE CONFIANZA "1- α "	0,95
2	VALOR CRÍTICO	3,18244631
3	ERROR DE ESTIMACIÓN	0,0205418

Se establecen los límites superior e inferior con el promedio de la muestra y el error de estimación.

	A	B
1	LÍMITE SUP.	=6,325+0,0205418
2	LÍMITE INF.	=6,325-0,0205418

	A	B
1	LÍMITE SUP.	6,35
2	LÍMITE INF.	6,30

En un intervalo de confianza del 95 %, el valor real estará dentro de un rango de 6.30-6.35.

Ejemplo 5

La fórmula de Manning para un canal rectangular es:

$$Q = \frac{1}{n} \frac{(B * H)^{\frac{5}{3}}}{(B + 2H)^{\frac{2}{3}}} S^{\frac{1}{2}}$$

Donde Q es flujo (m^3/s); n , coeficiente de rugosidad; B , ancho (m), H , profundidad (m), y S , pendiente. Encontrar en un intervalo de confianza del 95 % la estimación del flujo si se tiene la siguiente tabla de datos depurada:

	G
6	Hi
7	2,59
8	2,71
9	2,72
10	2,66
11	2,66
12	2,71
13	2,63

Se depuran los datos utilizando la distribución normal. Se calculan el promedio de los datos (función promedio), número de datos de la muestra (función contar), número de grados de libertad (número de datos -1) y la desviación estándar de esta (función desviación estándar).

	A	B	C
1	Hi		
2	2,59	Promedio	=PROMEDIO(A2:A8)
3	2,71	Desviación Estandart	=DESVEST(A2:A8)
4	2,72	Número de Datos	=CONTAR(A2:A8)
5	2,66	Grados de Libertad	=C4-1
6	2,66		
7	2,71		
8	2,63		

Al calcular los comandos de la muestra se obtiene:

	A	B	C
1	Hi		
2	2,59	Promedio	2,66857143
3	2,71	Desviación Estandart	0,04810702
4	2,72	Número de Datos	7
5	2,66	Grados de Libertad	6
6	2,66		
7	2,71		
8	2,63		

Se establece el intervalo de confianza $1 - \alpha$ (0.95). Después, el valor crítico (función distribución t inversa) con la sustracción entre 1 y el intervalo de confianza ($1 - 0.95$) y los grados de libertad. Se determina el error de estimación con la fórmula:

$$ee = t_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Dónde $t_{\alpha/2}$ es el valor crítico en la distribución de Student; s , la desviación estándar, y n la raíz del número de datos.

29	Intervalo de confianza "1- α "	0,95
30	Valor Crítico	=DISTR.T.INV((1-B29);C5)
31	Error de Estimación	=B30*(C3/RAIZ(C4))
32	Límite Sup.	=C2+B31
33	Limite Inf.	=C2-B31

Los límites en un intervalo de confianza del 95 % son:

29	Intervalo de confianza "1- α "	0,95
30	Valor Crítico	2,446911851
31	Error de Estimación	0,044491576
32	Límite Sup.	2,713063005
33	Limite Inf.	2,624079852

En un intervalo de confianza del 95 %, el valor real estará dentro de un rango de 2.71-2.62.

Ejemplo 6

La velocidad hacia arriba de un cohete se calcula con la siguiente fórmula:

$$v = u \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - qt} \right) - gt$$

Donde v es la velocidad del cohete hacia arriba; u , velocidad con la que el combustible sale del cohete; m_0 , masa inicial del cohete en el $t = 0$; g , 9.8m/s^2 , y q consumo de combustible³.

Halle el valor más probable de u si se tiene la siguiente tabla de datos depurada:

	H
1	U
2	2200
3	2300
4	2100
5	2250
6	2400

Se depuran los datos utilizando la distribución normal. Igualmente, se calcula el promedio de los datos (función promedio), número de datos de la muestra (función contar), número de grados de libertad (número de datos - 1) y la desviación estándar de esta (función desviación estándar).

	A	B	C
1	U		
2	2200	Promedio	=PROMEDIO(A2:A6)
3	2300	Desviación Estandart	=DESVEST(A2:A6)
4	2100	Número de Datos	=CONTAR(A2:A6)
5	2250	Grados de Libertad	=C4-1
6	2400		

3 Adaptado del ejercicio 4.15 de Chapra y Canale (2011).

Al calcular con los datos de la muestra se obtiene:

	A	B	C
1	U		
2	2200	Promedio	2250
3	2300	Desviación Estandart	111,8034
4	2100	Número de Datos	5
5	2250	Grados de Libertad	4
6	2400		

Se establece el intervalo de confianza $1 - \alpha$ (0.95). Se calcula el valor crítico (función distribución t inversa) con la diferencia entre 1 y el intervalo de confianza ($1 - 0.95$) y los grados de libertad. Se determina el error de estimación con la fórmula:

$$ee = t_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Donde $t_{\alpha/2}$ es el valor crítico en la distribución de Student; s , la desviación estándar y \sqrt{n} , la raíz del número de datos. Finalmente se calculan los límites superior e inferior con el promedio de la muestra y el error de estimación.

10	Intervalo de confianza "1- α "	0,95
11	Valor Crítico	=DISTR.T.INV((1-B10);C5)
12	Error de Estimación	=B11*(C3*RAIZ(C4))
13	Límite Sup.	=C2+B12
14	Límite Inf.	=C2-B12

Al ejecutar los comandos se tiene:

10	Intervalo de confianza "1- α "	0,95
11	Valor Crítico	2,776445105
12	Error de Estimación	138,8222553
13	Límite Sup.	2388,822255
14	Límite Inf.	2111,177745

En un intervalo de confianza del 95 %, el valor real estará dentro de un rango de 2388.82 - 2111.17.

Propagación de errores

El propósito de este apartado consiste en estudiar cómo se propagan los errores para variables dependientes cuando las independientes o las observaciones tienen errores involucrados. Formulación:

- $\sum f(x)^2$ = errores en la(s) variable(s) dependientes.
- G = matriz de las derivadas parciales de la(s) variables dependientes respecto a las independientes u observaciones.
- $\sum x^2$ = matriz de los errores en las observaciones o variables dependientes.

Algoritmo:

$$\sum f(x)^2 = G * \sum x^2 * G^T$$

Ejemplo 7

Para estimar el área de un terreno triangular se tomaron dos lados adyacentes y el ángulo comprendido entre ellos, así:

$$a = 16.23^\circ$$

$$b = 25.36^\circ$$

$$\alpha = 25.28^\circ$$

Los errores en cada medición fueron:

$$\nabla_a = \pm 0.05$$

$$\nabla_b = \pm 0.08$$

$$\nabla_\alpha = \pm 0.03$$

- a. El primer procedimiento consiste en determinar la variable dependiente (en este caso el área).

$$A = \frac{1}{2} a * b * \text{sen} \alpha$$

Es decir, se estima

$$\sum f(x)^2 = \sum A^2$$

- b. Para poder establecer el error en el área se calcula G .

$$G = \left[\frac{\partial A}{\partial a}, \frac{\partial A}{\partial b}, \frac{\partial A}{\partial \alpha} \right] = \left[\frac{1}{2} b * \text{sen} \alpha, \frac{1}{2} a * \text{sen} \alpha, \frac{1}{2} a * b * \cos \alpha \right]$$

Se evalúa con los valores dados:

$$G = \left[\frac{1}{2} 25.36 * \text{sen} 25.28, \frac{1}{2} 16.23 * \text{sen} 25.28, \frac{1}{2} 16.23 * 25.36 * \cos 25.28 \right]$$

$$G = [5.414895768, 3.465447883, 186.0876225]$$

La matriz transpuesta de G :

$$G^T = \begin{bmatrix} 5.414895768 \\ 3.465447883 \\ 186.0876225 \end{bmatrix}$$

- c. La matriz de los errores en las observaciones o variables independientes es:

$$\sum x^2 = \begin{bmatrix} \nabla_{a,a} & \nabla_{a,b} & \nabla_{a,\alpha} \\ \nabla_{b,a} & \nabla_{b,b} & \nabla_{b,\alpha} \\ \nabla_{\alpha,a} & \nabla_{\alpha,b} & \nabla_{\alpha,\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{a^2} & \nabla_{a,b} & \nabla_{a,\alpha} \\ \nabla_{b,a} & \nabla_{b^2} & \nabla_{b,\alpha} \\ \nabla_{\alpha,a} & \nabla_{\alpha,b} & \nabla_{\alpha^2} \end{bmatrix}$$

Es importante aclarar que esta es una matriz de correlaciones entre las observaciones, y que el orden de las filas depende de la matriz G , es decir, como las derivadas parciales se inician con a , en este mismo orden deben ir los errores. Si llegara a cambiar G (lo que se puede hacer), también cambiará la matriz de los errores. Hay que señalar que siempre será una matriz cuadrada con orden igual al número de observaciones. Por otra parte, como las observaciones fueron realizadas de forma independiente, las correlaciones entre las variables independientes serán de cero.

$$\nabla_{a,b} = \nabla_{b,a} = 0 \quad ; \quad \nabla_{a,\alpha} = \nabla_{\alpha,a} = 0 \quad ; \quad \nabla_{b,\alpha} = \nabla_{\alpha,b} = 0$$

Por lo tanto, la matriz quedará:

$$\sum x^2 = \begin{bmatrix} (0.05)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (0.08)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(0.03 * \frac{\pi}{180}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0025 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0064 & 0 \\ 0 & 0 & 2.741556E-07 \end{bmatrix}$$

d. El error en el área está dado por:

$$\sum A^2 = G * \sum x^2 * G^T$$

Al reemplazar:

$$\sum A^2 = [5.414895768, \quad 3.465447883, \quad 186.0876225] * \begin{bmatrix} 0.0025 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0064 & 0 \\ 0 & 0 & 2.741556E-07 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5.414895768 \\ 3.465447883 \\ 186.0876225 \end{bmatrix}$$

$$\sum A^2 = 0.1596560744$$

Como está al cuadrado, se saca la raíz y finalmente:

$$\sum A = \pm 0.3995698617$$

Se aproxima a cuatro decimales, ya que las observaciones fueron tomadas con dos decimales de exactitud:

$$\sum A = \pm 0.3996$$

Por lo tanto, el área está entre:

$$A = \frac{1}{2} a * b * \text{Sen} \alpha = \frac{1}{2} 16.23 * 25.36 * \text{Sen} 25.28 = 87.8838 \pm 0.3996$$

$$A = \begin{cases} 88,2834 \\ 87,4842 \end{cases}$$

Comprobando con valores extremos, en las variables independientes las áreas deben estar en este rango.

Ejemplo 8

Si se tiene una figura con las siguientes medidas:



$$y = 4.32 \pm 0.03$$

$$x = 6.13 \pm 0.05$$

Halle el valor más probable del área y la diagonal de la figura.

- a. Se formulan las variables dependientes: variables independientes (base y altura): x, y ; variables dependientes (área y diagonal):

$$A = x * y$$

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- b. Teniendo en cuenta los siguientes valores:

	A	B
1	Estimador Puntual de x	6,13
2	Error de estimación de x	0,05
3	Estimador Puntual de y	4,32
4	Error de estimación de y	0,03

Estimador

- c. Se construye la matriz G :

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial y} \\ \frac{\partial D}{\partial x} & \frac{\partial D}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Ya que en los términos de la matriz se deben calcular las derivadas parciales de las variables dependientes respecto a las independientes se tiene:

$$A = x * y$$

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La matriz G :

$$\frac{dA}{dx} = y \quad \frac{dA}{dy} = x$$

$$G = \begin{bmatrix} y & x \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{bmatrix}$$

Se reemplazan los estimadores puntuales en la matriz G calculada.

	B	C
23	=H18	=H16
24	=(H16)/((H16^2)+(H18^2))	=(H18)/((H16^2)+(H18^2))

	B	C
23	4,32	6,13
24	0,81741108	0,57605479

La matriz: $\hat{\sigma}_x^2$ con los errores de estimación para cada variable independiente

$$\hat{\sigma}_x^2 = \begin{bmatrix} \nabla_{xx} & \nabla_{xy} \\ \nabla_{yx} & \nabla_{yy} \end{bmatrix}$$

Para todos los casos con los elementos $\hat{\sigma}_{xy} = \hat{\sigma}_{yx} = 0$, ya que las observaciones fueron realizadas de manera independiente.

	B	C
27	=H17^2	0
28	0	=POTENCIA(H19;2)

	B	C
27	0,0025	0
28	0	0,0009

La matriz transpuesta de G (G^T).

	B	C
31	=TRANSPONER(B23:C24)	=TRANSPONER(B23:C24)
32	=TRANSPONER(B23:C24)	=TRANSPONER(B23:C24)

Al trasponer la matriz se obtiene:

	B	C
31	4,32	0,817411082
32	6,13	0,576054792

Con estas tres matrices se calcula la matriz de errores de las variables dependientes, usando la siguiente fórmula:

$$\sum A^2 = G * \sum x^2 * G^T$$

$$\sum D^2 = G * \sum x^2 * G^T$$

La multiplicación entre matrices para obtener la propagación del error:

Matriz G

	B	C
23	4,32	6,13
24	0,81741108	0,57605479

Matriz $\hat{u}x^2$

	B	C
27	0,0025	0
28	0	0,0009

Matriz G^T

	B	C
31	4,32	0,817411082
32	6,13	0,576054792

	B	C
35	=MMULT(MMULT(B23:C24;B27:C28);B31:C32)	=MMULT(MMULT(B23:C24;B27:C28);B31:C32)
36	=MMULT(MMULT(B23:C24;B27:C28);B31:C32)	=MMULT(MMULT(B23:C24;B27:C28);B31:C32)

Al ejecutar el producto se obtiene:

	B	C
35	0,08047521	0,012006134
36	0,012006134	0,001969057

Se verifica que las asociaciones de errores del área y la diagonal ($iAD = iDA$) sean iguales (color amarillo), lo cual nos garantiza que los cálculos de matrices han sido correctos.

El resultado (F1:C1) es $\hat{u}A^2$ y el resultado (F2:C2) es $\hat{u}D^2$.

Se calcula la raíz de ambos resultados, que serán los errores de estimación en ambas variables dependientes.

$$\sum A = \sqrt{0.08047521}$$

$$\sum A = 0.2836815$$

$$\sum D = \sqrt{0.0812006134}$$

$$\sum D = 0.0443741$$

Con los estimadores puntuales se calcula el área y la diagonal, para establecer los límites superior e inferior, determinados con $\hat{u}A$ y $\hat{u}D$.

	G	H
24	Área	=H16*H18

El resultado del área es:

	G	H
24	Área	26,4816

El cálculo de la diagonal es:

	G	H	I
31	Diagonal	=RAIZ((H16^2)+(H18^2))	

Resultado de la diagonal:

	G	H
31	Diagonal	7,4992866

Se obtienen los valores más probables para el área y la diagonal para esta:

	G	H
24	Área	=H16*H18
25	Error de Área	=POTENCIA(B35;0,5)
26	Límite superior	=H24+H25
27	Límite inferior	=H24-H25

Para la diagonal:

	G	H
31	DIAGONAL	=RAIZ((H16^2)+(H18^2))
32	Error de Diagonal	=POTENCIA(C36;0,5)
33	Límite superior	=H31+H32
34	Límite inferior	=H31-H32

Ejemplo 9

La fórmula de Manning para un canal rectangular se escribe:

$$Q = \frac{1}{n} \frac{(B * H)^{5/3}}{(B + 2H)^{2/3}} S^{1/2}$$

Donde Q es el flujo (m^3/s); n , coeficiente de rugosidad; B , ancho (m); H , profundidad (m), y S , pendiente. Si para n , s y H se realizaron mediciones, en las que se obtuvo $n = 0.03 \pm 0.001$, $s = 0.003 \pm 0.001$ y $H = 2.668571429 \pm 0.04449158$, calcule el flujo cuando el ancho del canal (B) es de 20 m. Asuma que el ancho no presenta error. Se enumeran las variables dependientes e independientes que tiene el ejercicio: constantes (1): B ; variables independientes (3): n , S , H ; variables dependientes (1): flujo Q . Tenemos los siguientes valores:

	C	D	E
20		Estimadores Puntuales	Errores
21	n	0,03	0,001
22	S	0,003	0,001
23	H	2,668571429	0,04449158

Ancho del canal que se asume sin error:

	G	H
21	B	20

Se construye la matriz G :

$$G = \begin{bmatrix} \frac{dQ}{dn} & \frac{dQ}{dS} & \frac{dQ}{dH} \end{bmatrix}$$

Se calculan las derivadas parciales del flujo respecto al coeficiente de rugosidad, pendiente y la altura:

$$\frac{\partial Q}{\partial n} = \left(-\frac{1}{n^2}\right) \frac{(B * H)^{\frac{5}{3}}}{(B + 2H)^{\frac{2}{3}}} * S^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial S} = \left(\frac{1}{2n}\right) \frac{(B * H)^{\frac{5}{3}}}{(B + 2H)^{\frac{2}{3}}} * S^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial H} = \left(\frac{1}{n}\right) \left[\frac{5}{3} (B * H)^{\frac{2}{3}} * B * (B + 2H)^{-\frac{2}{3}} - \frac{4}{3} (B + 2H)^{-\frac{5}{3}} * (B * H)^{\frac{5}{3}} \right] * S^{\frac{1}{2}}$$

Al reemplazar los estimadores puntuales en la matriz G obtenida:

Derivada parcial con respecto a «n».

	A	B
37	n	S
38	$=(-D21^{\wedge}2)*POTENCIA(D22;0,5)*(((H21*D23)^{\wedge}(5/3))/((H21+(2*D23))^{\wedge}(2/3)))$	

Derivada parcial con respecto a «H».

	C
37	H
38	$=(-1/D21)^{\wedge}(D22^{\wedge}0,5)*(((5/3)^{\wedge}(H21*D23)^{\wedge}(2/3)*(H21)*(H21+2*D23)^{\wedge}(-2/3))+((-4/3)^{\wedge}(H21+2*D23)^{\wedge}(-5/3)*(H21*D23)^{\wedge}(5/3)))$

Con respecto a «S» se evalúa igual que las anteriores:

	A	B	C
37	n	S	H
38	5337,375247	26686,87624	91,57818668

La matriz $\hat{u}x^2$ con los errores de estimación para cada variable independiente.

$$\sum x^2 = \begin{vmatrix} \nabla n^2 & \nabla S n & \nabla H n \\ \nabla n S & \nabla S^2 & \nabla H S \\ \nabla n H & \nabla S H & \nabla H^2 \end{vmatrix}$$

Para todos los casos con la matriz:

$$\sum x^2 = \nabla n H = \nabla H n = 0; \nabla n S = \nabla S n = 0; \nabla S H = \nabla H S = 0$$

	A	B	C
44	=E21^2	0	0
45	0	=E22^2	0
46	0	0	=E23^2

Los errores en las observaciones son:

	A	B	C
44	0,000001	0	0
45	0	0,000001	0
46	0	0	0,001979501

Además de estas dos matrices se calcula la matriz transpuesta de G (G^T).

	A
50	=TRANSPONER(A38:C38)
51	=TRANSPONER(A38:C38)
52	=TRANSPONER(A38:C38)

Al evaluar la transpuesta:

	A
50	5337,375247
51	26686,87624
52	91,57818668

Con estas tres matrices se calcula la matriz del error en el flujo.

$$\sum Q^2 = G * \sum x^2 * G^T$$

Se realiza la multiplicación entre matrices para obtener la propagación del error.

Matriz G :

	A	B	C
37	n	S	H
38	5337,375247	26686,87624	91,57818668

Matriz $\hat{u}x^2$:

	A	B	C
44	0,000001	0	0
45	0	0,000001	0
46	0	0	0,001979501

Matriz G^T :

	A
50	5337,375247
51	26686,87624
52	91,57818668

Al realizar el producto de las tres matrices se obtiene:

	A
56	757,2781476
57	0
58	0

El resultado (A56) es $\hat{u}Q^2$. La raíz del resultado será el error de estimación del flujo:

$$\sum Q = \sqrt{757,2781476}$$

$$\sum Q = 160,1212574$$

Con los estimadores puntuales se calcula el flujo para determinar los límites (superior e inferior) determinados con $\hat{u}Q$.

	E	F	G	I
55	Flujo	$= (1/D21) * D22^{(0,5)} * ((H21 * D23)^{(5/3)} / (H21 + 2 * D23)^{(2/3)})$		

El resultado del flujo es:

	E	F
55	Flujo	160,1212574

La estimación por intervalos para el flujo:

	E	F
55	Flujo	= $(1/D21)*D22^{(0,5)}*((H21*D23)^{5/3}/(H21+2*D23)^{(2/3)})$
56	Estimación del Flujo	=RAIZ(A56)
57	Límite Superior	=F55+F56
58	Límite Inferior	=F55-F56

Los límites en un intervalo de confianza dado por las estimaciones en las observaciones son:

	E	F
55	Flujo	160,1212574
56	Estimación del Flujo	27,51868724
57	Límite Superior	187,6399447
58	Límite Inferior	132,6025702

Con los datos calculados el valor más probable del flujo estará entre 187.64 y 132.60 m³/s.

Teorema de Taylor

Al suponer que se tiene una función continua en un intervalo cerrado y es derivable, se podrá aproximar a un polinomio, así:

$$P_n(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + R_n(x)$$

Donde $R_n(x)$ se denomina error de truncamiento o residuo asociado a $P_n(x)$. La serie infinita que se obtiene al tomar el límite de $P_n(x)$ es $n \rightarrow \infty$ se denomina serie de Taylor para f respecto a x_0 . La expresión para $R_n(x)$ error de truncamiento es:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-x_0)^{(n+1)} \quad (13)$$

Donde z es un número entre x_0 y x

Ejemplo 10

Aproximar: $f(x) = e^x \cos x$ en torno a $x_0 = 0$ mediante un polinomio con $n = 4$. Esta función puede derivarse infinitamente (tiene derivadas de cualquier orden).

1. Para poder desarrollar la serie evaluamos el primer término:

$$f(0) = e^0 \cos 0 = 1$$

2. El segundo término:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x (\cos x - \operatorname{Sen} x) \\ f'(0) &= e^0 (\cos 0 - \operatorname{Sen} 0) = 1 \end{aligned}$$

3. El tercer término:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2e^x \operatorname{Sen} x \\ f''(0) &= -2e^0 \operatorname{Sen} 0 = 0 \end{aligned}$$

4. El cuarto término:

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -2e^x (\cos x - \operatorname{Sen} x) \\ f'''(0) &= -2e^0 (\cos 0 - \operatorname{Sen} 0) = -2 \end{aligned}$$

5. El quinto término:

$$\begin{aligned} f''''(x) &= -4e^x \cos x \\ f''''(0) &= -4e^0 \cos 0 = -4 \end{aligned}$$

Si se aplica el teorema:

$$p_4(x) = \frac{1}{0!} + \frac{1(x-0)}{1!} + \frac{0(x-0)^2}{2!} + \frac{-2(x-0)^3}{3!} + \frac{-4(x-0)^4}{4!} + R_n(x)$$

Se desarrolla y simplifica:

$$p_4(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + R_n(x)$$

Se evalúa el polinomio con $x = 1$ y se establecen sus errores con respecto al valor verdadero.

$$p_4(1) = 1 + 1 - \frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{6} = \frac{3}{2} = 1.5$$

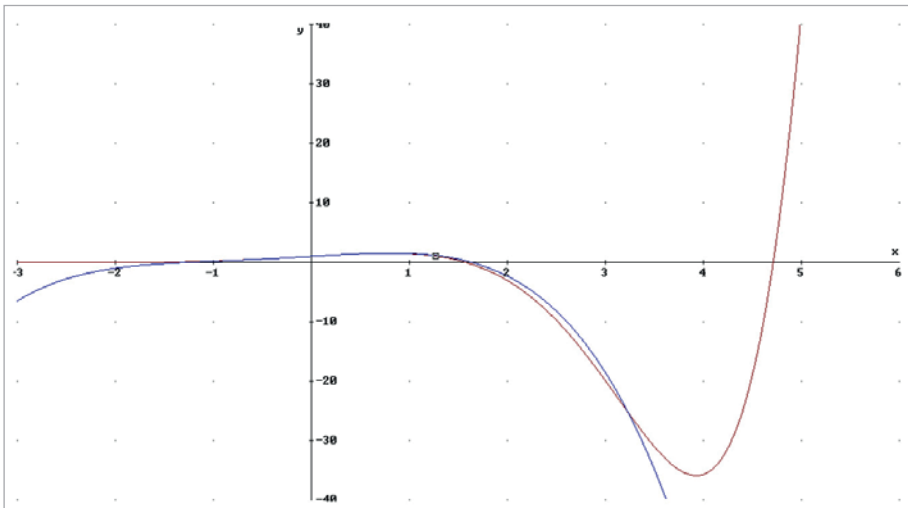
$$f(1) = e^1 \text{Cos}1 = 1.468693939$$

$$E_a = |1.5 - 1.468693939| = 0.01306061$$

$$E_r = \left| \frac{0.01306061}{1.468693939} \right| \times 100\% = 0,00878355 \times 100 \% = 0.878355 \%$$

En la figura 2 se puede observar cómo aumenta el error si se aleja del entorno $x_0 = 0$:

Figura 2. Comparativo del polinomio de grado cuatro con la función y su discrepancia alrededor de cero



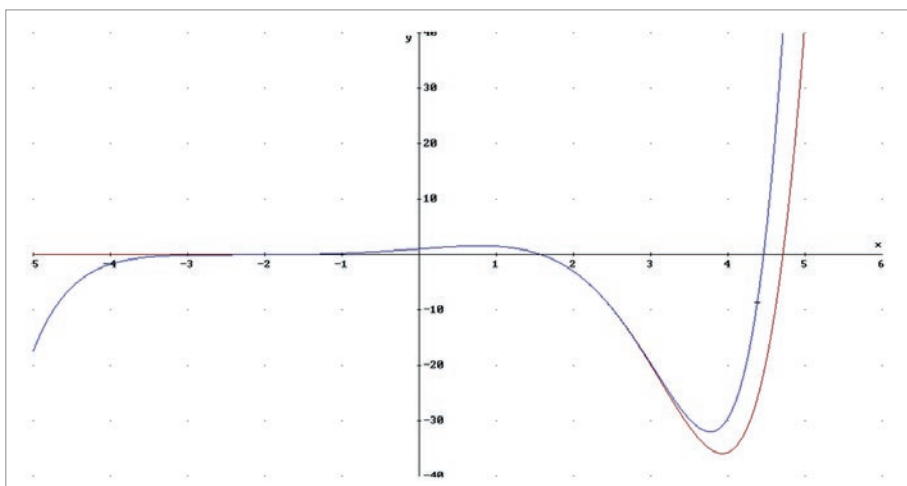
Nota. La función está dada en color azul y el polinomio de grado cuatro en café. Se observa claramente que las aproximaciones son relativamente buenas, entre -2 y 3.5, antes y después de este intervalo los errores son muy grandes. Figura de elaboración propia.

Esta aproximación puede mejorar mucho si se evalúan más términos en la serie, si tomamos un polinomio con $n = 10$ (se recomienda que el estudiante los desarrolle) quedaría:

$$p_{10}(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^7}{630} + \frac{x^8}{2520} + \frac{x^9}{22680} + R_n(x)$$

Nuevamente al hacer la gráfica (ver figura 3) en el mismo intervalo:

Figura 3. Comparativo del polinomio de grado nueve con la función y su discrepancia alrededor de cero



Nota. La mejora es significativa y se podrían obtener errores relativamente bajos en el intervalo -4 y 3.5 . Figura de elaboración propia.

Ejemplo 11

Aproxime la función:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

En torno a $X_0 = 2$, mediante un polinomio de Taylor grado tres. A partir de la serie de Taylor se desarrolla el polinomio hasta el grado deseado. Al truncar el polinomio en el cuarto término:

$$p_3(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!}$$

Donde:

$F(X_0)$ =función problema y reemplazada en X_0

$F'(X_0)$ =primera derivada de la función problema y reemplazada en X_0

$F''(X_0)$ =segunda derivada de la función problema y reemplazada en X_0

$F'''(X_0)$ =tercera derivada de la función problema y reemplazada en X_0

Se calculan las derivadas requeridas a partir de la función:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Primera derivada

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x * \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} * 2x}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x * \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} * 2x}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}) * (\sqrt{x^2+1}) - x^2}{\sqrt{x^2+1} * (x^2+1)}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Primera derivada de la función $f(x)$.

Segunda derivada

$$f''(x) = (f'(x))'$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \right)'$$

$$f''(x) = \left((x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \right)'$$

$$f''(x) = -\frac{3}{2} * (x^2 + 1)^{-\frac{5}{2}} * 2x$$

$$f''(x) = -3x * (x^2 + 1)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{3x}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

Segunda derivada de la función $f(x)$.

Tercera derivada de la función

$$f'''(x) = (f''(x))'$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{3x}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} \right)'$$

$$f'''(x) = -3 * \left(\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} \right)'$$

$$f'''(x) = -3 * \frac{(x^2 + 1)^{\frac{5}{2}} - x * \frac{5}{2} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} * 2x}{\left((x^2 + 1)^{\frac{5}{2}} \right)^2}$$

$$f'''(x) = -3 * \frac{(x^2 + 1)^{\frac{5}{2}} - 5x^2 (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2 + 1)^5}$$

$$f'''(x) = -3 * \frac{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} ((x^2 + 1) - 5x^2)}{(x^2 + 1)^5}$$

$$f'''(x) = -3 * \frac{(1 - 4x^2)}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} (x^2 + 1)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{12x^2 - 3}{(x^2 + 1)^{\frac{7}{2}}}$$

Tercera derivada de la función $f(x)$.

Se evalúa la función y sus derivadas (primera, segunda y tercera) en torno al valor dado por el ejercicio ($X_0 = 2$), y se obtienen los siguientes resultados:

	A	B
9	X_0	2
10	$F(X_0)$	$=B9/(RAIZ(B9^2+1))$
11	$F'(X_0)$	$=1/(B9^2+1)^{(3/2)}$
12		
13		
14	$F''(X_0)$	$=(3*B9)/((B9^2+1)^{(5/2)})$
15	$F'''(X_0)$	$=(12*B9^2-3)/((B9^2+1)^{(7/2)})$

Las derivadas evaluadas en x_0 :

	A	B
9	X_0	2
10	$F(X_0)$	0,8944272
11	$F'(X_0)$	0,0894427
12		
13		
14	$F''(X_0)$	-0,1073313
15	$F'''(X_0)$	0,1609969

Al construir la tabla de Taylor en un rango de valores en el cual se encuentre X_0 . En este caso el intervalo tomado de valores se encuentra en $X = -1$ y $X = 5$, con un paso de 0.1.

Se reemplaza la función y la serie de Taylor en cada uno de los valores que se encuentran en el intervalo seleccionado.

	H	I	J
3	X_i	$F(X_i)$	$P3(X_i)$
4		$=H4/(RAIZ(H4^2+1))$	

La función que se va a aproximar:

	H	I
3	X_i	$F(X_i)$
4	-1	-0,7071068

El polinomio de tercer grado que aproxima a la función es:

	H	I	J	K	L	M	N	O	P
3	Xi	F(Xi)	P3(Xi)	Ea	Er				
4	-1	-0,7071068	= $\$B\$10+\$B\$11*(H4-\$B\$9)+((\$B\$14)*(H4-\$B\$9)^2/FACT(2))+((\$B\$15)*(H4-\$B\$9)^3/FACT(3))$						

Al evaluar el polinomio en $x = -1$.

	J
3	P3(Xi)
4	-0,5813777

Se calcula el error absoluto restando la función evaluada con el polinomio obtenido de la siguiente manera:

$$Ea = |F(Xi) - P_3(Xi)|$$

	I	J	K
3	F(Xi)	P3(Xi)	Ea
4	-0,7071068	-0,5813777	=ABS(I4-J4)

El error absoluto entre la función y el polinomio es:

	I	J	K
3	F(Xi)	P3(Xi)	Ea
4	-0,7071068	-0,5813777	0,1257291

Con el error absoluto se obtiene el error relativo:

$$Er = \left| \frac{Ea}{F(Xi)} \right| * 100\%$$

	I	J	K	L
3	F(Xi)	P3(Xi)	Ea	Er
4	-0,7071068	-0,5813777	0,1257291	=ABS(K4/I4)*100

El error relativo en porcentaje:

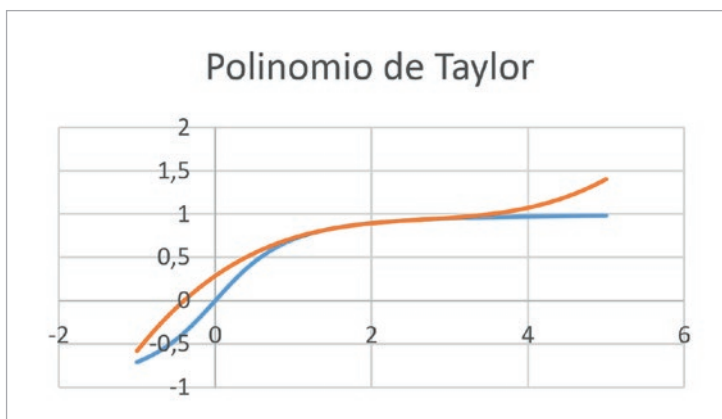
	I	J	K	L
3	F(Xi)	P3(Xi)	Ea	Er
4	-0,7071068	-0,5813777	0,1257291	17,780781

Ahora se tabula el polinomio, la función y los errores en X_i .

	H	I	J	K	L
34	2	0,8944272	0,8944272	0	0

Como se observa, se ajusta correctamente el polinomio a X_o , ya que los errores tanto absolutos como relativos son cero. Para visualizar el comportamiento en el intervalo, a continuación, se presenta la figura 4 de la serie de Taylor y el polinomio:

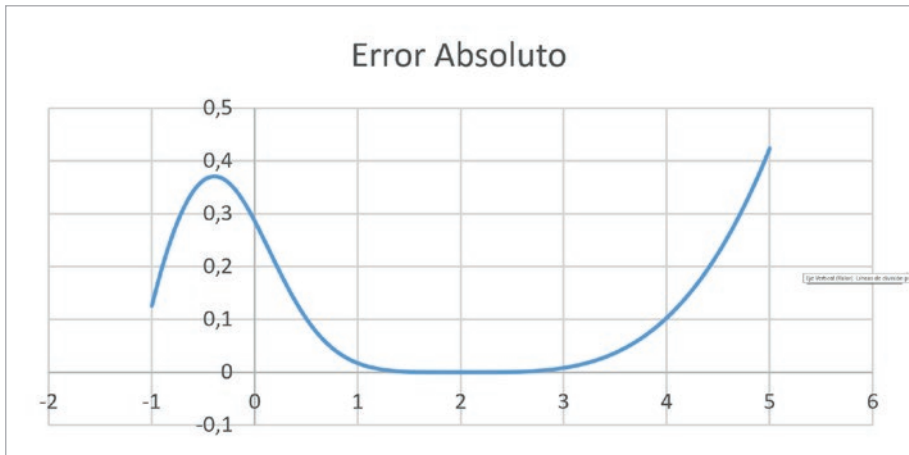
Figura 4. Comparativo del polinomio de grado tres con la función (función en color azul y $p_3(x)$ en naranja) y su discrepancia alrededor de $x = 2$



Nota. El polinomio de Taylor está representado por la línea naranja, mientras que la línea azul es la función evaluada; ambos valores se enfrentan con cada valor tomado y reemplazado en el polinomio y la función, respectivamente, $(F(X); X)$ y $(P_3(X_i); X_i)$. Figura de elaboración propia.

Es claro que cuando la función se aleja del punto construido (X_0), los errores empiezan a aumentar considerablemente. Se puede visualizar en la figura 5 el error absoluto.

Figura 5. Gráfico del error absoluto en torno a $x = 2$



Nota. Figura de elaboración propia.

El polinomio de tercer grado que se ajusta a la función es:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

En torno a 2 es:

$$P_n(3) = 0.894472 + 0.08944(X - 2) + \frac{-0.10733(X-2)^2}{2!} + \frac{0.1609(X-2)^3}{3!}$$

Ejemplo 12

Encuentre el polinomio de Taylor de segundo grado que aproxima de la siguiente función en torno a $X_0 = 0$

$$f(x) = x * \tan x$$

A partir de la ecuación general del polinomio de Taylor, se realiza el polinomio hasta el grado deseado. En este caso, como el polinomio requerido es de grado dos, al truncar la serie en el tercer término se tiene:

$$Pn(2) = F(X_0) + F'(X_0) * (X - X_0) + \frac{F''(X_0) * (X - X_0)^2}{2!}$$

Donde:

$F(x_0)$ =función problema y reemplazada en x_0

$F'(x_0)$ =primera derivada de la función problema y reemplazada en x_0

$F''(x_0)$ =segunda derivada de la función problema y reemplazada en x_0

Calculamos las derivadas requeridas a partir de la función problema:

$$f(x) = x * \tan(x)$$

Primera derivada

$$f'(x) = (x * \tan(x))$$

$$f'(x) = \tan(x) + x * \sec^2(x)$$

Segunda derivada

$$f''(x) = (f'(x))'$$

$$f''(x) = (\tan(x) + x * \sec^2(x))'$$

$$f''(x) = (\sec^2(x) + \sec^2(x) + 2 * x * \sec(x) * (\sec(x) * \tan(x)))$$

$$f''(x) = 2\sec^2(x) + 2\sec^2(x) * \tan(x)$$

$$f''(x) = 2\sec^2(x)(1 + \tan(x))$$

Se evalúa la función y sus derivadas (primera y segunda) en torno al valor dado por el ejercicio ($X_0 = 0$), y se obtienen los siguientes resultados:

	A	B
2	Xo	0
3	F(Xo)	=B2*TAN(B2)
4	F'(Xo)	=TAN(B2) + B2*(SEC(B2))^2
5	F''(Xo)	=2*(SEC(B2))^2 * (1+TAN(B2))

Al evaluar en la función y las derivadas:

	A	B
2	Xo	0
3	F(Xo)	0
4	F'(Xo)	0
5	F''(Xo)	2

Se construye la tabla de Taylor en un rango de valores en el cual se encuentre: X_0 . En este caso, el intervalo tomado de valores se encuentra en $X = -0.5$ y $X = 1$ con un paso de 0.1.

Se reemplaza la función y la serie de Taylor en cada uno de los valores que se encuentran en el intervalo seleccionado.

	G	H
2	Xi	F(Xi)
3	-0,5	=G3*TAN(G3)

La función evaluada en $x = -0.5$:

	G	H
2	X_i	$F(X_i)$
3	-0,5	0,27315124

El polinomio de grado dos que aproxima la función se calcula así:

	G	H	I	J	K	L	M
2	X_i	$F(X_i)$	$P_2(X_i)$	E_a	E_r		
3	-0,5	0,27315124	$=\$B\$3 + \$B\$4*(G3-\$B\$2) + (\$B\$5*(G3-\$B\$2)^2)/(FACT(2))$				

El polinomio evaluado en $x = -0.5$:

	G	H	I
2	X_i	$F(X_i)$	$P_2(X_i)$
3	-0,5	0,27315124	0,25

Se calcula el error absoluto restando la función evaluada con el polinomio, que fue obtenido de la siguiente manera:

$$E_a = |F(X_i) - P_2(X_i)|$$

	H	I	J
2	$F(X_i)$	$P_2(X_i)$	E_a
3	0,27315124	0,25	$=ABS(H3-I3)$

El error absoluto entre la función y la derivada es:

	H	I	J
2	$F(X_i)$	$P_2(X_i)$	E_a
3	0,27315124	0,25	0,02315124

Con el error absoluto se obtiene el error relativo de la siguiente forma:

$$Er = \left| \frac{Ea}{F(Xi)} \right| * 100\%$$

	H	I	J	K
2	F(Xi)	P2(Xi)	Ea	Er
3	0,27315124	0,25	0,02315124	=ABS(J3/H3)*100

El porcentaje error entre la función y el polinomio en $x = -0.5$:

	H	I	J	K
2	F(Xi)	P2(Xi)	Ea	Er
3	0,27315124	0,25	0,02315124	8,47561391

Como se puede observar, se ajusta correctamente el polinomio a X_0 , ya que los errores, tanto absolutos como relativos, son cero. Para visualizar el comportamiento en todo el intervalo a continuación se presenta la gráfica de la serie de Taylor y el polinomio.

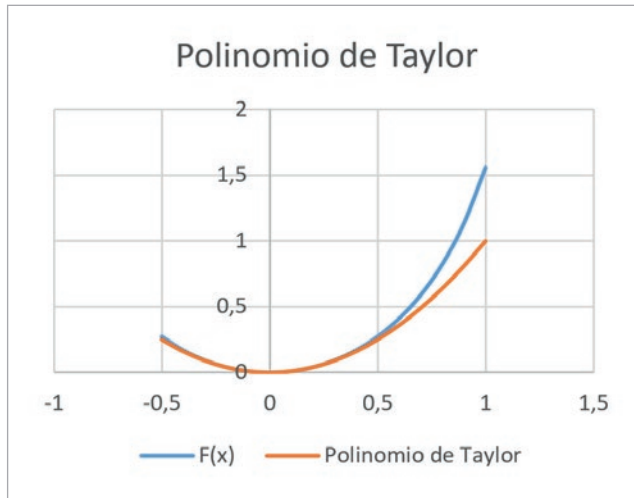
	G	H	I
2	X_i	F(Xi)	P2(Xi)
3	-0,5	0,27315124	0,25
4	-0,4	0,16911729	0,16
5	-0,3	0,09280087	0,09
6	-0,2	0,04054201	0,04
7	-0,1	0,01003347	0,01
8	0	0	0
9	0,1	0,01003347	0,01

El polinomio de segundo grado que se ajusta a la función $f(x) = x * \tan(x)$ en torno a cero es:

$$Pn(2) = \frac{2(X - 0)^2}{2!}$$

$$Pn(2) = X^2$$

Figura 6. Comparativo del polinomio de grado dos con la función y su discrepancia alrededor de cero

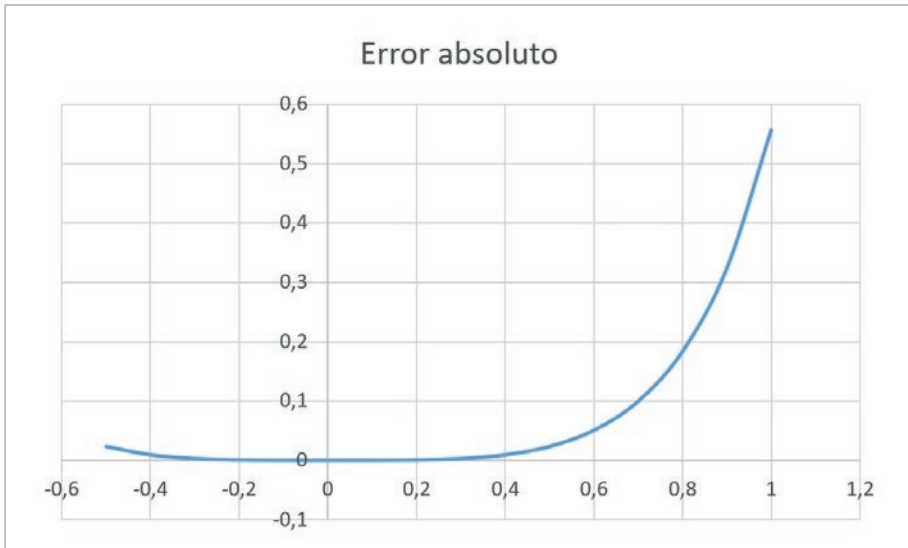


Nota. En la figura el polinomio de Taylor está representado por la línea naranja, mientras que la línea azul representa a la función evaluada. Figura de elaboración propia.

Como vemos en la figura 6, es claro que cuando la función se aleja en torno al punto de X_0 , los errores empiezan a aumentar considerablemente. Si calculamos los errores absolutos de la figura 7, mediante la siguiente tabla:

	G	H	I	J
2	X_i	$F(X_i)$	$P_2(X_i)$	E_a
3	-0,5	0,27315124	0,25	0,02315124
4	-0,4	0,16911729	0,16	0,00911729
5	-0,3	0,09280087	0,09	0,00280087
6	-0,2	0,04054201	0,04	0,00054201
7	-0,1	0,01003347	0,01	3,3467E-05
8	0	0	0	0
9	0,1	0,01003347	0,01	3,3467E-05
10	0,2	0,04054201	0,04	0,00054201

Figura 7. Error absoluto entre el polinomio y la función en torno a $x = 0$



Nota. Figura de elaboración propia.

Ejemplo 13

Encuentre el polinomio de Taylor de tercer grado que aproxima la siguiente función en torno a $X_0=3$:

$$f(x) = x * e^x$$

Se calculan las derivadas requeridas con la función problema:

$$f(x) = x * e^x$$

Primera derivada

$$f'(x) = e^x + xe^x$$

$$f'(x) = e^x(1 + x)$$

Segunda derivada

$$f''(x) = (f'(x))'$$

$$f''(x) = (e^x(1+x))'$$

$$f''(x) = e^x(1+x) + e^x$$

$$f''(x) = e^x + xe^x + e^x$$

$$f''(x) = 2e^x + xe^x$$

$$f''(x) = e^x(2+x)$$

Tercera derivada de la función

$$f'''(x) = (e^x(2+x))'$$

$$f'''(x) = e^x(2+x) + e^x$$

$$f'''(x) = 2e^x + xe^x + e^x$$

$$f'''(x) = 3e^x + xe^x$$

$$f'''(x) = e^x(3+x)$$

Se evalúa la función y sus derivadas (primera, segunda y tercera) en torno al valor dado por el ejercicio ($X_0 = 3$), y se obtienen los siguientes resultados:

	A	B
2	X ₀	3
3	F(X ₀)	=B2*EXP(B2)
4	F'(X ₀)	=EXP(B2)*(1+B2)
5	F''(X ₀)	=EXP(B2)*(2+B2)
6	F'''(X ₀)	=EXP(B2)*(3+B2)

Al evaluar la función y las derivadas en $X_0 = 3$:

	A	B
2	X_0	3
3	$F(X_0)$	60,256611
4	$F'(X_0)$	80,342148
5	$F''(X_0)$	100,42768
6	$F'''(X_0)$	120,51322

Al construir la tabla de Taylor en un rango de valores en el cual se encuentre X_0 . En este caso, el intervalo tomado de valores se encuentra en $X = 1$ y $X = 4$, y con un paso de 0.1.

La función evaluada en $x = 1$:

	F	G
2	X_i	$F(x_i)$
3	1	$=F3*EXP(F3)$

Al ejecutar el comando:

	F	G
2	X_i	$F(x_i)$
3	1	2,71828183

Para evaluar el polinomio de grado tres se tiene:

	F	G	H	I	J	K	L	M	N
2	X_i	$F(x_i)$	$P_3(x)$	Ea	Er				
3	1	2,71828183	$=\$B\$3 + \$B\$4*(F3-\$B\$2) + ((\$B\$5*(F3-\$B\$2)^2)/FACT(2)) + ((\$B\$6*(F3-\$B\$2)^3)/FACT(3))$						

Al ejecutar se obtiene:

	F	G	H
2	X_i	$F(x_i)$	$P_3(x)$
3	1	2,71828183	-60,2566108

Se calcula el error absoluto restando la función evaluada con el polinomio obtenido de la siguiente manera: $Ea = |F(X_i) - P_3(X_i)|$.

	G	H	I
2	F(xi)	P3(x)	Ea
3	2,71828183	-60,2566108	=ABS(G3-H3)

La diferencia entre la función y el polinomio en $x = 1$:

	G	H	I
2	F(xi)	P3(x)	Ea
3	2,71828183	-60,2566108	62,9748926

Con el error absoluto se obtiene el error relativo mediante:

$$Er = \left| \frac{Ea}{F(X_i)} \right| * 100\%$$

	G	H	I	J
2	F(xi)	P3(x)	Ea	Er
3	2,71828183	-60,2566108	62,9748926	=ABS(I3/G3)*100

El error porcentual como se observa es altísimo:

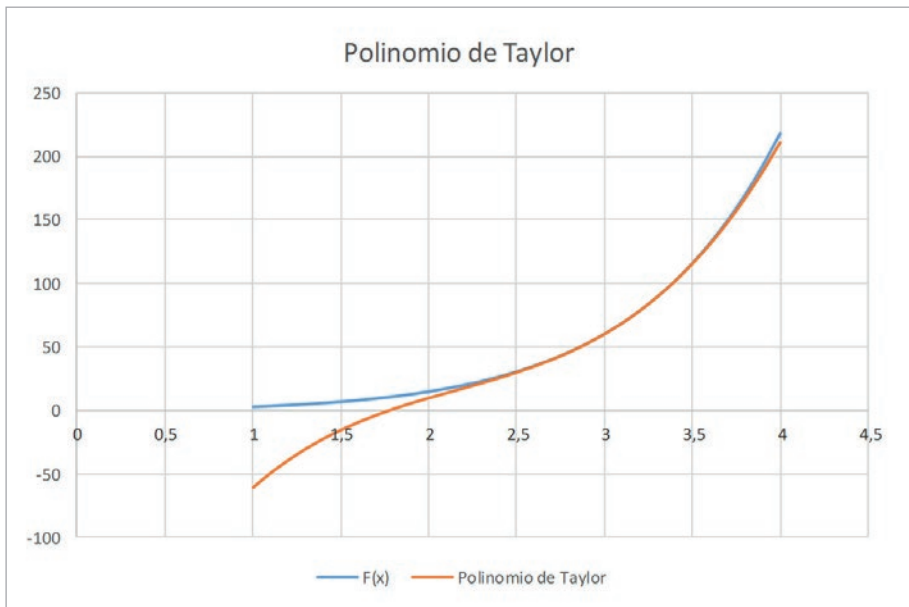
	G	H	I	J
2	F(xi)	P3(x)	Ea	Er
3	2,71828183	-60,2566108	62,9748926	2316,71683

Ahora, se observan el polinomio, la función y los errores en X_0 :

	F	G	H	I	J
23	3	60,2566108	60,2566108	0	0

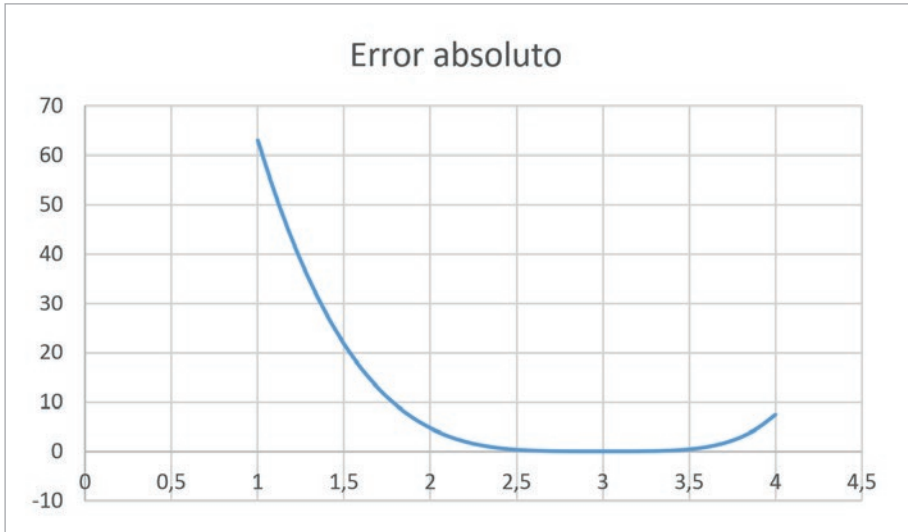
A decir verdad, se ajusta correctamente el polinomio a X_0 , ya que los errores, tanto absolutos como relativos, son cero. Para entender el comportamiento de todo el intervalo, a continuación, se presenta la figura 8 de la serie de Taylor.

Figura 8. Comparativo del polinomio de grado tres con la función y su discrepancia alrededor de tres



Nota. El polinomio de Taylor está representado por la línea naranja, mientras que la línea azul representa a la función evaluada. En ambos valores se enfrentan con cada valor tomado y reemplazado en el polinomio y la función respectivamente: $(F(X); X)$ y $(P_3(X); X)$. Figura de elaboración propia.

Es claro que cuando la función se aleja en torno al punto construido (X_0), los errores aumentan considerablemente. Lo podemos observar en la figura 9, en la que se evidencian los errores absolutos.

Figura 9. Error absoluto entre el polinomio y la función en torno a $x = 3$ 

Nota. Figura de elaboración propia.

El polinomio de tercer grado que ajusta la función $f(x) = x * e^x$ en torno a tres es:

$$P_n(3) = 60.2566 + 80.3421(X - 3) + \frac{100.4276(X-3)^2}{2!} + \frac{120.5132(X-3)^3}{3!}$$

Actividades propuestas

1. El polinomio de Taylor de cuarto grado que aproxima a la función $f(x) = x * \tan x$ en torno a $x_0 = 0$ es:

a. x^2

b. $\frac{x^4}{6} - x^2$

$$c. \frac{x^4}{6} + x^2$$

$$d. x^2 - \frac{x^4}{6}$$

2. Encuentre el error relativo para el polinomio de Taylor de tercer grado que aproxima a $f(x) = e^{x^2} * \text{Sen}x$ en torno a $X_0 = 0$ para $x = 1$.
3. La deflexión de la punta de un mástil en un bote de vela es:

$$y = \frac{F * L^4}{8 * E * I}$$

Donde F es una carga lateral uniforme (lb/ft); L , altura (ft), y E , módulo de elasticidad (lb/ft²) al momento de inercia (ft⁴)⁴. Estime el error en y con los siguientes datos:

$$F = 48 \text{ lb/ft} \quad \nabla_F = \pm 2 \text{ lb/ft}$$

$$L = 27 \text{ ft} \quad \nabla_L = \pm 1 \text{ ft}$$

$$E = 1.4 * 10^8 \text{ lb/ft}^2 \quad \nabla_E = \pm 0.12 * 10^8 \text{ lb/ft}^2$$

$$I = 0.05 \text{ ft}^4 \quad \nabla_I = \pm 0.0008 \text{ ft}^4$$

4 Ejercicio adaptado del ejemplo 4.6 de Chapra y Canale (2011, p. 95).

CAPÍTULO 2

Solución de ecuaciones no lineales de una variable

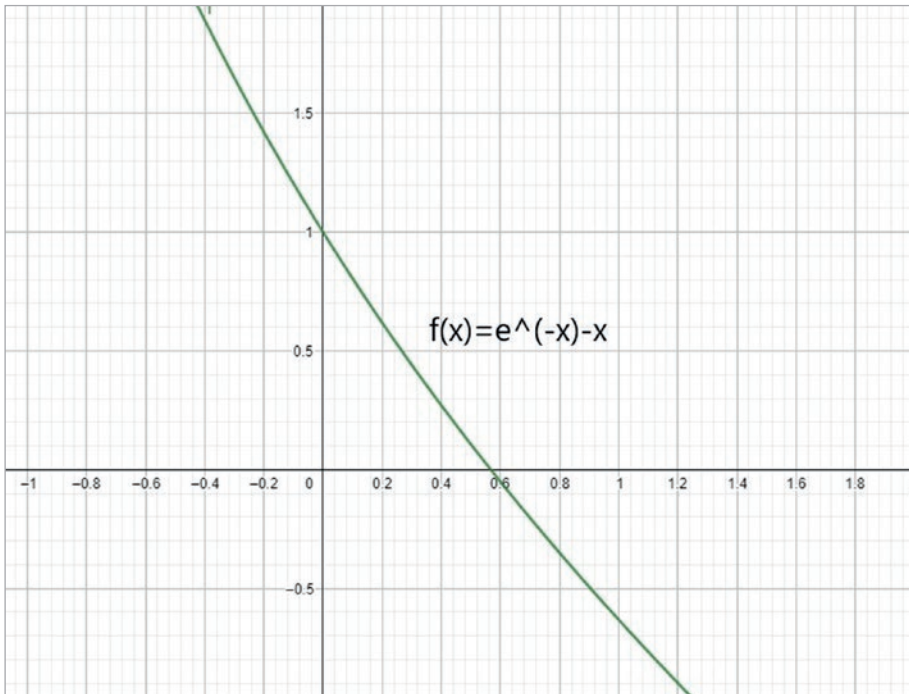
Antes de la era de las computadoras, los ingenieros contaban con tres formas de analizar el comportamiento de los sistemas: métodos analíticos (viabiles en una limitada clase de problemas, es decir, tienen un valor práctico limitado), soluciones gráficas (resultados no muy precisos) y reglas de cálculo y calculadoras (aproximaciones adecuadas, aunque cálculos lentos y tediosos). En la actualidad, la disponibilidad de computadoras personales y su asociación con los métodos numéricos son un vehículo eficiente para la solución de ecuaciones no lineales que no tengan soluciones analíticas. En esta unidad se trabajan problemas de aplicación en ingeniería donde se relacionen el valor de una variable que satisfaga una ecuación.

El objetivo de esta unidad es dar solución a ecuaciones no lineales que no se puedan realizar por métodos analíticos. Específicamente, aquí se trata de utilizar métodos de intervalo cerrado y abierto para la obtención de raíces, así como calcular raíces por medio de paquetes de cómputo (especialmente Excel) y resolver problemas de aplicación a la ingeniería y las ciencias.

Lección 1. Métodos de intervalo cerrado

En una función, cuando se está cercano a una raíz, los valores de las imágenes cambian de signo. A esta técnica se la denomina Métodos de intervalo cerrado, debido a que se necesita conocer dos valores para iniciar las iteraciones que conducirán a la raíz. Por ejemplo, la función $f(x) = e^{-x} - x$ se vería gráficamente en la figura 10 así:

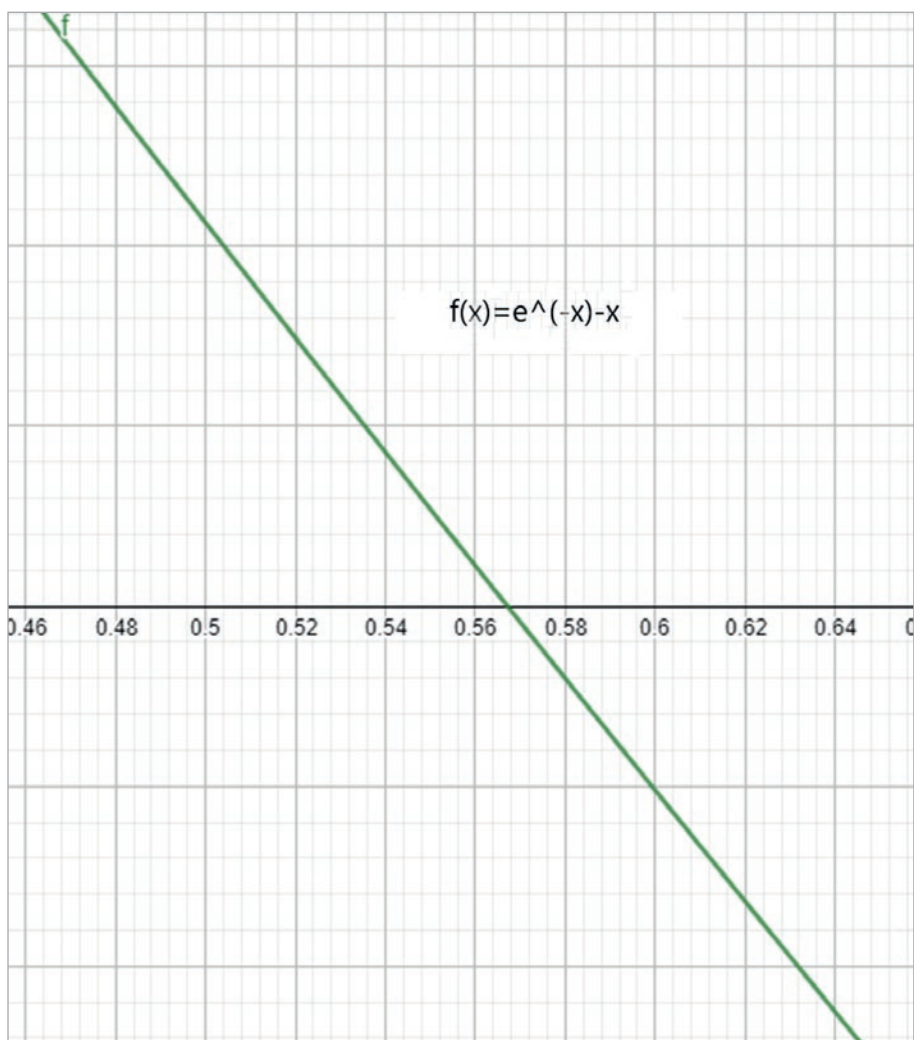
Figura 10. Gráfica de la ubicación de la raíz de la función



Nota. Como se observa en $x = 0.5$ la función toma un valor positivo y en $x = 0.6$ la imagen es negativa, lo que garantiza que la raíz estará entre estos valores. Figura de elaboración propia.

Si se realiza un acercamiento, en el intervalo se vería tal como se muestra en la figura 11:

Figura 11. Ubicación de la raíz al ampliar la escala



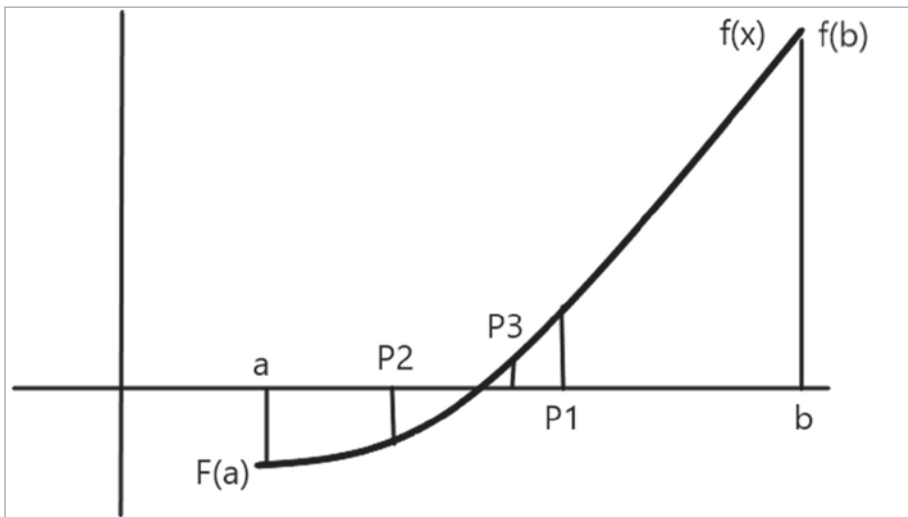
Nota. Ahora se puede garantizar que la raíz se encuentra entre $x = 0.56$ y $x = 0.58$. Figura de elaboración propia.

Método de bisección

Este método es un algoritmo que busca raíces dividiendo en dos un intervalo, del que previamente se ha establecido de manera gráfica o por tabulación que existe una raíz. También se conoce como método de corte binario, de partición de intervalos o de Bolzano.

Para una mejor comprensión del algoritmo se presenta el siguiente ejemplo: si $f(x)$ es una función continua, definida en un intervalo $[a, b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de signos diferentes, entonces se puede ubicar la raíz según se muestra en la figura 12:

Figura 12. Búsqueda de la raíz por bisección



Nota. Gráfico de corte binario. Figura de elaboración propia.

Para la primera iteración:

$$p_1 = \frac{a + b}{2}$$

Para proseguir con la segunda iteración debemos verificar qué signo toma $f(a) * f(p_1)$. Como se observa en la figura 12, $f(a)$ es negativo y $f(p_1)$ es positivo; por lo tanto: $f(a) * f(p_1) < 0$, de manera que la raíz quedó entre a y p_1 ; se desplazó el límite superior.

Para la segunda iteración:

$$p_2 = \frac{a + p_1}{2}$$

Para proseguir con la tercera iteración debemos verificar cuál signo toma $f(a) * f(p_2)$. Como se observa en la figura 12, $f(a)$ y $f(p_2)$ son negativos; por lo tanto: $f(a) * f(p_2) > 0$, así que la raíz quedó entre p_2 y p_1 ; se desplazó el límite inferior.

Para la tercera iteración:

$$p_3 = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

Para proseguir con la cuarta iteración debemos verificar qué signo toma $f(p_1) * f(p_3)$. Como se observa en la figura, $f(p_1)$ y $f(p_3)$ son positivos; por lo tanto: $f(p_1) * f(p_3) > 0$, así que la raíz quedó entre p_3 y p_2 ; se desplazó el límite inferior.

Así se terminan sucesivamente los cálculos dependiendo de la tolerancia que se calcula:

$$Tol = |p_n - p_{n-1}|$$

Ejemplo 1

Para hallar la raíz de $f(x) = e^{-x} - x$, con una tolerancia $\leq 1 \cdot 10^{-6}$

Tabla 1. Aplicación del algoritmo de bisección para la raíz de la función

a	b	p_n	f(a)	f(p_n)	f(a)*f(p_n)	Tolerancia
0.5	0.6	0.55	0.10653066	0.02694981	0.00287098	
0.55	0.6	0.575	0.02694981	-0.01229513	-0.00033135	0.025
0.55	0.575	0.5625	0.02694981	0.00728282	0.00019627	0.0125
0.5625	0.575	0.56875	0.007282825	-0.00251721	-1.8332E-05	0.00625
0.5625	0.56875	0.565625	0.007282825	0.00238003	1.7333E-05	0.003125
0.565625	0.56875	0.5671875	0.002380033	-6.9282E-05	-1.6489E-07	0.0015625
0.565625	0.5671875	0.56640625	0.002380033	0.0011552	2.7494E-06	0.00078125
0.56640625	0.5671875	0.56679688	0.001155202	0.00054292	6.2718E-07	0.00039062
0.56679688	0.5671875	0.56699219	0.000542917	0.00023681	1.2857E-07	0.00019531
0.56699219	0.5671875	0.56708984	0.000236806	8.3759E-05	1.9835E-08	9.7656E-05
0.56708984	0.5671875	0.56713867	8.37594E-05	7.2379E-06	6.0624E-10	4.8828E-05
0.56713867	0.5671875	0.56716309	7.23791E-06	-3.1022E-05	-2.2454E-10	2.4414E-05
0.56713867	0.56716309	0.56715088	7.23791E-06	-1.1892E-05	-8.6075E-11	1.2207E-05
0.56713867	0.56715088	0.56714478	7.23791E-06	-2.3272E-06	-1.6844E-11	6.1035E-06
0.56713867	0.56714478	0.56714172	7.23791E-06	2.4554E-06	1.7772E-11	3.0518E-06
0.56714172	0.56714478	0.56714325	2.45536E-06	6.4093E-08	1.5737E-13	1.5259E-06
0.56714325	0.56714478	0.56714401	6.40931E-08	-1.1315E-06	-7.2524E-14	7.6294E-07

Nota. El cálculo de la raíz según la tolerancia es 0.56714. Cinco decimales coinciden entre la iteración anterior y la demarcada en amarillo. Tabla de elaboración propia.

Los cálculos manuales para las tres primeras iteraciones son:

Primera fila

Para $a = 0.5$ y $b = 0.6$ hay que obtener las iteraciones gráficamente o tabulando hasta conseguir una imagen positiva y una negativa.

p_n

$$p_1 = \frac{0.5 + 0.6}{2} = 0.55$$

$f(a)$

$$f(a) = e^{-0.5} - 0.5 = 0.10653066$$

$f(b)$

$$f(b) = e^{-0.55} - 0.55 = 0.02694981$$

$f(a) * f(b)$

$$f(a) * f(b) = 0.10653066 * 0.02694981 = 0.00287098$$

Segunda fila

Como el producto de las imágenes dio positivo, se traslada el límite inferior, por lo tanto:

$$a = 0.55 \text{ y } b = 0.6$$

p_n

$$p_2 = \frac{0.55 + 0.6}{2} = 0.575$$

$f(a)$

$$f(a) = e^{-0.55} - 0.55 = 0.02694981$$

$f(b)$

$$f(b) = e^{-0.575} - 0.575 = -0.01229513$$

$f(a) * f(b)$

$$f(a) * f(b) = 0.02694981 * -0.01229513 = -0.00033135$$

Tolerancia

$$Tol = |p_2 - p_1| = |0.575 - 0.55| = 0.025$$

Tercera fila

Como el producto de las imágenes dio negativo se traslada el límite superior, por lo tanto:

$$a = 0.55 \text{ y } b = 0.575$$

$$p_n$$

$$p_2 = \frac{0.55 + 0.575}{2} = 0.5625$$

$$f(a)$$

$$f(a) = e^{-0.55} - 0.55 = 0.02694981$$

$$f(b)$$

$$f(b) = e^{-0.5625} - 0.5625 = 0.00728282$$

$$f(a) * f(b)$$

$$f(a) * f(b) = 0.02694981 * 0.00728282 = 0.00019627$$

Tolerancia

$$Tol = |p_3 - p_2| = |0.5625 - 0.575| = 0.0125$$

Y así sucesivamente hasta obtener la tolerancia pedida que, según la tabla 1, está en $p_{17} = 0.56714$, garantizando una precisión hasta de cinco decimales. Se recomienda desarrollar la tabla en Excel usando funciones lógicas y arrastrando las celdas programadas. Es de anotar que este algoritmo es muy lento, pero siempre converge en una solución. Según una tolerancia dada, el número de iteraciones necesarias para conseguir un resultado es:

$$|p_n - p_{n-1}| \leq \frac{(b-a)}{2^N}$$

Para el ejemplo desarrollado

$$1 * 10^{-6} \leq \frac{(0.6 - 0.5)}{2^N}$$

Al despejar:

$$2^N \leq \frac{(0.6 - 0.5)}{1 * 10^{-6}}$$

$$2^N \leq 1 * 10^5$$

$$\ln(2^N) \leq \ln(1 * 10^5)$$

$$N \ln 2 \leq 11.51292546$$

$$N \leq \frac{11.51292546}{\ln 2}$$

$$N \leq 16.60964046$$

Que al aproximar da 17 iteraciones (las mismas de la tabla).

Ejemplo 2

La manera de hallar la solución de la siguiente ecuación por el método de bisección y con una tolerancia $< 1 * 10^{-6}$ es:

$$x^{-x} + e^{\frac{x^2}{x^2-4}} + \ln(x^2 + 1) = 8.4$$

A partir de la función inicial dada en el ejercicio se iguala a cero. Después, al restar la constante numérica (8.4), se obtiene la función requerida para realizar el método de bisección.

$$0 = x^{-x} + e^{\frac{x^2}{x^2-4}} + \ln(x^2 + 1) - 8.4$$

Como función:

$$f(x) = x^{-x} + \frac{x}{e^{x^2-4}} + \ln(x^2 + 1) - 8.4$$

Para establecer dónde existe raíz se evalúan los puntos donde la función cambie de signo:

	I	J	K	L	M
13	1	=((I13^(-I13))+EXP(I13^(2)/(I13^(2)-4))+LN(I13^(2)+1))-8,4			
14	1,25	-6,17567148			
15	1,5	-6,4005609			
16	1,75	-6,58450459	Asintota		
17	2	#¡DIV/0!	No hay raíz entre estos valores		
18	2,25	110,860019			
19	2,5	9,76543503			
20	2,75	2,16386878	RAÍZ		
21	3	-0,01073041			

Como se observa, hay dos cambios de signo. El primero, entre $x = 1.75$ y $x = 2.25$; sin embargo, no se pueden tomar estos valores, ya que se presenta una asíntota en este intervalo, de tal manera que el método nunca podrá converger. En el segundo cambio de signo no se presenta asíntota; por lo tanto, se toman estos valores como el intervalo para iniciar la bisección. Se construye la tabla de bisección así:

$$P(n) = \frac{a+b}{2}$$

El cálculo de la primera iteración por el método de bisección es el siguiente:

	A	B	C
12	a	b	Pn
13	2,75	3	=(A13+B13)/2

Primera iteración:

	A	B	C
12	a	b	Pn
13	2,75	3	2,87500000000000

Se evalúa la función en el límite inferior.

	A	B	C	D	E	F	G	H
12	a	b	Pn	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia	
13	2,75	3	2,87500000000000	=A13^(-A13)+EXP(A13^2)/(A13^2-4))+LN(A13^2)+1)-8,4				

El resultado es:

	A	B	C	D
12	a	b	Pn	F(a)
13	2,75	3	2,87500000000000	2,16386878

Se evalúa la función en la primera iteración.

	C	D	E	F	G	H
12	Pn	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia	
13	2,87500000000000	2,16386878	=C13^(-C13)+EXP(C13^2)/(C13^2-4))+LN(C13^2)+1)-8,4			

El resultado es:

	C	D	E
12	Pn	F(a)	F(Pn)
13	2,87500000000000	2,16386878	0,8172958

Se obtiene el producto entre las funciones previamente calculadas.

	D	E	F
12	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)
13	2,16386878	0,8172958	=D13*E13

El producto entre las dos imágenes es:

	D	E	F
12	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)
13	2,16386878	0,8172958	1,76852087

Al ser la primera iteración, no hay cálculo de tolerancia. Los intervalos siguientes son programados teniendo en cuenta el producto de las funciones obtenidas anteriormente, de tal manera que:

$$\text{Si } F(a) * F(Pn) > 0; a = Pn, b = b$$

$$\text{Si } F(a) * F(Pn) < 0; a = a, b = Pn$$

Se utiliza un condicional *si*, el cual permite que la prueba lógica (producto), al cumplir con una determinada condición de restricción, tome la anterior iteración como un límite superior o inferior (dependiendo del signo del producto), o al no cumplir con la restricción, tome el mismo valor.

	A	B
14	=SI(F13>0;C13;A13)	

Condicional del límite superior:

	B
14	=SI(F13<0;C13;B13)

Los nuevos límites son:

	A	B
12	a	b
13	2,75	3
14	2,875	3

Nuevos intervalos

Realizado el procedimiento descrito antes y arrastrando a la fila siguiente, se encuentran la segunda iteración evaluada, la función evaluada en la segunda iteración y en el *nuevo* límite inferior.

	A	B	C	D	E	F
12	a	b	Pn	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)
13	2,75	3	2,87500000000000	2,16386878	0,8172958	1,76852087
14	2,875	3	2,93750000000000	0,8172958	0,35732394	0,29203936

Al tener dos iteraciones se procede a calcular la tolerancia de la siguiente manera:

$$\text{Tolerancia} = |P_n - P_{n-1}|$$

Donde P_n es la iteración actual y P_{n-1} es la anterior. Para este caso:

$$\text{Tolerancia} = |P_2 - P_1|$$

	C	D	E	F	G
12	Pn	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia
13	2,87500000000000	2,16386878	0,8172958	1,76852087	
14	2,93750000000000	0,8172958	0,35732394	0,29203936	=ABS(C14-C13)

La tolerancia entre la segunda iteración y la primera es:

Pn	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia
2,87500000000000	2,16386878	0,8172958	1,76852087	
2,93750000000000	0,8172958	0,35732394	0,29203936	0,0625

Con la programación completa se realizan todas las iteraciones necesarias hasta la tolerancia solicitada ($< 1 * 10^{-6}$).

	A	B	C	D	E	F	G
12	a	b	Pn	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia
13	2,75	3	2,87500000000000	2,16386878	0,8172958	1,76852087	
14	2,875	3	2,93750000000000	0,8172958	0,35732394	0,29203936	0,0625
15	2,9375	3	2,96875000000000	0,35732394	0,16342247	0,05839476	0,03125

La raíz según la tolerancia solicitada en la que deben coincidir por lo menos cinco decimales es:

	A	B	C	D	E	F	G
28	2,99797058	2,99797821	2,99797439575195	3,2146E-05	1,1847E-05	3,8085E-10	3,8147E-06
29	2,9979744	2,99797821	2,99797630310058	1,1847E-05	1,6982E-06	2,012E-11	1,9073E-06
30	2,9979763	2,99797821	2,99797725677490	1,6982E-06	-3,3764E-06	-5,7338E-12	9,5367E-07

El valor es $x = 2.99797$, que es acorde con la tolerancia pedida.

Ejemplo 3

La manera de determinar la raíz para $f(x) = -0.5x^2 + 2.5x + 4.5$ por el método de bisección con una tolerancia $< 1 * 10^{-6}$ es:

Se realiza la tabla de bisección tomando como valores iniciales 5 y 10 (especulando que en este intervalo existe raíz).

$$P(n) = \frac{a + b}{2}$$

El cálculo de la primera iteración por el método de bisección es el siguiente:

	A	B	C
115	a	b	Pn
116	5	10	$=(A116+B116)/2$

Resultado de la primera iteración:

	A	B	C
115	a	b	Pn
116	5	10	7,5

Se evalúa la función en el límite inferior.

	A	B	C	D
115	a	b	Pn	F(a)
116	5	10	7,5	4,5

Se evalúa la función en la primera iteración:

	C	D	E	F
115	Pn	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)
116	7,5	4,5	=(-0,5*C116^2) + 2,5*C116 + 4,5	

La función evaluada en la primera iteración:

	C	D	E
115	Pn	F(a)	F(Pn)
116	7,5	4,5	-4,875

Se obtiene el producto entre las funciones previamente reemplazadas:

	D	E	F
115	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)
116	4,5	-4,875	=D116*E116

El producto de las imágenes:

	D	E	F
115	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)
116	4,5	-4,875	-21,9375

Al ser la primera iteración, no hay cálculo de tolerancia.

Los intervalos siguientes son programados teniendo en cuenta el producto de las funciones obtenidas anteriormente, de tal manera que:

$$\text{Si } F(a) * F(P_n) > 0; a = P_n, b = b$$

$$\text{Si } F(a) * F(P_n) < 0; a = a, b = P_n$$

Se utiliza un condicional *si*, el cual permite que la prueba lógica (producto), al cumplir con una determinada condición de restricción, tome la anterior iteración, o al no cumplir, la rechace.

	A	B
117	=SI(F116>0;C116;A116)	

Condicional para el límite superior:

	B
117	=SI(F116<0;C116;B116)

Programación para determinar los nuevos intervalos:

	F
115	F(a)*F(Pn)
116	-21,9375

Los nuevos límites según el producto de las imágenes:

	A	B
115	a	b
116	5	10
117	5	7,5

Nuevos intervalos

Realizando nuevamente el procedimiento descrito y arrastrando a la fila siguiente, se encuentra la segunda iteración y el nuevo límite superior.

	A	B	C	D	E	F
115	a	b	Pn	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)
116	5	10	7,5	4,5	-4,875	-21,9375
117	5	7,5	6,25	4,5	0,59375	2,671875

Al tener dos iteraciones se procede a calcular la tolerancia de la siguiente manera:

$$\text{Tolerancia} = |P_n - P_{n-1}|$$

Donde P_n es la iteración actual y P_{n-1} es la anterior iteración. Para este caso:

$$\text{Tolerancia} = |P_2 - P_1|$$

	C	D	E	F	G
115	Pn	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia
116	7,5	4,5	-4,875	-21,9375	
117	6,25	4,5	0,59375	2,671875	=ABS(C117-C116)

La tolerancia entre la segunda y primera iteración:

	C	D	E	F	G
115	Pn	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia
116	7,5	4,5	-4,875	-21,9375	
117	6,25	4,5	0,59375	2,671875	1,25

Con la programación completa se realizan las iteraciones necesarias hasta la tolerancia pedida ($<1 * 10^{-6}$).

	A	B	C	D	E	F	G
115	a	b	Pn	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia
116		5	10	7,5	4,5	-4,875	-21,9375
117		5	7,5	6,25	4,5	0,59375	1,25
118		6,25	7,5	6,875	0,59375	-1,9453125	0,625

La raíz según la tolerancia solicitada:

	A	B	C	D	E	F	G
136	6,40512466	6,405129433	6,40512705	6,78112E-07	-8,6324E-06	-5,85376E-12	2,38419E-06
137	6,40512466	6,405127048	6,40512586	6,78112E-07	-3,9772E-06	-2,69696E-12	1,19209E-06
138	6,40512466	6,405125856	6,40512526	6,78112E-07	-1,6495E-06	-1,11856E-12	5,96046E-07

El valor es $x = 6.40512$, acorde con la tolerancia pedida.

Ejemplo 4

La velocidad hacia arriba de un cohete se calcula con la siguiente fórmula:

$$v = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt$$

Donde v es velocidad del cohete hacia arriba; u , velocidad con la que el combustible sale del cohete; m_0 , masa inicial del cohete en el $t = 0$; q , consumo de combustible, y g , 9.8m/s^2 . Si $u = 2200\text{m/s}$, $m_0 = 160000\text{ kg}$ y $q = 2680\text{kg/s}$, calcule el tiempo en que $v = 1000\text{m/s}$ por el método de bisección con una tolerancia $< 1 * 10^{-6}$.

La ecuación dada se iguala a 0:

$$v = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt$$

Después se resta la velocidad para obtener la función requerida y así realizar el método de bisección.

$$f(t) = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt - v$$

Igualando a 0:

$$0 = 2200 \ln\left(\frac{160\,000}{160\,000 - 2680t}\right) - 9.8t - 1000$$

Como función:

$$f(t) = 2200 \ln\left(\frac{160\,000}{160\,000 - 2680t}\right) - 9.8t - 1000$$

Al evaluar la función se busca el intervalo por el método gráfico para garantizar la convergencia donde se presente cambio de signo.

	E	F
44	u=	2200
45	mo	160000
46	q	2680
47	g	9,8
48	v	1000

Valores iniciales de la ecuación.

Se toman inicialmente los datos mostrados en la tabla y se reemplazan en la función (acercamiento por método gráfico).

	A	B	C	D	E
51					
52	t	f(t)			
53		0 = (\$F\$44*LN(\$F\$45/(\$F\$45-(\$F\$46*A53)))) - (\$F\$47*A53) - (\$F\$48)			
54	10	-694,6914743			
55	20	-298,4698757			
56	30	241,9513892			
57	40	1047,057774			
58	50	2507,57001			

Como se observa, se presenta cambio de signo entre $t = 20$ y $t = 30$; por lo tanto, se toman estos valores como el intervalo donde se encuentra la raíz. La primera iteración está dada por:

$$P(n) = \frac{a + b}{2}$$

El cálculo de la primera iteración por el método de bisección es el siguiente:

	H	I	J
52	a	b	P(n)
53	20	30	$=(H53+I53)/2$

	H	I	J
52	a	b	P(n)
53	20	30	25

Se evalúa la función en el límite inferior:

	H	I	J	K	L	M	N
52	a	b	P(n)	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia
53	20	30	25	$=(\$F\$44*\text{LN}(\$F\$45/(\$F\$45-(\$F\$46*H53))))-(\$F\$47*H53)-(\$F\$48)$			

El resultado evaluado en el límite superior $f(a)$ es:

	a	b	P(n)	F(a)
53	20	30	25	-298,469876

Se evalúa la función en la primera iteración:

	J	K	L	M	N	O
52	P(n)	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia	
53	25	-298,469876	=(\$F\$44*LN(\$F\$45/(\$F\$45-(\$F\$46*J53))))-(\$F\$47*J53)-(\$F\$48)			

La función evaluada en la primera iteración:

	J	K	L
52	P(n)	F(a)	F(Pn)
53	25	-298,469876	-51,33649142

Se realiza el producto entre las funciones evaluadas:

	K	L	M
52	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)
53	-298,469876	-51,33649142	=K53*L53

El producto de las imágenes:

	K	L	M
52	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)
53	-298,469876	-51,33649142	15322,39621

Como el producto de las dos funciones es mayor de cero, cambia el límite inferior. Las siguientes iteraciones se programan teniendo en cuenta el producto de las funciones obtenidas, de tal manera que:

$$\text{Si } F(a) * F(Pn) > 0; a = Pn, b = b$$

$$\text{Si } F(a) * F(Pn) < 0; a = a, b = Pn$$

Se utiliza un condicional *si*, el cual permite que la prueba lógica (producto), al cumplir con una determinada condición de restricción, tome la anterior iteración, o si no cumple con la restricción, la rechace.

	H	I
54	=SI(M53>0;J53;H53)	

El condicional para el límite superior:

	H	I
54	25	=SI(M53<0;J53;I53)

Instrucción para determinar los cambios de límites.

	M
52	F(a)*F(Pn)
53	15322,39621

Los nuevos límites para la segunda iteración:

	H	I
52	a	b
53	20	30
54	25	30

Nuevos límites

Realizando el procedimiento descrito anteriormente y arrastrando a la segunda fila se encuentra la segunda iteración, la función evaluada en la segunda iteración y el «nuevo» límite inferior.

	H	I	J	K	L	M
52	a	b	P(n)	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)
53	20	30	25	-298,469876	-51,33649142	15322,39621
54	25	30	27,5	-51,3364914	88,65727772	-4551,353577

Al tener dos iteraciones se calcula la tolerancia:

$$\text{Tolerancia} = |P_n - P_{n-1}|$$

Donde P_n es la iteración actual y P_{n-1} es la anterior iteración. Para este caso:

$$\text{Tolerancia} = |P_2 - P_1|$$

	J	K	L	M	N
52	P(n)	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia
53	25	-298,469876	-51,33649142	15322,39621	
54	27,5	-51,3364914	88,65727772	-4551,353577	=ABS(J54-J53)

La tolerancia entre la segunda iteración y la primera:

	J	K	L	M	N
52	P(n)	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia
53	25	-298,469876	-51,33649142	15322,39621	
54	27,5	-51,3364914	88,65727772	-4551,353577	2,5

Con la programación completa, se realizan todas las iteraciones necesarias hasta la tolerancia pedida ($<1 * 10^{-6}$).

	H	I	J	K	L	M	N
52	a	b	P(n)	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia
53	20	30	25	-298,469876	-51,33649142	15322,39621	
54	25	30	27,5	-51,3364914	88,65727772	-4551,353577	2,5
55	25	27,5	26,25	-51,3364914	17,1233534	-879,052885	1,25

	H	I	J	K	L	M	N
74	25,9423923	25,94239712	25,9423947	-3,5045E-05	9,69622E-05	-3,39799E-09	2,3842E-06
75	25,9423923	25,94239473	25,9423935	-3,5045E-05	3,09588E-05	-1,08494E-09	1,1921E-06
76	25,9423923	25,94239354	25,9423929	-3,5045E-05	-2,04286E-06	7,15911E-11	5,9605E-07

El tiempo en el que $v = 1000$ m/s es aproximadamente 25.94239 s, con la tolerancia solicitada se aseguran cinco decimales.

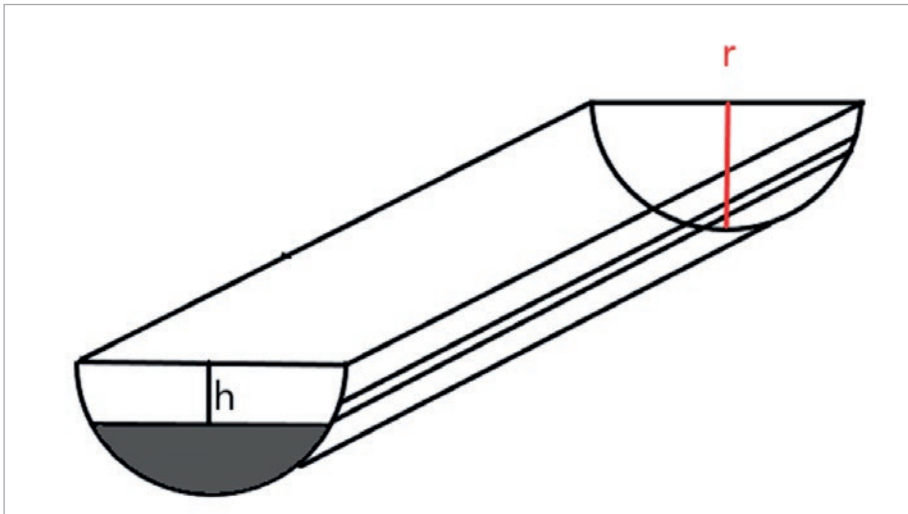
Ejemplo 5¹

Un recipiente de longitud L posee una sección transversal de medio círculo de radio r , y la altura h será la distancia entre el remate superior y la columna de agua. El volumen de agua está dado por un abrevadero de longitud L tiene una sección transversal en forma de semicírculo con radio r (ver figura 5). Cuando se llena de agua hasta una distancia h de la parte superior, el volumen de agua está dado por:

$$V = L \left[0.5 * \pi * r^2 - r^2 \text{sen}^{-1} \left(\frac{h}{r} \right) - h(r^2 - h^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Si se supone que $L = 10$ ft, $r = 1$ pie, y que $V = 12,4$ ft³. La manera de determinar por el método de bisección la profundidad de agua en el abrevadero (ver figura 13) con una tolerancia $< 1 * 10^{-6}$ es la siguiente:

Figura 13. Abrevadero



Nota. Gráfico del problema. Figura de elaboración propia.

¹ Este ejemplo está basado en ejercicio 17, capítulo 2, de Burden

A partir de la ecuación inicial dada se despeja en función de la profundidad y se iguala a cero.

$$V = L \left[0.5 * \pi * r^2 - r^2 \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{h}{r} \right) - h(r^2 - h^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Al restar el volumen se obtiene la función requerida para realizar el método de bisección.

$$f(h) = L[0.5 * \pi * r^2 - r^2 \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{h}{r} \right) - h(r^2 - h^2)^{\frac{1}{2}} - V]$$

Al reemplazar los datos del problema en la función anteriormente mostrada, se obtiene:

$$f(h) = 10[0.5 * \pi * 1 - \operatorname{Sen}^{-1} \left(\frac{h}{1} \right) - h(1^2 - h^2)^{\frac{1}{2}} - 12.4]$$

Evaluando en la función tomamos como intervalo de partida los valores en donde se presenta cambio de signo.

	F	G
81	L	10
82	r	1
83	V	12,4
84	Kte	0,5

Valores iniciales de la ecuación.

Se toman los datos mostrados en la tabla y se reemplazan en la función acercamiento por método gráfico.

91	h	f(h)							
92	0	=SG\$81*((SG\$84*PI()*SG\$82^2))- (SG\$82^2)*ASENO(A92/SG\$82)-(A92*(SG\$82-(A92^2))^(1/2))-SG\$83							
93	0,1	1,311301619							
94	0,2	-0,665207734							
95	0,3	-2,600780876							
96	0,4	-4,473265749							
97	0,5	-6,258151507							
98	0,6	-7,92704782							
99	0,7	-9,445011598							
100	0,8	-10,76498891							
101	0,9	-11,81274093							
102	1	-12,4							

Como se observa, hay cambio de signo entre $h = 0.1$ y $h = 0.2$. Se toman estos valores como los límites para iniciar la bisección. Se construye la tabla de bisección con los intervalos establecidos mediante la ecuación:

$$P(n) = \frac{a + b}{2}$$

La primera iteración:

	L	M	N	
92	a	b	Pn	F
93	0,1	0,2	=(L93+M93)/2	

Resultado de la primera bisección:

	L	M	N
92	a	b	Pn
93	0,1	0,2	0,15

Se evalúa la función en el límite inferior:

	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
92	a	b	Pn	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia				
93	0,1	0,2	0,15	=SG\$81*((SG\$84*PI()*SG\$82^2))- (SG\$82^2)*ASENO(L93/SG\$82)-(L93*(SG\$82-(L93^2))^(1/2))-SG\$83							

La función evaluada en el límite inferior:

	L	M	N	O
92	a	b	Pn	F(a)
93	0,1	0,2	0,15	1,31130162

Se evalúa la función en la primera iteración:

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
92	Pn	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia					
93	0,15	1,31130162	=SG\$81*((SG\$84*PI())*SG\$82^(2))- (SG\$82^(2)*ASENO(N93/SG\$82))-(N93*(SG\$82-(N93^(2)))^(1/2))-SG\$83							

El resultado es:

	Pn	F(a)	F(Pn)
93	0,15	1,31130162	0,31925155

Se obtiene el producto entre las funciones:

	O	P	Q
92	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)
93	1,31130162	0,31925155	=O93*P93

El producto de las imágenes es:

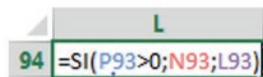
	O	P	Q
92	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)
93	1,31130162	0,31925155	0,41863507

Al ser la primera iteración no hay cálculo de tolerancia. Los límites posteriores se programan teniendo en cuenta el producto de las funciones. De tal manera que:

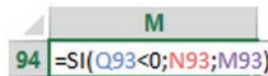
$$\text{Si } F(a) * F(P_n) > 0; a = P_n, b = b$$

$$\text{Si } F(a) * F(P_n) < 0; a = a, b = P_n$$

Se utiliza un condicional *si*, el cual permite que la prueba lógica (producto) cumpla con una determinada condición de restricción y tome la anterior iteración, o si no cumple con la restricción, la rechace.



El condicional del límite superior:



Programación para determinar los nuevos límites

	L	M
94	0,15	0,2

Nuevos intervalos

Una vez realizado el procedimiento descrito anteriormente y arrastrando a la siguiente fila, se encuentra la segunda iteración:

	L	M	N	O	P	Q
92	a	b	P _n	F(a)	F(P _n)	F(a)*F(P _n)
93	0,1	0,2	0,15	1,31130162	0,31925155	0,41863507
94	0,15	0,2	0,175	0,31925155	-0,17408917	-0,05557824

Al tener dos iteraciones se procede a calcular la tolerancia de la siguiente manera:

$$\text{Tolerancia} = |P_n - P_{n-1}|$$

Donde P_n es la iteración actual y P_{n-1} es la anterior. Para este caso:

$$\text{Tolerancia} = |P_2 - P_1|$$

	N	O	P	Q	R
92	Pn	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia
93	0,15	1,31130162	0,31925155	0,41863507	
94	0,175	0,31925155	-0,17408917	-0,05557824	=ABS(N94-N93)

El resultado de la tolerancia entre la segunda y primera iteración:

	N	O	P	Q	R
92	Pn	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia
93	0,15	1,31130162	0,31925155	0,41863507	
94	0,175	0,31925155	-0,17408917	-0,05557824	0,025

Con la programación completa, se realizan todas las iteraciones necesarias hasta la tolerancia pedida ($<1 \cdot 10^{-6}$).

	L	M	N	O	P	Q	R
92	a	b	Pn	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia
93	0,1	0,2	0,15	1,31130162	0,31925155	0,41863507	
94	0,15	0,2	0,175	0,31925155	-0,17408917	-0,05557824	0,025
95	0,15	0,175	0,1625	0,31925155	0,07232385	0,0230895	0,0125

La raíz según la tolerancia solicitada:

	L	M	N	O	P	Q	R
107	0,166162109	0,166168213	0,16616516	7,7414E-05	1,7228E-05	1,3337E-09	3,0518E-06
108	0,166165161	0,166168213	0,16616669	1,7228E-05	-1,2866E-05	-2,2165E-10	1,5259E-06
109	0,166165161	0,166166687	0,16616592	1,7228E-05	2,181E-06	3,7573E-11	7,6294E-07

La profundidad en el abrevadero es de 0.16616 m con la tolerancia pedida.

Ejemplo 6

La velocidad v de un paracaidista que cae está dada por:

$$v = \frac{g m}{c} \left(1 - e^{-\left(\frac{c}{m}\right)t} \right)$$

Donde $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Si se tiene que un paracaidista sufre un coeficiente de arrastre de $c = 14 \text{ kg/s}$, determinar la masa m de tal forma que al transcurrir siete segundos la velocidad sea de 35 m/s . Para un paracaidista con coeficiente de arrastre de $c = 14 \text{ kg/s}$, calcular la masa m de modo que la velocidad sea $v = 35 \text{ m/s}$ en $t = 7 \text{ s}$. Al restar la velocidad se obtiene la función requerida para realizar el método de bisección.

$$F(m) = \frac{gm}{c} \left(1 - e^{\left(\frac{c}{m}\right)t} \right) - v$$

Al sustituir los datos del problema en la función anteriormente mostrada, se obtiene:

$$F(m) = 0.7 m \left(1 - e^{-\frac{98}{m}} \right)$$

Los límites entre los que se encuentra la raíz por el método gráfico son los valores donde se presenta cambio de signo para iniciar las iteraciones.

Valores iniciales en la función

Para iniciar se toman los datos mostrados en la tabla y se reemplazan en la función (acercamiento por método gráfico).

	A	B	C	D
13	m	f(x)		
14	10	=(\$M\$6*A14)*(1-EXP(\$M\$7/A14)) - \$M\$4		
15	20	-21,10425216		
16	30	-14,80079986		
17	40	-9,416220422		
18	50	-4,930044732		
19	60	-1,201657639		
20	61	-0,864635236		
21	62	-0,533553819		
22	63	-0,208279072		
23	64	0,111320526		
24	65	0,42537367		
25	66	0,734006224		
26	70	1,916748767		

Como se observa, se presenta cambio de signo entre $m = 63$ y $m = 64$. Se toman estos valores como los intervalos para iniciar la bisección.

Se construye la tabla de bisección con los valores establecidos y se evalúa la primera iteración con la ecuación:

$$P(n) = \frac{a + b}{2}$$

El cálculo de la primera iteración por el método de bisección es el siguiente:

	E	F	G
14	a	b	Pn
15	63	64	=(E15+F15)/2

La primera iteración:

	E	F	G
14	a	b	Pn
15		63	64
			63,5

Se reemplaza en la primera iteración en el límite inferior con la función:

	E	F	G	H	I	J
14	a	b	Pn	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)
15		63	64	63,5	$=($M$6*E15)*(1-EXP($M$7/E15)) - M4$	

La función evaluada en el límite inferior:

	E	F	G	H	I
14	a	b	Pn	F(a)	F(Pn)
15		63	64	63,5	-0,20827907
					-0,047777989

Se reemplaza la función en la primera iteración:

	G	H	I	J	K
14	Pn	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia
15		63,5	-0,20827907	$=($M$6*G15)*(1-(EXP($M$7/G15))) - M4$	

La función evaluada en la primera iteración:

	G	H	I
14	Pn	F(a)	F(Pn)
15		63,5	-0,20827907
			-0,047777989

Se obtiene el producto entre las funciones previamente reemplazadas:

	H	I	J
14	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)
15	-0,20827907	-0,047777989	=H15*I15

El producto de las imágenes:

	H	I	J
14	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)
15	-0,20827907	-0,047777989	0,00995116

Al ser la primera iteración no hay cálculo de tolerancia. Los intervalos siguientes se programan teniendo en cuenta el producto de las funciones obtenidas, de tal manera que:

$$\text{Si } F(a) * F(Pn) > 0; a = Pn, b = b$$

$$\text{Si } F(a) * F(Pn) < 0; a = a, b = Pn$$

Se utiliza un condicional *si*, el cual permite que la prueba lógica (producto), al cumplir con una determinada condición de restricción, tome la anterior iteración, o si no cumple con la restricción, mantenga el mismo límite.

	E	F
16	=SI(J15>0;G15;E15)	

El condicional para el límite superior:

	F
16	=SI(J15<0;G15;F15)

Límites en la segunda iteración:

	E	F
14	a	b
15	63	64
16	63,5	64

Nuevos intervalos

Se realiza el procedimiento descrito anteriormente y arrastrando a la siguiente fila se encuentran la segunda iteración y la función evaluada en la segunda iteración y en el nuevo límite inferior.

	E	F	G	H	I	J
14	a	b	P _n	F(a)	F(P _n)	F(a)*F(P _n)
15	63	64	63,5	-0,20827907	-0,047777989	0,00995116
16	63,5	64	63,75	-0,04777799	0,031945585	-0,0015263

Al tener dos iteraciones se procede a calcular la tolerancia de la siguiente manera:

$$\text{Tolerancia} = |P_n - P_{n-1}|$$

Donde P_n es la iteración actual y P_{n-1} es la anterior iteración. Para este caso:

$$\text{Tolerancia} = |P_2 - P_1|$$

	G	H	I	J	K
14	P _n	F(a)	F(P _n)	F(a)*F(P _n)	Tolerancia
15	63,5	-0,20827907	-0,047777989	0,00995116	
16	63,75	-0,04777799	0,031945585	-0,0015263	=ABS(G16-G15)

Tolerancia entre la segunda y primera iteración:

	G	H	I	J	K
14	Pn	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia
15	63,5	-0,20827907	-0,047777989	0,00995116	
16	63,75	-0,04777799	0,031945585	-0,0015263	=ABS(G16-G15)

Con la programación completa se realizan todas las iteraciones necesarias hasta la tolerancia solicitada ($<1*10^{-6}$).

	E	F	G	H	I	J	K
14	a	b	Pn	F(a)	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia
15	63	64	63,5	-0,20827907	-0,047777989	0,00995116	
16	63,5	64	63,75	-0,04777799	0,031945585	-0,0015263	0,25
17	63,5	63,75	63,625	-0,04777799	-0,007872497	0,00037613	0,125

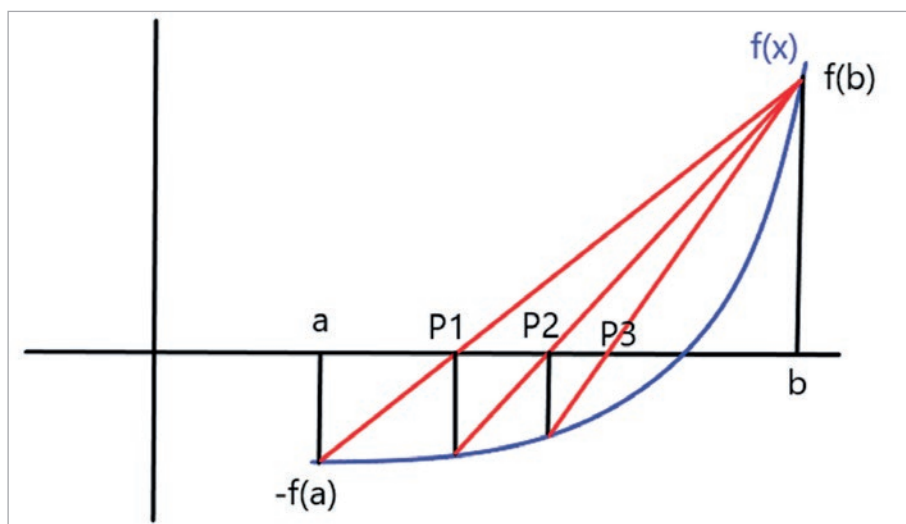
	E	F	G	H	I	J	K
32	63,6496887	63,64969635	63,64969254	-1,118E-06	9,79216E-08	-1,0948E-13	3,8147E-06
33	63,6496887	63,64969254	63,64969063	-1,118E-06	-5,10057E-07	5,7026E-13	1,90735E-06
34	63,6496906	63,64969254	63,64969158	-5,1006E-07	-2,06068E-07	1,0511E-13	9,53674E-07

La masa del paracaidista es de 63.64969 kg, con la tolerancia pedida.

Método de la regla falsa o *regula falsi*

Este algoritmo también es de intervalo cerrado, pero tiene la característica de converger más rápidamente, ya que se basa en una semejanza de triángulos, consistente en unir mediante una recta las imágenes donde se encuentra la raíz, de tal forma que el corte de esta recta con el eje x se considera la primera iteración (raíz falsa), los cortes sucesivos de las próximas reglas falsas se acercan a la raíz de la función y la intersección de esta línea recta con el eje x representa una mejor aproximación. El acercamiento a la raíz se muestra en la figura 14:

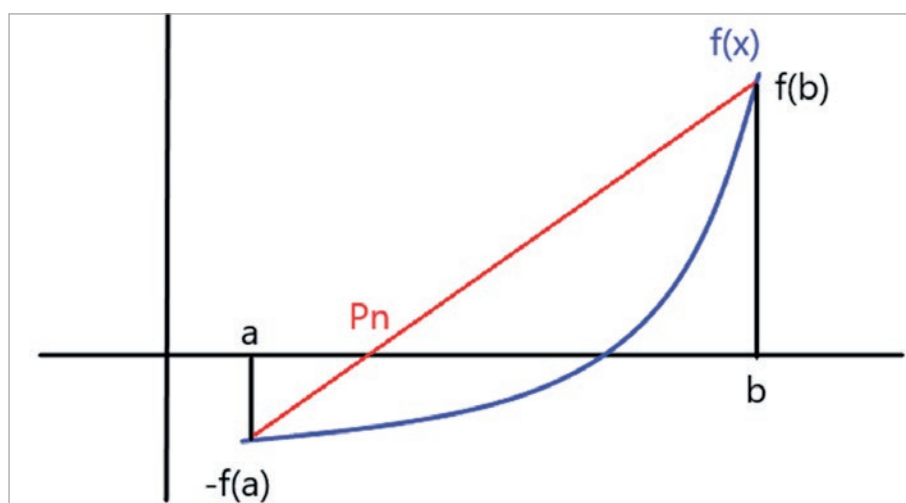
Figura 14. Búsqueda de la raíz por regla falsi



Nota. El hecho de que se reemplace la función por una recta da una falsa posición de la raíz, de ahí el nombre en latín de *regula falsi*. Figura de elaboración propia.

Demostración del algoritmo

Figura 15. Determinación del corte de la raíz falsa.



Nota. Figura de elaboración propia.

Por semejanza de triángulos se puede establecer:

$$\frac{(p_n - a)}{-f(a)} = \frac{(b - p_n)}{f(b)}$$

Como el objetivo es despejar p_n , entonces:

$$\begin{aligned} -f(a) * (b - p_n) &= f(b) * (p_n - a) \\ -f(a) * b + f(a) * p_n &= f(b) * p_n - f(b) * a \\ f(a) * p_n - f(b) * p_n &= f(a) * b - f(b) * a \\ p_n (f(a) - f(b)) &= f(a) * b - f(b) * a \end{aligned}$$

$$p_n = \frac{f(a) * b - f(b) * a}{f(a) - f(b)}$$

Este es el algoritmo buscado. Hay que tener en cuenta que los cambios en a y b son los mismos que en el algoritmo de bisección (ver figura 15).

Ejemplo 7

La forma de hallar la raíz del mismo ejemplo de bisección para:

$$f(x) = e^{-x} - x$$

Con una tolerancia menor a $1 * 10^{-6}$, por el método de la *regula falsi* es:

Se elabora la tabla 2 en la cual se tienen en cuenta los elementos del algoritmo:

Tabla 2. Aplicación del algoritmo de regla falsa para la raíz de la función

a	b	f(a)	f(b)	f(a)*f(b)	p_n	Tolerancia
0.5	0.6	0.10653066	-0.05118836	-0.00545313	0.56754458	
0.5	0.56754458	0.10653066	-0.00062884	-6.6991E-05	0.56714822	0.00039637
0.5	0.56714822	0.10653066	-7.7182E-06	-8.2222E-07	0.56714335	4.8645E-06
0.5	0.56714335	0.10653066	-9.4729E-08	-1.0092E-08	0.56714329	5.9705E-08

Nota. El cálculo de la raíz según la tolerancia es 0.56714 que coincide entre la iteración anterior y la demarcada en amarillo con cinco decimales. Tabla de elaboración propia.

El desarrollo manual de las dos primeras filas es:

Primera fila

Para $a = 0.5$ y $b = 0.6$, se tabulan en la función para conseguir la primera iteración p_1 .

$$f(a)$$

$$f(a) = e^{-0.5} - 0.5 = 0.10653066$$

$$f(b)$$

$$f(b) = e^{-0.6} - 0.6 = -0.05118836$$

$$f(a) * f(b)$$

$$f(a) * f(b) = 0.10653066 * -0.05118836 = -0.00545313$$

$$p_1 = \frac{0.10653066 * 0.6 - (-0.05118836) * 0.5}{0.10653066 - (-0.05118836)} = 0.56754458$$

Segunda fila

Como el producto de las imágenes da negativo, se traslada el límite superior, por lo tanto:

$$a = 0.5 \text{ y } b = 0.56754458$$

$$f(a)$$

$$f(a) = e^{-0.5} - 0.5 = 0.10653066$$

$$f(b)$$

$$f(b) = e^{-0.56754458} - 0.56754458 = -0.000062884$$

$$f(a) * f(b)$$

$$f(a) * f(b) = 0.10653066 * -0.000062884 = -6.6991 * 10^{-5}$$

$$p_2 = \frac{0.10653066 * 0.6 - (-0.000062884) * 0.5}{0.10653066 - (-0.000062884)} = 0.56714822$$

Tolerancia

$$Tol = |p_2 - p_1| = |0.56714822 - 0.56754458| = 0.00039637$$

Como se observa, la convergencia para la tolerancia solicitada se consigue solamente con cuatro iteraciones $tol \leq 1 * 10^{-6}$, más rápido que con el algoritmo de bisección.

Ejemplo 8

La manera de determinar la raíz para $f(x) = 5x^3 - 5x^2 + 6x - 2$, por el método de la *regula falsi* con una tolerancia $< 1 * 10^{-6}$ y empleando como valores iniciales $x_{i-1} = 0$ y $x_i = 1$, es:

Primero se hace la tabla de *regula falsi*, después, ya que se conocen los límites superior e inferior, se calculan las iteraciones con el algoritmo:

$$P_n = \frac{a * F(b) - b * F(a)}{F(b) - F(a)}$$

	F	G	H	I	
178	a	b	F(a)	F(b)	Pn
179	0	1	=5*(F179)^3 - 5*(F179)^2 + 6*(F179) - 2		

La función evaluada en el límite inferior:

	F	G	H
178	a	b	F(a)
179	0	1	-2

Función evaluada en el límite inferior

	G	H	I	J	K
178	b	F(a)	F(b)	Pn	F(Pn)
179	1	-2	=5*(G179)^3 - 5*(G179)^2 + 6*(G179) - 2		

Al evaluar la función en el límite superior:

	G	H	I
178	b	F(a)	F(b)
179	1	-2	4

Se calcula la iteración o se calcula la iteración en este caso ($P_{1(x)}$).

	F	G	H	I	J	K	L
178	a	b	F(a)	F(b)	Pn	F(Pn)	F(a)*F(Pn)
179	0	1	-2	4	=((F179*H179) - (G179*H179))/(H179-H179)		

El resultado es:

	F	G	H	I	J
178	a	b	F(a)	F(b)	Pn
179	0	1	-2	4	0,333333333

También se evalúa en la función el valor numérico de la iteración calculada por la fórmula de *regula falsi* ($P_{1(x)}$).

	J	K	L	
178	Pn	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tole
179	0,3333333333	= 5*(J179)^3 - 5*(J179)^2 + 6*(J179) - 2		

El producto de las imágenes:

	J	K
178	Pn	F(Pn)
179	0,3333333333	-0,37037037

Iteración evaluada en la función $F(Pn)$. Al ser la primera iteración no hay cálculo de tolerancia. Los límites siguientes para la tabla de *regula falsi* se programan teniendo en cuenta el producto de las funciones obtenidas anteriormente, de tal manera que:

$$\text{Si } F(a) * F(Pn) > 0; a = Pn, b = b$$

$$\text{Si } F(a) * F(Pn) < 0; a = a, b = Pn$$

Se utiliza un condicional *si*, el cual permite que la prueba lógica (producto) cumpla con una determinada condición de restricción y tome la anterior iteración, o si no cumple con la restricción, la rechace.

	F
180	=SI(L179>0;J179;F179)

El condicional para el límite superior:

	G
180	=SI(L179<0;J179;G179)

Programación para determinar los nuevos intervalos.

	J	K	L
178	Pn	F(Pn)	F(a)*F(Pn)
179	0,333333333	-0,37037037	0,740740741

Los nuevos límites:

	F	G
178	a	b
179	0	1
180	0,333333333	1

Nuevos intervalos

Realizado el procedimiento descrito y arrastrando a la siguiente fila, se encuentran la segunda iteración y la función evaluada en la segunda iteración y en el nuevo límite inferior.

	F	G	H	I	J	K	L
178	a	b	F(a)	F(b)	Pn	F(Pn)	F(a)*F(Pn)
179	0	1	-2	4	0,333333333	-0,37037037	0,740740741
180	0,333333333	1	-0,37037037	4	0,389830508	-0,1246476	0,046165779

Al tener dos iteraciones se procede a calcular la tolerancia de la siguiente manera:

$$\text{Tolerancia} = |P_n - P_{n-1}|$$

Donde P_n es la iteración actual y P_{n-1} es la anterior. Para este caso:

$$\text{Tolerancia} = |P_2 - P_1|$$

	J	K	L	M
178	Pn	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia
179	0,333333333	-0,37037037	0,740740741	
180	0,389830508	-0,1246476	0,046165779	=ABS(J180-J179)

La tolerancia entre la segunda iteración y la primera:

	J	K	L	M
178	Pn	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia
179	0,333333333	-0,37037037	0,740740741	
180	0,389830508	-0,1246476	0,046165779	0,056497175

Con la programación completa se realizan todas las iteraciones necesarias hasta la tolerancia pedida ($<1*10^{-6}$).

	F	G	H	I	J	K	L	M
178	a	b	F(a)	F(b)	Pn	F(Pn)	F(a)*F(Pn)	Tolerancia
179		0	1	-2	4	0,333333333	-0,37037037	0,740740741
180		0,333333333	1	-0,37037037	4	0,389830508	-0,1246476	0,046165779
181		0,389830508	1	-0,124647603	4	0,408269942	-0,04354104	0,005427286

La raíz según la tolerancia solicitada es:

	F	G	H	I	J	K	L	M
189	0,41809384	1	-3,00995E-05	4	0,418098219	-1,0653E-05	3,20651E-10	4,37873E-06
190	0,418098219	1	-1,06531E-05	4	0,418099768	-3,7704E-06	4,01666E-11	1,54975E-06
191	0,418099768	1	-3,77043E-06	4	0,418100317	-1,3345E-06	5,0315E-12	5,48502E-07

La raíz para la función: $f(x) = 5x^3 - 5x^2 + 6x - 2$ y $x = 0.41810$, acorde con la tolerancia solicitada.

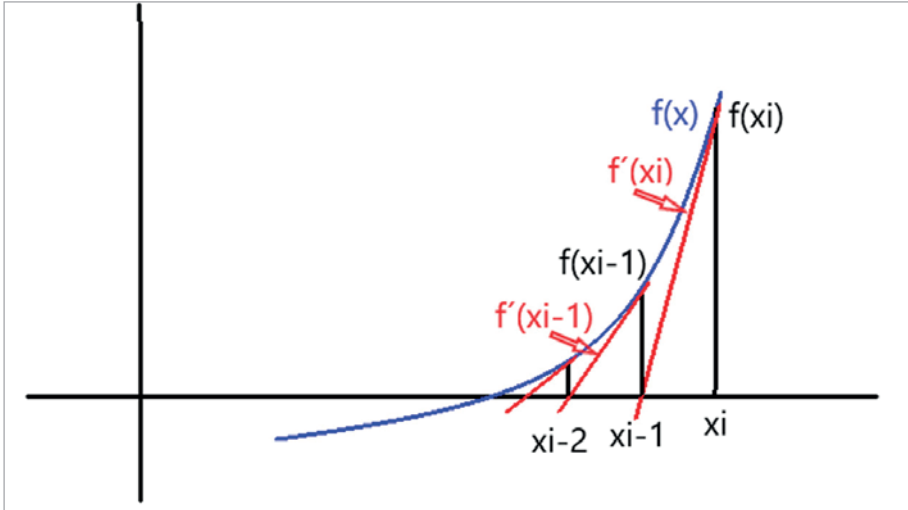
Lección 2. métodos de intervalo abierto

Como su nombre lo indica, con estos métodos es innecesario un intervalo en el cual ubicar la raíz, es decir, el primer valor para las iteraciones es un dato que pertenece al dominio de la función.

Método de Newton-Raphson

Es uno de los métodos más poderosos y su convergencia es extremadamente rápida; sin embargo, en algunas ocasiones, la convergencia es deficiente o no se logra. La representación gráfica del método se muestra en la figura 16:

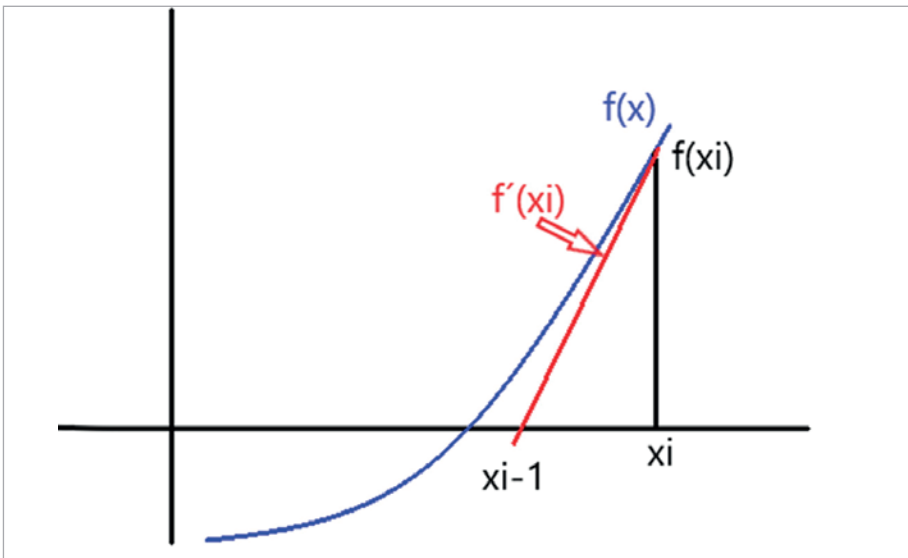
Figura 16. Búsqueda de la raíz por Newton-Raphson.



Nota. Gráfico de acercamiento a la raíz mediante las rectas tangentes. Figura de elaboración propia.

La demostración geométrica puede verse en la figura 17:

Figura 17. Recta tangente a la función en x_i



Nota. Gráfico que representa la derivada mediante la recta tangente. Figura de elaboración propia.

La pendiente de la recta tangente correspondiente a la derivada es:

$$f'(x) = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}}$$

Como el objetivo es despejar X_{i-1}

$$\begin{aligned}(x_i - x_{i-1})f'(x) &= f(x_i) \\ x_i * f'(x) - x_{i-1} * f'(x) &= f(x_i) \\ -x_{i-1} * f'(x) &= f(x_i) - x_i * f'(x) \\ x_{i-1} * f'(x) &= x_i * f'(x) - f(x_i) \\ x_{i-1} &= \frac{x_i * f'(x) - f(x_i)}{f'(x)} \\ x_{i-1} &= \frac{x_i * f'(x)}{f'(x)} - \frac{f(x_i)}{f'(x)} \\ x_{i-1} &= x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x)}\end{aligned}$$

Ejemplo 9

La manera de hallar la raíz del mismo ejemplo de bisección por el método de Newton–Raphson para $f(x) = e^{-x} - x$, con una tolerancia menor a $1 * 10^{-6}$ es:

Se construye la tabla 3 con los elementos del algoritmo. La tabla se elabora teniendo en cuenta la derivada:

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$

Tabla 3. Aplicación del algoritmo de Newton-Raphson para la raíz de la función

Xi	f(xi)	f'(xi)	X_{i-1}	Tolerancia
1	-0.632120559	-1.36787944	0.53788284	
0.53788284	0.046100486	-1.58398333	0.56698699	0.02910415
0.56698699	0.00024495	-1.56723194	0.56714329	0.00015629
0.56714329	6.92781E-09	-1.56714329	0.56714329	4.4207E-09

Nota. Como se observa, en la cuarta iteración coinciden ocho decimales, iniciando con un valor de: $x = 1$. Tabla de elaboración propia.

Para probar la efectividad del método, este se aplica con un valor muy lejano a la raíz, por ejemplo, $x = 10$ (ver tabla 4).

Tabla 4. Aplicación del algoritmo de Newton-Raphson para la raíz de la función al Iniciar en $x = 10$ (ver tabla 4).

xi	f(xi)	f'(xi)	x_{i-1}	Tolerancia
10	-9.9999546	-1.0000454	0.00049938	
0.00049938	0.999001372	-1.99950075	0.50012478	0.49962541
0.50012478	0.106330199	-1.60645498	0.56631412	0.06618934
0.56631412	0.001299617	-1.56761374	0.56714317	0.00082904
0.56714317	1.9501E-07	-1.56714336	0.56714329	1.2444E-07
0.56714329	4.44089E-15	-1.56714329	0.56714329	2.8866E-15

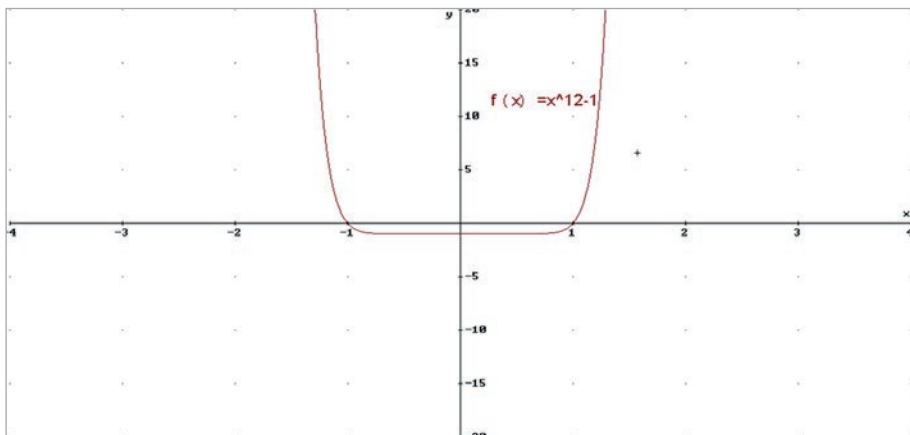
Nota. Con seis iteraciones coinciden catorce decimales. Tabla de elaboración propia.

Sin embargo, como se señaló antes, en algunos casos la convergencia es deficiente. Así se evidencia en el siguiente caso:

Ejemplo 10

Se busca la raíz por el método de Newton-Raphson de la función $f(x) = x^{12} - 1$, con una tolerancia $\leq 1 * 10^{-6}$. Así se aprecia en la figura 18 la función:

Figura 18. La Función $x^{12}-1$ y sus raíces.



Nota. Función polinómica de grado doce. Figura de elaboración propia.

La derivada: $f'(x) = 12x$ ¹¹

Tabla 5. Aplicación del algoritmo de Newton-Raphson para la raíz de la función al iniciar en $x = 3$

xi	f(xi)	f'(xi)	x_{i-1}	Tolerancia
3	531440	2125764	2.75000047	
2.75000047	187064.2925	816284.773	2.52083499	0.22916548
2.52083499	65845.54912	313451.135	2.3107686	0.21006639
2.3107686	23177.08141	120365.569	2.11821286	0.19255574
2.11821286	8157.967326	46221.7986	1.94171675	0.1764961
1.94171675	2871.304846	17751.1257	1.77996336	0.16175339
1.77996336	1010.42281	6818.72111	1.63177973	0.14818362
1.63177973	355.4005924	2620.94633	1.49617963	0.1356001
1.49617963	124.8359848	1009.25837	1.37248882	0.12369081
1.37248882	43.67924117	390.641356	1.26067465	0.11181418
1.26067465	15.11521931	153.396146	1.16213749	0.09853715
1.16213749	5.068622928	62.6633901	1.08125098	0.08088651
1.08125098	1.553396071	28.3382428	1.02643474	0.05481625
1.02643474	0.367653556	15.9891731	1.00344083	0.02299391
1.00344083	0.042080401	12.4620849	1.00006416	0.00337667
1.00006416	0.000770155	12.0084714	1.00000002	6.4134E-05
1.00000002	2.71588E-07	12.000003	1	2.2632E-08
1	3.4639E-14	12	1	2.8866E-15

Nota. Como se observa, fueron necesarias 18 iteraciones para llegar a la raíz. Esto ocurre porque la pendiente (derivada) es supremamente alta en la función y los cortes de las rectas tangentes con el eje x se acercan a la raíz en forma muy lenta. Tabla de elaboración propia.

Ejemplo 11

Hallar la solución de la ecuación:

$$x^{-x} + e^{\frac{x^2}{x^2+4}} + \ln(x^2 + 1) = 8.4$$

Con una tolerancia $< 1 \cdot 10^{-6}$ por el método de Newton-Raphson. Al igualar a cero se obtiene la función:

$$f(x) = \underset{1}{x^{-x}} + \underset{2}{e^{\frac{x^2}{x^2+4}}} + \underset{3}{\ln(x^2 + 1)} - 8.4$$

Se deriva la función mostrada, la cual es necesaria para completar la tabla de Newton-Raphson. Se deriva cada término que involucre a la variable x por separado y los resultados se juntan posteriormente para tener $f'(x)$.

$$f(x1) = x^{-x}$$

$$\ln(f(x1)) = \ln(x^{-x})$$

Se deriva a ambos lados de la igualdad respecto a $f(x1)$ y a x . En este caso se puede considerar a $f(x1)$ como variable y

$$\ln(f(x1))' = (-x * \ln(x))'$$

$$\frac{(f(x1))'}{f(x1)} = \left(-\ln(x) + \left(-x * \frac{1}{x} \right) \right)$$

Al ser de interés $f'(x1)$ se despeja y se reemplaza:

$$f(x1) = x^{-x}$$

$$(f(x1))' = f(x1) * \left(-\ln(x) + \left(-x * \frac{1}{x} \right) \right)$$

$$(f(x1))' = x^{-x} * \left(-\ln(x) + \left(-x * \frac{1}{x} \right) \right)$$

$$(f(x1))' = -x^{-x} * (\ln(x) + 1)$$

$$f(x2) = e^{\frac{x^2}{x^2-4}}$$

$$f'(x2) = e^{\frac{x^2}{x^2-4}} * \frac{(2x)(x^2-4) - (2x)(x^2)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x2) = e^{\frac{x^2}{x^2-4}} * \frac{(2x^3-8x) - (2x^3)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x2) = \frac{-8x}{(x^2-4)^2} * e^{\frac{x^2}{x^2-4}}$$

$$f(x3) = \ln(x^2+1)$$

$$f'(x3) = \frac{1}{x^2+1} * 2x$$

$$f'(x3) = \frac{2x}{x^2+1}$$

La derivada de la función $f(x)$

$$f'(x) = f'(x1) + f'(x2) + f'(x3)$$

$$f'(x) = -x^{-x} * (\ln(x) + 1) - \frac{8x}{(x^2-4)^2} * e^{\frac{x^2}{x^2-4}} + \frac{2x}{x^2+1}$$

Para iniciar las iteraciones se toma un valor del dominio de la función, y se reemplaza en $f(x)$ y en $f'(x)$.

	A	B	C	D	E	F
15	Xi	F(Xi)	F'(Xi)	Xn	Tolerancia	
16	2,75	=A16^(-A16)+EXP(A16^2)/(A16^2-4)+LN(A16^2+1)-8,4				

Se evalúa la función en el primer valor que debe pertenecer al dominio de la función y se obtiene:

	A	B
15	X_i	$F(X_i)$
16	2,75	2,16386878

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
15	X_i	$F(X_i)$	$F'(X_i)$	X_n	Tolerancia					
16	2,75	2,16386878	$=-(A16^{-(A16)})*(1+LN(A16))-((8*A16)/(A16^2-4)^2)*EXP((A16^2)/(A16^2-4))+(2*A16)/(A16^2+1)$							

Al reemplazar en la derivada se tiene:

	A	B	C
15	X_i	$F(X_i)$	$F'(X_i)$
16	2,75	2,16386878	-13,9644827

Con los valores obtenidos se calcula la primera iteración con la fórmula de Newton-Raphson, la cual es:

$$X_n = X_i - \frac{F(X_i)}{F'(X_i)}$$

	A	B	C	D	E
15	X_i	$F(X_i)$	$F'(X_i)$	X_n	To
16	2,75	2,16386878	-13,9644827	$=A16-(B16/C16)$	

Primera iteración «corte de la recta tangente con el eje x»:

	A	B	C	D
15	X_i	$F(X_i)$	$F'(X_i)$	X_n
16	2,75	2,16386878	-13,9644827	2,90495517

Al ser la primera iteración no habrá cálculo de tolerancia. La iteración calculada pasa a ser el nuevo valor en el que se evaluará en $f(x)$ y $f'(x)$.

	A	B	C	D
15	Xi	F(Xi)	F'(Xi)	Xn
16	2,75	2,16386878	-13,9644827	2,90495517
17	2,90495517			

	A	B	C	D	E
17	2,90495517	=A17^(-A17)+EXP(A17^(2)/(A17^(2)-4))+LN(A17^(2)+1)-8,4			

Para la segunda iteración:

	A	B
17	2,90495517	0,58356787

La derivada:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
17	2,90495517	0,58356787	=(A17^(-A17))*(1+LN(A17))-((8*A17)/(A17^2-4))*EXP((A17^2)/(A17^2-4))+(2*A17)/(A17^2+1)						

Resultado de la segunda derivada:

	A	B	C
17	2,90495517	0,58356787	-35,7538981

Se obtiene la segunda iteración.

	A	B	C	D
15	Xi	F(Xi)	F'(Xi)	Xn
16	2,75	2,16386878	-13,9644827	2,90495517
17	2,90495517	0,58356787	-35,7538981	2,92127697

Al tener dos iteraciones se puede calcular la tolerancia.

	D	E
15	Xn	Tolerancia
16	2,90495517	
17	2,92127697	=ABS(D17-D16)

	D	E
15	Xn	Tolerancia
16	2,90495517	
17	2,92127697	0,0163218

Se realizan las iteraciones necesarias hasta llegar a la tolerancia pedida.

	A	B	C	D	E
15	Xi	F(Xi)	F'(Xi)	Xn	Tolerancia
16	2,75	2,16386878	-13,9644827	2,90495517	
17	2,90495517	0,58356787	-35,7538981	2,92127697	0,0163218
18	2,92127697	0,46676534	-34,5600428	2,93478289	0,01350592
19	2,93478289	0,37521289	-33,6269806	2,94594098	0,01115809

La raíz con la tolerancia solicitada:

	A	B	C	D	E
65	2,99796904	4,0344E-05	-29,8247704	2,99797039	1,3527E-06
66	2,99797039	3,3146E-05	-29,8246977	2,9979715	1,1114E-06
67	2,9979715	2,7232E-05	-29,824638	2,99797242	9,1307E-07

El valor para x y que cumple la ecuación es $x = 2.99797$, que es acorde con la tolerancia pedida.

Ejemplo 12³

Un recipiente de longitud L posee una sección transversal de medio círculo de radio r , y la altura h será la distancia entre el remate superior y la columna de agua. El volumen de agua está dado por un abrevadero de longitud L , que tiene una sección transversal en forma de semicírculo con radio r . Cuando se llena de agua hasta una distancia h de la parte superior, el volumen de agua está dado por:

$$V = L \left[0.5 * \pi * r^2 - r^2 \text{sen}^{-1} \left(\frac{h}{r} \right) - h(r^2 - h^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Suponga que $L = 10$ ft, $r = 1$ ft y $V = 12.4$ ft³. Determinar la profundidad de agua en el abrevadero con una tolerancia menor que $1 * 10^{-6}$, por el método de Newton-Raphson y con los valores dados a continuación:

	F	G
4	L=	10
5	r	1
6	V=	12,4
7	kte	0,5

Como función:

$$f(h) = L \left[0.5 * \pi * r^2 - r^2 \text{sen}^{-1} \left(\frac{h}{r} \right) - h(r^2 - h^2)^{\frac{1}{2}} \right] - V$$

3 Este ejemplo está basado en ejercicio 17, capítulo 2, de Burden y Faires (2000).

Se deriva la función para cada término que involucre a la variable h por separado y se sumarán para tener $f'(h)$:

$$f(h1) = L * 0.5 * \pi * r^2$$

$$(f(h1))' = 0$$

$$f(h2) = Lr^2 \text{Sen}^{-1}\left(\frac{h}{r}\right)$$

$$f'(h2) = Lr^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{h}{r}\right)^2}} * \left(\frac{1}{r}\right)$$

$$f'(h2) = \frac{Lr}{\sqrt{\frac{r^2 - h^2}{r^2}}}$$

$$f'(h2) = \frac{Lr^2}{\sqrt{r^2 - h^2}}$$

$$f'(h3) = L \left[(r^2 - h^2)^{\frac{1}{2}} + h * \left(\frac{1}{2}\right) * (r^2 - h^2)^{-\frac{1}{2}} * (-2h) \right]$$

$$f'(h3) = L \left[\sqrt{r^2 - h^2} + \frac{(-h^2)}{\sqrt{r^2 - h^2}} \right]$$

$$f'(h3) = L \left[\frac{r^2 - h^2 + (-h^2)}{\sqrt{r^2 - h^2}} \right]$$

$$f'(h3) = L \left[\frac{r^2 - 2h^2}{\sqrt{r^2 - h^2}} \right]$$

La derivada de la función $f(h)$:

$$f'(h) = f'(h1) + f'(h2) + f'(h3)$$

$$f'(h) = -\frac{Lr^2}{\sqrt{r^2 - h^2}} - L \left[\frac{r^2 - 2h^2}{\sqrt{r^2 - h^2}} \right]$$

$$f'(h) = \frac{-2L(r^2 - h^2)}{\sqrt{r^2 - h^2}}$$

$$f'(h) = -2L\sqrt{r^2 - h^2}$$

Para iniciar las iteraciones se toma un valor del dominio de la función y se reemplaza en $f(x)$ y en $f'(x)$.

	E	F	G	H	I	J	K	L
15	Xi	F(Xi)	F'(Xi)	Xn	Tolerancia			
16	0,1	= $\$G\$4 * (\$G\$7 * PI() * \$G\$5^2) - \$G\$5^2 * ASENSO(E16 / \$G\$5) - (E16 * (\$G\$5^2 - (E16^2))^{1/2}) - \$G\$6$						

La función evaluada en el valor inicial:

	E	F
15	Xi	F(Xi)
16	0,1	1,31130162

La derivada:

	E	F	G	H	
15	Xi	F(Xi)	F'(Xi)	Xn	Toler.
16	0,1	1,31130162	= $(-2 * \$G\$4) * (RAIZ(\$G\$5^2 - E16^2))$		

	E	F	G
15	Xi	F(Xi)	F'(Xi)
16	0,1	1,31130162	-19,8997487

Con los valores obtenidos se calcula la iteración con la fórmula de Newton-Raphson, la cual es:

$$X_n = X_i - \frac{F(X_i)}{F'(X_i)}$$

	E	F	G	H
15	Xi	F(Xi)	F'(Xi)	Xn
16	0,1	1,31130162	-19,8997487	=E16-(F16/G16)

Resultado del primer corte de la recta tangente:

	E	F	G	H
15	Xi	F(Xi)	F'(Xi)	Xn
16	0,1	1,31130162	-19,8997487	0,165895386

Al ser la primera iteración no habrá cálculo de tolerancia. La iteración calculada pasa a ser el nuevo valor en el que se evaluará $f(x)$ y $f'(x)$.

	E	F
15	Xi	F(Xi)
16	0,1	1,31130162
17	0,16589539	

El inicio de la segunda iteración:

	E	F	G	H	I	J	K	L	
17	0,16589539	=SG\$4*((SG\$7*PI()*SG\$5^2)-(\$G\$5^2)*ASENO(E17/\$G\$5))- (E17*(SG\$5^2)-(E17^2))^(1/2))-SG\$6							

Resultado de la derivada:

	E	F
17	0,16589539	0,00533785

	E	F	G	H
17	0,16589539	0,00533785	=(-2*SG\$4)*(RAIZ(\$G\$5^2-E17^2)))	

Se obtiene la segunda iteración.

	E	F	G	H
17	0,16589539	0,00533785	-19,7228671	0,166166028

Al tener dos iteraciones se puede calcular la tolerancia.

	H	I
15	Xn	Tolerancia
16	0,165895386	
17	0,166166028	=ABS(H17-H16)

Resultado de la tolerancia:

	H	I
15	Xn	Tolerancia
16	0,165895386	
17	0,166166028	0,00027064

Se realiza el número de iteraciones necesarias hasta llegar a la tolerancia pedida.

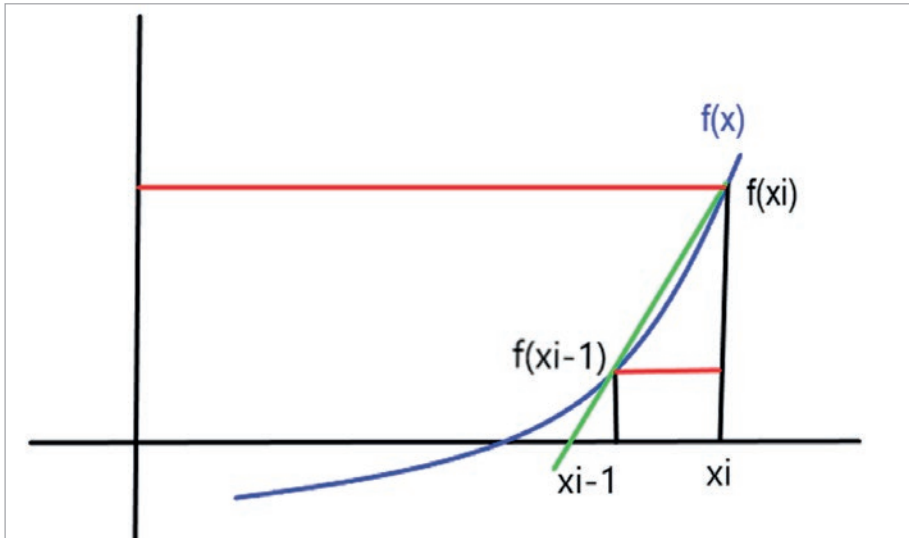
	E	F	G	H	I
15	X_i	$F(X_i)$	$F'(X_i)$	X_n	Tolerancia
16	0,1	1,31130162	-19,8997487	0,165895386	
17	0,16589539	0,00533785	-19,7228671	0,166166028	0,00027064
18	0,16616603	1,2329E-07	-19,7219558	0,166166035	6,2514E-09

La profundidad en el abrevadero es de 0.16616 m, con la tolerancia solicitada.

Método de la secante

Es una derivación del método de Newton-Raphson cuya ventaja es que no necesita calcular la derivada, la cual algunos paquetes computacionales no la calculan (como es el caso del Excel). La representación se ilustra en la figura 19.

Figura 19. Gráfico de acercamiento a la raíz mediante la recta secante



Nota. Se traza una recta secante que, en la medida que $x_i - x_{i-1} \rightarrow 0$, se vuelve tangente. Es la aproximación con que trabaja este método. Figura de elaboración propia

Demostración

La pendiente de la recta secante está dada por:

$$m = \frac{f(x) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Si $x_i - x_{i-1} \rightarrow 0$, la recta secante se puede aproximar a la derivada en x_i , es decir: $m \cong f'(x_i)$

Si se recuerda Newton-Raphson:

$$x_{i-1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x)}$$

Si se asume $x_{i-1} = x_n$. Al reemplazar por la aproximación:

$$x_n = x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{f(x) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}}$$

$$x_n = x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{1}{\frac{f(x) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}}}$$

$$x_n = x_i - \frac{f(x_i) * (x_i - x_{i-1})}{f(x) - f(x_{i-1})}$$

Ejemplo 13

La manera de hallar la raíz por el método de la secante para $f(x) = e^{-x} - x$ se puede ver mediante la tabla 6:

Tabla 6. Aplicación del Algoritmo de la Secante para la Raíz de la Función al Iniciar en $x_i = 3$ y $x_{i-1} = 2$

xi	xi-1	f(xi)	f(xi-1)	x_n	Tolerancia
3	2	-2.950212932	-1.86466472	0.28228291	
2	0.28228291	-1.864664717	0.47177741	0.62912656	0.34684365
0.28228291	0.62912656	0.471777407	-0.09606937	0.57044691	0.05867965
0.62912656	0.57044691	-0.096069373	-0.00517415	0.56710661	0.0033403
0.57044691	0.56710661	-0.005174154	5.7488E-05	0.56714331	3.6705E-05
0.56710661	0.56714331	5.74881E-05	-3.4348E-08	0.56714329	2.1918E-08

Nota. Hay que tomar dos puntos que, como el método abierto lo indica, deben pertenecer al dominio de la función (no se necesita conocer dónde cae aproximadamente la raíz). Tabla de elaboración propia

Para el mismo ejercicio con otros valores iniciales se muestran en la tabla 7:

Tabla 7. Aplicación del algoritmo de la secante para la raíz de la función al iniciar en $x_i = 10$ y $x_{i-1} = 15$

xi	xi-1	f(xi)	f'(xi-1)	x_n	Tolerancia
10	15	-9.9999546	-14.9999997	0.00013559	
15	0.00013559	-14.9999969	0.99972884	0.937388801	0.93725321
0.00013559	0.9373888	0.999728836	-0.54573963	0.60642364	0.33096516
0.9373888	0.60642364	-0.545739625	-0.06112607	0.564677798	0.04174584
0.60642364	0.5646778	-0.061126073	0.00386551	0.567160716	0.00248292
0.5646778	0.56716072	0.003865505	-2.7308E-05	0.567143298	1.7418E-05
0.56716072	0.5671433	-2.73084E-05	-1.2188E-08	0.56714329	7.777E-09

Nota. Aquí solamente se aumentó una iteración respecto a la anterior tabla. Tabla de elaboración propia.

Ejemplo 14

Para hallar la solución de la siguiente ecuación:

$$x^{-x} + e^{\frac{x^2}{x^2-4}} + \ln(x^2 + 1) = 8.4$$

Con una tolerancia $< 1 \cdot 10^{-6}$ por el método de la secante, se debe seguir el siguiente procedimiento. Con la función inicial se despeja en función de x . Después se resta la constante numérica (8.4) y se obtiene la función requerida para realizar el método de la secante.

$$f(x) = x^{-x} + e^{\frac{x^2}{x^2-4}} + \ln(x^2 + 1) - 8.4$$

Se construye la tabla de secante con un valor que pertenezca al dominio de la función, por ejemplo: $x = 4$, y para este caso, en el valor X_{i-1} puede ser $x = 3$.

	A	B	C	D	E	F	C
12	Xi	Xi-1	F(Xi)	F(Xi-1)	Xn	Tolerancia	
13	4	3	=A13^(-A13)+EXP(A13^2)/(A13^2-4)+LN(A13^2+1)-8,4				

La función evaluada en el primer valor da:

	A	B	C
12	Xi	Xi-1	F(Xi)
13	4	3	-1,76921251

La función evaluada en el segundo valor:

	B	C	D	E	F	G
12	Xi-1	F(Xi)	F(Xi-1)	Xn	Tolerancia	
13	3	-1,76921251	=B13^(-B13)+EXP(B13^2)/(B13^2-4)+LN(B13^2)+1)-8,4			

El resultado:

	B	C	D
12	Xi-1	F(Xi)	F(Xi-1)
13	3	-1,76921251	-0,01073041

Se calcula la primera iteración con la fórmula de secante, la cual es:

$$X_n = X_i - \frac{F(X_i) * (X_i - X_{i-1})}{F(X_i) - F(X_{i-1})}$$

	A	B	C	D	E	F	G
12	Xi	Xi-1	F(Xi)	F(Xi-1)	Xn	Tolerancia	
13	4	3	-1,76921251	-0,01073041	=A13- ((C13*(A13-B13))/(C13-D13))		

El resultado del primer corte de la recta secante es:

	A	B	C	D	E
12	Xi	Xi-1	F(Xi)	F(Xi-1)	Xn
13	4	3	-1,76921251	-0,01073041	2,99389792

El valor tomado como X_{i-1} para la primera iteración se utiliza ahora como el nuevo valor X_i , y la primera iteración se considera el nuevo X_{i-1} para el cálculo de la segunda iteración. Se calcula la función anterior en estos dos nuevos valores.

	A	B	C	D	E
12	X_i	X_{i-1}	$F(X_i)$	$F(X_{i-1})$	X_n
13	4	3	-1,76921251	-0,01073041	2,99389792
14	3	2,99389792			

Nuevos valores para la segunda iteración:

	A	B	C	D	E	F
14	3	2,99389792	=A14^(-A14)+EXP(A14^2)/(A14^2-4))+LN(A14^2+1)-8,4			

Al evaluar la función en x_i :

	A	B	C
14	3	2,99389792	-0,01073041

Al evaluar en x_{i-1}

	B	C	D	E	F	G
14	2,99389792	-0,01073041	=B14^(-B14)+EXP(B14^2)/(B14^2-4))+LN(B14^2+1)-8,4			

Se obtiene:

	B	C	D
14	2,99389792	-0,01073041	0,02185148

Se calcula la segunda iteración:

	A	B	C	D	E	F	G
14	3	2,99389792	-0,01073041	0,02185148	=A14-((C14*(A14-B14))/(C14-D14))		

El segundo corte de la recta secante:

	A	B	C	D	E
14	3	2,99389792	-0,01073041	0,02185148	2,99799036

Al haber dos iteraciones se puede calcular la tolerancia:

	E	F
12	Xn	Tolerancia
13	2,99389792	
14	2,99799036	=ABS(E14-E13)

La tolerancia entre la primera y segunda iteración:

	E	F
12	Xn	Tolerancia
13	2,99389792	
14	2,99799036	0,00409244

Se realizan todas las iteraciones necesarias hasta llegar a la tolerancia pedida.

	A	B	C	D	E	F
12	Xi	Xi-1	F(Xi)	F(Xi-1)	Xn	Tolerancia
13	4	3	-1,76921251	-0,01073041	2,99389792	
14	3	2,99389792	-0,01073041	0,02185148	2,99799036	0,00409244
15	2,99389792	2,99799036	0,02185148	-7,3102E-05	2,99797672	1,3645E-05
16	2,99799036	2,99797672	-7,3102E-05	-4,9615E-07	2,99797662	9,3245E-08

El valor que cumple la ecuación es $x = 2.99797$, acorde con la tolerancia solicitada.

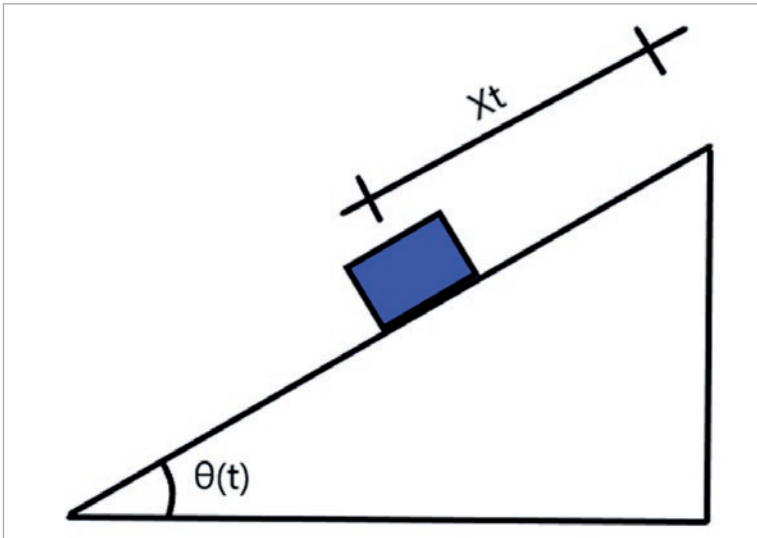
Ejemplo 15

Un cuerpo que se desliza desde el reposo en un plano inclinado (ver figura 20), cambiando su ángulo constantemente se expresa así:

Una partícula parte del reposo sobre un plano inclinado uniforme, cuyo ángulo θ cambia con una rapidez constante de:

$$\frac{d\theta}{dt} = w < 0$$

Figura 20. Plano inclinado de ángulo variable.



Nota. Se muestra aquí en dónde ocurre el desplazamiento de una partícula en el plano. Figura de elaboración propia.

Al final de t segundos, la posición del objeto está dada por:

$$x(t) = \frac{g}{2w^2} \left(\frac{e^{wt} - e^{-wt}}{2} - \text{Sen}(wt) \right)$$

Al suponer que la partícula se desplazó 1.7 pies en un segundo, la manera de encontrar por cualquier método la rapidez, w , con que cambia θ , suponiendo que $g = 32.17 \text{ ft/s}^2$, con una tolerancia $< 1 \cdot 10^{-6}$ es:

Inicialmente se consideran los datos:

	G	H
4	x(t)	1,7
5	t	1
6	g	32,17

Se construye la tabla de secante con un valor que pertenezca al dominio de la función: $x = -3$, y para este caso, en el valor X_{i-1} puede ser $x = 9$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
9	Xi	Xi-1	F(Xi)	F(Xi-1)	Xn	Tolerancia		
10	-3		$=-(\$H\$6/(2*A10^2))*(((EXP(A10*\$H\$5))-EXP(-A10*\$H\$5))/2)-SENO(A10*\$H\$5))-1,7$					

Al evaluar la función en el primer valor se obtiene:

	A	B	C
9	Xi	Xi-1	F(Xi)
10	-3	9	15,9519559

Si reemplazamos x_{i-1} en la función

	B	C	D	E	F	G	H	I
9	Xi-1	F(Xi)	F(Xi-1)	Xn	Tolerancia			
10	9	15,9519559	$=-(\$H\$6/(2*B10^2))*(((EXP(B10*\$H\$5))-EXP(-B10*\$H\$5))/2)-SENO(B10*\$H\$5))-1,7$					

Se obtiene:

	B	C	D
9	Xi-1	F(Xi)	F(Xi-1)
10	9	15,9519559	-806,174353

Se calcula la primera iteración con la fórmula de secante, la cual es

$$X_n = X_i - \frac{F(X_i) * (X_i - X_{i-1})}{F(X_i) - F(X_{i-1})}$$

	A	B	C	D	E	F	G
9	Xi	Xi-1	F(Xi)	F(Xi-1)	Xn	Tolerancia	
10	-3	9	15,9519559	-806,174353	$=A10-(((A10-B10)*C10)/(C10-D10))$		

El primer corte de la recta secante es

	A	B	C	D	E
9	Xi	Xi-1	F(Xi)	F(Xi-1)	Xn
10	-3	9	15,9519559	-806,174353	-2,76716051

El valor tomado como X_{i-1} para la primera iteración se utiliza ahora como el nuevo valor X_i y la primera iteración se considera el nuevo X_{i-1} para el cálculo de la segunda iteración. Se calcula la función anterior en estos dos nuevos valores.

	A	B	C	D	E
9	Xi	Xi-1	F(Xi)	F(Xi-1)	Xn
10		-3	9	15,9519559	-806,174353
11		9	-2,76716051		

Nuevos valores para la segunda iteración:

	A	B	C	D	E	F	G	H
11	9	-2,76716051	=(\$H\$6/(2*A11^2))*(((EXP(A11*\$H\$5)-EXP(-A11*\$H\$5))/2)-SENO(A11*\$H\$5))-1,7					

La función evaluada en el nuevo X_i es

	A	B	C
11	9	-2,76716051	-806,174353

Reemplazando la función en x_{i-1}

	B	C	D	E	F	G	H	I
11	-2,76716051	-806,174353	=(\$H\$6/(2*B11^2))*(((EXP(B11*\$H\$5)-EXP(-B11*\$H\$5))/2)-SENO(B11*\$H\$5))-1,7					

El cálculo da:

	B	C	D
11	-2,76716051	-806,174353	14,1798732

Se calcula la segunda iteración:

	A	B	C	D	E	F	G
11	9	-2,76716051	-806,174353	14,1798732	=A11-(((A11-B11)*C11)/(C11-D11))		

El corte de la segunda recta secante:

	A	B	C	D	E
11	9	-2,76716051	-806,174353	14,1798732	-2,56376442

Al haber dos iteraciones se pueden calcular las tolerancias.

	E	F
9	Xn	Tolerancia
10	-2,76716051	
11	-2,56376442	=ABS(E11-E10)

La tolerancia entre la segunda y primera iteración:

	E	F
9	Xn	Tolerancia
10	-2,76716051	
11	-2,56376442	0,203396092

Se realizan todas las iteraciones necesarias hasta llegar a la tolerancia pedida.

	A	B	C	D	E	F
9	Xi	Xi-1	F(Xi)	F(Xi-1)	Xn	Tolerancia
10	-3	9	15,9519559	-806,174353	-2,76716051	
11	9	-2,76716051	-806,174353	14,1798732	-2,56376442	0,203396092
12	-2,76716051	-2,56376442	14,1798732	12,75689832	-0,74032866	1,823435758

La tolerancia solicitada con la respectiva raíz es

	A	B	C	D	E	F
14	-0,74032866	-0,3454543	2,27081508	0,152242207	-0,31707834	0,028375962
15	-0,3454543	-0,31707834	0,15224221	8,88097E-05	-0,31706177	1,65626E-05
16	-0,31707834	-0,31706177	8,881E-05	1,04636E-09	-0,31706177	1,95143E-10

La rapidez con que cambia θ es $w = -0.31706$, según la tolerancia solicitada.

Método de punto fijo

Este método consiste en reordenar una ecuación (escrita como función) así:

$$f(x) = 0$$

Si sumamos «x» en ambos miembros:

$$x + f(x) = x$$

Al reemplazar:

$$x + f(x) = g(x)$$

Se obtiene:

$$x = g(x)$$

El propósito de esta ecuación es ofrecer una fórmula para predecir un nuevo valor de x en función del anterior. Tiene el inconveniente de que en $g(x)$ cada término debe pertenecer al dominio de $f(x)$ para poder calcular la siguiente iteración, y así se cumpla la condición anterior no siempre converge. La condición indispensable para que exista convergencia es:

$$|g'(x)| < 1$$

Ejemplo 16

Este ejemplo explica la manera de hallar la raíz por el método de punto fijo para:

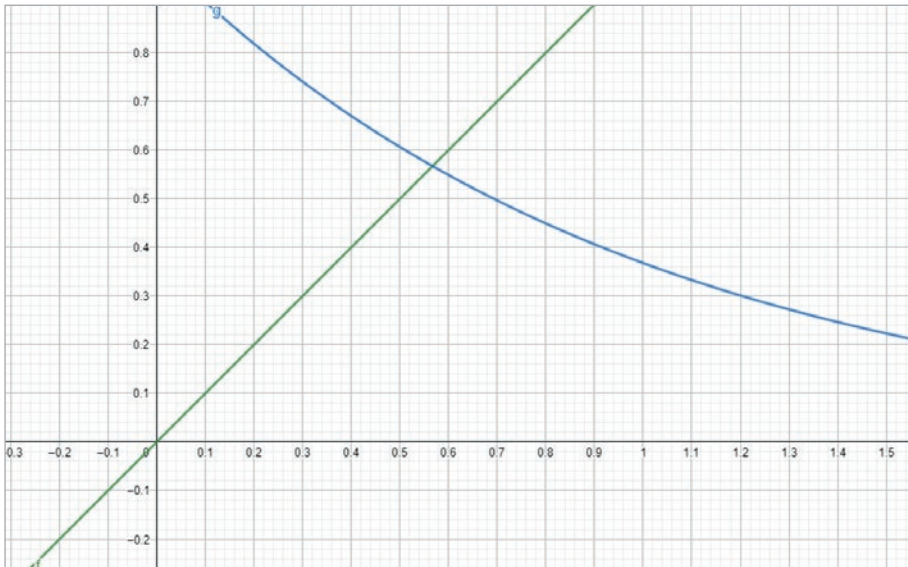
$$f(x) = e^{-x} - x$$

Esta función se puede presentar de dos formas:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} - x \\ x + f(x) &= e^{-x} - x + x \\ x &= e^{-x} \end{aligned}$$

Gráficamente se puede apreciar en la figura 21:

Figura 21. Visualización del punto fijo. punto de encuentro de $x = g(x)$.



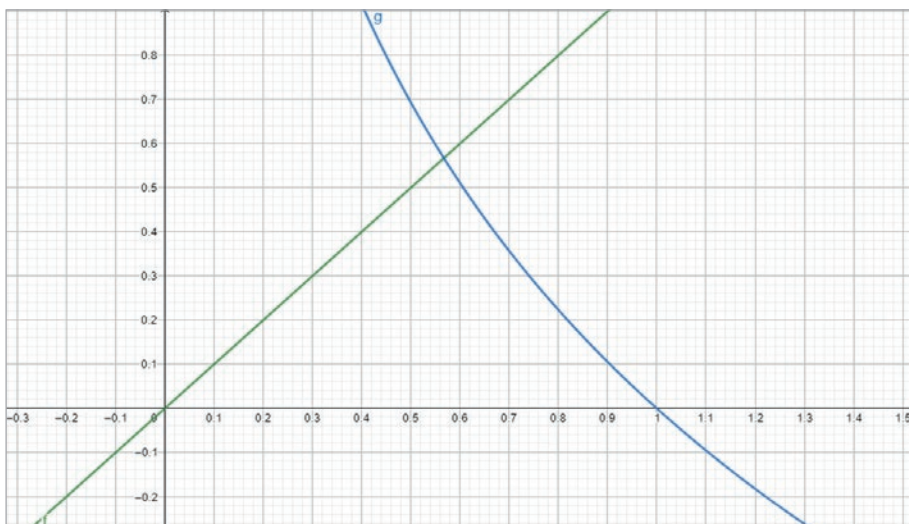
Nota. El punto donde se cortan x y $g(x)$ es la solución de la ecuación $x = 0.57^n$. Figura de elaboración propia.

Cuando la función está igualada a cero:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} - x = 0 \\ e^{-x} &= x \\ \ln(e^{-x}) &= \ln(x) \\ -x \ln(e) &= \ln(x) \\ x &= -\ln(x) \end{aligned}$$

Gráficamente se ve así en la figura 22:

Figura 22. Visualización del punto fijo con el otro despeje. punto de encuentro de $x = g(x)$.



Nota. Aquí en $x = 0.57\dots$ donde se cortan las dos funciones es la solución de la ecuación inicial; sin embargo, como se aprecia en la gráfica, la segunda construcción parece tener una pendiente muy fuerte > 1 y no cumpliría con la condición $|g'(x)| < 1$. Figura de elaboración propia.

En la tabla 8 tenemos los elementos para la primera construcción:

Tabla 8. Aplicación del algoritmo de punto fijo de la función al iniciar en $x_i = 0.9$

Iteración	x_i	$G(x_i)$	Tolerancia
0	0.9	0.40656966	
1	0.40656966	0.66593071	0.49343034
2	0.66593071	0.51379511	0.25936105
25	0.56714308	0.56714341	5.7158E-07

Nota. El valor inicial debe ser un dato que pertenezca al dominio de la función, por ejemplo, $x = 0.9$. Como se observa en la tabla, la convergencia es lenta, ya que la tolerancia $< 1 \cdot 10^{-6}$ se logró después de 25 iteraciones. Tabla de elaboración propia.

Con la segunda construcción se elabora la tabla 9 de aplicación del algoritmo:

Tabla 9. Aplicación del algoritmo de punto fijo con el segundo despeje de la función al iniciar en $x_i = 0.9$

Iteración	x_i	$G(x_i)$	Tolerancia
0	0.9	0.10536052	
1	0.10536052	2.25036733	0.79463948
2	2.25036733	-0.81109346	2.14500681
3	-0.81109346	#iNUM!	3.06146079
4	#iNUM!	#iNUM!	#iNUM!

Nota. #NUM corresponde en Excel a una función que se itera y no puede encontrar un resultado; en este caso, porque el argumento del logaritmo es negativo.

Es claro que no hay convergencia, pues el proceso manual es:

$$x = -\ln(0.9) = 0.10536052$$

Para la segunda iteración:

$$x = -\ln(0.10536052) = 2.25036733$$

Para la tercera iteración:

$$x = -\ln(2.25036733) = -0.81109346$$

En la cuarta iteración:

$$x = -\ln(-0.81109346) = \text{No hay imagen en los reales}$$

Ejemplo 17

La velocidad hacia arriba de un cohete se calcula con la siguiente fórmula:

$$v = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt$$

Donde v es velocidad del cohete hacia arriba; u , velocidad con la que el combustible sale del cohete; m_0 , masa inicial del cohete en el $t = 0$; q , consumo de combustible, y g , 9.8m/s^2 . Si $u = 2200\text{ m/s}$, $m_0 = 160\,000\text{ kg}$, y $q = 2680\text{ kg/s}$, la manera de calcular el tiempo en que $v = 1000\text{m/s}$ por el método de punto fijo con una tolerancia $< 1 \cdot 10^{-6}$ es la siguiente:

Se despeja la función de tal forma que quede igualada a la variable pedida en el ejercicio (t). Al tener la función, dos términos que contienen t realizan los dos despejes (estos términos se encuentran indicados con un subíndice para saber cuál se está despejando). Inicialmente la función es:

$$v = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt(1)}\right) - gt(2)$$

	D	E
4	u=	2200
5	mo	160000
6	q	2680
7	g	9,8
8	v	1000

Valores iniciales de la ecuación.

Al despejar la segunda variable t ($t(2)$) se tiene como ecuación:

$$\frac{v - u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right)}{-g} = t(2)$$

Se construye la tabla de punto fijo y con la ecuación anterior se reemplazan los valores obtenidos más un valor tomado como inicio del intervalo abierto, $x = 40$.

	D	E	F	G	H
11	x	g2(x)	Tolerancia		
12	40	=(((\$E\$8-\$E\$4*LN(\$E\$5/(\$E\$5-\$E\$6*D12)))/(-\$E\$7))			

El resultado de evaluar en $g_2(x)$:

	D	E
11	x	g2(x)
12	40	146,84263

El resultado de la función obtenida $g_2(x)$ se toma como nuevo valor, el cual se reemplaza en la función despejada.

	D	E
11	x	g2(x)
12	40	146,84263
13	146,84263	

	D	E	F	G	H
11	x	g2(x)	Tolerancia		
12	40	=(((\$E\$8-\$E\$4*LN(\$E\$5/(\$E\$5-\$E\$6*D12)))/(-\$E\$7))			
13	146,84263	#¡NUM!			

Al reemplazar esta ecuación no se presenta convergencia por el método de punto fijo, ya que el valor reemplazado en la segunda iteración da indeterminado. Al no haber convergencia con la función $g_2(x)$ se intenta el despeje con $t(1)$ y se realiza el mismo procedimiento. Originalmente la función es:

$$v = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt(1)}\right) - gt(2)$$

Despejando $t(1)$:

$$v - gt(2) = u \ln\left(\frac{mo}{mo - qt(1)}\right)$$

$$\frac{v - gt(2)}{u} = \ln\left(\frac{mo}{mo - qt(1)}\right)$$

$$e^{\frac{v - gt(2)}{u}} = \frac{mo}{mo - qt(1)}$$

$$(mo - qt(1)) = \frac{mo}{e^{\frac{v - gt(2)}{u}}}$$

$$\left(mo - \frac{mo}{e^{\frac{v - gt(2)}{u}}}\right) = qt(1)$$

$$\frac{\left(mo - \frac{mo}{e^{\frac{v - gt(2)}{u}}}\right)}{q} = t(1)$$

Se toma el mismo intervalo que en $g(1)$ y se empieza a construir la tabla con la función $t(1)$ despejada:

	L	M	N	O	P
11	x	g1(x)	Tolerancia		
12		40	=((SE\$5 - (SE\$5/EXP((SE\$8+SE\$7*L12)/SE\$4)))/(SE\$6))		

Al evaluar en $g(1(x))$ se obtiene:

	L	M
11	x	g1(x)
12	40	27,9915668

Se toma este valor como la primera iteración. Al ser solo una iteración, no hay cálculo de tolerancia. El resultado de la función obtenida $g_1(x)$ se toma como nuevo valor, el cual se reemplaza en la función despejada.

	L	M
11	x	$g_1(x)$
12	40	27,9915668
13	27,9915668	

Al desplegar el anterior valor se obtiene:

	L	M	N	O	P
11	x	$g_1(x)$	Tolerancia		
12	40	$=((\$E\$5 - \$E\$5 / \text{EXP}((\$E\$8 + \$E\$7 * L12) / \$E\$4)) / (\$E\$6))$			
13	27,9915668	26,2491485			

Al haber dos iteraciones y la posibilidad de convergencia, se realiza el cálculo de la tolerancia.

	L	M	N
11	x	$g_1(x)$	Tolerancia
12	40	27,9915668	
13	27,9915668	26,2491485	$=\text{ABS}(L13 - L12)$

El resultado de la tolerancia entre la segunda y primera iteración:

	L	M	N
11	x	$g_1(x)$	Tolerancia
12	40	27,9915668	
13	27,9915668	26,2491485	12,0084332

Se realizan las iteraciones necesarias hasta la tolerancia solicitada, ya que $g(1)$ presenta convergencia.

	L	M	N
11	x	g1(x)	Tolerancia
12	40	27,9915668	
13	27,9915668	26,2491485	12,0084332
14	26,2491485	25,9884918	1,74241825

Al llegar a la tolerancia solicitada se obtiene:

20	25,9423965	25,9423935	2,0028E-05
21	25,9423935	25,9423931	3,0118E-06
22	25,9423931	25,942393	4,5293E-07

El tiempo en el que $v = 1000$ m/s es aproximadamente 25.94239 s, con la tolerancia solicitada.

Ejemplo 18

La forma de hallar la solución de la ecuación:

$$x^{-x} + e^{\frac{x^2}{x^2+4}} + \ln(x^2 + 1) = 8.4$$

Hay que tener en cuenta una tolerancia $<1 \cdot 10^{-6}$ por el método de punto fijo. Para este caso hay ocho posibles despejes hasta obtener alguno que converja (se encuentran indicados con un subíndice para saber cuál término se está despejando).

Inicialmente la ecuación es:

$$x^{-x} + e^{\frac{x^2}{x^2+4}} + \ln(x^2 + 1) = 8.4$$

Al despejar la primera variable x ($x(1)$) se tiene como ecuación:

$$x(2)^{-x(1)} = 8.4 - e^{\frac{x^2(3.4)}{x^2(5.6)+4}} - \ln(x^2(7.8) + 1)$$

$$\ln x(2)^{-x(1)} = \ln (8.4 - e^{\frac{x^2(3.4)}{x^2(5.6)+4}} - \ln(x^2(7.8) + 1))$$

$$-x(1) * \ln (x2) = \ln (8.4 - e^{\frac{x^2(3.4)}{x^2(5.6)+4}} - \ln(x^2(7.8) + 1))$$

$$x(1) = \frac{\ln \left(8.4 - e^{\frac{x^2(3.4)}{x^2(5.6)+4}} - \ln(x^2(7.8) + 1) \right)}{-\ln (x2)}$$

Se inicia la tabla de punto fijo con $x = 3$, valor en el dominio de $g_1(x)$.

	A	B	C	D	E	F
13	x	g1 (X)	Tolerancia			
14		3	=((LN(8,4 - EXP(A14^2/(A14^2+4)) - LN(A14^2+1)))/(-LN(A14)))			

Al evaluar el despeje en $g_1(x)$:

	A	B
13	x	g1 (X)
14	3	-1,28413435

El resultado de la función obtenida $g_1(x)$ se toma como nuevo valor, el cual se reemplaza en la función despejada.

	A	B
13	x	g1 (X)
14	3	-1,28413435
15	-1,28413435	

	A	B	C	D	E	F
13	x	g1 (X)	Tolerancia			
14		3	=((LN(8,4 - EXP(A14^2/(A14^2+4)) - LN(A14^2+1)))/(-LN(A14)))			
15	-1,28413435	#¡NUM!				

Al reemplazar en la función no se presenta convergencia por el método de punto fijo, ya que el valor reemplazado en la segunda iteración da indeterminado. Al no haber convergencia con la función $g_1(x)$ se intenta el despeje con x (3, raíz positiva) y se realiza el mismo procedimiento. Originalmente la función:

$$x(1)^{-x(2)} + e^{\frac{x^2(3.4)}{x^2(5.6)+4}} + \ln(x^2(7.8) + 1) = 8.4$$

Al despejar x (3)

$$e^{\frac{x^2(3.4)}{x^2(5.6)+4}} = 8.4 - x(1)^{-x(2)} - \ln(x^2(7.8) + 1)$$

$$\frac{x^2(3.4)}{x^2(5.6) + 4} = \ln(8.4 - x(1)^{-x(2)} - \ln(x^2(7.8) + 1))$$

$$x^2(3.4) = \ln(8.4 - x(1)^{-x(2)} - \ln(x^2(7.8) + 1)) * x^2(5.6) + 4$$

$$x(3.4) = \pm \sqrt{\ln(8.4 - x(1)^{-x(2)} - \ln(x^2(7.8) + 1)) * x^2(5.6) + 4}$$

$$x(3) = + \sqrt{\ln(8.4 - x(1)^{-x(2)} - \ln(x^2(7.8) + 1)) * x^2(5.6) + 4}$$

Se toma el mismo valor que en $g_1(x)$.

	J	K	L	M	N
13	x	g3(x)	Tolerancia		
14	3	=RAIZ(LN(8,4 - J14^(-J14) - LN(J14^2 + 1)) * (J14^2 + 4))			

	J	K
13	x	g3(x)
14	3	4,83973532

Se toma este valor como la primera iteración, por esta razón no hay cálculo de tolerancia. El resultado de la función obtenida $g_3(x)$ se toma como nuevo valor, el cual se reemplaza en la función despejada.

	J	K
13	x	$g_3(x)$
14	3	4,83973532
15	4,83973532	

Al evaluar el segundo valor en $g_3(x)$:

	J	K	L	M	N
13	x	$g_3(x)$	Tolerancia		
14	3	4,83973532			
15	4,83973532	$=\text{RAIZ}(\text{LN}(8,4 - \text{J15}^{\wedge}(-\text{J15}) - \text{LN}(\text{J15}^{\wedge}2 + 1)) * (\text{J15}^{\wedge}2 + 4))$			

El resultado de la segunda iteración:

	J	K
13	x	$g_3(x)$
14	3	4,83973532
15	4,83973532	6,72549275

Al haber dos iteraciones posiblemente exista convergencia, entonces se realiza el cálculo de la tolerancia.

	J	K	L
13	x	$g_3(x)$	Tolerancia
14	3	4,83973532	
15	4,83973532	6,72549275	$=\text{ABS}(\text{J15} - \text{J14})$

El resultado de la tolerancia entre la primera y segunda iteración:

	J	K	L
13	x	$g_3(x)$	Tolerancia
14	3	4,83973532	
15	4,83973532	6,72549275	1,83973532

Se realizan las iteraciones necesarias hasta la tolerancia pedida, ya que $g_3(x)$ presenta convergencia y se puede obtener un resultado numérico.

	J	K	L
13	x	$g_3(x)$	Tolerancia
14	3	4,83973532	
15	4,83973532	6,72549275	1,83973532
16	6,72549275	8,64692973	1,88575743

La raíz según la tolerancia solicitada:

	J	K	L
48	17,4058609	17,405863	3,4604E-06
49	17,405863	17,4058643	2,1129E-06
50	17,4058643	17,4058651	1,2901E-06
51	17,4058651	17,4058655	7,877E-07

El valor para x , que cumple la ecuación, es $x = 17.40586$, acorde con la tolerancia pedida.

Lección 3. Aplicaciones a la ingeniería y ciencias

El objetivo de esta unidad es resolver problemas de aplicación reales a las ciencias e ingeniería, porque generalmente la solución a modelos planteados en ingeniería y ciencias no tiene solución analítica, por lo tanto, es necesario recurrir a los métodos descritos anteriormente.

Ejemplo 19.**Una aplicación para Ingeniería Ambiental⁴**

En Ingeniería Ambiental se usa la siguiente ecuación para calcular el nivel de oxígeno «c» en un río aguas abajo desde una descarga de aguas residuales:

$$c = 10 - 20(e^{-0.2x} - e^{-0.75x})$$

Donde (x) es la distancia aguas abajo en kilómetros. Determine la distancia aguas abajo donde el nivel de oxígeno tiene una lectura de $c = 5$, por medio de cualquier algoritmo, con $\text{tol} \leq 1 * 10^{-6}$.

Solución

El modelo planteado hay que llevarlo a la función, así:

Como $C = 5$

$$\begin{aligned} 5 &= 10 - 20(e^{-0.2x} - e^{-0.75x}) \\ 10 - 20(e^{-0.2x} - e^{-0.75x}) - 5 &= 0 \\ 5 - 20(e^{-0.2x} - e^{-0.75x}) &= 0 \\ f(x) &= 5 - 20(e^{-0.2x} - e^{-0.75x}) \end{aligned}$$

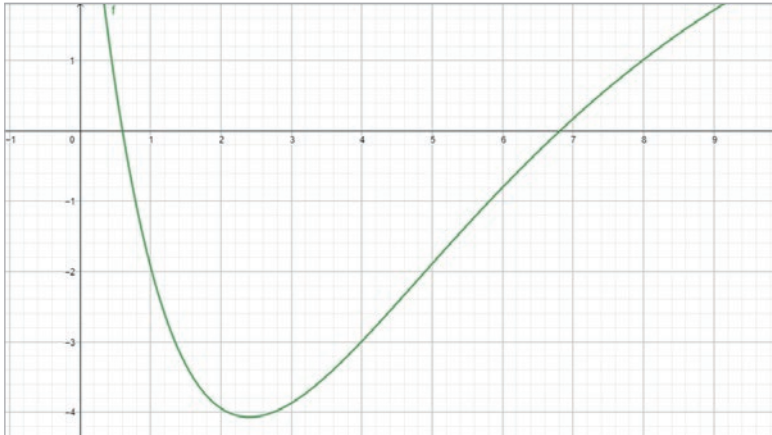
Que finalmente es una ecuación no lineal de una variable y que no es posible despejarla algebraicamente. Se usarán los algoritmos de bisección y el de Newton-Raphson para resolverla.

4 Este ejemplo está basado en el ejercicio 8.19, capítulo 8, de Chapra y Canale (2011).

Bisección

Se gráfica para determinar $[a, b]$ (ver figura 23).

Figura 23. Raíces de la función distancia



Nota. Figura de elaboración propia.

Tiene dos soluciones que matemáticamente son válidas porque satisfacen la igualdad, pero para la solución del problema de ingeniería se tomará únicamente la primera, ya que si no ocurre otra descarga de aguas residuales el nivel de oxígeno seguirá subiendo.

Tomaremos la primera: $a = 0.5$ y $b = 1$ (ver tabla 10):

Tabla 10. Aplicación del algoritmo de bisección para la función al iniciar en el intervalo $[0.5, 1]$

a	b	p_n	$f(a)$	$f(p_n)$	$f(a)*f(p_n)$	Tolerancia
0.5	1	0.75	0.649037215	-0.81850303	-0.53123893	
0.5	0.75	0.625	0.649037215	-0.13425786	-0.08713835	0.125
0.5	0.625	0.5625	0.649037215	0.24437328	0.15860736	0.0625
0.5625	0.625	0.59375	0.244373283	0.05188539	0.0126794	0.03125

Continúa tabla

a	b	p_n	f(a)	f(p_n)	f(a)*f(p_n)	Tolerancia
0.59375	0.625	0.609375	0.051885385	-0.04196931	-0.00217759	0.015625
0.59375	0.609375	0.6015625	0.051885385	0.00476103	0.00024703	0.0078125
0.6015625	0.609375	0.60546875	0.004761028	-0.01865324	-8.8809E-05	0.00390625
0.6015625	0.60546875	0.60351563	0.004761028	-0.0069584	-3.3129E-05	0.00195313
0.6015625	0.60351563	0.60253906	0.004761028	-0.00110176	-5.2455E-06	0.00097656
0.6015625	0.60253906	0.60205078	0.004761028	0.00182886	8.7073E-06	0.00048828
0.60205078	0.60253906	0.60229492	0.001828864	0.00036336	6.6453E-07	0.00024414
0.60229492	0.60253906	0.60241699	0.000363359	-0.00036925	-1.3417E-07	0.00012207
0.60229492	0.60241699	0.60235596	0.000363359	-2.9568E-06	-1.0744E-09	6.1035E-05
0.60229492	0.60235596	0.60232544	0.000363359	0.0001802	6.5477E-08	3.0518E-05
0.60232544	0.60235596	0.6023407	0.000180198	8.862E-05	1.5969E-08	1.5259E-05
0.6023407	0.60235596	0.60234833	8.862E-05	4.2831E-05	3.7957E-09	7.6294E-06
0.60234833	0.60235596	0.60235214	4.28314E-05	1.9937E-05	8.5394E-10	3.8147E-06
0.60235214	0.60235596	0.60235405	1.99373E-05	8.4903E-06	1.6927E-10	1.9073E-06
0.60235405	0.60235596	0.6023550	8.49026E-06	2.7667E-06	2.349E-11	9.5367E-07

Nota. La solución con seis decimales de precisión $x = 0.602355$ km, el nivel de oxígeno es $c = 5$. Tabla de elaboración propia.

Por Newton-Raphson como:

$$f(x) = 5 - 20(e^{-0.2x} - e^{-0.75x})$$

La derivada

$$f'(x) = 4e^{-0.2x} - 15e^{-0.75x}$$

En la tabla 11 se muestra la solución:

Tabla 11. Aplicación del algoritmo Newton-Raphson, para la función al iniciar en $x_i = 2$

xi	f(xi)	f'(xi)	x_{i-1}	Tolerancia
2	-3.943797718	-0.66567222	-3.92453404	
-3.92453404	340.7615423	-275.935386	-2.68960166	1.23493238
-2.68960166	121.0962937	-105.909081	-1.54620307	1.14339859
-1.54620307	41.528684	-42.3828046	-0.5663556	0.97984747
-0.5663556	13.18596154	-18.458762	0.14799142	0.71434702
0.14799142	3.482181061	-9.54082581	0.51296832	0.3649769
0.51296832	0.562866528	-6.59957965	0.59825656	0.08528824
0.59825656	0.024653942	-6.02801769	0.60234645	0.00408989
0.60234645	5.40772E-05	-6.00158798	0.60235546	9.0105E-06
0.60235546	2.61895E-10	-6.00152985	0.60235546	4.3638E-11

Nota. A pesar de que se aplicó Newton-Raphson, la convergencia fue lenta debido a que, si se observa en la tabla en $x = 2$, que fue donde se inició, la recta tangente en este punto corta el eje x en -3.92453404 , y después tiene que retomar lentamente a la primera raíz positiva. Este es un caso donde Newton-Raphson presenta una convergencia deficiente. Tabla de elaboración propia.

Si se inicia con $x = 3$ (ver tabla 12).

Tabla 12. Aplicación del algoritmo Newton-Raphson para la función al iniciar en $x_i = 3$

xi	f(xi)	f'(xi)	x_{i-1}	Tolerancia
3	-3.868248231	0.61425818	9.2974306	
9.2974306	1.903682434	0.60895904	6.17130504	3.12612556
6.17130504	-0.625603139	1.01765492	6.78605482	0.61474978

Continúa tabla

xi	f(xi)	f'(xi)	x_{i-1}	Tolerancia
6.78605482	-0.024335321	0.93709775	6.81202364	0.02596882
6.81202364	-4.60886E-05	0.93354705	6.812073	4.9369E-05
6.812073	-1.66791E-10	0.9335403	6.812073	1.7867E-10

Nota. Se llega a la otra raíz que satisface la ecuación en $x = 6.812073$. Tabla de elaboración propia.

Ejemplo 20.

Una aplicación Física

La velocidad de caída de un paracaidista está dada por:

$$v = \frac{g}{c} m \left(1 - e^{-\left(\frac{c}{m}\right)t} \right)$$

Donde $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ para el paracaidista, con un coeficiente de arrastre $c = 14 \text{ kg/s}$. Calcule la masa del paracaidista de tal forma que la velocidad sea $v = 35 \text{ m/s}$ en $t = 7 \text{ s}$ por los métodos de regla falsa y secante: $tol < 1 \cdot 10^{-6}$.

Solución

Si se reemplaza los datos dados del problema:

$$35 = \frac{9.8}{14} m \left(1 - e^{-\left(\frac{14}{m}\right)7} \right)$$

Si se iguala a cero y se simplifica:

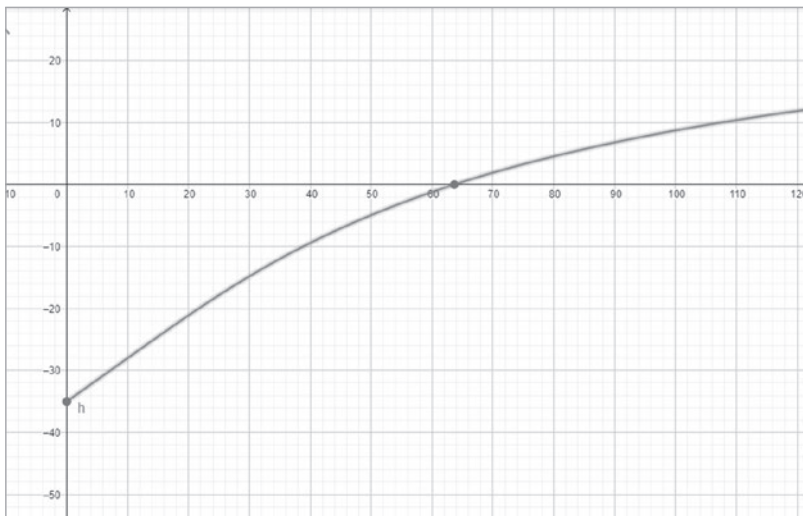
$$0.7m \left(1 - e^{-\frac{98}{m}} \right) - 35 = 0$$

Que escrito como función:

$$f(m) = 0.7m \left(1 - e^{-\frac{98}{m}} \right) - 35$$

Graficamos en la figura 24 para observar donde queda la raíz.

Figura 24. Raíz de la función masa del paracaidista



Nota. Figura de elaboración propia.

La tabla 13 muestra el ejercicio por el método de regla falsa:

Tabla 13. Aplicación del algoritmo de la regla falsa, para la función al iniciar en el intervalo $[60, 65]$

a	b	f(a)	f(b)	f(a)*f(b)	p_n	Tolerancia
60	65	-1.201657639	0.42537367	-0.51115352	63.692792	
60	63.692792	-1.201657639	0.01373311	-0.0165025	63.6510659	0.04172611
60	63.6510659	-1.201657639	0.00043786	-0.00052615	63.649736	0.00132988

Continúa tabla

a	b	f(a)	f(b)	f(a)*f(b)	p _n	Tolerancia
60	63.649736	-1.201657639	1.3955E-05	-1.6769E-05	63.6496936	4.2383E-05
60	63.6496936	-1.201657639	4.4473E-07	-5.3442E-07	63.6496923	1.3508E-06
60	63.6496923	-1.201657639	1.4174E-08	-1.7032E-08	63.6496922	4.3049E-08

Nota. La interpretación a la solución es que el paracaidista debe tener una masa de 63.649692 para que logre una velocidad de 35 m/s en un tiempo de siete segundos. Tabla de elaboración propia.

En la tabla 14 se muestra la solución por el método de la secante:

Tabla 14. Aplicación del algoritmo de la regla falsa, para la función al iniciar en $x_i = 70$ y $x_{i-1} = 60$

xi	xi-1	f(xi)	f'(xi-1)	x _n	Tolerancia
70	60	1.916748767	-1.20165764	63.85343500	
60	63.85343500	-1.201657639	0.06482834	63.65618702	0.19724798
63.853435	63.65618702	0.064828342	0.00207014	63.64968062	0.0065064
63.656187	63.64968062	0.002070136	-3.7001E-06	63.64969223	1.1608E-05
63.6496806	63.64969223	-3.70005E-06	2.1075E-10	63.64969223	6.6117E-10

Nota. La solución según la tolerancia solicitada se logra en menos iteraciones. Tabla de elaboración propia.

Ejemplo 21.

Una aplicación de Ingeniería Aeroespacial⁶

Los ingenieros aeroespaciales calculan las trayectorias de proyectiles. Proponemos aquí un problema típico de este campo: determinar la trayectoria de lanzamiento de una pelota de un jugador de béisbol que se encuentra en el jardín derecho y que está definida por las coordenadas x y y , y se modela como:

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2 + y_0$$

⁶ Este ejemplo está basado en el ejercicio 8.36, capítulo 8, de Chapra y Canale (2011).

Encuentre el ángulo inicial apropiado θ_0 , si $V_0 = 20\text{m/s}$, la distancia a la segunda base es de 40 m y $g = 9.8\text{ m/s}^2$. Observe que el lanzamiento sale de la mano derecha del jugador a una altura de 1.8 m, y que el jugador de la segunda base recibe la pelota a 1 m de altura.

Por el método de Newton-Raphson, $tol < = 1*10^{-6}$. Se reemplazan los valores:

$$1 = (\tan \theta_0)40 - \frac{9.8}{2 * 20^2 \cos^2 \theta_0} 40^2 + 1.8$$

Igualando a cero y simplificando.

$$(\tan \theta_0)40 - \frac{9.8}{2 * 20^2 \cos^2 \theta_0} 40^2 + 1.8 - 1 = 0$$

$$40(\tan \theta_0) - 19.6 \sec^2 \theta_0 + 0.8 = 0$$

Como función:

$$f(\theta_0) = 40(\tan \theta_0) - 19.6 \sec^2 \theta_0 + 0.8$$

La derivada:

$$f'(\theta_0) = 40 * (S \sec^2 \theta_0) - 39.2 * \tan \theta_0 \sec^2 \theta_0$$

La tabla para la solución es:

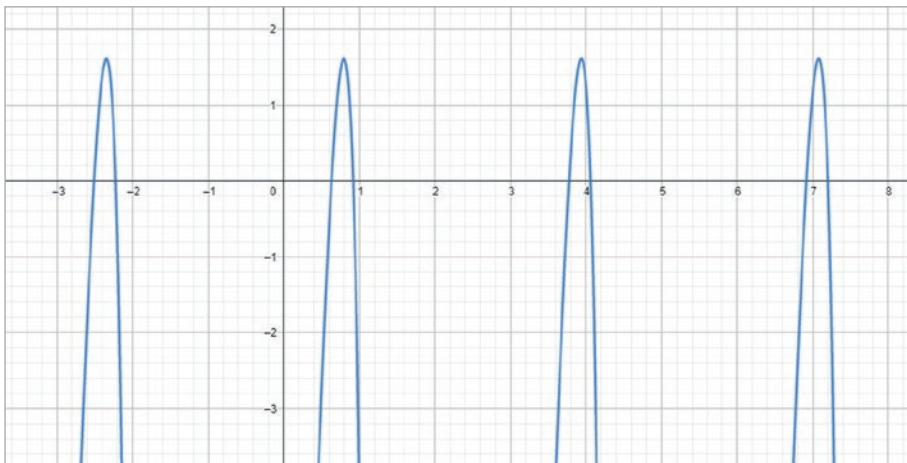
Tabla 15. Aplicación del algoritmo Newton-Raphson, para la función al iniciar en $x_i = 1$

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i-1}	Tolerancia
1	-4.043859902	-72.1084825	0.94391978	
0.94391978	-0.934195352	-41.0266054	0.9211493	0.02277048
0.9211493	-0.109014277	-31.7095988	0.9177114	0.0034379
0.9177114	-0.002205351	-30.4318852	0.91763894	7.2468E-05
0.91763894	-9.63764E-07	-30.4052894	0.9176389	3.1697E-08

Nota. El ángulo $\theta_0 = 0.9176389$ en radianes; si lo pasamos a sistema sexagesimal: $\theta_0 = 52^\circ 34' 36''$.
Tabla de elaboración propia.

Es importante resaltar que este problema tiene infinitas soluciones debido a que es una función periódica. Al respecto, ver la figura 25.

Figura 25. Infinitas raíces de $f(\theta)$.



Nota. Esta es función ángulo inicial de lanzamiento. Figura de elaboración propia.

Si se inicia en $x = 0.5$ (ver tabla 16).

Tabla 16. Aplicación del algoritmo Newton-Raphson, para la función al iniciar en $x_i = 0.5$

xi	f(xi)	f'(xi)	x_{i-1}	Tolerancia
0.5	-2.79745005	24.1315517	0.615925	
0.615925	-0.307531773	18.3944199	0.63264375	0.01671875
0.63264375	-0.008929992	17.3121983	0.63315957	0.00051582
0.63315957	-8.95848E-06	17.2774493	0.63316009	5.1851E-07
0.63316009	-9.0743E-12	17.2774143	0.63316009	5.2525E-13

Nota. El ángulo $\theta_0 = 0.63316009$ en radianes; si se pasa al sistema sexagesimal: $\theta_0 = 36^\circ 16' 39''$. Tabla de elaboración propia.

Actividades propuestas

- Hallar el valor de x para la siguiente ecuación $\text{Ce}^x - \cos x = 0$ por el método de bisección con una tolerancia $\leq 1 \cdot 10^{-6}$.
 - 0.35232
 - 0.64171
 - 0.54235
 - 0.91232
- Use el método de regla falsa para encontrar la solución a: $2 + \cos(e^x - 2) - e^x = 0$. tolerancia $\leq 1 \cdot 10^{-6}$.
 - 0.00876
 - 1.57079
 - 1.00762
 - 0.78539

3. Por el método de Newton-Raphson hallar la raíz positiva para la ecuación:
 $x \tan^{-1}(x/2) + \ln(x^2 + 4) - 3 = 0$, tolerancia $\leq 1 \cdot 10^{-6}$.

- a) 1.33846
- b) 1.74484
- c) 2.18308
- d) 1.62381

4. Hallar el valor de x por el método de la secante para la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - x \operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2} \cos(2x) = 0$$

Y tolerancia $\leq 1 \cdot 10^{-6}$.

- a) 0.56872
 - b) 1.89561
 - c) 1.56258
 - d) 1.35234
5. Encontrar la solución a la siguiente ecuación por el método de punto fijo y calcular la tabla con las cinco construcciones posibles.

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

6. Un abrevadero de longitud L tiene una sección transversal en forma de semicírculo con radio r (ver figura 26)⁷. Cuando se llena de agua hasta una distancia h de la parte superior, el volumen de agua está dado por:

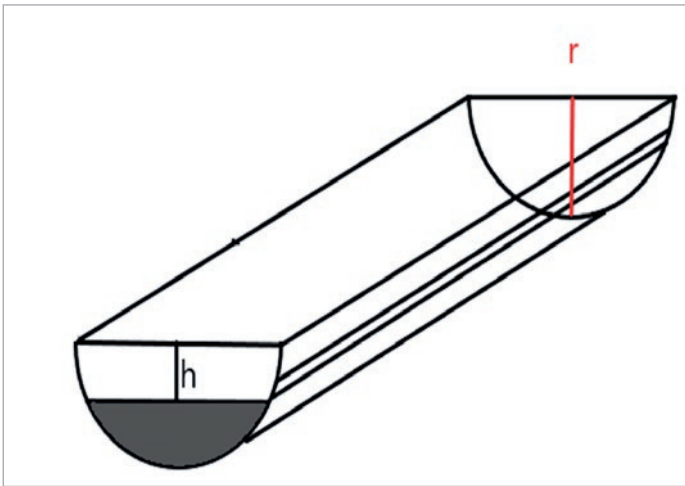
⁷ Adaptado de del ejercicio 17, capítulo 2, de Burden y Faires (2000, p. 54).

Un recipiente de longitud L posee una sección transversal de medio círculo de radio r , y la altura h , será la distancia entre el remate superior y la columna de agua. El volumen de agua está dado por:

$$V = L \left[0.5 * \pi * r^2 - r^2 \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{h}{r} \right) - h \left(r^2 - h^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Suponga que $L = 12$ ft, $r = 2$ ft, y que, $V = 18$ ft³. Determine la profundidad del agua en el abrevadero (ver figura 27) con una tolerancia de $1 * 10^{-6}$ por el método de Newton-Raphson.

Figura 26. Abrevadero.



Nota. El volumen depende de: h y r . Figura de elaboración propia.

7. La velocidad hacia arriba de un cohete se calcula con la siguiente fórmula⁸:

$$v = u \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - qt} \right) - gt$$

⁸ Adaptado del ejemplo PT.4.1 de Chapra y Canale (2000).

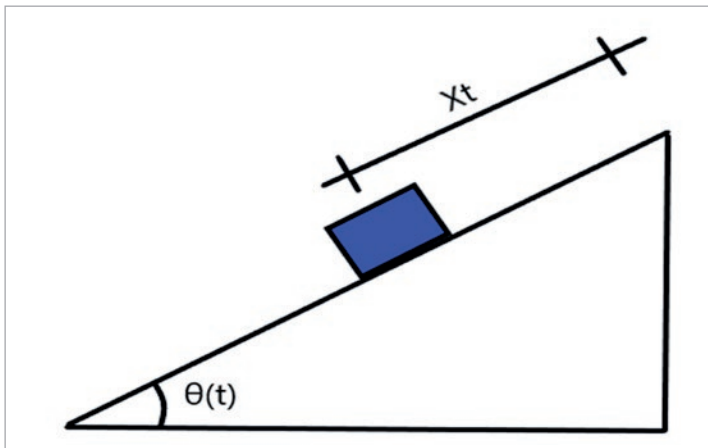
Donde v es velocidad del cohete hacia arriba; u , velocidad con la que el combustible sale del cohete; m_0 , masa inicial del cohete en el $t = 0$; q , consumo de combustible, y g , 9.8 m/s^2 . Si $u = 2500 \text{ m/s}$, $m_0 = 180\,000 \text{ kg}$ y $q = 2580 \text{ kg/s}$, calcule el tiempo en que $v = 1.200 \text{ m/s}$, con una tolerancia de $1 \cdot 10^{-6}$, por el método de Newton-Raphson.

$$\frac{d\theta}{dt} = w < 0$$

8. Un cuerpo que se desliza desde el reposo en un plano inclinado (ver figura 27), cambiando su ángulo constantemente se expresa así:

Una partícula parte del reposo sobre un plano inclinado informe, cuyo ángulo θ cambia con una rapidez constante de⁹:

Figura 27. Plano inclinado de ángulo variable.



Nota. Desplazamiento se da en función del tiempo y la velocidad angular. Figura de elaboración propia.

⁹ Adaptado del ejercicio 18, capítulo 2, de Burden y Faires (2000 p. 55).

Al final de t segundos, la posición del objeto está dada por:

$$x(t) = \frac{g}{2w^2} \left(\frac{e^{wt} - e^{-wt}}{2} - \text{sen}(wt) \right)$$

Suponga que la partícula se desplazó 1.9 pies en 1.03 s. Encuentre la rapidez w con que cambia θ . Suponga que $g = 32.17 \text{pies/s}^2$ por cualquier método con una tolerancia $\leq 1 \cdot 10^{-6}$.

CAPÍTULO 3

Solución de sistemas de ecuaciones lineales y no lineales

En ingeniería y ciencias es frecuente llegar a un sistema de ecuaciones lineales o no lineales como la solución completa o parcial de un problema. En las asignaturas de Álgebra Lineal y Cálculo Multivariado se abordaron las soluciones analíticas a dichos problemas; pero en la mayoría de problemas de aplicación, cuando hay sistemas de ecuaciones lineales grandes ($n > 6$), la solución requiere bastante memoria del computador. Por esto es costoso y difícil realizar, dado que métodos analíticos como el de Gauss-Jordan requieren de muchas operaciones que en las iteraciones generan errores de truncamiento y redondeo. El trabajo en una computadora con los métodos de eliminación (vistos en Álgebra Lineal) con gran número de operaciones por ejecutar puede producir errores de redondeo y de truncamiento. Otra técnica consiste en aproximar la solución mediante alguna combinación de valores iniciales, la cual se describe en esta unidad. Para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales por métodos iterativos se trabajará el método de Newton-Raphson en distintas variables.

El objetivo de esta unidad es solucionar sistemas de ecuaciones lineales y no lineales por métodos iterativos. Aquí se propone utilizar técnicas iterativas de Jacobi y Gauss-Seidel para la solución de sistemas de ecuaciones lineales; programar y aplicar la solución de los métodos iterativos; resolver problemas de aplicación a la ingeniería y ciencias, y resolver un sistema de ecuaciones no lineales por el método de Newton-Raphson.

Métodos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales

Los métodos iterativos permiten el cálculo de la solución de un sistema sin aplicar modelos matriciales, los cuales tienen restricciones cuando sus dimensiones son relativamente grandes.

Método de Jacobi

Este método iterativo establece el algoritmo que transforma un sistema $Ax = b$ en otro equivalente de la forma $x = Tx + c$, en este se selecciona un vector inicial con cualquier real, y posteriormente se genera la sucesión de los vectores con la aproximación de acuerdo con la tolerancia solicitada. El algoritmo es un proceso que convierte el sistema $Ax = b$ en otro equivalente de la forma $x = Tx + c$ para una matriz fija T y un vector c . Luego de seleccionar el vector inicial x_0 , la sucesión de los vectores de la solución aproximada se genera calculando:

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$$

Para $k = 1, 2, 3$ la tolerancia determina cuándo terminar las iteraciones. Es importante tener en cuenta que la matriz de los coeficientes del sistema inicial debe ser dominante en la diagonal; si esto no ocurre, no se garantiza la convergencia, es decir:

$$|a_{i,i}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$$

Ejemplo 1

La manera de solucionar por el método de Jacobi el sistema:

$$\begin{aligned} 7x - 2y + 4z &= 3 \\ 2x - 4y - z &= -2 \\ -x - 4y + 6z &= 1 \end{aligned}$$

Con $tol < 1 * 10^{-6}$, el proceso para la solución del sistema de ecuaciones es el siguiente:

Antes de aplicar el método se debe determinar si el conjunto de ecuaciones dadas tiene diagonal dominante. La matriz por evaluar es la siguiente (matriz de los coeficientes de las variables):

$$\begin{array}{ccc} \frac{7}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{2} & -4 & -\frac{5}{7} \\ -1 & -4 & 6 \end{array}$$

Partiendo de una matriz general de $3 * 3$:

$$\begin{array}{ccc} F1, C1 & F1, C2 & F1, C3 \\ F2, C1 & F2, C2 & F2, C3 \\ F3, C1 & F3, C2 & F3, C3 \end{array}$$

La matriz es dominante solo si cumple que:

$$|(F1, C1)| \geq |F1, C2 + F1, C3| ;$$

$$|(F2, C2)| \geq |F2, C1 + F2, C3| ;$$

$$|(F3, C3)| \geq |F3, C1 + F3, C2|$$

Se verifica si la matriz de coeficientes es dominante.

Para la primera fila:

$$\begin{array}{l} |7| > |-2| + |4| \\ 7 > 6 \end{array}$$

Para la segunda fila:

$$\begin{aligned} |-4| &> |2| + |-1| \\ 4 &> 3 \end{aligned}$$

Para la tercera fila:

$$\begin{aligned} |6| &> |-1| + |-4| \\ 6 &> 5 \end{aligned}$$

Como se observa, la matriz de coeficientes cumple con los requisitos, por lo tanto se puede aplicar el algoritmo.

Si en alguna de las filas se incumple, se pueden intercambiar filas o columnas hasta que se verifique la condición. Si no es posible, muy seguramente no habrá convergencia.

Se toman las ecuaciones por la diagonal dominante y se despejan así: en la primera ecuación se despeja x , en la segunda ecuación se despeja y , y se despeja la tercera ecuación respecto a z .

a) La solución aproximada se obtiene al despejar para cada ecuación, así

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{7}y - \frac{4}{7}z + \frac{3}{7} \\ y &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}z + \frac{1}{2} \\ z &= \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

b) Se establecen unos valores iniciales generalmente $x = y = z = 0$. Y así se procede con la primera iteración:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{7}0 - \frac{4}{7}0 + \frac{3}{7} = 0.4285714285 \\ y &= \frac{1}{2}0 - \frac{1}{4}0 + \frac{1}{2} = 0.5 \\ z &= \frac{1}{6}0 + \frac{2}{3}0 + \frac{1}{6} = 0.1666666666 \end{aligned}$$

La segunda iteración:

$$x = \frac{2}{7} \cdot 0.5 - \frac{4}{7} \cdot 0.1666666666 + \frac{3}{7} = 0.47619048$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot 0.4285714285 - \frac{1}{4} \cdot 0.1666666666 + \frac{1}{2} = 0.67261905$$

$$z = \frac{1}{6} \cdot 0.4285714285 + \frac{2}{3} \cdot 0.5 + \frac{1}{6} = 0.57142857$$

Las tolerancias:

Para x

$$|0.47619048 - 0.4285714285| = 0.04761905$$

Para y

$$|0.67261905 - 0.5| = 0.17261905$$

Para z

$$|0.57142857 - 0.1666666666| = 0.4047619$$

Y así sucesivamente se va construyendo la tabla hasta llegar a la tolerancia requerida:

Tabla 17. Iteraciones por el método de Jacobi

Iteración	0	1	2	27	28	29	Iteración
x	0	0.4285714	0.4761904	0.2612598	0.26126123	0.26126181	x
y	0	0.5	0.67261905	0.495494	0.49549494	0.49549579	y
z	0	0.16666667	0.57142857	0.54053985	0.5405393	0.54054016	z
Tolerancia x		0.42857143	0.04761905	4.0379E-07	1.4288E-06	5.8395E-07	Tolerancia x
Tolerancia y		0.5	0.17261905	9.2668E-07	9.4283E-07	8.5203E-07	Tolerancia y
Tolerancia z		0.16666667	0.4047619	2.9638E-06	5.5049E-07	8.6669E-07	Tolerancia z

Nota. Con lo cual se obtienen los valores según las tolerancias solicitadas. Se omitieron las iteraciones desde la tres a la veintiséis, ya que a partir de la veintisiete se alcanza la tolerancia requerida. Tabla de elaboración propia.

Método de Gauss-Seidel

Es similar al método de Jacobi; aunque la diferencia está en que para el cálculo sucesivo de las variables se calculan con base en la anterior, lo que garantiza que la convergencia sea mucho más rápida.

Ejemplo 2

La manera de solucionar el sistema por el método de Gauss-Seidel:

$$7x - 2y + 4z = 3$$

$$2x - 4y - z = -2$$

$$-x - 4y + 6z = 1$$

- Al tratarse del mismo ejemplo anterior, ya queda garantizado que la matriz de los coeficientes es dominante en la diagonal.
- La solución aproximada se obtiene igual que en el método de Jacobi:

$$x = \frac{2}{7}y - \frac{4}{7}z + \frac{3}{7}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{6}$$

- Se establecen unos valores iniciales generalmente $x = y = z = 0$. Así se procede con la primera iteración que cambia con respecto al método de Jacobi:

$$x = \frac{2}{7}0 - \frac{4}{7}0 + \frac{3}{7} = 0.4285714285$$

$$y = \frac{1}{2}0.4285714285 - \frac{1}{4}0 + \frac{1}{2} = 0.71428571$$

$$z = \frac{1}{6}0.4285714285 + \frac{2}{3}0.71428571 + \frac{1}{6} = 0.71428571$$

Con estos valores se ingresa a la tercera iteración y se organizan en la tabla 18 para obtener las tolerancias solicitadas:

Tabla 18. Iteraciones por el método de Gauss-Seidel

Iteración	0	1	2	3	12	Iteración
x	0	0.4285714	0.2244898	0.2706511	0.261261202166	x
y	0	0.7142857	0.4336734	0.5120262	0.495495390456	y
z	0	0.7142857	0.4931972	0.5531260	0.540540460665	z
Tolerancia x		0.4285714	0.2040816	0.0461613	2.82504E-07	Tolerancia x
Tolerancia y		0.7142857	0.2806122	0.0783527	5.02135E-07	Tolerancia y
Tolerancia z		0.7142857	0.22108844	0.05992873	3.81841E-07	Tolerancia z

Nota. Como se observa, se necesitaron solamente doce iteraciones para obtener la tolerancia, mientras que en el método de Jacobi fueron necesarias 29 iteraciones. Tabla de elaboración propia.

Ejemplo 3

La manera de solucionar el siguiente sistema de ecuaciones por Jacobi y Gauss-Seidel hasta una tolerancia de $1 \cdot 10^{-6}$ es:

$$\begin{aligned} \frac{7}{10}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{20}z &= 3 \\ \frac{1}{2}x - 4y - \frac{5}{7}z &= -2 \\ -x - 4y + 6z &= 1 \end{aligned}$$

Antes de aplicar los métodos, se debe determinar si el conjunto de ecuaciones organizadas tiene diagonal dominante. La matriz por evaluar es la siguiente (matriz de los coeficientes de las variables):

$$\begin{array}{ccc} \frac{7}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{2} & -4 & -\frac{5}{7} \\ -1 & -4 & 6 \end{array}$$

Partiendo de una matriz general de $3 * 3$.

$$\begin{array}{ccc} F1, C1 & F1, C2 & F1, C3 \\ F2, C1 & F2, C2 & F2, C3 \\ F3, C1 & F3, C2 & F3, C3 \end{array}$$

La matriz es dominante solo si cumple que

$$|(F1, C1)| \geq |F1, C2 + F1, C3|;$$

$$|(F2, C2)| \geq |F2, C1 + F2, C3|;$$

$$|(F3, C3)| \geq |F3, C1 + F3, C2|$$

Se comprueba si la matriz de coeficientes es dominante

$$\left| \frac{7}{10} \right| \geq \left| -\frac{1}{5} + \frac{1}{20} \right|;$$

$$|-4| \geq \left| \frac{1}{2} - \frac{5}{7} \right|;$$

$$|6| \geq |-1 - 4|$$

$$\left| \frac{7}{10} \right| \geq \left| -\frac{3}{20} \right| = \frac{3}{20};$$

$$|-4| = 4 \geq \left| -\frac{3}{14} \right| = \frac{3}{14};$$

$$|6| \geq |-5| = 5$$

Como se puede observar, la matriz de coeficientes cumple con los requisitos, por lo tanto, se garantiza la convergencia.

Se toma cada una de las ecuaciones y se despeja respecto a una variable determinada. En la primera ecuación se despeja x ; en la segunda, y , y en la tercera, z .

Primera ecuación

$$\frac{7}{10}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{20}z = 3$$

$$x = \frac{30}{7} + \frac{2}{7}y - \frac{1}{14}z$$

Segunda ecuación

$$\frac{1}{2}x - 4y - \frac{5}{7}z = -2$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x - \frac{5}{28}z$$

Tercera ecuación

$$-x - 4y + 6z = 1$$

$$z = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}y$$

Por el método de Jacobi

Se construye la tabla de Jacobi, asignando un valor cualquiera para las tres variables: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

	A	B	C
22	X	Y	Z
23	1	2	3

En la celda en la cual se encuentra el valor de x se coloca la ecuación de x (primera ecuación) despejada. En este caso los valores de y y z serán tomados por los valores asignados 2 y 3.

	A	B	C
24	$= (30/7) + ((2/7)*B23) - ((1/14)*C23)$		

Primer valor para x :

	A
24	4,64285714

Se repite este mismo procedimiento con cada una de las ecuaciones despejadas para y , z tomando los valores de x , y , y z asignados en los casos en donde sean necesarios. Para y :

	B	C	E
24	$= (1/2) + ((1/8)*A23) - ((5/28)*C23)$		

El primer valor para y :

	B
24	0,08928571

Para z :

	C	D	E
24	$= (1/6) + ((1/6)*A23) + ((2/3)*B23)$		

Primera iteración para z :

	C
24	1,66666667

Los valores asignados y la primera iteración en la tabla de Jacobi son los siguientes:

	A	B	C
22	X	Y	Z
23	1	2	3
24	4,64285714	0,08928571	1,66666667

Al haber dos valores para las variables, se calcula la tolerancia de la siguiente manera:

$$\text{Tolerancia} = |P_n - P_{n-1}|$$

	A	B	C	D
22	X	Y	Z	Tolerancia X Tc
23	1	2	3	
24	4,64285714	0,08928571	1,66666667	=ABS(A24-A23)

La tolerancia para «y» se calcula así:

	B	C	D	E
22	Y	Z	Tolerancia X	Tolerancia Y Tc
23	2	3		
24	0,08928571	1,66666667	3,64285714	=ABS(B24-B23)

Tolerancia para «z»:

	C	D	E	F
22	Z	Tolerancia X	Tolerancia Y	Tolerancia Z
23	3			
24	1,66666667	3,64285714	1,91071429	=ABS(C24-C23)

Cabe aclarar que cada variable es independiente. Por lo tanto, el cálculo de la tolerancia solo se realizará entre valores x , valores y , y valores z , obteniendo tres tolerancias por separado (una para cada variable) como se ve a continuación:

	A	B	C	D	E	F
22	X	Y	Z	Tolerancia X	Tolerancia Y	Tolerancia Z
23	1	2	3			
24	4,64285714	0,08928571	1,66666667	3,64285714	1,91071429	1,33333333

Así se realizan las iteraciones necesarias hasta que las tres tolerancias cumplan con el valor pedido ($1 \cdot 10^{-6}$).

	A	B	C	D	E	F
22	X	Y	Z	Tolerancia X	Tolerancia Y	Tolerancia Z
23	1	2	3			
24	4,64285714	0,08928571	1,66666667	3,64285714	1,91071429	1,33333333
25	4,19217687	0,7827381	1	0,45068027	0,69345238	0,66666667

	A	B	C	D	E	F
38	4,41072787	0,79559376	1,43218379	1,7976E-07	8,5129E-08	7,5593E-07

Los resultados son $x = 4.41072$, $y = 0.79559$, $z = 1.43218$, acordes con la tolerancia pedida.

Por el método de Gauss-Siedel

Se parte de las mismas ecuaciones despejadas anteriormente:

$$\frac{7}{10}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{20}z = 3$$

$$x = \frac{30}{7} + \frac{2}{7}y - \frac{1}{14}z$$

$$\frac{1}{2}x - 4y - \frac{5}{7}z = -2$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x - \frac{5}{28}z$$

$$-x - 4y + 6z = 1$$

$$z = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}y$$

Se construye la tabla de Gauss-Siedel asignando un valor cualquiera para las tres variables: ($x = 1$), ($y = 2$), ($z = 3$).

	A	B	C
22	X	Y	Z
23	1	2	3

En la celda en la cual se encuentra el valor de x colocaremos la ecuación de x (primera ecuación) despejada. En este caso los valores de y y z serán tomados por nuestros valores asignados (2, 3).

	A	B	C
22	X	Y	Z
23	1	2	3
24	$= (30/7) + (2/7) * B23 - (1/14) * C23$		

Primera iteración para «x».

	A
22	X
23	1
24	4,64285714

Se repite el procedimiento con cada una de las ecuaciones despejadas para y y para z ; pero en este caso se toman los valores obtenidos en la iteración, y no los que fueron asignados inicialmente. Esta diferencia entre el método de Gauss-Siedel y el de Jacobi hace que en el primero se necesiten menos iteraciones para llegar a una tolerancia pedida.

Para y :

	A	B	C	Tol.
22	X	Y	Z	
23	1	2	3	
24	4,64285714	$= 1/2 + (1/8) * A24 - (5/28) * C23$		

El resultado es:

	A	B
22	X	Y
23	1	2
24	4,64285714	0,54464286

Para z:

	A	B	C	D
22	X	Y	Z	Tolerancia X To
23	1	2	3	
24	4,64285714	0,54464286	=1/6 + (1/6)*A24 + (2/3)*B24	

Primera iteración para z:

	A	B	C
22	X	Y	Z
23	1	2	3
24	4,64285714	0,54464286	1,30357143

La tabla de Gauss-Siedel con los valores asignados y la primera iteración es la siguiente:

	A	B	C
22	X	Y	Z
23	1	2	3
24	4,64285714	0,54464286	1,30357143

Al haber dos valores para las variables, se calcula la tolerancia de la siguiente manera:

$$Tolerancia = |P_n - P_{n-1}|$$

	A	B	C	D
22	X	Y	Z	Tolerancia X Tc
23	1	2	3	
24	4,64285714	0,54464286	1,30357143	=ABS(A24-A23)

Cálculo de la tolerancia para y:

	B	C	D	E
22	Y	Z	Tolerancia X	Tolerancia Y
23	2	3		
24	0,54464286	1,30357143	3,642857143	=ABS(B24-B23)

Tolerancia para z:

	C	D	E	F
22	Z	Tolerancia X	Tolerancia Y	Tolerancia Y
23	3			
24	1,30357143	3,642857143	1,45535714	=ABS(C24-C23)

Cabe aclarar que cada variable es independiente. Por lo tanto, el cálculo de la tolerancia solo se realizará entre valores x , valores y , y valores z , obteniendo tres tolerancias por separado (una para cada variable), como se ve a continuación:

	A	B	C	D	E	F
22	X	Y	Z	Tolerancia X	Tolerancia Y	Tolerancia Y
23	1	2	3			
24	4,64285714	0,54464286	1,30357143	3,642857143	1,45535714	1,69642857

Así, se realizan las iteraciones necesarias hasta que las tres tolerancias cumplan con el valor solicitado $< 1 \cdot 10^{-6}$.

	A	B	C	D	E	F
22	X	Y	Z	Tolerancia X	Tolerancia Y	Tolerancia Y
23	1	2	3			
24	4,64285714	0,54464286	1,30357143	3,642857143	1,45535714	1,69642857
25	4,34821429	0,81074617	1,4318665	0,294642857	0,26610332	0,12829507

Los resultados según las tolerancias solicitadas:

	A	B	C	D	E	F
30	4,41072797	0,79559373	1,43218382	3,90479E-06	3,2636E-07	8,6837E-07
31	4,41072794	0,79559388	1,43218391	3,12191E-08	1,5116E-07	9,5573E-08

Por lo tanto, $x = 4.41072$, $y = 0.79559$ y $z = 1.43218$, acorde con la tolerancia solicitada.

Método de Newton para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales

Algoritmo:

$$\begin{bmatrix} X_1^K \\ X_2^K \\ X_3^K \\ \cdot \\ \cdot \\ X_N^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(K-1)} \\ X_2^{(K-1)} \\ X_3^{(K-1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ X_N^{(K-1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_1^{(K-1)} \\ Y_2^{(K-1)} \\ Y_3^{(K-1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_N^{(K-1)} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} X_1^K \\ X_2^K \\ X_3^K \\ \cdot \\ \cdot \\ X_N^K \end{bmatrix} = \text{iteración } K \text{ ésima del sistema}$$

$$\begin{bmatrix} X_1^{(K-1)} \\ X_2^{(K-1)} \\ X_3^{(K-1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ X_N^{(K-1)} \end{bmatrix} = \text{iteración anterior a la } K \text{ ésima del sistema}$$

Teniendo en cuenta:

$$\begin{bmatrix} Y_1^{(K-1)} \\ Y_2^{(K-1)} \\ Y_3^{(K-1)} \\ \vdots \\ Y_N^{(K-1)} \end{bmatrix} = \left(J(X_1^{K-1}, X_2^{K-1}, X_3^{K-1}, \dots, X_N^{K-1}) \right)^{-1} * \begin{bmatrix} F_1(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^{K-1} \\ F_2(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^{K-1} \\ F_3(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^{K-1} \\ \vdots \\ F_N(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^{K-1} \end{bmatrix}$$

Y (J) el jacobiano se define como:

$$\left(J(X_1^{K-1}, X_2^{K-1}, X_3^{K-1}, \dots, X_N^{K-1}) \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^{K-1}}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^{K-1}}{\partial X_2} & \frac{\partial F_1(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^{K-1}}{\partial X_3} & \dots & \frac{\partial F_1(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^{K-1}}{\partial X_N} \\ \frac{\partial F_2(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^{K-1}}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^{K-1}}{\partial X_2} & \frac{\partial F_2(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^{K-1}}{\partial X_3} & \dots & \frac{\partial F_2(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^{K-1}}{\partial X_N} \\ \frac{\partial F_3(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^{K-1}}{\partial X_1} & \frac{\partial F_3(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^{K-1}}{\partial X_2} & \frac{\partial F_3(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^{K-1}}{\partial X_3} & \dots & \frac{\partial F_3(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^{K-1}}{\partial X_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_N(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^{K-1}}{\partial X_1} & \frac{\partial F_N(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^{K-1}}{\partial X_2} & \frac{\partial F_N(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^{K-1}}{\partial X_3} & \dots & \frac{\partial F_N(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)^{K-1}}{\partial X_N} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4

Si se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \cos(\ln(x_1)) + x_2^2 - 2 &= 0 \\ \sqrt{x_1 * x_2} - x_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

En dos ecuaciones con dos incógnitas, si se aplica el algoritmo, el modelo será:

$$\begin{bmatrix} X_1^K \\ X_2^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(K-1)} \\ X_2^{(K-1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_1^{(K-1)} \\ Y_2^{(K-1)} \end{bmatrix}$$

Como valores para la primera iteración se toman valores que estén en el dominio de la función:

$$\begin{bmatrix} X_1^{(K-1)} \\ X_2^{(K-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Para la segunda matriz tendremos:

$$\begin{bmatrix} Y_1^{(K-1)} \\ Y_2^{(K-1)} \end{bmatrix} = (J(X_1^{K-1}, X_2^{K-1}))^{-1} * \begin{bmatrix} F_1(X_1, X_2)^{K-1} \\ F_2(X_1, X_2)^{K-1} \end{bmatrix}$$

El jacobiano para este sistema será:

$$(J(X_1^{K-1}, X_2^{K-1})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(X_1, X_2)^{K-1}}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1(X_1, X_2)^{K-1}}{\partial X_2} \\ \frac{\partial F_2(X_1, X_2)^{K-1}}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2(X_1, X_2)^{K-1}}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\ln(X_1)) * \frac{1}{X_1} & , 2X_2 \\ \frac{X_2}{2\sqrt{X_1 X_2}} - 2X_1 & , \frac{X_1}{2\sqrt{X_1 X_2}} \end{bmatrix}$$

Se evalúa con los mismos valores de la matriz inicial:

$$(J(0.5, 0.5)) = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\ln(X_1)) * \frac{1}{X_1} & , 2X_2 \\ \frac{X_2}{2\sqrt{X_1 X_2}} - 2X_1 & , \frac{X_1}{2\sqrt{X_1 X_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\ln(0.5)) * \frac{1}{0.5} & , 2 * 0.5 \\ \frac{0.5}{2\sqrt{0.5 * 0.5}} - 2 * 0.5 & , \frac{0.5}{2\sqrt{0.5 * 0.5}} \end{bmatrix}$$

Se obtiene:

$$(J(0.5, 0.5)) = \begin{vmatrix} 1.27792255 & 1 \\ -0.5 & 0.5 \end{vmatrix}$$

La inversa del jacobiano:

$$(J(0.5,0.5))^{-1} = \begin{vmatrix} 0.43899649 & -0.87799298 \\ 0.43899649 & 1.12200702 \end{vmatrix}$$

Las funciones evaluadas en los valores iniciales

$$\begin{bmatrix} F_1(X_1, X_2)^{K-1} \\ F_2(X_1, X_2)^{K-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\ln(x_1)) + x_2^2 - 2 \\ \sqrt{x_1 * x_2} - x_1^2 \end{bmatrix}$$

Se reemplazan:

$$\begin{bmatrix} F_1(0.5,0.5)^{K-1} \\ F_2(0.5,0.5)^{K-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\ln(0.5)) + 0.5^2 - 2 \\ \sqrt{0.5 * 0.5} - 0.5^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1(0.5,0.5)^{K-1} \\ F_2(0.5,0.5)^{K-1} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -0.9807611 \\ 0.25 \end{vmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} Y_1^{(K-1)} \\ Y_2^{(K-1)} \end{bmatrix} = (J(X_1^{K-1}, X_2^{K-1}))^{-1} * \begin{bmatrix} F_1(X_1, X_2)^{K-1} \\ F_2(X_1, X_2)^{K-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1^{(K-1)} \\ Y_2^{(K-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.43899649 & -0.87799298 \\ 0.43899649 & 1.12200702 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -0.9807611 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

Se obtiene:

$$\begin{bmatrix} Y_1^{(K-1)} \\ Y_2^{(K-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.65004892 \\ -0.15004892 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(K-1)} \\ X_2^{(K-1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_1^{(K-1)} \\ Y_2^{(K-1)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.65004892 \\ -0.15004892 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.15004892 \\ 0.65004892 \end{bmatrix}$$

Este resultado ingresa a la segunda iteración y así se continúa hasta obtener la tolerancia solicitada. Por lo tanto, la matriz Y :

$$\begin{bmatrix} Y_1^2 \\ Y_2^2 \end{bmatrix} = (J(X_1^2, X_2^2))^{-1} * \begin{bmatrix} F_1(X_1, X_2)^2 \\ F_2(X_1, X_2)^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1^2 \\ Y_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.08463535 \\ -0.44376507 \end{bmatrix}$$

El resultado de la segunda iteración:

$$\begin{bmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_1^2 \\ Y_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.06541357 \\ 1.093814 \end{bmatrix}$$

En Excel se puede programar la tabla 19 que contenga:

Tabla 19. Solución de sistemas de ecuaciones no lineales por Newton

X_1^{k-1}, X_2^{k-1}	Jacobiano		Inversa del jacobiano		$F_{1,2}(X_1, X_2)^{k-1}$	$Y_{1,2}^{(k-1)}$	X_1^k, X_2^k	Tolerancia
0.5	1.2779226	1	0.4389965	-0.877993	-0.980761	-0.650049	1.1500489	0.65004892
0.5	-0.5	0.5	0.4389965	1.122007	0.25	-0.150049	0.6500489	0.15004892
1.1500489	-0.121168	1.3000978	0.2746956	-0.536998	-0.587193	0.0846353	1.0654136	0.08463535
0.6500489	-1.924187	0.6650513	0.7947743	-0.050048	-0.457981	-0.443765	1.093814	0.44376507
1.0654136	-0.059433	2.187628	0.1400368	-0.620809	0.1944223	0.0617344	1.0036792	0.06173439
1.093814	-1.624207	0.4934662	0.4609206	-0.016866	-0.055586	0.0905507	1.0032632	0.09055075
1.0036792	-0.003659	2.0065265	0.1654366	-0.663768	0.0065304	0.0036695	1.0000096	0.00366953
1.0032632	-1.507462	0.5001036	0.4986754	-0.00121	-0.003901	0.0032613	1.000002	0.00326127
1.0000096	-9.65E-06	2.000004	0.1666649	-0.666658	3.953E-06	9.649E-06	1	9.6494E-06
1.000002	-1.500021	0.5000019	0.4999998	-3.22E-06	-1.35E-05	1.976E-06	1	1.9763E-06
1	-5.99E-11	2	0.1666667	-0.666667	-4.26E-11	5.987E-11	1	5.9872E-11
1	-1.5	0.5	0.5	-2E-11	-1E-10	-2.13E-11	1	2.1324E-11

Nota. La solución en la sexta iteración con una tolerancia $<1*10^{-6}$ es $x_1 = 1$, $y_2 = 1$

Ejemplo 5

Aquí se explica la manera de solucionar el siguiente sistema de ecuaciones, iniciando con $x = 0.5$ y $y = 1.7$ con una tolerancia de $<1*10^{-6}$ e:

$$F1. \operatorname{sen}\left(\ln\left(\frac{x}{x+y}\right)\right) - \sqrt{xy} + 2.30479064 = 0$$

$$F2. \tan^{-1}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + e^{-xy} - 0.332730843 = 0$$

Para construir el jacobiano se derivan parcialmente cada una de las funciones respecto a sus variables dependientes:

$$\frac{\partial F1}{\partial x} = \text{sen} \left(\ln \left(\frac{x}{x+y} \right) \right) - \sqrt{xy} + 2.30479064$$

$$\frac{\partial F1}{\partial x} = \cos \left(\ln \left(\frac{x}{x+y} \right) \right) * \frac{1}{\frac{x}{x+y}} * \frac{(x+y) - (x)}{(x+y)^2} - \frac{1 * y}{2\sqrt{xy}}$$

$$\frac{\partial F1}{\partial x} = \cos \left(\ln \left(\frac{x}{x+y} \right) \right) * \frac{1}{x} * \frac{y}{(x+y)} - \frac{y}{2\sqrt{xy}}$$

$$\frac{\partial F1}{\partial x} = \cos \left(\ln \left(\frac{x}{x+y} \right) \right) * \frac{y}{x * (x+y)} - \frac{y}{2\sqrt{xy}}$$

$$\frac{\partial F1}{\partial y} = \text{sen} \left(\ln \left(\frac{x}{x+y} \right) \right) - \sqrt{xy} + 2.30479064$$

$$\frac{\partial F1}{\partial y} = \cos \left(\ln \left(\frac{x}{x+y} \right) \right) * \frac{1}{\frac{x}{x+y}} * x * ((x+y)^{-1})' - \frac{1 * x}{2\sqrt{xy}}$$

$$\frac{\partial F1}{\partial y} = -\cos \left(\ln \left(\frac{x}{x+y} \right) \right) * \frac{1}{x+y} - \frac{1 * x}{2\sqrt{xy}}$$

$$\frac{\partial F2}{\partial x} = \tan^{-1} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + e^{-xy} - 0.332730843$$

$$\frac{\partial F2}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)^2} * \frac{(x^2 + y^2) - (2x) * x}{(x^2 + y^2)^2} - y * e^{-xy}$$

$$\frac{\partial F2}{\partial x} = \frac{1}{\frac{(x^2 + y^2)^2 + x^2}{(x^2 + y^2)^2}} * \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} - y * e^{-xy}$$

$$\frac{\partial F2}{\partial x} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2 + x^2} * \frac{y^2 - x^2}{1} - y * e^{-xy}$$

$$\frac{\partial F2}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2 + x^2} - y * e^{-xy}$$

$$\frac{\partial F2}{\partial y} = \tan^{-1}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + e^{-xy} - 0.332730843$$

$$\frac{\partial F2}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2} * x * ((x^2 + y^2)^{-1})^{-1} + -x * e^{-xy}$$

$$\frac{\partial F2}{\partial y} = \frac{1}{\frac{(x^2 + y^2)^2 + x^2}{(x^2 + y^2)^2}} * -x * (x^2 + y^2)^{-2} * 2y - x * e^{-xy}$$

$$\frac{\partial F2}{\partial y} = \frac{1}{\frac{(x^2 + y^2)^2 + x^2}{(x^2 + y^2)^2}} * -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - x * e^{-xy}$$

$$\frac{\partial F2}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2 + x^2} - x * e^{-xy}$$

Siendo el jacobiano:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F1}{\partial x} & \frac{\partial F1}{\partial y} \\ \frac{\partial F2}{\partial x} & \frac{\partial F2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \left(\cos\left(\ln\left(\frac{x}{x+y}\right)\right) * \frac{y}{x * (x+y)} - \frac{y}{2\sqrt{xy}} \right) ; \cos\left(\ln\left(\frac{x}{x+y}\right)\right) * -\frac{1}{x+y} * -\frac{x}{2\sqrt{xy}} \\ \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2 + x^2} - y * e^{-xy} ; \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2 + x^2} - x * e^{-xy} \end{bmatrix}$$

Con los valores iniciales se calculan los valores en la matriz del jacobiano.

	A	B	C
12	Xi,Yi	Jacobiano	
13	H5	=COS(LN(A13/(A13+A14))) * (A14/((A13+A14)*A13)) - (A14/(2*RAIZ(A14*A13)))	=COS(LN(A13/(A13+A14))) * (-1)/(A13+A14) - (A13/(2*RAIZ(A13*A14)))
14	H6	=((A14^2 - A13^2)/((A13^2 + A14^2)^2 + A13^2)) - (A14*EXP(-A13*A14))	=((-2*A13*A14)/((A13^2 + A14^2)^2 + A13^2)) - (A13*EXP(-A13*A14))

Las derivadas evaluadas en x_i y y_i :

	A	B	C
12	Xi,Yi	Jacobiano	
13	0,5	-0,784295281	-0,311651062
14	1,7	-0,465467456	-0,381864465

Se realiza con la función *Minversa* la inversa del jacobiano anteriormente calculado.

	B	C	D	E
12	Jacobiano		Inversa Jacobiano	
13	=(COS(LN(A13/(A13+A14))) * (A14/(A13+(COS(LN(A13/(A13+A14))))*(-1)/(A13+A14))))		= MINVERSA(B13:C14)	= MINVERSA(B13:C14)
14	=((A14^2 - A13^2)/((A13^2 + A14^2)^2) + ((-2*A13*A14)/((A13^2 + A14^2)^2) +		= MINVERSA(B13:C14)	= MINVERSA(B13:C14)

El resultado de la inversa:

	D	E
12	Inversa Jacobiano	
13	-2,47271784	2,01805931
14	3,01407904	-5,07861063

Ahora se evalúan cada una de las funciones (F1, F2) en los valores tomados con los valores iniciales.

	F
12	F1,2
13	=SENO(LN(A13/(A13+A14))) - RAIZ(A13*A14) + 2,30479064
14	=(ATAN((A13/(A13^2 + A14^2)))) + EXP(-A13*A14) - 0,332730843

Las funciones evaluadas en x_i y y_i :

	F
12	F1,2
13	0,386811145
14	0,25259401

Luego se realiza la multiplicación entre la inversa del jacobiano obtenida y los valores calculados de la función.

	D	E	F	G	H
12	Inversa Jacobiano		F1,2	Y1,2	Xi (K) , Yi (k)
13	-2,47271784	2,01805931	0,386811145	=MMULT(D13:E14;F13:F14)	
14	3,01407904	-5,07861063	0,25259401	-0,11694726	1,81694726

Los resultados para Y_1 y Y_2 :

	G
12	Y1,2
13	-0,44672513
14	-0,11694726

Se busca la diferencia entre el valor $Y_{1,2}$ y los valores iniciales para obtener la primera iteración.

	A	B	C	D	E	F	G	H
12	Xi,Yi	Jacobiano			Inversa Jacobiano	F1,2	Y1,2	Xi (K) , Yi (k)
13	0,5	-0,784295281	-0,311651062	-2,47271784	2,01805931	0,386811145	-0,44672513	=A13-G13

Primera iteración para y:

	A	B	C	D	E	F	G	H
14	1,7	-0,465467456	-0,381864465	3,01407904	-5,07861063	0,25259401	-0,11694726	=A14-G14

Resultados para la primera iteración de $X_i(k)$ y $Y_i(k)$:

	A	B	C	D	E	F	G	H
12	Xi,Yi	Jacobiano			Inversa Jacobiano	F1,2	Y1,2	Xi (K) , Yi (k)
13	0,5	-0,784295281	-0,311651062	-2,47271784	2,01805931	0,386811145	-0,44672513	0,94672513
14	1,7	-0,465467456	-0,381864465	3,01407904	-5,07861063	0,25259401	-0,11694726	1,81694726

Se calcula la tolerancia que hay entre la primera iteración obtenida y el valor inicial.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
12	Xi,Yi	Jacobiano			Inversa Jacobiano	F1,2	Y1,2	Xi (K) , Yi (k)	Tolerancia
13	0,5	-0,784295281	-0,311651062	-2,47271784	2,01805931	0,386811145	-0,44672513	0,94672513	=ABS(H13-A13)

Tolerancia para Y_i :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
14	1,7	-0,465467456	-0,381864465	3,01407904	-5,07861063	0,25259401	-0,11694726	1,81694726	=ABS(H14-A14)

Resultados de las tolerancias en la primera iteración:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
12	Xi,Yi	Jacobiano			Inversa Jacobiano		F1,2	Y1,2	Xi (K) , Yi (K)	Tolerancia
13	0,5	-0,784295281	-0,311651062	-2,47271784	2,01805931	0,386811145	-0,44672513	0,94672513	0,44672513	
14	1,7	-0,465467456	-0,381864465	3,01407904	-5,07861063	0,25259401	-0,11694726	1,81694726	0,11694726	

Se realizan las iteraciones necesarias hasta obtener la tolerancia pedida para ambas variables (x , y). Para iniciar la segunda iteración, se toman como nuevos (x , y) los valores obtenidos en la primera iteración, como se ve a continuación:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
12	Xi,Yi	Jacobiano			Inversa Jacobiano		F1,2	Y1,2	Xi (K) , Yi (K)	Tolerancia
13	0,5	-0,784295281	-0,311651062	-2,47271784	2,01805931	0,386811145	-0,44672513	0,94672513	0,44672513	
14	1,7	-0,465467456	-0,381864465	3,01407904	-5,07861063	0,25259401	-0,11694726	1,81694726	0,11694726	
15	0,946725127	-0,360055621	-0,534231822	-15,0995826	22,7036996	0,115418687	-0,19580642	1,14253155	0,19580642	
16	1,816947256	-0,195417032	-0,355302336	8,30480215	-15,3015869	0,068137246	-0,08407864	1,90102589	0,08407864	

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
23	0,999999826	-0,403885167	-0,505164185	-7,54035511	13,172064	1,97561E-07	-4,4354E-07	1,00000027	4,4354E-07
24	1,999999819	-0,155286035	-0,28918151	4,04905503	-10,531232	7,9421E-08	-3,6466E-08	1,99999986	3,6466E-08

En este caso, los valores que satisfagan el sistema de ecuaciones serán los resultantes de la última iteración. Es decir, $x = 1.00000$ y $y = 1.99999$ cumplen con el sistema de ecuaciones acorde con la tolerancia pedida.

Ejemplo 6

En este ejemplo se explica la manera de obtener la solución de las siguientes funciones con una tolerancia $< 10^{-6}$, iniciando con $x = 0.5$ y $y = 0.5$.

$$F1. \cos(\ln(x)) + y^2 - 2 = 0$$

$$F2. \sqrt{x * y} - x^2 = 0$$

Para construir el jacobiano se derivan parcialmente cada una de las funciones respecto a sus variables dependientes:

$$\frac{\partial F1}{\partial x} = (\cos(\ln(x)) + y^2 - 2 = 0)$$

$$\frac{\partial F1}{\partial x} = \left(-\text{sen}(\ln(x)) * \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{\partial F1}{\partial y} = (\cos(\ln(x)) + y^2 - 2)$$

$$\frac{\partial F1}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial F2}{\partial x} = (\sqrt{x * y} - y)$$

$$\frac{\partial F2}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{x * y}} - 2x$$

$$\frac{\partial F2}{\partial y} = (\sqrt{x * y} - y)$$

$$\frac{\partial F2}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{x * y}}$$

Siendo el jacobiano:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F1}{\partial x} & \frac{\partial F1}{\partial y} \\ \frac{\partial F2}{\partial x} & \frac{\partial F2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\ln(x)) * \frac{1}{x} & 2y \\ \frac{y}{2\sqrt{x * y}} - 2x & \frac{x}{2\sqrt{x * y}} \end{bmatrix}$$

Con los valores de inicio se evalúan cada uno de los valores en la matriz del jacobiano.

	A	B	C
19	$X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)}$	Jacobiano	
20	0,5	$=\text{SENO}(\text{LN}(\text{A20}))*(1/\text{A20})$	$=2*\text{A21}$
21	0,5	$=(\text{A21}/(2*(\text{A21}*\text{A20})^{(0,5)})-2*\text{A20})$	$=\text{A20}/(2*(\text{A20}*\text{A21})^{0,5})$

Los valores calculados del jacobiano para la primera iteración:

	A	B	C
19	$X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)}$	Jacobiano	
20	0,5	1,277922553	1
21	0,5	-0,5	0,5

Se realiza con la función *Minversa* la inversa del jacobiano anteriormente calculado.

	B	C	D	E
19	Jacobiano		Inversa Jacobiano	
20	$=\text{SENO}(\text{LN}(\text{A20}))*(1/\text{A20})$	$=2*\text{A21}$	$=\text{MINVERSA}(\text{B20:C21})$	$=\text{MINVERSA}(\text{B20:C21})$
21	$=(\text{A21}/(2*(\text{A21}*\text{A20})^{(0,5)})-2*\text{A20})$	$=\text{A20}/(2*(\text{A20}*\text{A21})^{0,5})$	$=\text{MINVERSA}(\text{B20:C21})$	$=\text{MINVERSA}(\text{B20:C21})$

El resultado de la inversa es:

	D	E
19	Inversa Jacobiano	
20	0,43899649	-0,87799298
21	0,43899649	1,12200702

Ahora se evalúan cada una de las funciones (F1, F2) en los valores:

	F	G
19	$F_{1,2}(X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)})$	
20	$=\text{COS}(\text{LN}(\text{A20}))+\text{A21}^2-2$	
21	$=(\text{A20}*\text{A21})^{0,5}-\text{A20}^2$	

El resultado de las funciones evaluadas en los valores iniciales:

	F	G
19	$F_{1,2}(X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)})$	
20	-0,9807611	
21	0,25	

Se realiza la multiplicación entre la inversa del jacobiano obtenida y los valores de la función calculados.

	D	E	F	G	H	I
19	Inversa Jacobiano		$F_{1,2}(X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)})$		$Y_{1,2}X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)}$	
20	=MINVERSA(B20:C21)	=MINVERSA(B20:C21)	=COS(LN(A20))+A21^2 - 2		=MMULT(D20:E21;F20:F21)	
21	=MINVERSA(B20:C21)	=MINVERSA(B20:C21)	=(A20*A21)^0,5 - A20^2		=MMULT(D20:E21;F20:F21)	

El resultado de $Y_{1,2}(X_1, X_2)^{(k-1)}$.

	H	I
19	$Y_{1,2}X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)}$	
20	-0,65004892	
21	-0,15004892	

Se realiza la diferencia entre el valor $Y_{1,2}$ y los valores iniciales para obtener la primera iteración.

Para x_1 :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
19	$X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)}$	Jacobiano		Inversa Jacobiano		$F_{1,2}(X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)})$		$Y_{1,2}X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)}$		$X_1(k), X_2(k)$
20	0,5	1,277922553	1	0,43899649	-0,877993	-0,9807611		-0,65004892		=A20-H20

Para x_2 :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
19	$X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)}$	Jacobiano		Inversa Jacobiano		$F_{1,2}(X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)})$		$Y_{1,2}X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)}$		$X_1(k), X_2(k)$	
20	0,5	1,277922553	1	0,43899649	-0,877993	-0,9807611		-0,65004892		1,15004892	
21	0,5	-0,5	0,5	0,43899649	1,122007	0,25		-0,15004892		=A21-H21	

Resultados de x_1 y x_2 :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
19	$X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)}$	Jacobiano		Inversa Jacobiano		$F_{1,1}(X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)})$		$Y_{1,2} X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)}$		$X_1(k), X_2(k)$	
20	0,5	1,277922553	1	0,43899649	-0,877993	-0,9807611		-0,65004892		1,15004892	
21	0,5	-0,5	0,5	0,43899649	1,122007	0,25		-0,15004892		0,65004892	

Se calcula la tolerancia que hay entre la primera iteración obtenida y el valor inicial.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
19	$X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)}$	Jacobiano		Inversa Jacobiano		$F_{1,1}(X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)})$		$Y_{1,2} X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)}$		$X_1(k), X_2(k)$		Tolerancia
20	0,5	1,277922553	1	0,43899649	-0,877993	-0,9807611		-0,65004892		1,15004892		=ABS(J20-A20)

La tolerancia para x_2 :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
21	0,5	-0,5	0,5	0,43899649	1,122007	0,25		-0,15004892		0,65004892		=ABS(J21-A21)

Los resultados para la primera iteración:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
19	$X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)}$	Jacobiano		Inversa Jacobiano		$F_{1,1}(X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)})$		$Y_{1,2} X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)}$		$X_1(k), X_2(k)$		Tolerancia
20	0,5	1,277922553	1	0,43899649	-0,877993	-0,9807611		-0,65004892		1,15004892		0,65004892
21	0,5	-0,5	0,5	0,43899649	1,122007	0,25		-0,15004892		0,65004892		0,15004892

Se realizan las iteraciones necesarias hasta obtener la tolerancia pedida para ambas variables (x , y). Para iniciar la segunda iteración se toman como nuevos (x , y) los valores obtenidos en la primera iteración, como se ve aquí:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
19	$X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)}$	Jacobiano		Inversa Jacobiano		$F_{1,1}(X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)})$		$Y_{1,2} X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)}$		$X_1(k), X_2(k)$		Tolerancia
20	0,5	1,277922553	1	0,43899649	-0,877993	-0,9807611		-0,65004892		1,15004892		0,65004892
21	0,5	-0,5	0,5	0,43899649	1,122007	0,25		-0,15004892		0,65004892		0,15004892
22	1,150048922	-0,12116833	1,30009784	0,2746956	-0,5369979	-0,58719314		0,084635349		1,06541357		0,08463535
23	0,650048922	-1,924186987	0,66505129	0,79477434	-0,0500479	-0,45798077		-0,44376507		1,093814		0,44376507

El resultado según la tolerancia solicitada:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
30	1	-5,98721E-11	2	0,16666667	-0,6666667	-4,2649E-11		5,98721E-11		1		5,9872E-11
31	1	-1,5	0,5	0,5	-1,996E-11	-1,0047E-10		-2,1324E-11		1		2,1324E-11

En este caso, los valores que satisfagan el sistema de ecuaciones serán los valores resultantes de la última iteración. Es decir, $x = 1$ y $y = 1$ cumplen con el sistema de ecuaciones acorde con la tolerancia pedida.

Problemas de aplicación en ingeniería y ciencias

Ejemplo 7.

Una aplicación a la Ingeniería Civil

El director de una obra civil necesita 4800 m^3 , 5810 m^3 y 5690 m^3 de arena, de gravilla fina y gravilla gruesa, respectivamente, para la construcción de una vía en pavimento rígido. La compañía explota 3 canteras en las cuales los porcentajes de agregado por metro cúbico son:

Un ingeniero civil involucrado en la construcción requiere 4800 m^3 , 5810 m^3 y 5690 m^3 de arena, de gravilla fina y gravilla gruesa, respectivamente, para un proyecto de construcción. La composición de las canteras se establece en la tabla 20:

Tabla 20. Porcentajes de agregados por cantera

	Gravilla gruesa %	Gravilla fina %	Arena %
Cantera 1	18	30	52
Cantera 2	30	50	20
Cantera 3	55	20	25

Nota. Tabla de elaboración propia.

¿Cuántos metros cúbicos debe remover de cada cantera para la vía?
 ¿Cuántos metros cúbicos se deben transportar desde cada cantera para cumplir con las necesidades del ingeniero? El sistema resultante para la solución del problema es:

	Cant#1	Cant#2	Cant#3	
Arena	$\frac{52}{100}x +$	$\frac{20}{100}y +$	$\frac{25}{100}z =$	4800
Grav Fina	$\frac{30}{100}x +$	$\frac{50}{100}y +$	$\frac{20}{100}z =$	5810
Grav Gruesa	$\frac{18}{100}x +$	$\frac{30}{100}y +$	$\frac{55}{100}z =$	5690

Si se deja con decimales:

$$0.52x + 0.2y + 0.25z = 4800$$

$$0.3x + 0.5y + 0.2z = 5810$$

$$0.18x + 0.3y + 0.55z = 5690$$

- a. Se verifica que matriz de los coeficientes sea dominante en la diagonal.

Para la primera fila:

$$|0.52| \geq |0.2| + |0.25|$$

$$0.52 \geq 0.45$$

Para la segunda fila:

$$|0.5| \geq |0.3| + |0.2|$$

$$0.5 \geq 0.5$$

Para la tercera fila:

$$|0.55| \geq |0.3| + |0.18|$$

$$0.55 \geq 0.48$$

Se determina que es dominante en la diagonal.

b. La solución aproximada se obtiene despejando para cada ecuación así:

$$x = 9230.76923 - 0.38461538 y - 0.48076923 z$$

$$y = 11620 - 0.6 x - 0.4 z$$

$$z = 10345.4545 - 0.32727273 x - 0.54545455 y$$

La tabla 21 muestra la solución por el método de Jacobi, así:

Tabla 21. Tabla por método de Jacobi

Iteración	0	1	2	3	4	5	6
x	0	9230.76923	-212.237762	8009.1447	366.74923	7312.56159	971.507417
y	0	11620	1943.35664	11352.8252	3072.55259	10787.2185	3812.66715
z	0	10345.4545	986.293706	9354.90146	1531.82982	8549.48975	2068.31519
Tolerancia x		9230.76923	9443.00699	8221.38246	7642.39547	6945.81236	6341.05417
Tolerancia y		11620	9676.64336	9409.46853	8280.27258	7714.66594	6974.55139
Tolerancia z		10345.4545	9359.16084	8368.60776	7823.07164	7017.65993	6481.17456

Nota. Tabla de elaboración propia.

Como se observa en la tabla 22, la convergencia es muy lenta en Excel hasta llegar a la tolerancia requerida.

Tabla 22. Iteraciones hasta llegar a la tolerancia solicitada

Iteración	200	201	202	203	204	205
x	4011.62784	4011.62797	4011.62785	4011.62796	4011.62786	4011.62795
y	7162.79062	7162.79076	7162.79064	7162.79075	7162.79065	7162.79074
z	5125.58133	5125.58146	5125.58134	5125.58145	5125.58135	5125.58144
Tolerancia x	0.00013901	0.00012693	0.0001159	0.00010582	9.6629E-05	8.8232E-05
Tolerancia y	0.00015328	0.00013996	0.0001278	0.00011669	0.00010655	9.729E-05
Tolerancia z	0.00014138	0.0001291	0.00011788	0.00010764	9.8283E-05	8.9742E-05

Nota. Al seguir iterando se obtiene una tolerancia $\leq 1 \cdot 10^{-4}$ hasta la iteración 205, el resultado es $x = 4011.62795 \text{ m}^3$, $y = 7162.79074 \text{ m}^3$ y $z = 5125.58144 \text{ m}^3$, correspondientes a las cantidades que se deben transportar desde cada cantera para aportar el material necesario en la construcción.

Actividades propuestas

Preguntas abiertas

1. ¿Todo sistema de ecuaciones lineales se puede resolver por métodos iterativos?
2. ¿Es más eficiente el método de Jacobi que el de Gauss-Seidel?
3. Si la matriz de los coeficientes de un sistema dado no es dominante en la diagonal, ¿se puede resolver el sistema por medio de métodos numéricos?
4. ¿Los valores iniciales asignados a las variables para cualquier método iterativo pueden ser arbitrarios?

Preguntas cerradas

1. Una compañía produce tres tipos de camisas: A, B y C, las cuales se procesan en tres departamentos, a saber: corte, confección y empaçado. El tiempo en horas requerido para el procesamiento de cada camisa está dado por:

	A	B	C
Corte	3	2	0.5
Confección	2	4	1
Empacado	0.8	1	2

El departamento de corte está disponible 1350 horas, el de confección 1500 horas y el de empaçado 640 horas. ¿Cuántas camisas de cada tipo pueden fabricarse para mantener operando todo el tiempo disponible los departamentos? Solucionar por el método de Jacobi y con tolerancia $\leq 1 \cdot 10^{-3}$.

2. El director de una compañía constructora planea 5000 horas-hombre de mano de obra para tres proyectos. Los costos por hora-hombre de los tres proyectos son: 16 USD, 20 USD Y 24 USD, respectivamente,

y el costo total es de es de 106 000 USD. Si el número de horas-hombre para el tercer proyecto es igual a la suma de las horas-hombre requeridas por los dos primeros proyectos, calcular el número de horas-hombre que se pueden disponer para cada proyecto. Solucionar por el método de Gauss-Seidel con tolerancia $< 1*10^{-3}$. Si no es posible, solucionar el sistema por Gauss-Jordan.

- Una persona invierte \$50 000 000 en bonos, acciones y préstamos personales. Cada inversión es en proporción 3:1:1, es decir, $3x + y + z = 50\,000\,000$; las tasas son del 10 %, 30 % y 15 %, respectivamente; el rendimiento total es de \$4 750 000, y el rendimiento de la inversión en préstamos es 1.5 veces el rendimiento de la inversión en acciones. Considerando estos valores, ¿de cuánto fue cada inversión? Solucionar por el método de Gauss-Seidel con tolerancia $< 1*10^{-3}$.
- Solucionar el siguiente sistema de ecuaciones, iniciando con $x = 0.9$ y $y = 1.5$ y una tolerancia de $< 1*10^{-6}$:

$$\begin{aligned} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + \ln\left(\frac{x}{x+y}\right) + 0.678077953 &= 0 \\ e^{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)} + \frac{x}{x+y} - 1.554736091 &= 0 \end{aligned}$$

- Solucionar el siguiente sistema de ecuaciones, iniciando con $x = 0.1$ y $y = 0.8$ y una tolerancia de $< 1*10^{-6}$

$$\begin{aligned} \tan^{-1}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) - e^{\left(\frac{x}{x+y}\right)} + 0.9571933514 &= 0 \\ \ln\left(\frac{x+y}{x^2 + y^2}\right) - \sqrt{\frac{y}{x+y}} + 0.4055664598 &= 0 \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4

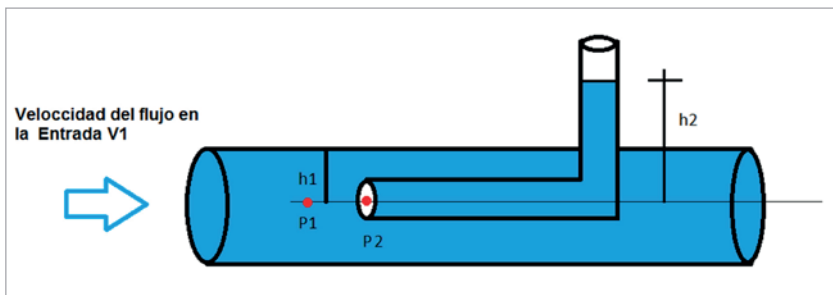
Interpolación

En ingeniería muchos datos experimentales o de campo relacionan variables de entrada con otras de salida. Una forma de modelar estos datos empíricos es mediante la interpolación, que es definida como la generación de modelos matemáticos desde observaciones de variables relacionadas. En esta unidad se trabajarán los ajustes polinomiales mediante los métodos de mínimos cuadrados y Lagrange.

Veamos el siguiente experimento para contextualizar el concepto en el campo experimental. Si se mide la velocidad del viento en un dispositivo llamado *Tubo de Pitot* (figura 28), que tiene un diámetro interno específico y dentro del cual se coloca otro tubo de menor diámetro variable, al medir se tiene la siguiente información:

V (cm/s)	620	530	460	300	220
r (cm)	0	2	6	8	9

Figura 28. *Tubo de Pitot*



Nota. Este instrumento se utiliza para medir presión total o de oclusión al tiempo que se mide la estática. Figura de elaboración propia.

Aquí r es la distancia en centímetros medida desde el centro del tubo. Al analizar estos datos surge la pregunta sobre si es posible utilizarlos para obtener una estimación razonable de la velocidad cuando el radio sea de 4 cm. Este tipo de predicciones puede obtenerse por medio de la interpolación, que, como se explicó, emplea una función que utiliza los datos disponibles.

El objetivo de esta unidad es modelar funciones polinómicas mediante observaciones de dos variables asociadas, para así una vez obtenido el modelo poder calcular estimaciones de datos no observados. La unidad se soporta en tres objetivos específicos: interpolar mediante una funciones polinómicas un conjunto de datos y resolver problemas de aplicación en ingeniería y ciencias.

Lección 1. Regresión lineal

En un conjunto de puntos de dos variables asociadas, por ejemplo, (x_1, y_1) , $(x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$, en el que, al plotear los datos, se pueden tener múltiples rectas que traten de asociar las dos variables y muestren la tendencia, la mejor recta será la que pase por el centro de las observaciones, esta se llama recta de regresión por mínimos cuadrados. Se trata de una recta que se ajusta a la tendencia del conjunto de datos dado, presenta el mejor ajuste, minimizando el error de la suma de cuadrados. Este modelo viene dado por la siguiente ecuación:

$$f(x) = a_0 + a_1x$$

Donde a_0 y a_1 son los coeficientes, que a su vez están dados por la expresión:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = (x^t * x)^{-1} * (x^t * y)$$

Las matrices x y y se definen como:

$$x = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

Donde la matriz x corresponde a los datos de las variables independientes: x_i , y la matriz y , sus imágenes y_i (variables dependientes).

Ejemplo 1

El vendedor de un almacén de repuestos automotrices desea conocer la demanda de cierto repuesto en función de su precio (ver tabla 23).

Tabla 23. Observaciones de precio y demanda para el repuesto

Precio (x)	\$25 000	\$30 000	\$38 000	\$42 000	\$43 500
Demanda (y)	100	90	78	60	50

Nota. Aquí se muestran las ventas que ha observado el vendedor cuando cambia el precio al mismo repuesto. Tabla de elaboración propia.

Solución

Para no trabajar con valores tan altos se aplica la siguiente fórmula:

$$z = \frac{x - 25000}{1000}$$

Entonces los nuevos precios se muestran en la tabla 24:

Tabla 24. Reducción de escala para el precio

Z	0	5	13	17	18.5
Demanda (y)	100	90	78	60	50

Nota. Tabla de elaboración propia.

Definimos las matrices x y

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \\ 1 & 13 \\ 1 & 17 \\ 1 & 18.5 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 100 \\ 90 \\ 78 \\ 60 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Se realizan las siguientes operaciones:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = (x^t * x)^{-1} * (x^t * y)$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 13 & 17 & 18.5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \\ 1 & 13 \\ 1 & 17 \\ 1 & 18.5 \end{bmatrix} \right)^{-1} * \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 13 & 17 & 18.5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 100 \\ 90 \\ 78 \\ 60 \\ 50 \end{bmatrix} \right)$$

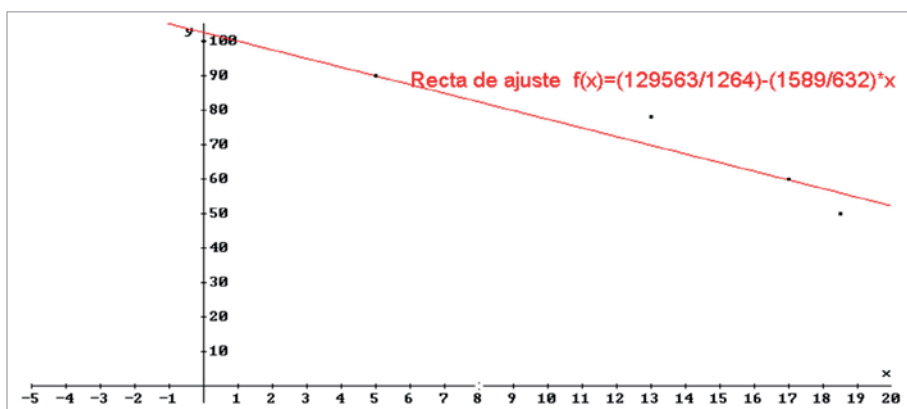
$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 129.563 \\ 1.264 \\ 1.589 \\ 632 \end{pmatrix}$$

Y el modelo es:

$$f(z) = \frac{129.563}{1.264} - \frac{1.589}{632} * z$$

Según se muestra en la figura 29, es posible graficar las observaciones con la recta de ajuste:

Figura 29. Recta de ajuste de la demanda en función del precio



Nota. Como se observa, la recta pasa por el centro de los puntos dados. Figura de elaboración propia.

Si se quiere estimar la demanda del repuesto, cuando, por ejemplo, el precio es \$40 000.

$$z = \frac{40000 - 25000}{1000} = 15$$

$$f(15) = \frac{129.563}{1.264} - \frac{1.589}{632} * 15$$

$$f(15) = 64.7887658 \cong 65$$

O cuando el precio es \$28 000.

$$z = \frac{28.000 - 25.000}{1.000} = 3$$

$$f(3) = \frac{129.563}{1.264} - \frac{1.589}{632} * (3)$$

$$f(3) = 94,9596519 \cong 95$$

Lección 2. Regresión polinomial

Los conceptos de la regresión lineal se pueden extender a la polinomial, es más la regresión lineal es un polinomio de grado uno, por ejemplo, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$, se pueden ajustar mediante un polinomio que modele su tendencia, minimizando el error de la suma de cuadrados. El modelo está dado por la ecuación:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \dots \dots a_nx^n$$

Al igual que en la regresión lineal, si hay un conjunto de datos, por ejemplo, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$, estos se pueden ajustar mediante un polinomio que modele su tendencia, minimizando el error de la suma de cuadrados. El modelo está dado por la ecuación:

Teniendo en cuenta que se deben tener mínimo $(n + 1)$ puntos para generar un polinomio de grado n .

a_0, a_1, \dots, a_n son los coeficientes del modelo y están dados por la ecuación:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = (x^t * x)^{-1} * (x^t * y)$$

Las matrices x y y se definen como la siguiente expresión:

$$x = \begin{bmatrix} x_1^0 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ x_2^0 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\ x_3^0 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \dots & x_3^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_n^0 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1

Para encontrar un polinomio de grado cuatro que pase por los siguientes puntos:

x	y
-0.25	0.44379173
0	1
0.2	1.23125605
0.35	1.00198504
0.5	0.19228365

Se define la matriz x .

$$x = \begin{vmatrix} 1 & -0.25 & 0.0625 & -0.015625 & 0.00390625 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.04 & 0.008 & 0.0016 \\ 1 & 0.35 & 0.1225 & 0.042875 & 0.01500625 \\ 1 & 0.5 & 0.25 & 0.125 & 0.0625 \end{vmatrix}$$

La matriz y está dada por:

$$y = \begin{vmatrix} 0.44379173 \\ 1 \\ 1.23125605 \\ 1.00198504 \\ 0.19228365 \end{vmatrix}$$

Como el primer factor del modelo es $(x^t * x)$, se necesita la función transpuesta de x .

$$\underline{x}^t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.25 & 0 & 0.2 & 0.35 & 0.5 \\ 0.0625 & 0 & 0.04 & 0.1225 & 0.25 \\ -0.015625 & 0 & 0.008 & 0.042875 & 0.125 \\ 0.00390625 & 0 & 0.0016 & 0.01500625 & 0.0625 \end{vmatrix}$$

Por lo tanto:

$$(\underline{x}^t * x) = \begin{vmatrix} 5 & 0.8 & 0.475 & 0.16025 & 0.083013 \\ 0.8 & 0.475 & 0.16025 & 0.0830125 & 0.035846 \\ 0.475 & 0.1603 & 0.08301 & 0.03584563 & 0.017771 \\ 0.16025 & 0.083 & 0.03585 & 0.01777141 & 0.008408 \\ 0.0830125 & 0.0358 & 0.01777 & 0.00840766 & 0.004149 \end{vmatrix}$$

Su inversa es $(x^t * x)^{-1}$:

$$(\underline{x}^t * x)^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -5.8571429 & -9.4285714 & 91.4285714 & -114.28571 \\ -5.8571428 & 180.547621 & -137.64220 & -2643.8782 & 4504.25116 \\ -9.4285714 & -137.64221 & 489.026175 & 1951.1839 & -4670.4777 \\ 91.4285714 & -2643.8782 & 1951.1839 & 40123.58 & -68648.171 \\ -114.28571 & 4504.25116 & -4670.4776 & -68648.171 & 122720.964 \end{vmatrix}$$

El segundo factor es $(x^t * y)$:

$$\underline{x}^t * y = \begin{vmatrix} 3.86931648 \\ 0.58213987 \\ 0.24780131 \\ 0.06991137 \\ 0.03075734 \end{vmatrix}$$

Y finalmente los coeficientes del polinomio están dados por:

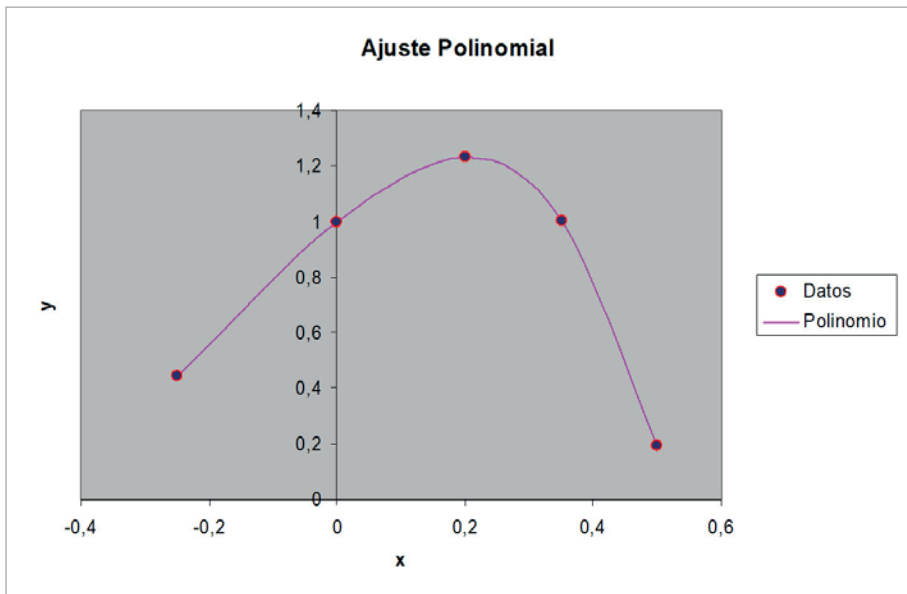
$$(\underline{x}^* \underline{x})^T (\underline{x}^* \underline{y}) = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{l} 1 \\ 2.03454078 \\ -2.66934205 \\ -8.17553102 \\ -2.1713576 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{l} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \end{array}$$

El modelo para el polinomio de grado cuatro quedaría:

$$p(x) = 1 + 2.03454078 * x - 2.66934205 * x^2 - 8.17553102 * x^3 - 2.1713576 * x^4$$

El gráfico del polinomio se puede apreciar en la figura 30:

Figura 30. Polinomio de grado cuatro que ajusta los cinco datos



Nota. Se observa que el polinomio pasa por los puntos dados para el ajuste. Figura de elaboración propia.

Si, por ejemplo, se quiere hallar el valor para 0.1 la interpolación sería:

$$p(0.1) = 1 + 2.03454078*(0.1) - 2.66934205*(0.1)^2 - 8.17553102*(0.1)^3 - 2.1713576*(0.1)^4$$

$$p(0.1) = 1,16836799$$

La regresión también permite generar un polinomio de cualquier grado que se ajuste a n puntos. Por medio de un ejemplo se desarrolla a continuación este caso.

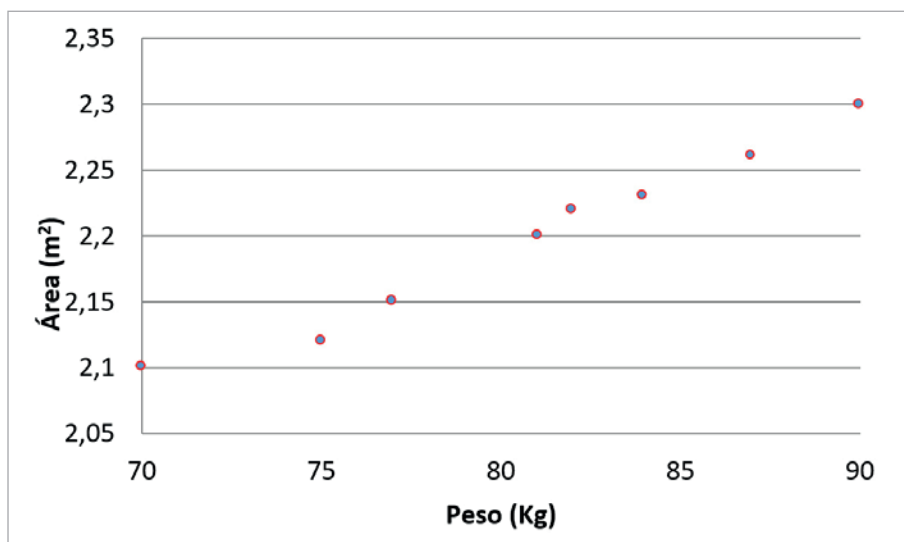
Ejemplo 2

En general, el área exterior A del cuerpo de un ser humano está relacionada con su peso W y su altura h . Al medir a varios individuos con altura de 1.80 m se obtuvieron los siguientes datos, tal como se muestran en la tabla 25:

Tabla 25. *Peso y área superficial de nueve individuos*

W kg	70	75	77	80	82	84	87	90
A m ²	2.10	2.12	2.15	2.2	2.22	2.23	2.26	2.3

Ajustar mediante un polinomio y calcular el área cuando un individuo pese 89 kg. A continuación se grafican los puntos para determinar su tendencia y establecer el polinomio que mejor ajuste.

Figura 31. Observaciones de área según el peso

Nota. En este caso es razonable un polinomio de grado tres. Figura de elaboración propia.

Es importante señalar que las funciones polinómicas impares tienen forma de s y las pares de u . Se define la matriz x :

$$x = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 70 & 4900 & 343\ 000 \\ & 1 & 75 & 5625 & 421\ 875 \\ & 1 & 77 & 5929 & 456\ 533 \\ & 1 & 81 & 6561 & 531\ 441 \\ & 1 & 82 & 6724 & 551\ 368 \\ & 1 & 84 & 7056 & 592\ 704 \\ & 1 & 87 & 7569 & 658\ 503 \\ & 1 & 90 & 8100 & 729\ 000 \end{array}$$

La matriz y está dada por:

$$y = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 2.12 \\ 2.15 \\ 2.2 \\ 2.22 \\ 2.23 \\ 2.26 \\ 2.3 \end{pmatrix}$$

Como el primer factor del modelo es $(x^t * x)$, se necesita la función transpuesta de x :

$$x^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 70 & 75 & 77 & 81 & 82 & 84 & 87 & 90 \\ 4900 & 5625 & 5929 & 6561 & 6724 & 7056 & 7569 & 8100 \\ 343000 & 421875 & 456533 & 531441 & 551368 & 592704 & 658503 & 729000 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$(x^t * x) = \begin{pmatrix} 8 & 646 & 52464 & 4284424 \\ 646 & 52464 & 4284424 & 351749460 \\ 52464 & 4284424 & 351749460 & 29025942496 \\ 4284424 & 351749460 & 29025942496 & 2,40685E+12 \end{pmatrix}$$

Su inversa es $(x^t * x)^{-1}$

$$(\underline{x}^t * x)^{-1} = \begin{vmatrix} 770108.7846 & -29054.7847 & 363.8906831 & -1.513071325 \\ -29054.78479 & 1096.745117 & -13.7429014 & 0.057171865 \\ 363.8906831 & -13.7429013 & 0.172293497 & -0.000717113 \\ -1.513071325 & 0.057171865 & -0.00071711 & 2.98621E-06 \end{vmatrix}$$

El segundo factor es $(x^t * y)$:

$$\underline{x}^t * y = \begin{vmatrix} 17.58 \\ 1422.73 \\ 115794.65 \\ 9476074.81 \end{vmatrix}$$

Finalmente, los coeficientes del polinomio están dados por:

$$(\underline{x}^t * x)^{-1} * (\underline{x}^t * y) = \begin{vmatrix} 15.68367543 & a_0 \\ -0.521352274 & a_1 \\ 0.006548966 & a_2 \\ -2.67669E-05 & a_3 \end{vmatrix}$$

□

El polinomio de grado tres quedaría:

$$p(x) = 15.6836754 \cdot 288 + -0.5213522 \cdot 7364 * x + 0.00654896 \cdot 59018 * x^2 + -0.0000267 \cdot 66907726 * x^3$$

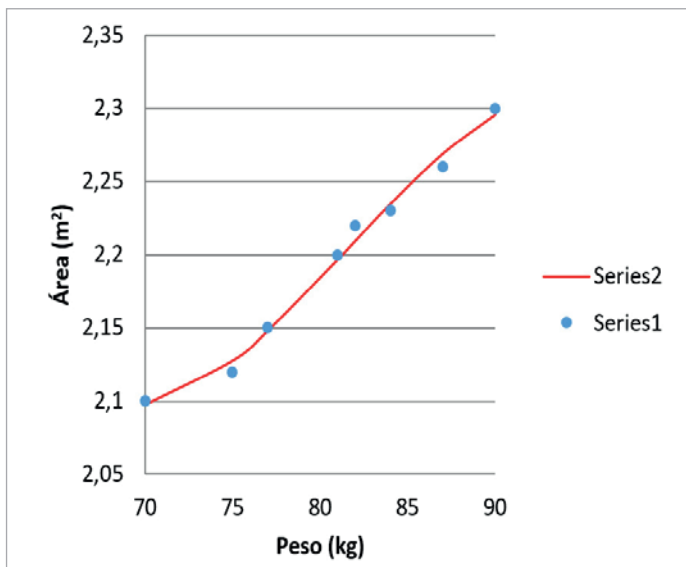
Si se tabulan los datos del polinomio y las observaciones (ver tabla 26), se evidencia que la estimación es muy similar a las observaciones, pero en ningún caso coincide con estas.

Tabla 26. Observaciones y polinomio de ajuste

X	y	p(x)
70	2.1	2.097899843
75	2.12	2.127898906
77	2.15	2.148392505
81	2.2	2.196874336
82	2.22	2.209619335
84	2.23	2.234734569
87	2.26	2.269061494
90	2.3	2.295518873

Nota. En las columnas aparecen las observaciones y el polinomio de ajuste.

Gráfico del ajuste polinomial grado tres se muestra en la figura 32:

Figura 32. Polinomio de ajuste del área en función del peso

Nota. Es claro que existe un buen ajuste con el polinomio escogido. Figura de elaboración propia.

El área de un individuo de 89 kg será:

$$p(89) = 15.6836754288 + -0.52135227364 * (89) + 0.0065489659018 * (89)^2 + -0.000026766907726 * (89)^3$$

$$p(89) = 2.28784180985411$$

$$p(89) = 2.29$$

Ejemplo 3

Con los siguientes datos que relacionan la oferta y demanda de una actividad económica determinada:

	A	B
5	PRECIO	DEMANDA
6	x (Dólares)	y
7	10	100
8	12	85
9	15	70
10	18	60
11	20	35

La manera de hallar el valor de la demanda cuando el precio sea de 17 USD es mediante un polinomio de grado cuatro. Con el número de datos se establece el grado del polinomio para ajustar los datos experimentales.

$$P(x) = n.^\circ \text{ Datos} - 1$$

$$P(x) = 5 - 1$$

$$P(x) = 4$$

El polinomio de grado cuatro está determinado por:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

Las matrices x y y que serán utilizadas para determinar los coeficientes son:

Matriz x, y.

Los datos de las observaciones son:

	A	B		C	D
7	X1	10	7	100	Y1
8	X2	12	8	85	Y2
9	X3	15	9	70	Y3
10	X4	18	10	60	Y4
11	X5	20	11	35	Y5

Matriz x

	B	C	D	E	F
17	=B7^0	=B7	=B7^2	=B7^3	=B7^4
18	=B8^0	=B8	=B8^2	=B8^3	=B8^4
19	=B9^0	=B9	=B9^2	=B9^3	=B9^4
20	=B10^0	=B10	=B10^2	=B10^3	=B10^4
21	=B11^0	=B11	=B11^2	=B11^3	=B11^4

	B	C	D	E	F
17	1	10	100	1000	10000
18	1	12	144	1728	20736
19	1	15	225	3375	50625
20	1	18	324	5832	104976
21	1	20	400	8000	160000

Matriz y

	B		B
25	=C7	25	100
26	=C8	26	85
27	=C9	27	70
28	=C10	28	60
29	=C11	29	35

Se transpone la matriz x con la función en Excel:

	I	J	K	L	M
17	=TRANSPONER(B17:F21)	=TRANSPONER(B17:F21)	=TRANSPONER(B17:F21)	=TRANSPONER(B17:F21)	=TRANSPONER(B17:F21)
18	=TRANSPONER(B17:F21)	=TRANSPONER(B17:F21)	=TRANSPONER(B17:F21)	=TRANSPONER(B17:F21)	=TRANSPONER(B17:F21)
19	=TRANSPONER(B17:F21)	=TRANSPONER(B17:F21)	=TRANSPONER(B17:F21)	=TRANSPONER(B17:F21)	=TRANSPONER(B17:F21)
20	=TRANSPONER(B17:F21)	=TRANSPONER(B17:F21)	=TRANSPONER(B17:F21)	=TRANSPONER(B17:F21)	=TRANSPONER(B17:F21)
21	=TRANSPONER(B17:F21)	=TRANSPONER(B17:F21)	=TRANSPONER(B17:F21)	=TRANSPONER(B17:F21)	=TRANSPONER(B17:F21)

	I	J	K	L	M
17	1	1	1	1	1
18	10	12	15	18	20
19	100	144	225	324	400
20	1000	1728	3375	5832	8000
21	10000	20736	50625	104976	160000

Luego se busca la inversa del producto entre $(x^t * x)^{-1}$.

	I	J	K	L	M
25	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))
26	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))
27	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))
28	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))
29	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))	=MINVERSA(MMULT(I17:M21;B17:F21))

Los resultados de la inversa son:

	I	J	K	L	M
	95846,50007	-27085,3	2805,05556	-126,320833	2,09027778
	-27085,30002	7669,68348	-795,902556	35,911007	-0,59529861
	2805,055558	-795,90256	82,7595644	-3,74137848	0,06213495
	-126,3208334	35,911007	-3,74137848	0,16946181	-0,00281944
	2,090277779	-0,5952986	0,06213495	-0,00281944	4,6991E-05

El producto entre matrices transpuestas de x y y ($y * x^t$) es:

	I
32	=MMULT(I17:M21;B25:B29)
33	=MMULT(I17:M21;B25:B29)
34	=MMULT(I17:M21;B25:B29)
35	=MMULT(I17:M21;B25:B29)
36	=MMULT(I17:M21;B25:B29)

Los resultados del segundo factor:

	I
32	350
33	4850
34	71430
35	1113050
36	18204870

Por último, para determinar los coeficientes del polinomio se busca el producto entre los factores:

$$((x^T * X)^{-1} * (Y * X^T))$$

	K	L
33	A0	=MMULT(I25:M29;I32:I36)
34	A1	=MMULT(I25:M29;I32:I36)
35	A2	=MMULT(I25:M29;I32:I36)
36	A3	=MMULT(I25:M29;I32:I36)
37	A4	=MMULT(I25:M29;I32:I36)

Resultados para los coeficientes:

	K	L
33	A0	-480,000001
34	A1	202,75
35	A2	-24,8222222
36	A3	1,27083333
37	A4	-0,02361111

El ajuste polinómico de los datos experimentales es:

$$f(x) = -480.000001 + 202.75x - 24.822222x^2 + 1.2708333x^3 - 0.02361111x^4$$

Al evaluar el polinomio para $x = 17$:

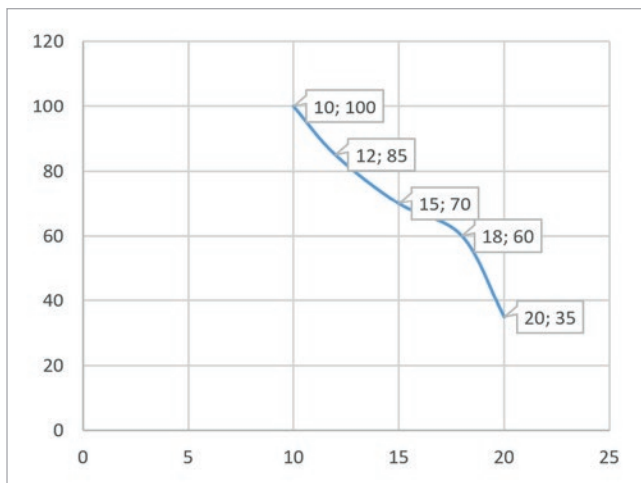
33	A0	-480,000001
34	A1	202,75
35	A2	-24,8222222
36	A3	1,27083333
37	A4	-0,02361111
38		
39	17	$=-480,000001 + 202,75 * K39 + -24,8222222 * K39^2 + 1,27083333 * K39^3 + -0,02361111 * K39^4$

El resultado para $x = 17$:

	K	L
39	17	64,7083335

Por lo tanto, la estimación de la demanda es aproximadamente 65 cuando el precio es USD 17. Si se realiza un ajuste donde el polinomio pase por el centro de los datos experimentales, estos se deben tener en cuenta. Estos datos pueden graficarse, tal como se presentan en la figura 33:

Figura 33. Datos del precio vs demanda



Nota. Figura de elaboración propia.

Como el comportamiento de los datos es similar a un polinomio impar se puede adoptar un polinomio de grado tres. $P_3(x)$.

El polinomio de grado tres está determinado por:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

Los datos de las observaciones son:

	A	B	C	D
5	X1	10	100	Y1
6	X2	12	85	Y2
7	X3	15	70	Y3
8	X4	18	60	Y4
9	X5	20	35	Y5

Matriz x:

	G	H	I	J
24	=B5^0	=B5^1	=B5^2	=B5^3
25	=B6^0	=B6^1	=B6^2	=B6^3
26	=B7^0	=B7^1	=B7^2	=B7^3
27	=B8^0	=B8^1	=B8^2	=B8^3
28	=B9^0	=B9^1	=B9^2	=B9^3

Resultados para la matriz x:

	G	H	I	J
24	1	10	100	1000
25	1	12	144	1728
26	1	15	225	3375
27	1	18	324	5832
28	1	20	400	8000

Matriz y :

	D		D
29	=C5	29	100
30	=C6	30	85
31	=C7	31	70
32	=C8	32	60
33	=C9	33	35

La transpuesta de x :

	G	H	I	J	K
32	=TRANSPONER(G24:J28)	=TRANSPONER(G24:J28)	=TRANSPONER(G24:J28)	=TRANSPONER(G24:J28)	=TRANSPONER(G24:J28)
33	=TRANSPONER(G24:J28)	=TRANSPONER(G24:J28)	=TRANSPONER(G24:J28)	=TRANSPONER(G24:J28)	=TRANSPONER(G24:J28)
34	=TRANSPONER(G24:J28)	=TRANSPONER(G24:J28)	=TRANSPONER(G24:J28)	=TRANSPONER(G24:J28)	=TRANSPONER(G24:J28)
35	=TRANSPONER(G24:J28)	=TRANSPONER(G24:J28)	=TRANSPONER(G24:J28)	=TRANSPONER(G24:J28)	=TRANSPONER(G24:J28)

Resultados para la función transpuesta:

	G	H	I	J	K
32	1	1	1	1	1
33	10	12	15	18	20
34	100	144	225	324	400
35	1000	1728	3375	5832	8000

La inversa del producto entre las matrices transpuestas de x y x ($x^t * x$)⁻¹.

	G	H	I	J
40	=MINVERSA(MMULT(G32:K35;G24:J28))	=MINVERSA(MMULT(G32:K	=MINVERSA(MMULT(G32:K	=MINVERSA(MMULT(G32:K
41	=MINVERSA(MMULT(G32:K35;G24:J28))	=MINVERSA(MMULT(G32:K	=MINVERSA(MMULT(G32:K	=MINVERSA(MMULT(G32:K
42	=MINVERSA(MMULT(G32:K35;G24:J28))	=MINVERSA(MMULT(G32:K	=MINVERSA(MMULT(G32:K	=MINVERSA(MMULT(G32:K
43	=MINVERSA(MMULT(G32:K35;G24:J28))	=MINVERSA(MMULT(G32:K	=MINVERSA(MMULT(G32:K	=MINVERSA(MMULT(G32:K

La inversa para el primer factor:

	G	H	I	J
40	2865,178161	-604,775575	41,121408	-0,90416667
41	-604,7755747	128,1884712	-8,75063886	0,19309028
42	41,12140805	-8,75063886	0,5997088	-0,01328125
43	-0,904166667	0,193090278	-0,01328125	0,00029514

El producto entre las matrices transpuestas de x y y ($x^t * y$).

	G
47	=MMULT(G32:K35;D29:D33)
48	=MMULT(G32:K35;D29:D33)
49	=MMULT(G32:K35;D29:D33)
50	=MMULT(G32:K35;D29:D33)

Resultados para el segundo factor:

	G
47	350
48	4850
49	71430
50	1113050

Por último, para determinar los coeficientes se busca el resultado del producto de los factores: $((x^t * x)^{-1} * (y * x^t))$:

	I	J
46	A0	=MMULT(G40:J43;G47:G50)
47	A1	=MMULT(G40:J43;G47:G50)
48	A2	=MMULT(G40:J43;G47:G50)
49	A3	=MMULT(G40:J43;G47:G50)

Los coeficientes del polinomio:

	I	J
46	A0	570,2873563
47	A1	-96,3655583
48	A2	6,398296388
49	A3	-0,145833333

El ajuste polinómico de los datos experimentales es:

$$f(x) = 570.2873563 - 96.3655583x + 6.398296388x^2 - 0.145833333x^3$$

Se evalúa el polinomio en $x = 17$.

	I	J	K	L	I
46	A0	570,2873563			
47	A1	-96,3655583			
48	A2	6,398296388			
49	A3	-0,145833333			
50					
51	17	=570,2873563 + (-96,3655583)*17 + 6,398296388*17^2 + (-0,145833333)*17^3			

	I	J
51	17	64,70135468

Por lo tanto, la estimación de la demanda es aproximadamente 65 cuando el precio es 17 USD.

Lección 3. Polinomio de Lagrange

Este tipo de polinomio se determina especificando los puntos en el plano por donde debe pasar. El manejo algebraico es un poco dispendioso y se deben tener $n + 1$ puntos para establecer un polinomio de grado n .

El polinomio interpolante de Lagrange está dado por:

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + f(x_1)L_{n,1}(x) + f(x_2)L_{n,2}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,k}(x)$$

Que en forma simplificada es:

Donde:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_{n,k}(x)$$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

Se denominan coeficientes de Lagrange, los cuales en forma simplificada se expresan así:

$$L_{n,k}(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

El símbolo $\prod_{i=0}^n$ se denomina el producto de los factores interpolantes.

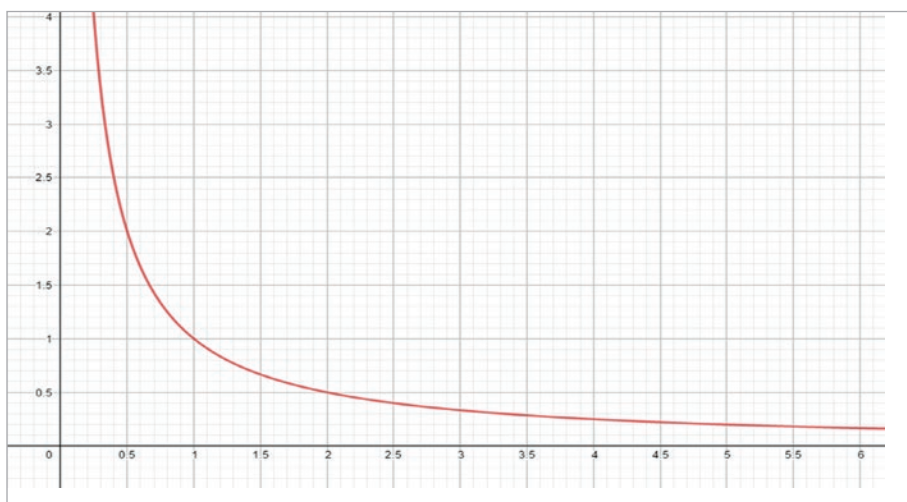
Ejemplo 1

Aproximar la siguiente función mediante un polinomio de Lagrange grado dos en el intervalo $5 > x > 0$.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Tabla 27. Tabulación de $f(x)=1/x$

x	$f(x)$
0.00001	100 000.00
0.00100	1000.00
0.01000	100.00
0.10000	10.00
1.00000	1.00
2.00000	0.50
3.00000	0.33
4.00000	0.25
5.00000	0.20

Figura 34. Función hiperbólica, $f(x) = 1/x$ 

Nota. Figura de elaboración propia.

Si se toman tres puntos de la función dada (1, 3 y 5) para hallar un polinomio de Lagrange se obtendrá un polinomio de grado dos, así:

Se hallan los coeficientes:

$$L_{n,k}(x) = \prod_{i=0}^n \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

Para el ejercicio pl

$$L_{n,k}(x) = \prod_{i=0}^2 \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

Es decir, son tres coeficientes si se define:

$$x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 5$$

Para $x_0 = 1$

$$L_0(x) = \frac{(x-3)(x-5)}{(1-3)(1-5)}$$

$$L_0(x) = \frac{x^2}{8} - x + \frac{15}{8}$$

Para $x_1 = 3$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-5)}{(3-1)(3-5)}$$

$$L_1(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$$

Para $x_2 = 5$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(5-1)(5-3)}$$

$$L_2(x) = \frac{x^2}{8} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$$

Una vez hallados los coeficientes aplicamos el algoritmo

$$P(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_{n,k}(x)$$

Donde:

$$f(x_0) = \frac{1}{1} = 1 \quad ; \quad f(x_1) = \frac{1}{3} \quad ; \quad f(x_2) = \frac{1}{5}$$

Las imágenes, según la función dada, se reemplazan en el polinomio general:

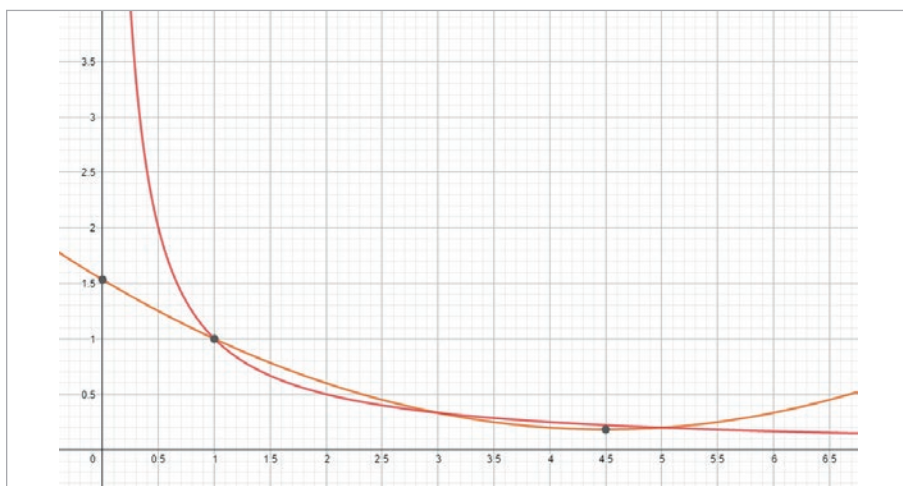
$$P(x) = 1 \times \left(\frac{x^2}{8} - x + \frac{15}{8} \right) + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} \right) + \frac{1}{5} \times \left(\frac{x^2}{8} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} \right)$$

Se simplifica:

$$P(x) = \frac{x^2}{15} - \frac{3}{5}x + \frac{23}{15}$$

Al graficar la función y el polinomio interpolante (ver figura 35) se observa que coinciden en los puntos 1, 3 y 5, pero hay error en los intermedios y obviamente fuera del rango de la interpolación.

Figura 35. Función hiperbólica y polinomio de Lagrange



Nota. Figura de elaboración propia.

La forma de programar los coeficientes es:

L0: celda B: 178

171	Mediante una tabla					
172						
173		x0	x1	x2		
174		1,00	3,00	5,00		
175	f(x)	1,00	0,33	0,20		
176						
177	x1	L0	L1	L2	f(x)	p(x)
178	0,25	=((A178-\$C\$174)*(A178-\$D\$174))/((B\$174-\$C\$174)*(B\$174-\$D\$174))				
179	0,5	1,40625	-0,5625	0,15625	2	1,25
180	0,75	1,1953125	-0,265625	0,0703125	1,333333333	1,120833333
181	1	1	0	0	1	1
182	1,25	0,8203125	0,234375	-0,0546875	0,8	0,8875
183	1,5	0,65625	0,4375	-0,09375	0,666666667	0,783333333
184	1,75	0,5078125	0,609375	-0,1171875	0,571428571	0,6875

Y el polinomio:

171	Mediante una tabla					
172						
173		x0	x1	x2		
174		1,00	3,00	5,00		
175	f(x)	1,00	0,33	0,20		
176						
177	x1	L0	L1	L2	f(x)	p(x)
178	0,25	1,6328125	-0,890625	0,2578125	4	=B178*\$B\$175+C178*\$C\$175+D178*\$D\$175
179	0,5	1,40625	-0,5625	0,15625	2	1,25
180	0,75	1,1953125	-0,265625	0,0703125	1,333333333	1,120833333
181	1	1	0	0	1	1
182	1,25	0,8203125	0,234375	-0,0546875	0,8	0,8875
183	1,5	0,65625	0,4375	-0,09375	0,666666667	0,783333333
184	1,75	0,5078125	0,609375	-0,1171875	0,571428571	0,6875

Ejemplo 2

Con los datos de la tabla 28 se muestran la relación de la corriente con el voltaje en un circuito:

Tabla 28. Observaciones de corriente vs voltaje

x (corriente)	y (voltaje)
2.54	0.85
3.35	1.28
4.67	1.67
5.32	2.89
8	4.12

La manera de encontrar el polinomio de Lagrange que se ajusta a los datos, determinando el voltaje en 5.72, es, según el número de datos, el grado del polinomio de Lagrange que se debe realizar para ajustar los datos experimentales, y corresponde a:

$$P(x) = n.^\circ \text{ Datos} - 1$$

$$P(x) = 5 - 1$$

$$P(x) = 4$$

Al tener cinco datos experimentales, el polinomio de Lagrange deberá ser de cuarto grado, $P_4(x)$.

$$P(x) = F(X_0) * Ln_0 + F(X_1) * Ln_1 + F(X_2) * Ln_2 + F(X_3) * Ln_3 + F(X_4) * Ln_4$$

Es importante verificar que los datos experimentales se encuentren ordenados ascendentemente (de menor a mayor), con el fin de establecer correctamente el rango del polinomio. Luego se determina el rango por medio de la diferencia entre el límite superior y el inferior de los datos.

$$\text{Rango} = \text{límite superior} - \text{límite inferior}$$

En este caso es:

	A	B
3	X(Corriente)	Y(Voltaje)
4	2,54	0,85
5	3,35	1,28
6	4,67	1,67
7	5,32	2,89
8	8	4,12

Calculando el rango de los datos experimentales:

	A	B
10	Rango	=A8-A4

Resultado del rango:

	A	B
10	Rango	5,46

A continuación se establece el número de divisiones requeridas para la interpolación de Lagrange. Es recomendable que sea un múltiplo en base diez del rango obtenido (10, 100, 1000). El múltiplo escogido permitirá obtener valores para números de uno, dos o más decimales.

	A	B
10	Rango	5,46
11	Número de divisiones	=B10*100

El número de divisiones será:

	A	B
10	Rango	5,46
11	Número de divisiones	546

Es decir, si se define como múltiplo 10^1 , se obtendrán valores con un decimal; si se escoge como múltiplo 10^2 , se obtendrán valores con dos decimales, así sucesivamente. Esto se evidencia al calcular el paso de la interpolación.

	A	B
10	Rango	5,46
11	Número de divisiones	546
12	Paso "h"	=B10/B11

Tamaño del paso:

	A	B
10	Rango	5,46
11	Número de divisiones	546
12	Paso "h"	0,01

Se construye la tabla de Lagrange estableciendo el límite inferior. El segundo valor será la suma entre el límite inferior y el paso calculado. Los valores obtenidos siguen la fórmula: $X_i = X_{i-1} + h$, donde X_i es el nuevo valor, a partir del valor anterior, X_{i-1} , y el paso obtenido, h .

Adicionalmente, para garantizar la interpolación entre el límite superior y el inferior, se utiliza un condicional *si*, el cual descarta aquellos datos que no se encuentren dentro del rango.

	A	B	C
17	xi	Ln (0)	Ln (1)
18	2,54		
19	=SI(A18+\$B\$12<=\$A\$8; A18+\$B\$12;"fin")		

Al ejecutar el condicional se obtiene:

	A
17	xi
18	2,54
19	2,55

Si arrastramos hasta las 546 divisiones:

	A	B	C
564	8		
565	=SI(A564+\$B\$12<=\$A\$8; A564+\$B\$12;"fin")		

En la última celda quedara el texto «fin»:

	A
564	8
565	fin

Se construye la tabla de Lagrange estableciendo los coeficientes de Lagrange (Ln) a partir del polinomio de grado cuatro obtenido.

$$P(x) = F(X_0) * Ln_0 + F(X_1) * Ln_1 + F(X_2) * Ln_2 + F(X_3) * Ln_3 + F(X_4) * Ln_4$$

El coeficiente de Lagrange general parte de:

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

Para Ln_0

$$L_{n,0}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)}$$

Donde x es el valor evaluado; X_0 , el primer valor de la tabla; X_1 , el segundo valor de la tabla; x_2 , el tercer valor de la tabla; X_3 , el cuarto valor de la tabla, y X_4 , el quinto valor de la tabla.

Se calcula el primer coeficiente de Lagrange para el primer valor de la tabla (límite inferior).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
17	xi	Ln (0)	Ln (1)	Ln (2)	Ln (3)	Ln (4)	P(x)		
18	2,54	=((A18-\$A\$5)*(A18-\$A\$6)*(A18-\$A\$7)*(A18-\$A\$8))/(((\$A\$4-\$A\$5)*(\$A\$4-\$A\$6)*(\$A\$4-\$A\$7)*(\$A\$4-\$A\$8))							

El primer coeficiente de Lagrange:

	A	B
17	xi	Ln (0)
18	2,54	1

Para $L_{n,1}$.

$$L_{n,1}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}$$

Donde x es el valor evaluado; X_0 , el primer valor de la tabla; X_1 , el segundo valor de la tabla; x_2 , el tercer valor de la tabla; X_3 el cuarto valor de la tabla, y X_4 , el quinto valor de la tabla. Se calcula el segundo coeficiente de Lagrange para el primer valor de la tabla (límite inferior).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
17	xi	Ln (0)	Ln (1)	Ln (2)	Ln (3)	Ln (4)	P(x)				
18	2,54		1	=((A18-\$A\$4)*(A18-\$A\$6)*(A18-\$A\$7)*(A18-\$A\$8))/(((\$A\$5-\$A\$4)*(\$A\$5-\$A\$6)*(\$A\$5-\$A\$7)*(\$A\$5-\$A\$8))							

El segundo coeficiente:

	A	B	C
17	xi	Ln (0)	Ln (1)
18	2,54	1	0

Para $L_{n,2}$:

$$L_{n,2}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}$$

Donde x es el valor evaluado; X_0 , el primer valor de la tabla; X_1 , el segundo valor de la tabla; x_2 , el tercer valor de la tabla; X_3 , el cuarto valor de la tabla, y X_4 , el quinto valor de la tabla.

Se calcula el tercer coeficiente de Lagrange para el primer valor de la tabla (límite inferior).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
17	xi	Ln (0)	Ln (1)	Ln (2)	Ln (3)	Ln (4)	P(x)				
18	2,54		1	0	=((A18-\$A\$4)*(A18-\$A\$5)*(A18-\$A\$7)*(A18-\$A\$8))/(((\$A\$6-\$A\$4)*(\$A\$6-\$A\$5)*(\$A\$6-\$A\$7)*(\$A\$6-\$A\$8))						

El tercer coeficiente:

	A	B	C	D
17	xi	Ln (0)	Ln (1)	Ln (2)
18	2,54	1	0	0

Para L_{n3}

$$L_{n,3}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)}$$

Donde x es el valor evaluado; X_0 , el primer valor de la tabla; X_1 , el segundo valor de la tabla; x_2 , el tercer valor de la tabla; X_3 , el cuarto valor de la tabla, y X_4 , el quinto valor de la tabla.

Se calcula el cuarto coeficiente de Lagrange para el primer valor de la tabla (límite inferior).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
17	xi	Ln (0)	Ln (1)	Ln (2)	Ln (3)	Ln (4)	P(x)					
18	2,54	1	0	0	=((A18-SAS4)*(A18-SAS5)*(A18-SAS6)*(A18-SAS8))/((SAS7-SAS4)*(SAS7-SAS5)*(SAS7-SAS6)*(SAS7-SAS8))							

El cuarto coeficiente:

	A	B	C	D	E
17	xi	Ln (0)	Ln (1)	Ln (2)	Ln (3)
18	2,54	1	0	0	0

Para L_{n4} :

$$L_{n,4}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_0)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}$$

Donde x es el valor evaluado; X_0 , el primer valor de la tabla; X_1 , el segundo valor de la tabla; x_2 , el tercer valor de la tabla; X_3 , el cuarto valor de la tabla, y X_4 , el quinto valor de la tabla.

Se calcula el quinto coeficiente de Lagrange para el primer valor de la tabla (límite inferior).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
17	xi	Ln(0)	Ln(1)	Ln(2)	Ln(3)	Ln(4)	P(x)						
18		2,54	1	0	0	0	$0 = \frac{-(A18-SAS4)*(A18-SAS5)*(A18-SAS6)*(A18-SAS7)}{((SAS8-SAS4)*(SAS8-SAS5)*(SAS8-SAS6)*(SAS8-SAS7))}$						

El quinto coeficiente:

	A	B	C	D	E	F
17	xi	Ln(0)	Ln(1)	Ln(2)	Ln(3)	Ln(4)
18		2,54	1	0	0	0

Al calcular el polinomio de Lagrange con los coeficientes de Lagrange:

$$P(x) = F(X_0) * Ln_0 + F(X_1) * Ln_1 + F(X_2) * Ln_2 + F(X_3) * Ln_3 + F(X_4) * Ln_4$$

El polinomio evaluado en x = 2.54:

	B	C	D	E	F	G	H	I	J
17	Ln(0)	Ln(1)	Ln(2)	Ln(3)	Ln(4)	P(x)			
18	1	0	0	0	0	$0 = SB\$4*B18 + SB\$5*C18 + SB\$6*D18 + SB\$7*E18 + SB\$8*F18$			

Nótese que el valor obtenido en el polinomio es el mismo que en el dato experimental, lo cual indica que el polinomio se ajusta correctamente a ese dato. A continuación, se observa el polinomio en otros datos experimentales suministrados:

	A	B	C	D	E	F	G
99	3,35	7,997E-15	1	-2,1117E-14	9,0258E-15	-1,61E-16	1,28

El polinomio evaluado en los datos del experimento:

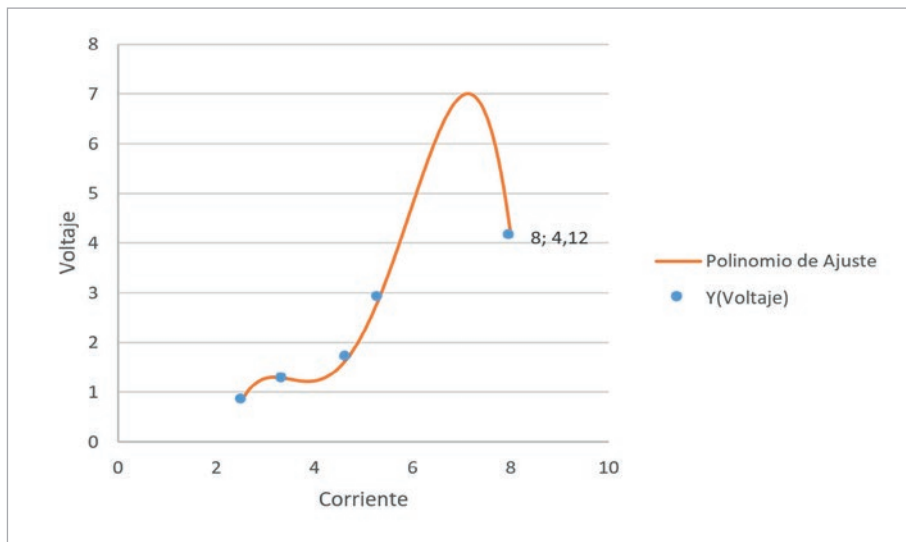
	A	B	C	D	E	F	G
231	4,67	-4,942E-15	2,1322E-14	1	-4,4454E-14	3,6535E-16	1,67

	B	C	D	E	F	G
296	5,32	7,7981E-15	-2,9423E-14	1,4352E-13	1	-9,3492E-16

	A	B	C	D	E	F	G
564	8	-1,8437E-13	5,7885E-13	-1,3009E-12	1,0311E-12	1	4,12

Si se grafican todos los datos con el polinomio, estos se verán tal cual aparecen en la figura 36:

Figura 36. Polinomio de Lagrange del voltaje vs corriente



Nota. Aquí se evidencian series del polinomio y los datos observados. Figura de elaboración propia.

Para la segunda parte del ejercicio se evalúa el polinomio en 5.72.

El valor estimado para el voltaje en 5.72 es de 3.9613, acorde con el polinomio de Lagrange.

336	A	B	C	D	E	F	G
	5,72	-0,08666234	0,31090888	-1,12942964	1,89121298	0,01397012	3,96131528

Actividades propuestas

1. Identificar los elementos y graficar (pendiente, punto de corte con y) la siguiente función lineal.

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + 2$$

2. Si se tienen los siguientes polinomios, esbozar una gráfica aproximada de cada uno de ellos y relacionar la forma de la curva con el grado.

$$p(x) = -2x^2 + x - 4$$

$$p(x) = x^3 - x^2 + x + 2$$

$$p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3$$

$$p(x) = x^5 - x^3 + x - 2$$

3. Una empresa ha determinado que sus ventas durante los últimos tres años (2004, 2005, y 2006) se ajustan a un modelo cuadrático. Si estas ventas fueron 6, 3 y 2, por medio de un ajuste polinomial por Lagrange las ventas para 2007 serán:
- 2.5
 - 4
 - 3
 - 3.5
4. Un vendedor de ferretería desea conocer la demanda de cierta herramienta en función de su precio. En la tabla se presentan las ventas mensuales para cuatro precios diferentes de herramienta.

Precio (X)	\$25	\$30	\$35	\$40
Demanda (Y)	82	75	67	55

5. La demanda mediante un ajuste lineal, cuando el precio es de 32.95 USD sería:
- 186.251
 - 68.949
 - 70.00
 - 65

6. En Ingeniería Hidráulica, el tamaño de un dique depende de la estimación más precisa posible del flujo de agua en el río donde se construye. En algunos ríos es difícil obtener registros históricos de muchos años atrás de tales flujos. En cambio, datos meteorológicos sobre precipitación a menudo sí están disponibles. Por lo tanto, con frecuencia es útil determinar una relación entre flujo y precipitación, la cual se utiliza para estimar los flujos de años anteriores, aun cuando solo se hayan tomado mediciones de precipitación. Para un río que se va a encausar en un dique se muestran los siguientes datos:

Precipitación cm	88.9	101.6	104.1	139.7	132.1	94	116.8	121.9	99.1
Flujo m³/s	114.7	172	152.9	269	206.4	161.4	175.8	239	130

Mediante un ajuste polinomial por mínimos cuadrados, escoger el grado del polinomio que mapee mejor los datos observados y usar el polinomio para establecer el flujo si la precipitación es de 120 cm.

6. Al medir la caída de voltaje v , a través de una resistencia para diversos valores de la corriente i , se obtienen los siguientes resultados:

i (amperios)	0.25	0.75	1.25	1.5	2
v (voltaje)	-0.45	-0.6	0.7	1.88	6

Mediante un ajuste polinomial de curvas, determinar el polinomio que pase por los datos observados y determinar la caída de voltaje cuando: $i = 1.1$

7. La distancia requerida para frenar un automóvil es una función de su rapidez. Si se toman los siguientes datos experimentales para cuantificar esta relación:

Rapidez min/h	15	20	25	30	40	50	60
Distancia de frenado ft	16	20	34	40	60	90	120

Mediante un ajuste polinomial por mínimos cuadrados, escoja el grado del polinomio que mapee mejor los datos observados y use el polinomio para estimar la distancia de frenado para un automóvil que circula a 45 min/h.

8. La viscosidad cinemática del agua ν está relacionada con la temperatura de la siguiente forma:

T, °C	0	4	8	12	16	20	24
ν 10⁻² cm²/s	1.7923	1.5676	1.3874	1.2396	1.1168	1.0105	0.9186

Mediante un ajuste polinomial por mínimos cuadrados, escoger el grado del polinomio que mapee mejor los datos observados y usar el polinomio para estimar ν a una $T = 7.5$ °C.

CAPÍTULO 5

Derivación, integración y ecuaciones diferenciales

El análisis matemático consiste en el estudio de la modificación de las funciones cuando sus variables cambian; este análisis se aplica en varios procesos de ingeniería y ciencias. Los conceptos de diferenciación e integración, que fueron tratados en cursos anteriores de Cálculo, se pueden expandir a soluciones numéricas, ya sea para funciones que no tengan primitivas, como en el caso de integración, o para solucionar ecuaciones diferenciales que no tengan solución analítica.

El objetivo de esta unidad es conocer y aplicar métodos de aproximación para derivadas, integrales y ecuaciones diferenciales. Para este propósito, aquí se tratan tres objetivos específicos: utilizar métodos iterativos de diferencia progresiva, como el método de los tres puntos y el de los cinco puntos para diferenciación numérica; solucionar integrales mediante los métodos del trapecio y de Simpson $n = 2, 3$ y 4 , y resolver ecuaciones diferenciales ordinarias mediante Euler, Taylor orden dos y cuatro y Runge-Kutta¹ orden cuatro.

Lección 1. Derivación numérica

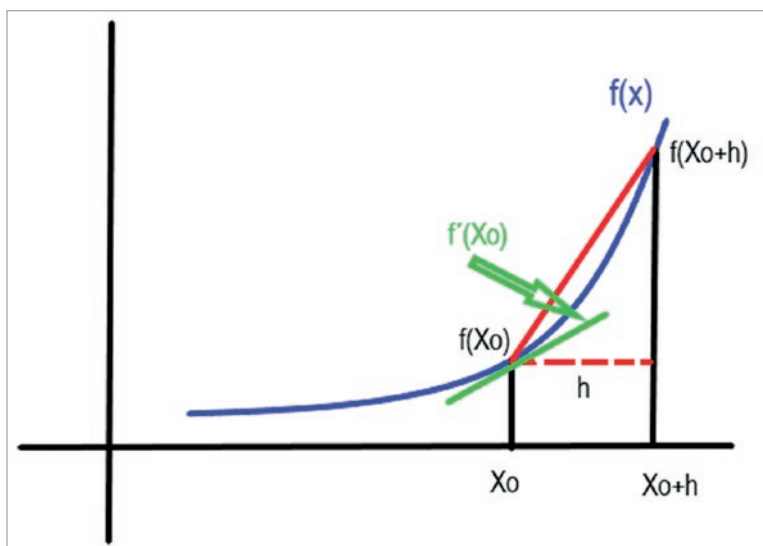
En general, el cálculo numérico de las derivadas se basa en la aproximación de la recta tangente a un valor del dominio en una función con la recta secante; este procedimiento es el principio fundamental con el cual se deducirán en adelante los algoritmos.

¹ Este algoritmo permite, con un alto grado de precisión, la aproximación de una ecuación diferencial ordinaria sin necesidad de calcular derivadas. Fue desarrollado a principios del siglo XX, por los matemáticos alemanes Carl David Tolmé Runge y Martin Wilhelm Kutta.

Método de diferencia progresiva

Este algoritmo se basa en el concepto geométrico de la derivada, puesto que la representación de la derivada en un punto específico para una función es la recta tangente. En la figura 37 es posible visualizar este concepto.

Figura 37. Aproximación de la recta tangente mediante la recta secante



Nota. Concepto geométrico de la derivada. Figura de elaboración propia.

Si h (el paso) tiende a 0, la pendiente de la recta secante que va de $f(x_0)$ a $f(x_0+h)$ se asemeja a $f'(x_0)$ derivada en x_0 ; si llamamos m a la pendiente de la recta secante, esta es dada por:

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Si:

$$\begin{aligned} h &\rightarrow 0 \\ m &\cong f'(x_0) \end{aligned}$$

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

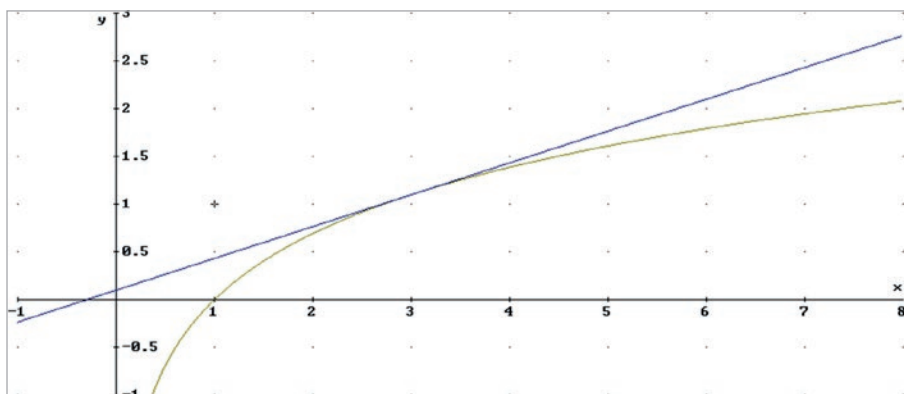
Ejemplo 1

Si $f(x) = \ln(x)$, la derivada analítica es;

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad f'(x_0) = \frac{1}{3} = 0.33333333$$

Para hallar la pendiente en $X_0 = 3$ se realiza el gráfico de la recta tangente en el punto (ver figura 38):

Figura 38. Representación de la derivada: recta tangente en $x = 3$, para $f(x) = \ln(x)$



Nota. Figura de elaboración propia.

Al aplicar la diferencia progresiva con diferentes tamaños de paso (h)

Tabla 29. Método de diferencia progresiva al disminuir el paso

h	$f(x_0+h)$	$f(x_0)$	$(1/h)*(f(x_0+h)-f(x_0))$	Error relativo
0.1	1.13140211	1.09861229	0.327898228229908	1.630531531
0.01	1.10194008	1.09861229	0.332779009267448	0.16629722
0.001	1.09894557	1.09861229	0.333277790120157	0.016662964
0.0001	1.09864562	1.09861229	0.333327777901626	0.001666663

Nota. Valor analítico = $1/3$.

Como se observa en la tabla 29, el tamaño de paso 0.0001 el algoritmo es bastante cercano.

Recordar que el error relativo es:

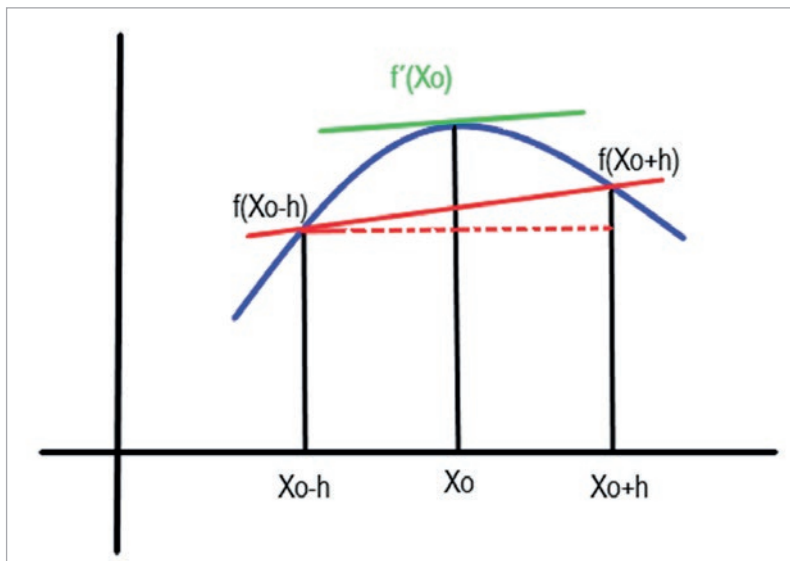
$$E_r = \left| \frac{V_{real} - V_{aprox}}{V_{real}} \right| * 100$$

Es claro que a medida que $h \rightarrow 0$, hay un mayor acercamiento al valor real. Al respecto, vale recordar que no es necesario establecer el valor real para resolver la derivada por métodos numéricos. En el ejemplo se puede comprobar que el método sí aproxima a su solución analítica.

Método de los tres puntos

Este método aproxima mejor la derivada, puesto que emplea dos pasos que se evidencian en la figura 39:

Figura 39. Aproximación de la recta tangente mediante la recta secante con tres puntos



Nota: Como se observa, la pendiente de la recta secante si $h \rightarrow 0$ es similar a la derivada en X_0 . Figura de elaboración propia.

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{(x_0 + h) - (x_0 - h)}$$

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Si:

$$h \rightarrow 0$$

$$m \cong f'(x_0)$$

$$f'(x_0) \cong \frac{1}{2h} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)]$$

Para la misma función del ejemplo anterior se pueden organizar los datos en la tabla 30:

Tabla 30. Método de los tres puntos al disminuir el paso

h	f(x ₀ +h)	f(x ₀ -h)	(1/(2h))*(f(x ₀ +h)-f(x ₀ -h))	Error relativo
0.1	1.13140211	1.06471074	0.333456872493362	0.037061748
0.01	1.10194008	1.09527339	0.333334567909460	0.000370373
0.001	1.09894557	1.0982789	0.333333345678977	3.70369E-06
0.0001	1.09864562	1.09857895	0.333333333457642	3.72925E-08

Valor Analítico=1/3

Es claro que este método arroja mayor precisión que el anterior si se comparan los errores relativos.

Método de los cinco puntos

Este método se basa en la derivación del polinomio de Lagrange con cinco puntos, de tal manera se obtiene:

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h} [f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]$$

Si se aplica este método para el mismo ejemplo, se pueden organizar los datos tal como aparecen en la tabla 31:

Tabla 31. Método de los cinco puntos al disminuir el paso

h	$f(x_0-2h)$	$8^*f(x_0-h)$	$8^*f(x_0+h)$	$f(x_0+2h)$	Algoritmo	Error Relativo
0.1	1.02961942	8.5176859	9.05121689	1.16315081	0.333333002804047	9.91588E-05
0.01	1.0919233	8.7621871	8.81552063	1.10525683	0.333333333300401	9.87978E-09
0.001	1.0979454	8.7862312	8.79156453	1.09927873	0.333333333333315	5.4623E-12
0.0001	1.09854562	8.78863164	8.78916497	1.09867895	0.333333333334407	3.22042E-10

Nota: Valor Analítico = 1/3. Tabla de elaboración propia.

Se observa que con el primer tamaño de paso se obtiene un bajo error relativo.

Ejemplo 2

Derivar la siguiente función por los métodos de diferencia progresiva y tres puntos en:

$$x_0 = \frac{\pi}{4}, h = 0.00001$$

Y hallar el error relativo para cada método.

Para hallar el error relativo se calcula la derivada analítica y se reemplaza el valor de x_0 (valor real). Este valor será comparado con las derivadas obtenidas por diferencia progresiva y tres puntos.

$$f(x) = x * \text{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \ln(x^2 + 4)$$

$$f'(x) = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

	A	B	C	D
15	Tabla			
16	xi	0,78539816	Valor Real	=ATAN(B16/2)

La derivada en $\pi/4$:

	A	B	C	D
15	Tabla			
16	xi	0,78539816	Valor Real	0,37419668

Por el método de diferencia progresiva:

$$f'(x) \cong \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

Las funciones $f(x_i+h)$ y $f(x_i)$:

$$f(X_0 + h) = (X_0 + h) * \text{Tan}^{-1}\left(\frac{X_0 + h}{2}\right) - \ln((X_0 + h)^2 + 4)$$

$$f(X_0) = (X_0) * \text{Tan}^{-1}\left(\frac{X_0}{2}\right) - \ln((X_0)^2 + 4)$$

$$f'(x) \cong \frac{(X_0 + h) * \text{Tan}^{-1}\left(\frac{X_0 + h}{2}\right) - \ln((X_0 + h)^2 + 4) - (X_0) * \text{Tan}^{-1}\left(\frac{X_0}{2}\right) - \ln((X_0)^2 + 4)}{h}$$

Donde:

$$x_0 = \frac{\pi}{4}, h = 0.00001$$

El algoritmo con el valor y el paso en la herramienta de cálculo:

	A	B	C	D	E	F	G	H
16	xi	0,78539816						
17	Paso "h"	0,00001						
18	Valor aproximado	=(((B16+B17)*ATAN((B16+B17)/2)-LN((B16+B17)^2+4))- (B16*ATAN((B16/2))-LN(B16^2+4)))/B17						

Resultados del algoritmo:

	A	B
16	xi	0,78539816
17	Paso "h"	0,00001
18	Valor aproximado	0,37419885

Se calcula el error relativo entre los valores obtenidos.

	A	B	C	D
16	xi	0,78539816	Valor Real	0,37419668
17	Paso "h"	0,00001		
18	Valor aproximado	0,37419885		
19	Error Relativo	=ABS(D16-B18)/(D16) * 100		

El error relativo es:

	A	B
16	xi	0,78539816
17	Paso "h"	0,00001
18	Valor aproximado	0,37419885
19	Error Relativo	0,00057883

Por el método de tres puntos, al partir del algoritmo general de diferencia progresiva:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)]$$

Las funciones $f(x_0 + h)$ y $f(x_0 - h)$ son reemplazadas en la función para programar el algoritmo de diferencia progresiva.

$$f(x_0 + h) = (x_0 + h) * \tan^{-1} \left(\frac{x_0 + h}{2} \right) - \ln((x_0 + h)^2 + 4)$$

$$f(x_0 - h) = (x_0 - h) * \tan^{-1} \left(\frac{x_0 - h}{2} \right) - \ln((x_0 - h)^2 + 4)$$

$f'(x)$

$$\cong \frac{(x_0 + h) * \tan^{-1} \left(\frac{x_0 + h}{2} \right) - \ln((x_0 + h)^2 + 4) - (x_0 - h) * \tan^{-1} \left(\frac{x_0 - h}{2} \right) - \ln((x_0 - h)^2 + 4)}{h}$$

Donde:

$$x_0 = \frac{\pi}{4}, h = 0.00001$$

El algoritmo con el valor y el paso en la herramienta de cálculo:

	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
16	xi	0,785398163								
17	Paso "h"	0,00001								
18	Valor aproximado	=(((L16+L17)*ATAN(((L16+L17)/2)-LN((L16+L17)^2+4)))-((L16-L17)*ATAN(((L16-L17)/2)-LN((L16-L17)^2+4)))/(2*L17)								

El resultado del algoritmo:

	K	L
16	xi	0,785398163
17	Paso "h"	0,00001
18	Valor aproximado	0,374196681

Se calcula el error relativo entre los valores obtenidos.

	K	L	M	N
15	Tabla			
16	xi	0,785398163	Valor Real	0,37419668
17	Paso "h"	0,00001		
18	Valor aproximado	0,374196681		
19	Error Relativo	=ABS(N16-L18)/(N16) * 100		

El error relativo en porcentaje es:

	K	L	M	N
15	Tabla			
16	xi	0,785398163	Valor Real	0,37419668
17	Paso "h"	0,00001		
18	Valor aproximado	0,374196681		
19	Error Relativo	9,04356E-10		

Nótese que el error relativo por el método de los tres puntos es inferior al error relativo por el método de diferencia progresiva; en consecuencia, el primer método es más preciso.

Derivadas de datos

Existen varios métodos para derivar datos. El usado aquí tiene la ventaja de que los datos pueden estar diferentemente espaciados. Este método se debe trabajar entre tres puntos y se basa en un polinomio de Lagrange que genera una función cuadrática, así:

Ejemplo 3

Si un móvil se desplaza por una pista y se han tomado los datos de velocidad en diferentes tiempos (ver tabla 32), cuando el tiempo es de cuatro segundos la manera de determinar la aceleración es:

Tabla 32. Observaciones para la velocidad del móvil en diferentes tiempos

T (s)	1	2	3.25	4.5	6	7	8	8.5	9.3
V (m/s²)	50	60	55	70	85	80	60	70	50

Como la derivada de la velocidad es la aceleración, se toman los siguientes datos (ver tabla 33) para hallar la derivada en el tiempo solicitado: $T = 4$.

Tabla 33. Datos para el cálculo de la derivada en $t = 4$ s en el primer intervalo

T (s)	2	3.25	4.5
	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}
V (m/s²)	60	55	70
	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$

Se aplica el algoritmo:

$$f'(x) = f(x_{i-1}) \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} + f(x_i) \frac{2x - x_{i-1} - x_{i+1}}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} + f(x_{i+1}) \frac{2x - x_{i-1} - x_i}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}$$

$$f'(4) = 60 \frac{2(4) - 3.25 - 4.5}{(2 - 3.25)(2 - 4.5)} + 55 \frac{2(4) - 2 - 4.5}{(3.25 - 2)(3.25 - 4.5)} + 70 \frac{2(4) - 2 - 3.25}{(4.5 - 2)(4.5 - 3.25)}$$

$$f'(4) = 13.6 \frac{m}{s^2}$$

También el dato solicitado puede establecerse en el intervalo (ver tabla 34):

Tabla 34. Datos para el cálculo de la derivada en $t = 4$ s en el otro intervalo

T (s)	3.25	4.5	6.0
	x_{i-1}	x_i	X_{i+1}
V (m/s²)	55	70	85
	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	$f(X_{i+1})$

Se aplica el algoritmo:

$$f'(4) = 11.8 \frac{m}{s^2}$$

Que es similar al anterior.

Lección 2. Integración numérica

En esta lección se trabaja con integrales de funciones que no se pueden desarrollar analíticamente y con la integración de datos por medio de dos técnicas: trapezios y Simpson. En la parte inicial se comparan los métodos con la solución analítica para establecer su precisión.

Integración por el método de trapecio

Por cálculo integral se tiene que el área bajo una función está dada por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Se aproximará por el área de un trapecio, la deducción del algoritmo mediante un ejemplo puede ser:

Ejemplo 4

Teniendo:

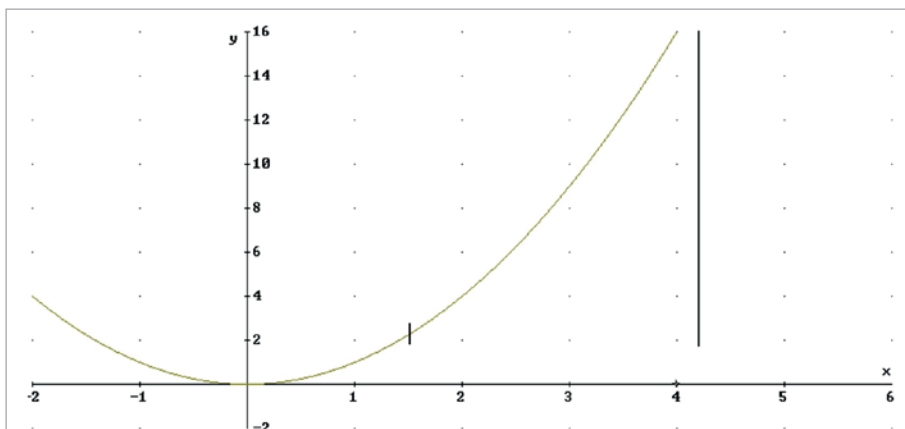
$$f(x) = x^2$$

Para hallar el área

$$A = \int_1^4 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^4$$
$$A = \frac{1}{3} [4^3 - 1^3] = \frac{63}{3} = 21$$

Gráficamente el área real hallada es:

Figura 40. Área bajo la parábola



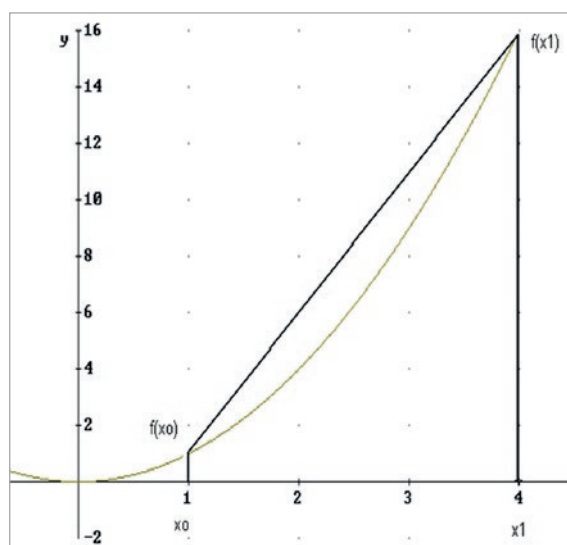
Nota. Área bajo $f(x) = x^2$, en el Intervalo $[1,4]$. Figura de elaboración propia.

El área de un trapecio está dada por:

$$A = \frac{h}{2}(b + b')$$

Y si se aproxima en área mediante un solo trapecio, bajo la función se vería como en la figura 41:

Figura 41. Aproximación del área bajo la función mediante un trapecio



Nota. h = altura y b y b' = base mayor y menor, respectivamente. Figura de elaboración propia.

Se observa que es una aproximación bastante alejada, pero si se asimila la fórmula del trapecio con:

$$A = \frac{h}{2}(b + b')$$

$$h = x_1 - x_0$$

$$b = f(x_1)$$

$$b' = f(x_0)$$

Entonces queda así:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \cong \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$$

Y si se desarrolla el algoritmo mediante la tabla 35 se obtiene:

Tabla 35. Algoritmo del trapecio con $h = 3$

X_i	$f(X_i)$	H	Algoritmo	Error relativo
1	1			
4	16	3	25.5	21.42857143

Nota. Valor analítico = 21. Tabla de elaboración propia.

Como se observa, el error es demasiado grande; pero se puede reducir mediante el concepto de integración numérica que se compone así:

$$\int_1^4 x^2 dx = \int_1^2 x^2 dx + \int_2^3 x^2 dx + \int_3^4 x^2 dx$$

Al aplicar el algoritmo del trapecio queda:

$$\int_1^4 x^2 dx = \frac{1}{2} [f(1) + f(2)] + \frac{1}{2} [f(2) + f(3)] + \frac{1}{2} [f(3) + f(4)]$$

$$\int_1^4 x^2 dx = \frac{1}{2} [1^2 + 2^2] + \frac{1}{2} [2^2 + 3^2] + \frac{1}{2} [3^2 + 4^2] = \frac{43}{2} \approx 21.5$$

Y si se desarrolla el algoritmo en la tabla 36 queda:

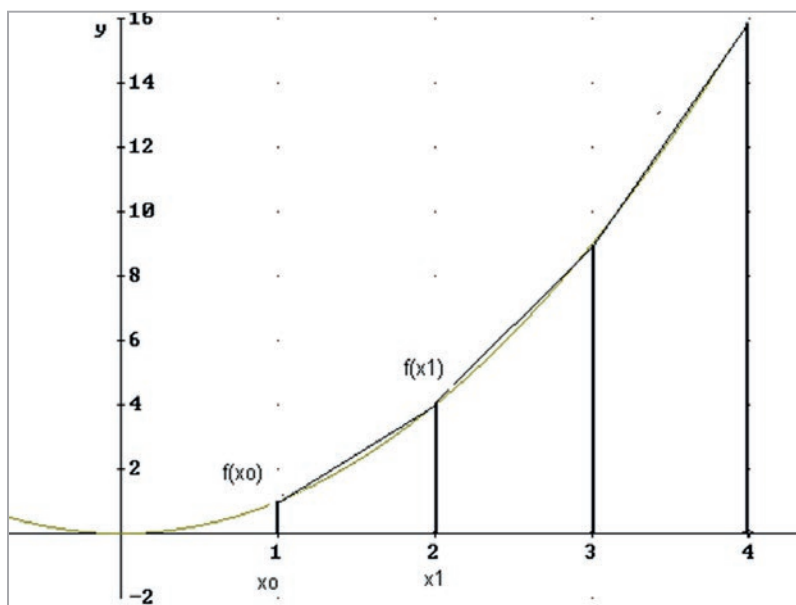
Tabla 36. Algoritmo del trapecio con $h = 1$

X_i	$f(X_i)$	H	Algoritmo	Error relativo
1	1			
2	4	1	2.5	
3	9	1	6.5	
4	16	1	12.5	
Suma			21.5	2.380952381

Nota. Valor analítico = 21. Tabla de elaboración propia.

De esta forma se redujo significativamente el error, como se ve en la figura 42:

Figura 42. Aproximación del área bajo la función por tres trapecios en el intervalo $[1,4]$



Nota. Figura de elaboración propia.

Si se reduce más el paso tal como se muestra en la tabla 37:

Tabla 37. Algoritmo del trapecio con $h = 0.25$

X_i	$f(X_i)$	h	Algoritmo	Error relativo
1	1			
1.25	1.5625	0.25	0.3203125	
1.5	2.25	0.25	0.4765625	
1.75	3.0625	0.25	0.6640625	
2	4	0.25	0.8828125	
2.25	5.0625	0.25	1.1328125	
2.5	6.25	0.25	1.4140625	
2.75	7.5625	0.25	1.7265625	
3	9	0.25	2.0703125	
3.25	10.5625	0.25	2.4453125	
3.5	12.25	0.25	2.8515625	
3.75	14.0625	0.25	3.2890625	
4	16	0.25	3.7578125	
Suma			21.03125	0.148809524

Nota. Valor analítico = 21. Tabla de elaboración propia.

Lo cual lleva a una mejor estimación.

Integración por regla de Simpson

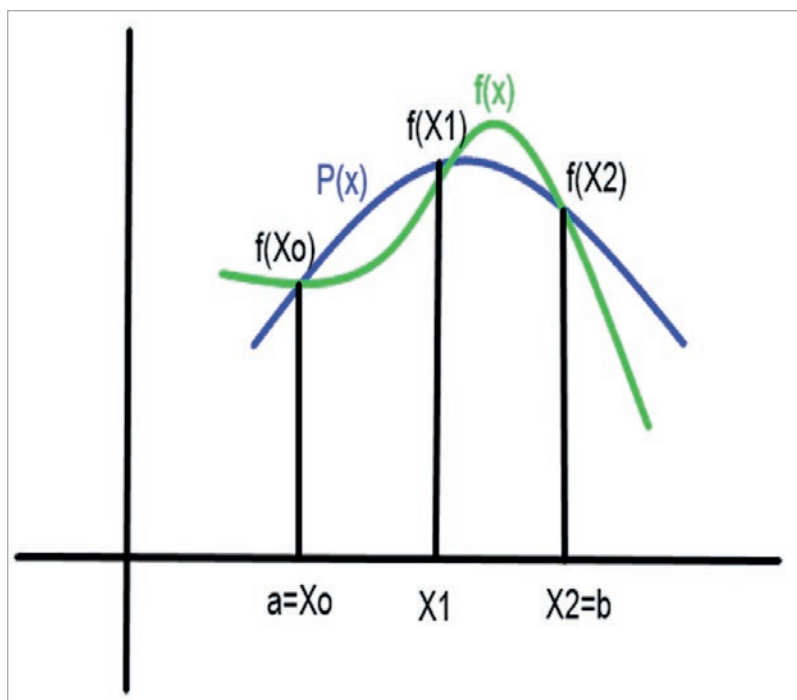
La regla de Simpson se obtiene al revisar $[a, b]$ el segundo polinomio de Lagrange $P(2)$ con los nodos $x_0 = a$, $x_2 = b$, $x_1 = a + h$.

Donde:

$$h = \frac{1}{2}(b - a)$$

Gráficamente se ve así mediante la figura 43:

Figura 43. Aproximación del área bajo la función por un polinomio de grado dos



Nota. Figura de elaboración propia.

Al hallar el área bajo el polinomio de Lagrange se obtiene:

Simpson $n = 2$:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \cong \frac{h}{3} [f(x_0) + 4 * f(x_1) + f(x_2)]$$

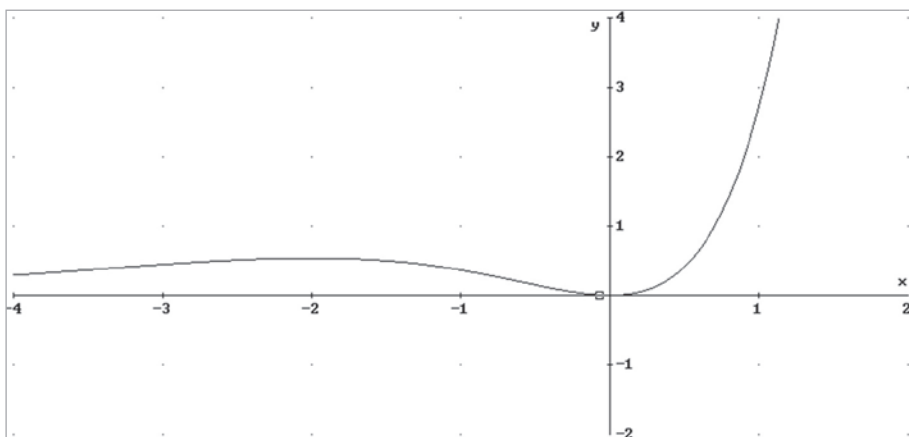
Ejemplo 5

Al tener la función:

$$f(x) = x^2 e^x$$

Para hallar el área entre $x_0 = -3$ y $x_2 = 0$

Figura 44. Función en el intervalo $[-3,0]$: función: $f(x) = x^2 * e^x$



Nota. Figura de elaboración propia.

El valor real es:

$$\int_{-3}^0 x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x \Big|_{-3}^0$$

$$\int_{-3}^0 x^2 e^x dx = \left[(0^2 e^0 - 2(0)e^0 + 2e^0) - (-3^2 e^{-3} - 2(-3)e^{-3} + 2e^{-3}) \right]$$

$$\int_{-3}^0 x^2 e^x dx = 1.1536198377463$$

Y si se hace por Simpson $n = 2$.

Los puntos que se deben tomar son $x_0 = -3$, $x_1 = -1,5$ y $x_2 = 0$. Ahora, al aplicar el algoritmo:

Y mediante la tabla 38 en Excel:

Tabla 38. Algoritmo Simpson $n = 2$ y error relativo con una sola integral

	X_i	$f(X_i)$	Algoritmo Simpson $n = 2$	Error relativo
x_0	-3	0.44808362		
x_1	-1.5	0.50204286		
x_2	0	0	1.228127528	6.458599977

Nota. Valor analítico=1.1536198377463... Tabla de elaboración propia.

También se puede desarrollar mediante integración numérica compuesta con el propósito de mejorar la exactitud, tal como se presenta en la tabla 39:

Tabla 39. Algoritmo Simpson $n = 2$ y error relativo con dos integrales

	X_i	$f(X_i)$	Algoritmo Simpson $n=2$	Error relativo
x_0	-3	0.44808362		
x_1	-2.25	0.53358357		
x_2	-1.5	0.50204286	0.771115193	
x_0	-1.5	0.50204286		
x_1	-0.75	0.26570619		
x_2	0	0	0.391216901	
Sumatoria			1.162332094	0.755210358

Nota. Valor analítico = 1.1536198377463... Tabla de elaboración propia.

Otra ampliación al método de Simpson es la regla tres octavos o Simpson $n = 3$, en la que intervienen cuatro puntos en el intervalo dado. El algoritmo es:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \cong \frac{3 * h}{8} [f(x_0) + 3 * f(x_1) + 3 * f(x_2) + f(x_3)]$$

Para el mismo ejemplo, si se quiere hallar el área entre $x_0 = -3$ y $x_3 = 0$:

Tabla 40. Algoritmo Simpson $n = 3$ y error relativo con una integral

	X_i	$f(X_i)$	Algoritmo Simpson $n=3$	Error relativo
	x_0	-3	0.44808362	
	x_1	-2	0.54134113	
	x_2	-1	0.36787944	
	x_3	0	0	1.190904502
				3.231971457

Nota: El valor analítico es = 1.1536198377463...y el del algoritmo es= 1.190904502, por lo tanto, el error relativo es del 3%. Tabla de elaboración propia.

Al comparar con Simpson $n = 2$, el error se redujo de 6.46 % a 3.23 %. También se puede desarrollar mediante integración numérica compuesta con el propósito de mejorar la exactitud, así:

Tabla 41. Algoritmo Simpson $n = 3$ y error relativo con dos integrales

	X_i	$f(X_i)$	Algoritmo Simpson $n=3$	Error relativo
	x_0	-3	0.44808362	
	x_1	-2.5	0.51303124	
	x_2	-2	0.54134113	

Continúa tabla

	X_i	$f(X_i)$	Algoritmo Simpson $n=3$	Error relativo
	x_3	-1.5	0.50204286	0.771233175
	x_0	-1.5	0.50204286	
	x_1	-1	0.36787944	
	x_2	-0.5	0.15163266	
	x_3	0	0	0.386358596
Sumatoria			1.157591771	0.344301725

Nota: El valor analítico es = 1.1536198377463...y el del algoritmo es= 1.157591771, por lo tanto, el error relativo es del 0.3%. Tabla de elaboración propia.

Y aún más preciso como lo podemos apreciar en la tabla 42:

Tabla 42. Algoritmo Simpson $n = 3$ y error relativo con cuatro integrales

	X_i	$f(X_i)$	Algoritmo Simpson $n = 3$	Error relativo
	x_0	-3	0.44808362	
	x_1	-2.75	0.48345445	
	x_2	-2.5	0.51303124	
	x_3	-2.25	0.53358357	0.3722929
	x_0	-2.25	0.53358357	
	x_1	-2	0.54134113	
	x_2	-1.75	0.5321827	
	x_3	-1.5	0.50204286	0.399018557
	x_0	-1.5	0.50204286	
	x_1	-1.25	0.44766375	
	x_2	-1	0.36787944	
	x_3	-0.75	0.26570619	0.301347994

Continúa tabla

	X_i	$f(X_i)$	Algoritmo Simpson $n = 3$	Error relativo
x_0	-0.75	0.26570619		
x_1	-0.5	0.15163266		
x_2	-0.25	0.04867505		
x_3	0	0	0.081246499	
Sumatoria			1.15390595	0.024801286

Nota: El valor analítico es = 1.1536198377463...y el del algoritmo es= 1.15390595, por lo tanto, el error relativo es del 0.02%. Tabla de elaboración propia.

Por último, está Simpson $n = 4$:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx \cong \frac{2 * h}{45} [7 * f(x_0) + 32 * f(x_1) + 12 * f(x_2) + 32 * f(x_3) + 7 * f(x_4)]$$

Si se aplica este algoritmo por integración numérica compuesta con tres integrales se obtiene (ver tabla 43):

Tabla 43. Algoritmo Simpson $n = 4$ y error relativo con una integral

Integral	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	Integral Simpson $n=4$
1	-3	-2.75	-2.5	-2.25	-2	0.506972944
2	-2	-1.75	-1.5	-1.25	-1	0.486046052
3	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.160610529
Sumatoria						1.153629524
Error Relativo						0.000839633

Nota. El valor analítico es = 1.1536198377463...y el del algoritmo es= 1.153629524, por lo tanto, el error relativo es del 0.0008%. Tabla de elaboración propia.

Lección 3. Ecuaciones diferenciales

Como ya se mencionó, las ecuaciones diferenciales sirven para modelar problemas de ciencias e ingeniería que requieren un cambio de variable respecto a otra. En la mayoría de las aplicaciones estas ecuaciones se resuelven con una condición inicial dada. La presente lección se ocupa de la solución por aproximación numérica de este tipo de ecuaciones diferenciales. En la práctica muchos modelos para la solución de problemas generan ecuaciones diferenciales demasiado complicadas para solucionarlos por métodos analíticos o incluso resultan imposibles de resolver. Es aquí donde los métodos numéricos son relevantes.

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Si tenemos:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = y - t^2 + 1 \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2 \quad ; \quad y(0) = 0.5$$

A manera de ejemplo, este problema se resolverá analíticamente para poder comparar la precisión de los métodos tratados. Sin embargo, es claro que no se necesita desarrollar la ecuación por métodos tradicionales cuando se resuelve por análisis numérico.

La solución analítica es:

1. Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma general:

$$a_1(x) \frac{\partial y}{\partial x} + a_0(x)y = g(x)$$

2. Si se lleva a forma estándar (dividiendo $a_1(x)$):

$$\frac{\partial y}{\partial x} + P(x)y = f(x)$$

3. Si se establece un factor integrante:

$$e^{\int P(x) \partial x}$$

4. Al multiplicar la ecuación diferencial dada por el factor integrante se llega fácilmente a la solución general. Así, para el ejemplo, se trasladan términos para llevarla a forma estándar:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - y = 1 - t^2$$

El factor integrante es:

$$e^{\int -1 \partial t} = e^{-t}$$

5. Al multiplicar a ambos lados:

$$e^{-t} \frac{\partial y}{\partial t} - e^{-t} y = e^{-t} - e^{-t} t^2$$

Si se observa, el miembro izquierdo es equivalente a:

$$\frac{\partial}{\partial t} [e^{-t} y] = e^{-t} - e^{-t} t^2$$

6. Si se integra a ambos lados:

$$\int \partial [e^{-t} y] = \int (e^{-t} - e^{-t} t^2) \partial t$$

$$e^{-t} y = \int e^{-t} \partial t - \int e^{-t} t^2 \partial t$$

Para la segunda integral, la técnica adecuada es por partes, al derivar e integrar según la partición se tiene:

$$\begin{aligned}u &= t^2 & dv &= e^{-t} \partial t \\ du &= 2t dt & v &= -e^{-t} \\ \int u dv &= u * v - \int v du\end{aligned}$$

Al reemplazar:

$$e^{-t} y = -e^{-t} - \left[-t^2 e^{-t} + 2 \int t e^{-t} dt \right]$$

Nuevamente se aplican partes en la integral que quedó en el tercer término.

$$\begin{aligned}u &= t & dv &= e^{-t} \partial t \\ du &= dt & v &= -e^{-t} \\ \int u dv &= u * v - \int v du \\ e^{-t} y &= -e^{-t} - \left[-t^2 e^{-t} + 2 \left\{ -t e^{-t} + \int e^{-t} dt \right\} \right]\end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}e^{-t} y &= -e^{-t} - \left[-t^2 e^{-t} - 2t e^{-t} - 2e^{-t} \right] \\ e^{-t} y &= -e^{-t} + t^2 e^{-t} + 2t e^{-t} + 2e^{-t} \\ e^{-t} y &= t^2 e^{-t} + 2t e^{-t} + e^{-t} + c\end{aligned}$$

Se divide por e^{-t} :

$$\begin{aligned}y &= t^2 + 2t + 1 + \frac{c}{e^{-t}} \\ y &= t^2 + 2t + 1 + ce^t \\ y &= (t+1)^2 + ce^t\end{aligned}$$

Según la condición inicial:

$$y(0) = 0.5$$

Al reemplazar:

$$0.5 = (0+1)^2 + ce^0$$

$$0.5 = 1 + c$$

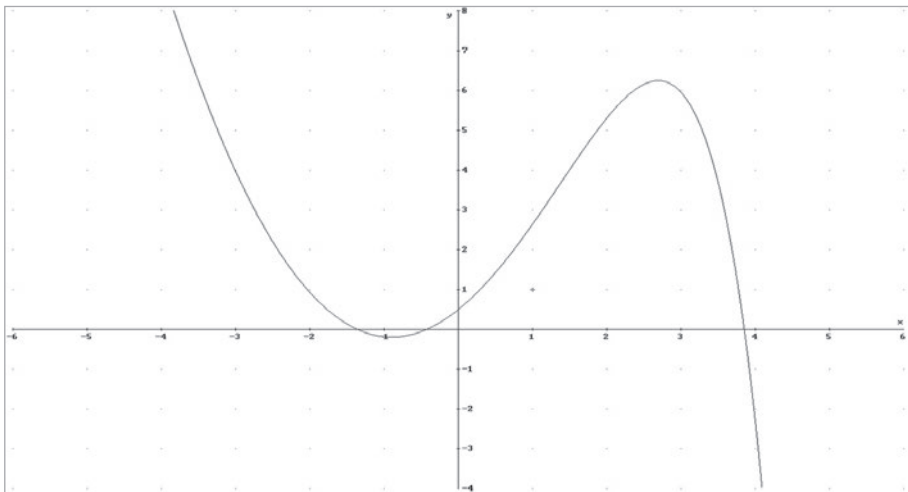
$$c = -0.5$$

Por lo tanto, la solución exacta:

$$y = (t+1)^2 - 0.5e^t$$

Y la gráfica se puede apreciar en la figura 45:

Figura 45. Solución particular de la ecuación diferencial



Nota. $y = (t+1)^2 - 0.5e^t$. Figura de elaboración propia

Método de Euler

Este método es poco utilizado debido al error que genera; sin embargo, la simplicidad de su cálculo sirve para ejemplificar otras técnicas más precisas.

El algoritmo es:

$$w_{i+1} = w_i + hf(w_i, t_i)$$

Con

$$h = \frac{b - a}{N}$$

Ejemplo 6

Hallar la aproximación por el método de Euler al ejemplo desarrollado analíticamente:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = y - t^2 + 1 \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2 \quad ; \quad y(0) = 0.5$$

El problema del valor inicial:

$$y(0) = 0.5 = w_0; \text{ para } t_0 = 0 \text{ como } 0 \leq t \leq 2$$

Si tomamos $N=10$

$$h = \frac{2 - 0}{10} = 0.2 \quad (\text{Tamaño del paso})$$

Y la ecuación diferencial en términos del algoritmo:

$$y - t^2 + 1 = w_i - t_i^2 + 1$$

Como en Taylor, coincide el valor inicial, y a medida que se avanza se aleja del valor real, es decir:

La iteración inicial

$$t_0 = 0 \quad w_0 = 0.5$$

Para la primera iteración:

$$t_1 = 0.2$$

$$w_{0+1} = w_0 + 0.2 * (w_0 - t_0^2 + 1)$$

Al reemplazar los valores iniciales:

$$w_1 = 0.5 + 0.2 * (0.5 - 0^2 + 1)$$

$$w_1 = 0.8$$

La segunda iteración:

$$t_2 = 0.4 \quad w_1 = 0.8$$

$$w_{1+1} = w_1 + 0.2 * (w_1 - t_1^2 + 1)$$

Al reemplazar los valores:

$$w_2 = 0.8 + 0.2 * (0.8 - 0.2^2 + 1)$$

$$w_2 = 1.152$$

La tercera iteración:

$$t_3 = 0.6 \quad w_2 = 1.152$$

$$w_{2+1} = w_2 + 0.2 * (w_2 - t_2^2 + 1)$$

Al reemplazar los valores:

$$w_3 = 1.152 + 0.2 * (1.152 - 0.4^2 + 1)$$

$$w_3 = 1.5504$$

La cuarta iteración:

$$t_4 = 0.8 \quad w_3 = 1.5504$$

$$w_{3+1} = w_3 + 0.2 * (w_3 - t_3^2 + 1)$$

Al reemplazar los valores:

$$w_4 = 1.5504 + 0.2 * (1.5504 - 0.6^2 + 1)$$

$$w_4 = 1.98848$$

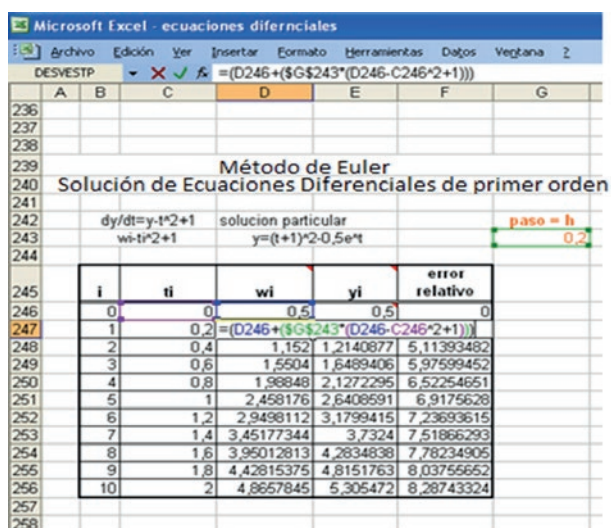
Y así sucesivamente. Si se desarrolla la tabla 45 en Excel y queda de la siguiente forma:

Tabla 44. Método de Euler

i	ti	Wi	Yi	Error relativo
0	0	0.5	0.5	0
1	0.2	0.8	0.82929862	3.532939786
2	0.4	1.152	1.21408765	5.113934823
3	0.6	1.5504	1.6489406	5.975994515
4	0.8	1.98848	2.12722954	6.522546506
5	1	2.458176	2.64085909	6.917562802
6	1.2	2.9498112	3.17994154	7.236936146
7	1.4	3.45177344	3.73240002	7.518662934
8	1.6	3.95012813	4.28348379	7.782349048
9	1.8	4.42815375	4.81517627	8.037556523
10	2	4.8657845	5.30547195	8.287433245

Nota. $dy/dt = y-t^2+1$ Solución analítica
 $f(w_i,t_i) = w_i-t_i^2+1$ $y = (t+1)^2-0,5e^t$

Y la programación se realizó así:



Solución analítica

Microsoft Excel - ecuaciones diferenciales

DESVESTP $=(((C247+1)^2)-(0,5*EXP(C247)))$

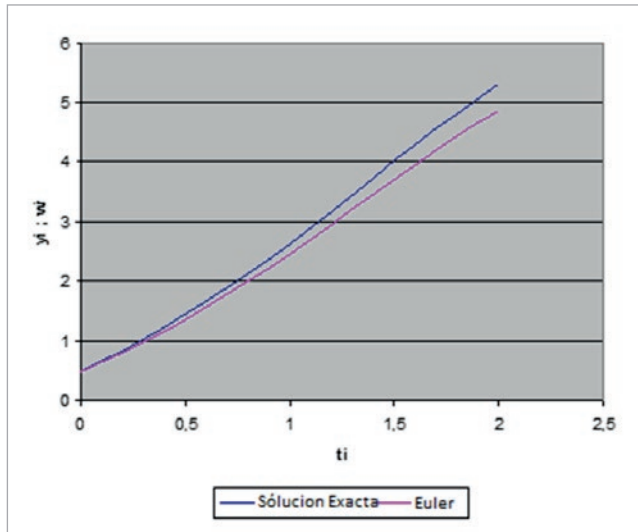
Método de Euler
Solución Analítica y calculo del error relativo

$dy/dt=y-t^2+1$ solución particular **paso = h**
 $wi-t^2+1$ $y=(t+1)^2-0,5e^t$ **0,2**

i	ti	wi	yi	error relativo
0	0	0,5	0,5	0
1	0,2	0,8	$=(((C247+1)^2)-(0,5*EXP(C247)))$	
2	0,4	1,152	1,2140877	5,11393482
3	0,6	1,5504	1,6489406	5,97599452
4	0,8	1,98848	2,1272295	6,52254651
5	1	2,458176	2,6408591	6,9175628
6	1,2	2,9498112	3,1799415	7,23693615
7	1,4	3,45177344	3,7324	7,51866293
8	1,6	3,95012813	4,2834838	7,78234905
9	1,8	4,42815375	4,8151763	8,03755652
10	2	4,8657845	5,305472	8,28743324

El gráfico de la solución real vs la aproximación:

Figura 46. Gráfica comparativa de la solución analítica vs Euler



Nota: Se observa claramente que a medida que se aleja del valor inicial se va aumentando el error.
 Figura de elaboración propia.

Métodos de Taylor de orden superior

Estos métodos trabajan con derivadas de orden superior, por lo cual producen una mejor aproximación en la solución de la ecuación diferencial. El método de Euler se puede considerar como el de Taylor de orden uno.

El algoritmo general es:

$$w_{i+1} = w_i + h T^{(n)}(w_i, t_i)$$

Con:

$$h = \frac{b - a}{N}$$

y

$$T^{(n)}(w_i, t_i) = f(w_i, t_i) + \frac{h}{2} f'(w_i, t_i) + \frac{h^2}{6} f''(w_i, t_i) + \dots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(w_i, t_i)$$

Para efectos prácticos, se utiliza el algoritmo para órdenes dos y cuatro. En el ejemplo anterior:

Si tenemos:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = y - t^2 + 1 \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2 \quad ; \quad y(0) = 0.5$$

Para Taylor orden dos el algoritmo sería:

$$w_{i+1} = w_i + h T^{(2)}(w_i, t_i)$$

Donde:

$$T^{(2)} = f(w_i, t_i) + \frac{h}{2} f'(w_i, t_i)$$

Al derivar la ecuación diferencial dada:

$$\frac{\partial}{\partial t}(y - t^2 + 1) = \frac{\partial y}{\partial t} - 2t$$

Como:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = y - t^2 + 1$$

Se reemplaza:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(y - t^2 + 1) &= y - t^2 + 1 - 2t \\ f'(y(t), t) &= y - t^2 - 2t + 1\end{aligned}$$

Para el algoritmo:

$$f'(w_i, t_i) = w_i - t_i^2 - 2t_i + 1$$

Por lo tanto:

$$T^{(2)} = w_i - t_i^2 + 1 + \frac{h}{2}(w_i - t_i^2 - 2t_i + 1)$$

Si finalmente se reemplaza en el algoritmo general:

$$w_{i+1} = w_i + h \left(w_i - t_i^2 + 1 + \frac{h}{2}(w_i - t_i^2 - 2t_i + 1) \right)$$

La iteración inicial:

$$w_{i+1} = w_i + h T^{(2)}(w_i, t_i)$$

Para la primera iteración

$$t_1 = 0.2$$

$$w_{0+1} = w_0 + h \left(w_0 - t_0^2 + 1 + \frac{h}{2}(w_0 - t_0^2 - 2t_0 + 1) \right)$$

Al reemplazar los valores:

$$w_1 = 0.5 + 0.2 \left(0.5 - 0^2 + 1 + \frac{0.2}{2}(0.5 - 0^2 - 2 * 0 + 1) \right)$$

$$w_1 = 0.83$$

La segunda iteración

$$t_2 = 0.4$$

$$w_{1+1} = w_1 + h \left(w_1 - t_1^2 + 1 + \frac{h}{2} (w_1 - t_1^2 - 2t_1 + 1) \right)$$

Al reemplazar los valores:

$$w_2 = 0.83 + 0.2 \left(0.83 - 0.2^2 + 1 + \frac{0.2}{2} (0.83 - 0.2^2 - 2 * 0.2 + 1) \right)$$

$$w_2 = 1.2158$$

La tercera iteración

$$t_3 = 0.6 \quad w_2 = 1.2158$$

$$w_{2+1} = w_2 + h \left(w_2 - t_2^2 + 1 + \frac{h}{2} (w_2 - t_2^2 - 2t_2 + 1) \right)$$

Al reemplazar los valores:

$$w_3 = 1.2158 + 0.2 \left(1.2158 - 0.6^2 + 1 + \frac{0.2}{2} (1.2158 - 0.6^2 - 2 * 0.6 + 1) \right)$$

$$w_3 = 1.652076$$

Y así sucesivamente. Aquí se presenta la tabla 45, sugerida:

Tabla 45. Tabla sugerida para Taylor de orden dos

i	ti	Wi	Yi	Error relativo
0	0	0.5	0.5	0
1	0.2	0.83	0.829298621	0.084574972
2	0.4	1.2158	1.214087651	0.141039967

Continúa tabla

i	ti	Wi	Yi	Error relativo
3	0.6	1.652076	1.6489406	0.19014634
4	0.8	2.13233272	2.127229536	0.239898147
5	1	2.648645918	2.640859086	0.294859831
6	1.2	3.19134802	3.179941539	0.358700991
7	1.4	3.748644585	3.732400017	0.435231173
8	1.6	4.306146394	4.283483788	0.52906949
9	1.8	4.8462986	4.815176268	0.646338383
10	2	5.347684292	5.305471951	0.795637827

La programación es:

Microsoft Excel - ecuaciones diferenciales

DESVESTP $y' = (D381+0,2*(D381-C381^2+1+(G243/2)*(D381-C381^2-2*C381+1)))$

Metodo taylor de orden dos

i	ti	wi	yi	error
0	0	0,5	0,5	0
1	0,2	= (D381+0,2*(D381-C381^2+1+(\$G\$243/2)*(D381-C381^2-2*C381+1)))		
2	0,4	1,2158	1,2140877	0,14103997
3	0,6	1,652076	1,6489406	0,19014634
4	0,8	2,13233272	2,1272295	0,23989815
5	1	2,64864592	2,6408591	0,29485983
6	1,2	3,19134802	3,1799415	0,35870099
7	1,4	3,74864458	3,7324	0,43523117
8	1,6	4,30614639	4,2834838	0,52906949
9	1,8	4,8462986	4,8151763	0,64633838
10	2	5,34768429	5,305472	0,79563783

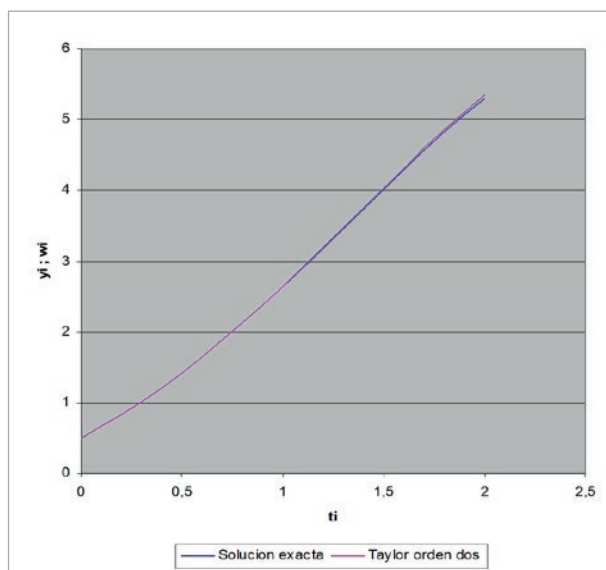
Microsoft Excel ecuaciones diferenciales

DESVESTP $=(((C382+1)^2)-(0,5*EXP(C382)))$

Metodo taylor de orden dos					
i	ti	wi	yi	error	
0	0	0,5	0,5	0	
1	0,2	0,83	$=(((C382+1)^2)-(0,5*EXP(C382)))$		
2	0,4	1,2158	1,2140877	0,14103997	
3	0,6	1,652076	1,6489406	0,19014634	
4	0,8	2,13233272	2,1272295	0,23989815	
5	1	2,64864592	2,6408591	0,29485983	
6	1,2	3,19134802	3,1799415	0,35870099	
7	1,4	3,74864458	3,7324	0,43523117	
8	1,6	4,30614639	4,2834838	0,52906949	
9	1,8	4,8462986	4,8151763	0,64633838	
10	2	5,34768429	5,305472	0,79563783	

Y el gráfico comparativo se puede ver en la figura 47:

Figura 47. Gráfica comparativa de la solución analítica vs Taylor de orden dos



Nota. Se aprecia una gran coincidencia. Figura de elaboración propia.

Método de Runge-Kutta de orden cuatro

Los métodos de Taylor pueden resultar muy precisos; pero tienen el inconveniente de que hay que desarrollar las derivadas, lo cual es un procedimiento lento. Los Métodos de Runge-Kutta pueden tener un error un poco mayor que Taylor de orden superior, pero prescinden del cálculo de la derivada.

El algoritmo parte de:

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(w_i, t_i) \\k_2 &= hf\left(\left(w_i + \frac{1}{2}k_1\right), \left(t_i + \frac{h}{2}\right)\right) \\k_3 &= hf\left(\left(w_i + \frac{1}{2}k_2\right), \left(t_i + \frac{h}{2}\right)\right) \\k_4 &= hf((w_i + k_3), (t_i + h))\end{aligned}$$

Con algoritmo general:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Si se aplica este método al ejemplo anterior:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = y - t^2 + 1 \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2 \quad ; \quad y(0) = 0.5$$

Se evalúan los k_i :

Para k_1 :

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(w_i, t_i) \\k_1 &= 0.2(w_0 - t_0^2 + 1) \\k_1 &= 0.2(0.5 - 0^2 + 1) \\k_1 &= 0.3\end{aligned}$$

Para k_2 :

$$k_2 = hf\left(\left(w_i + \frac{1}{2}k_1\right), \left(t_i + \frac{h}{2}\right)\right)$$

$$k_2 = hf\left(\left(w_0 + \frac{1}{2}k_1\right), \left(t_0 + \frac{h}{2}\right)\right)$$

$$k_2 = 0.2 * \left(\left(0.5 + \frac{1}{2}0.3\right) - \left(0 + \frac{0.2}{2}\right)^2 + 1 \right)$$

$$k_2 = 0.328$$

Para k_3 :

$$k_3 = hf\left(\left(w_i + \frac{1}{2}k_2\right), \left(t_i + \frac{h}{2}\right)\right)$$

$$k_3 = hf\left(\left(w_0 + \frac{1}{2}k_2\right), \left(t_0 + \frac{h}{2}\right)\right)$$

$$k_3 = 0.2 * \left(\left(0.5 + \frac{1}{2}0.328\right) - \left(0 + \frac{0.2}{2}\right)^2 + 1 \right)$$

$$k_3 = 0.3308$$

Para k_4 :

$$k_4 = hf\left((w_i + k_3), (t_i + h)\right)$$

$$k_4 = hf\left((w_0 + k_3), (t_0 + h)\right)$$

$$k_4 = 0.2 * \left((0.5 + 0.3308) - (0 + 0.2)^2 + 1 \right)$$

$$k_4 = 0.35816$$

Al aplicar el algoritmo general:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$w_{0+1} = w_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$w_1 = 0.5 + \frac{1}{6}(0.3 + 2 * 0.328 + 2 * 0.3308 + 0.35816)$$

$$w_1 = 0.829293333333333333333333333333$$

Para k2:

Microsoft Excel - ecuaciones diferenciales

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?

DESVESTP $=\$G\$243*((G632+C633/2)-(B632+\$G\$243/2)^*2+1)$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
629	Una tabla sugerida								
630	Metodo Runge-Kutta								
631	i	ti	K1	K2	K3	K4	wi	yi	error relativo
632	0	0					0,5	0,5	0
633	1	0,2	0,3	$=\$G\$243*((G632+C633/2)-(B632+\$G\$243/2)^*2+1)$				0,82929862	0,0006376
634	2	0,4	0,35785867	0,38364453	0,3862231	0,41110329	1,21407621	1,21408765	0,0009423
635	3	0,6	0,41081524	0,43389677	0,4362049	0,45805623	1,64892202	1,6489406	0,001127
636	4	0,8	0,4577844	0,47756284	0,4795407	0,49769254	2,12720268	2,12722954	0,0012622
637	5	1	0,49744054	0,51318459	0,514759	0,52839234	2,64082269	2,64085909	0,0013781
638	6	1,2	0,52816454	0,53898099	0,5400626	0,54817707	3,17989417	3,17994154	0,0014896
639	7	1,4	0,54797883	0,55277672	0,5532565	0,55463014	3,73234007	3,73240002	0,001606
640	8	1,6	0,55446801	0,55191482	0,5516595	0,54479991	4,2834095	4,28348379	0,0017343
641	9	1,8	0,5446819	0,53315009	0,5319969	0,51508128	4,81508569	4,81517627	0,001881
642	10	2	0,51501714	0,49251885	0,490269	0,46107094	5,305363	5,30547195	0,0020535

Para k3:

Microsoft Excel - ecuaciones diferenciales

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?

DESVESTP $=\$G\$243*((G632+D633/2)-(B632+\$G\$243/2)^*2+1)$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
629	Una tabla sugerida									
630	Metodo Runge-Kutta									
631	i	ti	K1	K2	K3	K4	wi	yi	error relativo	
632	0	0					0,5	0,5	0	
633	1	0,2	0,3	0,328	$=\$G\$243*((G632+D633/2)-(B632+\$G\$243/2)^*2+1)$				0,0006376	
634	2	0,4	0,35785867	0,38364453	0,3862231	0,41110329	1,21407621	1,21408765	0,0009423	
635	3	0,6	0,41081524	0,43389677	0,4362049	0,45805623	1,64892202	1,6489406	0,001127	
636	4	0,8	0,4577844	0,47756284	0,4795407	0,49769254	2,12720268	2,12722954	0,0012622	
637	5	1	0,49744054	0,51318459	0,514759	0,52839234	2,64082269	2,64085909	0,0013781	
638	6	1,2	0,52816454	0,53898099	0,5400626	0,54817707	3,17989417	3,17994154	0,0014896	
639	7	1,4	0,54797883	0,55277672	0,5532565	0,55463014	3,73234007	3,73240002	0,001606	
640	8	1,6	0,55446801	0,55191482	0,5516595	0,54479991	4,2834095	4,28348379	0,0017343	
641	9	1,8	0,5446819	0,53315009	0,5319969	0,51508128	4,81508569	4,81517627	0,001881	
642	10	2	0,51501714	0,49251885	0,490269	0,46107094	5,305363	5,30547195	0,0020535	

Para k4:

Microsoft Excel - ecuaciones diferenciales

DESVESTP $=\$G\$243*((G632+E633)-(B632+\$G\$243)^2+1)$

Metodo Runge-Kutta									
i	ti	K1	K2	K3	K4	wi	yi	error relativo	
632	0	0				0,5	0,5	0	
633	1	0,2	0,3	0,328	0,3308	$=\$G\$243*((G632+E633)-(B632+\$G\$243)^2+1)$			
634	2	0,4	0,35785867	0,38364453	0,3862231	0,41110329	1,21407621	1,21408765	0,0009423
635	3	0,6	0,41081524	0,43389677	0,4362049	0,45805623	1,64892202	1,6489406	0,001127
636	4	0,8	0,4577844	0,47756284	0,4795407	0,49769254	2,12720268	2,12722954	0,0012622
637	5	1	0,49744054	0,51318459	0,514759	0,52839234	2,64082269	2,64085909	0,0013781
638	6	1,2	0,52816454	0,53898099	0,5400626	0,54817707	3,17989417	3,17994154	0,0014896
639	7	1,4	0,54797883	0,55277672	0,5532565	0,55463014	3,73234007	3,73240002	0,001606
640	8	1,6	0,55446801	0,55191482	0,5516595	0,54479991	4,2834095	4,28348379	0,0017343
641	9	1,8	0,5446819	0,53315009	0,5319969	0,51508128	4,81508569	4,81517627	0,001881
642	10	2	0,51501714	0,49251885	0,490269	0,46107094	5,305363	5,30547195	0,0020535

El algoritmo general:

Microsoft Excel - ecuaciones diferenciales

DESVESTP $=\$G\$243*((G632+E633)-(B632+\$G\$243)^2+1)$

Metodo Runge-Kutta									
i	ti	K1	K2	K3	K4	wi	yi	error relativo	
632	0	0				0,5	0,5	0	
633	1	0,2	0,3	0,328	0,3308	$=\$G\$243*((G632+E633)-(B632+\$G\$243)^2+1)$			
634	2	0,4	0,35785867	0,38364453	0,3862231	0,41110329	1,21407621	1,21408765	0,0009423
635	3	0,6	0,41081524	0,43389677	0,4362049	0,45805623	1,64892202	1,6489406	0,001127
636	4	0,8	0,4577844	0,47756284	0,4795407	0,49769254	2,12720268	2,12722954	0,0012622
637	5	1	0,49744054	0,51318459	0,514759	0,52839234	2,64082269	2,64085909	0,0013781
638	6	1,2	0,52816454	0,53898099	0,5400626	0,54817707	3,17989417	3,17994154	0,0014896
639	7	1,4	0,54797883	0,55277672	0,5532565	0,55463014	3,73234007	3,73240002	0,001606
640	8	1,6	0,55446801	0,55191482	0,5516595	0,54479991	4,2834095	4,28348379	0,0017343
641	9	1,8	0,5446819	0,53315009	0,5319969	0,51508128	4,81508569	4,81517627	0,001881
642	10	2	0,51501714	0,49251885	0,490269	0,46107094	5,305363	5,30547195	0,0020535

Actividades propuestas

Preguntas abiertas

1. ¿El método de diferencia progresiva es más preciso que el de los tres puntos?
2. ¿El tamaño de paso influye en la precisión de una derivada, integral o ecuación diferencial que se desarrolla por métodos numéricos?
3. ¿En diferenciación de datos es posible hallar la derivada a intervalos diferentes de los datos experimentales?
4. ¿La integración numérica compuesta permite que el método del trapecio genere más precisión que al aplicar el algoritmo simple de Simpson $n = 2$?
5. ¿El método de Runge-Kutta de orden cuatro es más preciso que el de Taylor de orden dos?

Preguntas cerradas

1. Derivar la siguiente función por los métodos de diferencia progresiva, tres puntos y cinco puntos en:

$$x_0 = \frac{\pi}{4}, h = 0.001$$

Y hallar el error relativo para cada método.

$$f(x) = \text{Sen} \left(\frac{\ln(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

2. Desarrollar un subprograma en Excel para obtener la estimación de la primera derivada con los siguientes datos:

x	1.2	3	3.2	5	7
y	1.807	0.7468	0.6522	0.1684	0.03192

Donde $y=5xe^{-x}$, comparar el resultado con la derivada verdadera en $x=4$

3. Un móvil cambia su posición de acuerdo a la siguiente tabla:

Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Posición (m)	0	0.7	1.8	3.4	5.1	6.5	7.3	8	8.4

Hallar la velocidad cuando $t = 4.5$

4. Encontrar el valor de la integral:

$$\int_{\frac{\pi}{16}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x} \, dx$$

Por los métodos de trapecio mediante integración numérica compuesta con diez divisiones, mediante Simpson $n = 4$ con dos divisiones.

5. Para determinar la longitud de arco de una función en un intervalo (a, b) se tiene la siguiente fórmula:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)^2} \, dx$$

Que generalmente determina una integral sin antiderivada o primitiva, por esto es necesario algún método numérico para su evaluación. Si tenemos la función $f(x) = \sin x$, hallar la longitud de arco en el intervalo $[0, \pi]$, por medio del algoritmo de Simpson $n = 3$.

6. Para determinar la probabilidad de un evento (área bajo la curva) que se comporta normalmente se tiene la función de densidad.

$$P(x_0 < X < x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{2 * \pi * \sigma}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \, dx$$

Donde σ y μ son la desviación estándar y la media poblacional, respectivamente. Si en una población determinada tenemos una media del peso de $\mu = 65.5$ kg con una desviación estándar de $\sigma = 10$ kg, encontrar la probabilidad de una muestra de personas, elegidas al azar, que se encuentren entre 73 y 76 kg por medio del algoritmo de Simpson $n = 4$.

7. Si se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2$$

Aplicando el método de Taylor orden dos, aproximar las soluciones para

$y(1) = 1$, con $h = 0.2$, en el intervalo: $1 \leq t \leq 2$

8. Si se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = (t + 2t^2)y^3 - ty$$

Aplicando el método de Runge-Kutta orden cuatro, aproximar las soluciones teniendo en cuenta:

$$y(0) = \frac{1}{3},$$

Con $h = 0.1$, en el intervalo: $0 \leq t \leq 1$

9. Si tenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = 1 + \frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2$$

Aplicando el método de Euler, aproximar las soluciones para $y(1) = 0$, con $h = 0.1$, en el intervalo: $1 \leq t \leq 2$.

Referencias

- Burden, R., y Faires, J. (2000) *Análisis numérico* (6.ª ed.). Thomson.
- Chapra, S., y Canale, R. (2011) *Métodos numéricos para ingenieros* (6.ª ed.). McGraw–Hill.
- Kreyszig, E. (2003). *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (3.ª ed.). Limusa Wiley.
- Nieves, A., y Domínguez, F. (2006). *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería* (2.ª ed.). Compañía Editorial Continental.

