



Matemáticas III
CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

RON LARSON
BRUCE EDWARDS

Matemáticas III

CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

Ron Larson

The Pennsylvania State University
The Behrend College

Bruce Edwards

University of Florida

Traducción

Javier León Cárdenas

Profesor de Ciencias Básicas
Escuela Superior de Ingeniería Química
e Industrias Extractivas
Instituto Politécnico Nacional

Revisión técnica

Dra. Ana Elizabeth García Hernández

Profesor visitante UAM-Azcapotzalco
Australia



Matemáticas III

Cálculo de varias variables
Ron Larson/Bruce Edwards

**Presidente de Cengage Learning
Latinoamérica**

Fernando Valenzuela Migoya

**Director Editorial, de Producción y
de Plataformas Digitales para Latinoamérica**

Ricardo H. Rodríguez

Editora de Adquisiciones para Latinoamérica

Claudia C. Garay Castro

Gerente de Manufactura para Latinoamérica

Antonio Mateos Martínez

Gerente Editorial de Contenidos en Español

Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales

Luciana Rabuffetti

Coordinador de Manufactura

Rafael Pérez González

Editora

Cinthia Chávez Ceballos

Diseño de portada

Luis Á. Arroyo Hernández

Imagen de portada

Shutterstock

Composición tipográfica

Ediciones OVA

© D.R. 2017 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc. Corporativo Santa Fe Av. Santa Fe núm. 505, piso 12 Col. Cruz Manca, Santa Fe C.P. 05349, México, D.F. Cengage Learning® es una marca registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo, amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor, podrá ser reproducida, transmitida, almacenada o utilizada en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabación en audio, distribución en Internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial.

Traducido del libro

Calculus, 10th Edition

Ron Larson/Bruce Edwards

Publicado en inglés por Brooks/Cole, una compañía de Cengage Learning

©2014

ISBN: 978-1-285-05709-5

Datos para catalogación bibliográfica:

Larson, Ron/Bruce Edwards

Matemáticas III, Cálculo de varias variables

ISBN 978-607-526-007-5

Visite nuestro sitio en:

<http://latinoamerica.cengage.com>

Contenido

1	▷ Vectores y la geometría del espacio	1
1.1	Vectores en el plano	2
1.2	Coordenadas y vectores en el espacio	12
1.3	El producto escalar de dos vectores	20
1.4	El producto vectorial de dos vectores en el espacio	29
1.5	Rectas y planos en el espacio	37
	Proyecto de trabajo: Distancias en el espacio	47
1.6	Superficies en el espacio	48
	Ejercicios de repaso	58
	Solución de problemas	60
2	▷ Cónicas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares	63
2.1	Cónicas y cálculo	64
2.2	Curvas planas y ecuaciones paramétricas	78
	Proyecto de trabajo: Cicloides	87
2.3	Ecuaciones paramétricas y cálculo	88
2.4	Coordenadas polares y gráficas polares	97
	Proyecto de trabajo: Arte anamórfico	106
2.5	Área y longitud de arco en coordenadas polares	107
	Ejercicios de repaso	116
	Solución de problemas	119
3	▷ Funciones vectoriales	121
3.1	Funciones vectoriales	122
	Proyecto de trabajo: Bruja de Agnesi	129
3.2	Derivación e integración de funciones vectoriales	130
3.3	Velocidad y aceleración	138
3.4	Vectores tangentes y vectores normales	147
3.5	Longitud de arco y curvatura	157
	Ejercicios de repaso	169
	Solución de problemas	171
4	▷ Funciones de varias variables	173
4.1	Introducción a las funciones de varias variables	174
4.2	Límites y continuidad	186
4.3	Derivadas parciales	196
	Proyecto de trabajo: Franjas de Moiré	205
4.4	Diferenciales	206

- 4.5 Regla de la cadena para funciones de varias variables 213
- 4.6 Derivadas direccionales y gradientes 221
- 4.7 Planos tangentes y rectas normales 233
Proyecto de trabajo: Flora silvestre 241
- 4.8 Extremos de funciones de dos variables 242
- 4.9 Aplicaciones de los extremos de funciones de dos variables 250
Proyecto de trabajo: Construcción de un oleoducto 257
Ejercicios de repaso 258
Solución de problemas 261

5 ▷ Integración múltiple 263

- 5.1 Integrales iteradas y área en el plano 264
- 5.2 Integrales dobles y volumen 272
- 5.3 Cambio de variables: coordenadas polares 284
- 5.4 Centro de masa y momentos de inercia 292
Proyecto de trabajo: Centro de presión sobre una vela 299
- 5.5 Área de una superficie 300
Proyecto de trabajo: Capilaridad 306
- 5.6 Integrales triples y aplicaciones 307
- 5.7 Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas 318
Proyecto de trabajo: Esferas deformadas 324
Ejercicios de repaso 325
Solución de problemas 328

Apéndices

- Apéndice A **Demostración de teoremas seleccionados** A-2
- Apéndice B **Tablas de integración** A-3
- Apéndice C **Repaso de precálculo (en línea)**
 - C.1 Números reales y recta numérica
 - C.2 El plano cartesiano
 - C.3 Repaso de funciones trigonométricas
- Apéndice D **Rotación y la ecuación general de segundo grado (en línea)**
- Apéndice E **Números complejos (en línea)**
- Apéndice F **Negocios y aplicaciones económicas (en línea)**

*Disponible en el sitio específico del libro www.cengagebrain.com

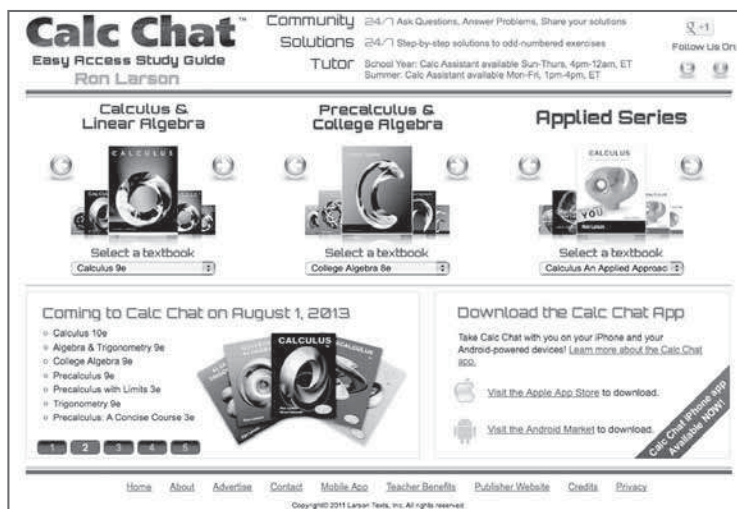
Prefacio

Bienvenido a la primera edición de **Matemáticas III**, *Cálculo de varias variables*. Nos enorgullece ofrecerle una nueva versión revisada de nuestro libro de texto. Como con las otras ediciones, hemos incorporado muchas de las útiles sugerencias de usted, nuestro usuario. En esta edición se han introducido algunas características nuevas y revisado otras. Encontrará lo que espera, un libro de texto pedagógico, matemáticamente preciso y entendible.

Estamos contentos y emocionados de ofrecerle algo totalmente nuevo en esta edición, un sitio web, en LarsonCalculus.com. Este sitio ofrece muchos recursos que le ayudarán en su estudio del cálculo. Todos estos recursos están a sólo un clic de distancia.

Nuestro objetivo en todas las ediciones de este libro de texto es proporcionarle las herramientas necesarias para dominar el cálculo. Esperamos que encuentre útiles los cambios de esta edición, junto con **LarsonCalculus.com**, para lograrlo.

En cada conjunto de ejercicios, asegúrese de anotar la referencia a **CalcChat.com**. En este sitio gratuito puede bajar una solución paso a paso de cualquier ejercicio impar. Además, puede hablar con un tutor, de forma gratuita, dentro del horario publicado en el sitio. Al paso de los años, miles de estudiantes han visitado el sitio para obtener ayuda. Utilizamos toda esta información como ayuda para guiarlo en cada revisión de los ejercicios y soluciones.



Lo nuevo en esta edición

NUEVO LarsonCalculus.com

Este sitio web ofrece varias herramientas y recursos para complementar su aprendizaje. El acceso a estas herramientas es gratuito. Videos de explicaciones de conceptos o demostraciones del libro, ejemplos para explorar, vista de gráficas tridimensionales, descarga de artículos de revistas de matemáticas y mucho más.

NUEVA Apertura de capítulo

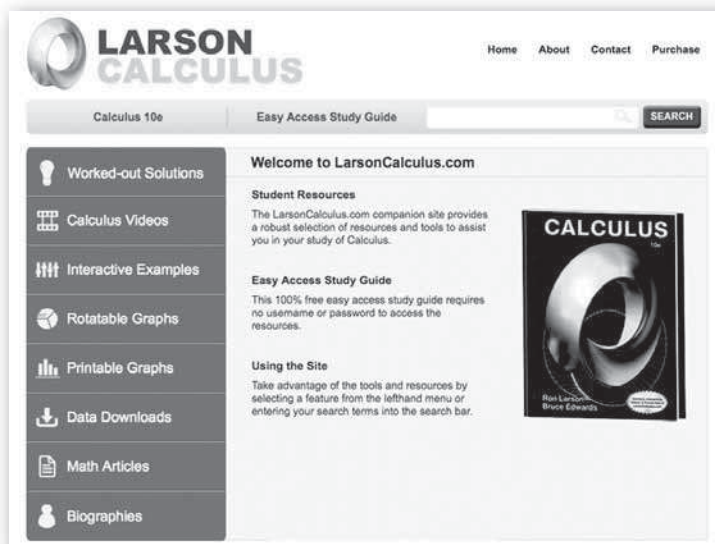
En cada apertura de capítulo se resaltan aplicaciones reales utilizadas en los ejemplos y ejercicios.

NUEVOS Ejemplos interactivos

Los ejemplos del libro están acompañados de ejemplos interactivos en LarsonCalculus.com. Estos ejemplos interactivos usan el reproductor CDF de Wolfram y permiten explorar el cálculo manejando las funciones o gráficas y observando los resultados.

NUEVOS Videos de demostraciones

Vea videos del coautor Bruce Edwards, donde explica las demostraciones de los teoremas de *Cálculo*, décima edición, en LarsonCalculus.com.



NUEVO ¿Cómo lo ve?

La característica ¿Cómo lo ve? en cada sección presenta un problema de la vida real que podrá resolver mediante inspección visual utilizando los conceptos aprendidos en la lección. Este ejercicio es excelente para el análisis en clase o la preparación de un examen.

Comentario Revisado

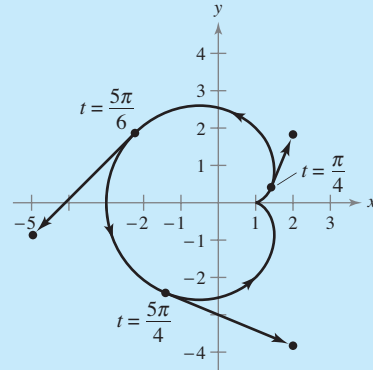
Estos consejos y sugerencias refuerzan o amplían conceptos, le ayudan a aprender cómo estudiar matemáticas, le advierten acerca de errores comunes, lo dirigen en casos especiales o le muestran los pasos alternativos o adicionales en la solución de un ejemplo.

Conjuntos de ejercicios Revisados

Los conjuntos de ejercicios han sido amplia y cuidadosamente examinados para asegurarnos que son rigurosos e importantes y que incluyen todos los temas que nuestros usuarios han sugerido. Se han reorganizado los ejercicios y titulado para que pueda ver mejor las conexiones entre los ejemplos y ejercicios. Los ejercicios de varios pasos son ejercicios de la vida real que refuerzan habilidades para resolver problemas y dominar los conceptos, dando a los estudiantes la oportunidad de aplicarlos en situaciones de la vida real.



¿CÓMO LO VE? La gráfica muestra una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$ y su derivada $\mathbf{r}'(t)$ para diferentes valores de t .



- (a) Para cada derivada que se muestra en la gráfica, determine si cada componente es positiva o negativa.
- (b) ¿Es suave la curva en el intervalo $[0, 2\pi]$? Explique su razonamiento.

134 Capítulo 3 Funciones vectoriales

- 40. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$
- 41. $\mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{k}$
- 42. $\mathbf{r}(t) = -\sqrt{2}\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \sqrt{2}\sin t\mathbf{k}$

Plénelo En los ejercicios 43 y 44, use un sistema algebraico por computadora a fin de representar gráficamente la función vectorial $\mathbf{r}(t)$. Para cada $u(t)$, haga una conjetura sobre la transformación (si la hay) de la gráfica de $\mathbf{r}(t)$. Use un sistema algebraico por computadora para verificar su conjetura.

- 43. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$
 - (a) $u(t) = 2(\cos t - 1)\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$
 - (b) $u(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$
 - (c) $u(t) = 2\cos(-t)\mathbf{i} + 2\sin(-t)\mathbf{j} + \frac{1}{2}(-t)\mathbf{k}$
 - (d) $u(t) = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 2\cos t\mathbf{k}$
 - (e) $u(t) = 6\cos t\mathbf{i} + 6\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$
- 44. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$
 - (a) $u(t) = t\mathbf{i} + (t^2 - 2)\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$
 - (b) $u(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$
 - (c) $u(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}t^3 + 4\right)\mathbf{k}$
 - (d) $u(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$
 - (e) $u(t) = (-t)\mathbf{i} + (-t)^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}(-t)^3\mathbf{k}$

Representar una gráfica mediante una función vectorial. En los ejercicios 45 a 52, represente la curva plana por medio de una función vectorial. (Hay muchas respuestas correctas.)

- 45. $y = x + 5$
- 46. $2x - 3y + 5 = 0$
- 47. $y = (x - 2)^2$
- 48. $y = 4 - x^2$
- 49. $x^2 + y^2 = 25$
- 50. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$
- 51. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
- 52. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

Representar una gráfica mediante una función vectorial. En los ejercicios 53 a 60, dibuje la curva en el espacio representada por la intersección de las superficies. Después represente la curva por una función vectorial utilizando el parámetro dado.

- | Superficies | Parámetro |
|---------------------------------------|--------------------------|
| 53. $z = x^2 + y^2, x + y = 0$ | $x = t$ |
| 54. $z = x^2 + y^2, z = 4$ | $x = 2\cos t$ |
| 55. $x^2 + y^2 = 4, z = x^2$ | $x = 2\sin t$ |
| 56. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16, x = z^2$ | $z = t$ |
| 57. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x + z = 2$ | $x = 1 + \sin t$ |
| 58. $x^2 + y^2 + z^2 = 10, x + y = 4$ | $x = 2 + \sin t$ |
| 59. $x^2 + z^2 = 4, y^2 + z^2 = 4$ | $x = t$ (primer octante) |
| 60. $x^2 + y^2 + z^2 = 16, xy = 4$ | $x = t$ (primer octante) |

- 61. Dibujar una curva. Demuestre que la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + 2t\cos t\mathbf{j} + 2t\sin t\mathbf{k}$ se encuentra en el cono $4x^2 = y^2 + z^2$. Dibuje la curva.

- 62. Dibujar una curva. Demuestre que la función vectorial $\mathbf{r}(t) = e^t\cos t\mathbf{i} + e^t\sin t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$ se encuentra en el cono $z^2 = x^2 + y^2$. Dibuje la curva.

Determinar un límite. En los ejercicios 63 a 68, evalúe el límite (si existe).

- 63. $\lim_{t \rightarrow \pi} (t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k})$
- 64. $\lim_{t \rightarrow 2} \left(3t\mathbf{i} + \frac{2}{t^2 - 1}\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k} \right)$
- 65. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(t^2\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + \frac{1 - \cos t}{t}\mathbf{k} \right)$
- 66. $\lim_{t \rightarrow 1} \left(\sqrt{t}\mathbf{i} + \frac{\ln t}{t^2 - 1}\mathbf{j} + \frac{1}{t - 1}\mathbf{k} \right)$
- 67. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(e^t\mathbf{i} + \frac{2e^{2t}}{t}\mathbf{j} + e^{3t}\mathbf{k} \right)$
- 68. $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{-t}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + \frac{t}{t^2 + 1}\mathbf{k} \right)$

Continuidad de una función vectorial. En los ejercicios 69 a 74, determine el (los) intervalo(s) en que la función vectorial es continua.

- 69. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}$
- 70. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \sqrt{t - 1}\mathbf{j}$
- 71. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \arcsen t\mathbf{j} + (t - 1)\mathbf{k}$
- 72. $\mathbf{r}(t) = 2e^{-t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \ln(t - 1)\mathbf{k}$
- 73. $\mathbf{r}(t) = (e^{-t}, t^2, \tan t)$
- 74. $\mathbf{r}(t) = \{8, \sqrt{t}, \sqrt[3]{t}\}$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

Escribir una transformación. En los ejercicios 75 a 78, considere la función vectorial

$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t - 3)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

Dé una función vectorial $\mathbf{s}(t)$ que sea la transformación especificada de \mathbf{r} .

- 75. Una traslación vertical tres unidades hacia arriba.
- 76. Una traslación horizontal dos unidades hacia abajo.
- 77. Una traslación horizontal dos unidades en dirección del eje x negativo.
- 78. Una traslación horizontal cinco unidades en dirección del eje y positivo.
- 79. Continuidad de una función vectorial. Escriba la definición de continuidad para una función vectorial. Dé un ejemplo de una función vectorial que esté definida pero no sea continua en $t = 2$.

80. Comparar funciones. ¿Cuáles de las siguientes gráficas representa la misma gráfica?

- (a) $\mathbf{r}(t) = (-3\cos t + 1)\mathbf{i} + (5\sin t + 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
- (b) $\mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i} + (-3\cos t + 1)\mathbf{j} + (5\sin t + 2)\mathbf{k}$
- (c) $\mathbf{r}(t) = (3\cos t - 1)\mathbf{i} + (-5\sin t - 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
- (d) $\mathbf{r}(t) = (-3\cos 2t + 1)\mathbf{i} + (5\sin 2t + 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

Cambios en el contenido

El apéndice A (Demostración de teoremas seleccionados) ahora se presenta en formato de video (en inglés) en LarsonCalculus.com. Las demostraciones también se presentan en forma de texto (en inglés y con costo adicional) en CengageBrain.com.

Características confiables

Aplicaciones

Se han elegido con cuidado ejercicios de aplicación y ejemplos que se incluyen para dirigir el tema: “¿Cuándo usaré esto?”. Estas aplicaciones son tomadas de diversas fuentes, tales como acontecimientos actuales, datos del mundo, tendencias de la industria y, además, están relacionadas con una amplia gama de intereses, entendiendo dónde se está utilizando (o se puede utilizar) el cálculo para fomentar una comprensión más completa del material.

Desarrollo de conceptos

Los ejercicios escritos al final de cada sección están diseñados para poner a prueba su comprensión de los conceptos básicos en cada sección, motivándole a verbalizar y escribir las respuestas, y fomentando las habilidades de comunicación técnica que le serán invaluable en sus futuras carreras.

Teoremas

Los teoremas proporcionan el marco conceptual del cálculo. Los teoremas se enuncian claramente y están separados del resto del libro mediante recuadros de referencia visual rápida. Las demostraciones importantes a menudo se ubican enseguida del teorema y se pueden encontrar en LarsonCalculus.com.

Definición de diferencial total

Si $z = f(x, y)$, y Δx y Δy son los incrementos en x y en y , entonces las **diferenciales** de las variables independientes x y y son

$$dx = \Delta x \quad y \quad dy = \Delta y$$

y la **diferencial total** de la variable dependiente z es

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy.$$

Definiciones

Como con los teoremas, las definiciones se enuncian claramente usando terminología precisa, formal y están separadas del texto mediante recuadros para una referencia visual rápida.

Exploraciones

Las exploraciones proporcionan retos únicos para estudiar conceptos que aún no se han cubierto formalmente en el libro. Le permiten aprender mediante el descubrimiento e introducir temas relacionados con los que está estudiando en ese momento. El explorar temas de esta manera le invita a pensar de manera más amplia.

Notas históricas y biografías

Las notas históricas le proporcionan información acerca de los fundamentos de cálculo. Las biografías presentan a las personas que crearon y contribuyeron al cálculo.

Tecnología

A través del libro, los recuadros de tecnología le enseñan a usar tecnología para resolver problemas y explorar conceptos del cálculo. Estas sugerencias también indican algunos obstáculos del uso de la tecnología.

Proyectos de trabajo

Los proyectos de trabajo se presentan en algunas secciones y le invitan a explorar aplicaciones relacionadas con los temas que está estudiando. Proporcionan una forma interesante y atractiva para que usted y otros estudiantes trabajen e investiguen ideas de forma conjunta.

Desafíos del examen Putnam

Las preguntas del examen Putnam se presentan en algunas secciones. Estas preguntas de examen Putnam lo desafían y le amplían los límites de su comprensión sobre el cálculo.

PROYECTO DE TRABAJO

Arco de St. Louis

El arco de entrada a San Luis, Missouri, fue diseñado utilizando la función coseno hiperbólico. La ecuación utilizada para la construcción del arco fue

$$y = 693.8597 - 68.7672 \cosh 0.0100333x, \\ -299.2239 \leq x \leq 299.2239$$

donde x y y se miden en pies. Las secciones transversales del arco son triángulos equiláteros, y (x, y) traza la ruta de los centros de masa de los triángulos de la sección transversal. Para cada valor de x , el área del triángulo de la sección transversal es

$$A = 125.1406 \cosh 0.0100333x.$$

(Fuente: *Owner's Manual for the Gateway Arch, Saint Louis, MO*, por William Thayer.)

- (a) ¿A qué altura sobre el suelo está el centro del triángulo más alto? (A nivel del suelo, $y = 0$.)
- (b) ¿Cuál es la altura del arco? (Sugerencia: Para un triángulo equilátero, $A = \sqrt{3}c^2$, donde c es la mitad de la base del triángulo, y el centro de masa del triángulo está situado a dos tercios de la altura del triángulo.)
- (c) ¿Qué tan ancho es el arco al nivel del suelo?



Recursos adicionales

Recursos para el estudiante (Disponibles sólo en inglés y con un costo adicional)

- **Manual de soluciones del estudiante para Cálculo de una variable**
(Capítulos P–10 de *Cálculo*): ISBN 1-285-08571-X

Manual de soluciones del estudiante para Cálculo de varias variables
(Capítulos 11–16 de *Cálculo*): ISBN 1-285-08575-2

Estos manuales contienen soluciones para todos los ejercicios impares.



Tarjeta de acceso impresa: ISBN 0-538-73807-3

Código de acceso en línea: ISBN 1-285-18421-1

WebAssign mejorado está diseñado para que pueda hacer su tarea en línea. Este sistema probado y confiable utiliza pedagogía, y con el contenido de este libro permite ayudarle a aprender cálculo más eficazmente. La tarea que se califica en forma automática le permite concentrarse en su aprendizaje y obtener asistencia interactiva en su estudio fuera de clase. WebAssign mejorado para *Cálculo*, 10e, contiene el YouBook Cengage, un eBook interactivo que contiene ¡clips de video, características de resaltado y toma de notas y mucho más!



CourseMate es una herramienta de estudio perfecto para introducir conceptos a la vida con herramientas de aprendizaje interactivo, estudio y preparación de exámenes que apoyan al libro de texto impreso. CourseMate incluye: ¡un eBook interactivo, videos, cuestionarios, tarjetas ilustradas y mucho más!

- **CengageBrain.com** Para tener acceso a los materiales adicionales incluidos en el CourseMate, visite www.cengagebrain.com. En la página de inicio de CengageBrain.com, busque el ISBN de su título (en la contraportada del libro) utilizando el cuadro de búsqueda en la parte superior de la página. Éste le llevará a la página del producto, donde podrá encontrar estos recursos.

Recursos para el profesor (Disponibles sólo en inglés)



Exclusivo de Cengage Learning, WebAssign mejorado ofrece un extenso programa en línea para *Cálculo*, 10e, para fomentar la práctica, que es importante para dominar los conceptos. La pedagogía meticulosamente diseñada y los ejercicios en nuestros libros probados serán aún más efectivos en WebAssign mejorado, complementado con apoyo de un tutorial multimedia y retroalimentación inmediata en cuanto los estudiantes completan sus tareas. Las características esenciales son:

- Miles de problemas de tarea que concuerdan con los ejercicios de fin de sección de su libro de texto.
- Oportunidades para que los estudiantes revisen habilidades de prerrequisitos y el contenido tanto al inicio del curso como al principio de cada sección.
- Lea estas páginas del eBook, Vea los videos, Tutoriales para dominar y Platique acerca de los vínculos.
- Un YouBook Cengage adaptable para resaltar, tomar notas y buscar notas, además de vínculos a recursos multimedia.
- Planes de estudio personales (basados en cuestionarios de diagnóstico) que identifican los temas de capítulo que los estudiantes podrán necesitar para tener el dominio.

- Un evaluador de respuestas de WebAssign que reconoce y acepta respuestas matemáticas equivalentes y también califica las tareas.
 - Una característica de *Presentación de mi trabajo* que les da la opción a los estudiantes de ver videos de soluciones detalladas.
 - ¡Clases, videos y mucho más!
- **YouBook Cengage adaptable** Su Youbook ¡es un eBook interactivo y adaptable! Un libro que contiene todo el contenido de *Cálculo*, 10e. Las características de edición de textos del YouBook le permiten modificar la narrativa del libro de texto cuando sea necesario. Con YouBook rápidamente puede volver a ordenar los capítulos y secciones completas u ocultar cualquier contenido que usted no enseñe para crear un eBook que se ajuste perfectamente con su plan de estudios. Se puede adaptar el libro de texto agregando videos creados por el profesor o vínculos a videos de YouTube. Otras ventajas de los medios incluyen: videoclips, resaltado y toma de notas y mucho más! YouBook está disponible en WebAssign mejorado.
 - **Soluciones completas del Manual para cálculo de una sola variable, tomo 1** (Capítulos P–6 de *Cálculo*): ISBN 1-285-08576-0
 - **Soluciones completas del Manual para cálculo de una sola variable, tomo 2** (Capítulos 7–10 de *Cálculo*): ISBN 1-285-08577-9
 - **Soluciones completas del Manual para cálculo de varias variables** (Capítulos 11–16 de *Cálculo*): ISBN 1-285-08580-9

Los *Manuales de soluciones completas* contienen soluciones para todos los ejercicios en el libro.

- **Constructor de soluciones** (www.cengage.com/solutionbuilder) Esta base de datos en línea para el profesor ofrece soluciones completas para todos los ejercicios en el libro, lo que le permite crear soluciones personalizadas e impresiones de las soluciones (en formato PDF) que coinciden exactamente con los problemas que se asignan en clase.
- **PowerLecture** (ISBN 1-285-08583-3) Este DVD completo para el profesor incluye recursos como una versión electrónica de la Guía de recursos del profesor completa, clases preconstruidas de PowerPoint®, todas las imágenes del libro en formatos jpeg y PowerPoint y el software algorítmico de exámenes computarizados ExamView®.
- **ExamView exámenes computarizados** Crea, entrega y adapta los exámenes en formato impreso y en línea con ExamView®, un software tutorial y de evaluación fácil de usar. ExamView para *Cálculo*, 10e, contiene cientos de algoritmos de preguntas de opción múltiple y de respuesta corta. ExamView® está disponible en el DVD PowerLecture.
- **Guía de recursos para el profesor** (ISBN 1-285-09074-8) Este poderoso manual contiene varios recursos importantes del libro de texto por capítulo y sección, incluyendo resúmenes del capítulo y estrategias de enseñanza. Una versión electrónica de la Guía de recursos del profesor está disponible en el DVD de PowerLecture.



- CourseMate es una herramienta de estudio ideal para estudiantes y no requiere que lo configure. CourseMate incorpora conceptos del curso a la vida con aprendizaje interactivo, estudio y herramientas de preparación de examen que apoyan el libro impreso. CourseMate para *Cálculo*, 10e, incluye: ¡un eBook interactivo, videos, cuestionarios, tarjetas ilustradas y más! Para los profesores, CourseMate incluye un seguidor de participaciones, una herramienta, primera en su tipo, que supervisa la participación de los estudiantes.
- **CengageBrain.com** Para acceder a más materiales, incluyendo al CourseMate, por favor visite <http://login.cengage.com>. En la página de inicio CengageBrain.com, busque el ISBN de su título (en la contraportada del libro) utilizando el cuadro de búsqueda en la parte superior de la página. Éste le llevará a la página del producto, donde podrá encontrar estos recursos.

Agradecimientos

Queremos dar las gracias a muchas personas que nos han ayudado en las diferentes etapas de *Cálculo* en los últimos 39 años. Su estímulo, críticas y sugerencias han sido invaluable.

Revisores de la décima edición

Denis Bell, *University of Northern Florida*; Abraham Biggs, *Broward Community College*; Jesse Blosser, *Eastern Mennonite School*; Mark Brittenham, *University of Nebraska*; Mingxiang Chen, *North Carolina A & T State University*; Marcia Kleinz, *Atlantic Cape Community College*; Maxine Lifshitz, *Friends Academy*; Bill Meisel, *Florida State College en Jacksonville*; Martha Nega, *Georgia Perimeter College*; Laura Ritter, *Southern Polytechnic State University*; Chia-Lin Wu, *Richard Stockton College of New Jersey*

Revisores de las ediciones anteriores

Stan Adamski, *Owens Community College*; Alexander Arhangel'skii, *Ohio University*; Seth G. Armstrong, *Southern Utah University*; Jim Ball, *Indiana State University*; Marcelle Bessman, *Jacksonville University*; Linda A. Bolte, *Eastern Washington University*; James Braselton, *Georgia Southern University*; Harvey Braverman, *Middlesex County College*; Tim Chappell, *Penn Valley Community College*; Oiyin Pauline Chow, *Harrisburg Area Community College*; Julie M. Clark, *Hollins University*; P. S. Crooke, *Vanderbilt University*; Jim Dotzler, *Nassau Community College*; Murray Eisenberg, *University of Massachusetts en Amherst*; Donna Flint, *South Dakota State University*; Michael Frantz, *University of La Verne*; Sudhir Goel, *Valdosta State University*; Arek Goetz, *San Francisco State University*; Donna J. Gorton, *Butler County Community College*; John Gosselin, *University of Georgia*; Shahryar Heydari, *Piedmont College*; Guy Hogan, *Norfolk State University*; Ashok Kumar, *Valdosta State University*; Kevin J. Leith, *Albuquerque Community College*; Douglas B. Meade, *University of South Carolina*; Teri Murphy, *University of Oklahoma*; Darren Narayan, *Rochester Institute of Technology*; Susan A. Natale, *The Ursuline School, NY*; Terence H. Perciante, *Wheaton College*; James Pommersheim, *Reed College*; Leland E. Rogers, *Pepperdine University*; Paul Seeburger, *Monroe Community College*; Edith A. Silver, *Mercer County Community College*; Howard Speier, *Chandler-Gilbert Community College*; Desmond Stephens, *Florida A&M University*; Jianzhong Su, *University of Texas en Arlington*; Patrick Ward, *Illinois Central College*; Diane Zych, *Erie Community College*.

Muchas gracias a Robert Hostetler, The Behrend College, The Pennsylvania State University, y David Heyd, The Behrend College, The Pennsylvania State University, por sus importantes contribuciones a las ediciones anteriores de este libro.

También nos gustaría dar las gracias al personal de Larson Texts, Inc., que nos ayudó a preparar el manuscrito, a presentar las imágenes, componer y corregir las páginas y suplementos.

A nivel personal, estamos muy agradecidos con nuestras esposas, Deanna Gilbert Larson y Consuelo Edwards, por su amor, paciencia y apoyo. Además, una nota de agradecimiento especial para R. Scott O'Neil.

Si tiene sugerencias para mejorar este libro, por favor no dude en escribirnos. Con los años hemos recibido muchos comentarios útiles de los profesores y estudiantes, y los valoramos mucho.

Ron Larson
Bruce Edwards

Your Course. A su manera

Opciones del libro de texto de *Cálculo*

El curso tradicional de cálculo está disponible en diversas presentaciones del libro de texto para considerar las diferentes maneras de enseñanza de los profesores, y que

los estudiantes toman, en sus clases. El libro se puede adaptar para satisfacer sus necesidades individuales y está disponible en CengageBrain.com.

TEMAS CUBIERTOS	ENFOQUE			
	Funciones trascendentes	Funciones trascendentes tempranas	Cobertura acelerada	Cobertura integrada
3 semestre	<p>Cálculo, 10e</p> 	<p>Cálculo: Funciones trascendentes tempranas, 5e</p> 	<p>Cálculo esencial</p> 	
Una sola variable	<p>Cálculo, 10e, de una variable</p> 	<p>Cálculo: Funciones trascendentes tempranas, 5e, Una variable</p> 		<p>Cálculo I con precálculo, 3e</p> 
Varias variables	<p>Cálculo de varias variables, 10e</p> 	<p>Cálculo de varias variables, 10e</p> 		
<p>Adaptables</p> <p>Todas estas opciones de libros de texto se pueden adaptar para satisfacer las necesidades particulares de su curso.</p>	<p>Cálculo, 10e</p> 	<p>Cálculo: Funciones trascendentes tempranas, 5e</p> 	<p>Cálculo esencial</p> 	<p>Cálculo I con precálculo, 3e</p> 

1

Vectores y la geometría del espacio

- 1.1 Vectores en el plano
- 1.2 Coordenadas y vectores en el espacio
- 1.3 El producto escalar de dos vectores
- 1.4 El producto vectorial de dos vectores en el espacio
- 1.5 Rectas y planos en el espacio
- 1.6 Superficies en el espacio



Geografía (Ejercicio 45, p. 57)



Momento (Ejercicio 29, p. 35)



Trabajo (Ejercicio 64, p. 28)



Focos del auditorio (Ejercicio 101, p. 19)



Navegación (Ejercicio 84, p. 11)

1.1 Vectores en el plano

- **Expresar un vector mediante sus componentes.**
- **Realizar operaciones vectoriales e interpretar los resultados geoméricamente.**
- **Expresar un vector como combinación lineal de vectores unitarios estándar o canónicos.**

Las componentes de un vector

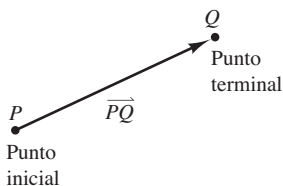
Muchas cantidades en geometría y física, como el área, el volumen, la temperatura, la masa y el tiempo, se pueden caracterizar por medio de un solo número real en unidades de medición apropiadas. Estas **cantidades** se llaman **escalares**, y al número real se le llama **escalar**.

Otras cantidades, como la fuerza, la velocidad y la aceleración, tienen magnitud y dirección y no pueden caracterizarse completamente por medio de un solo número real. Para representar estas cantidades se usa un **segmento de recta dirigido**, como se muestra en la figura 1.1. El segmento de recta dirigido \overrightarrow{PQ} tiene como punto inicial P y como punto final Q , y su **longitud** (o **magnitud**) se denota por $\|\overrightarrow{PQ}\|$. Segmentos de recta dirigidos que tienen la misma longitud y dirección son **equivalentes**, como se muestra en la figura 1.2. El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos que son equivalentes a un segmento de recta dirigido dado \overrightarrow{PQ} es un **vector en el plano** y se denota por

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}.$$

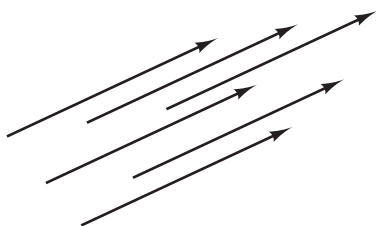
En los libros, los vectores se denotan normalmente con letras minúsculas, en negrita, como \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} . Cuando se escriben a mano, se suelen denotar por medio de letras con una flecha sobre ellas, como \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} .

Es importante notar que un vector en el plano se puede representar por medio de un *conjunto* de segmentos de recta dirigidos diferentes, todos apuntando en la misma dirección y todos de la misma longitud.



Un segmento de recta dirigido.

Figura 1.1



Segmentos de recta dirigidos equivalentes.

Figura 1.2

EJEMPLO 1 Representar vectores por medio de segmentos de recta dirigidos

Sea \mathbf{v} el vector representado por el segmento dirigido que va de $(0, 0)$ a $(3, 2)$, y sea \mathbf{u} el vector representado por el segmento dirigido que va de $(1, 2)$ a $(4, 4)$. Demuestre que \mathbf{v} y \mathbf{u} son equivalentes.

Solución Sean $P(0, 0)$ y $Q(3, 2)$ los puntos inicial y final de \mathbf{v} , y sean $R(1, 2)$ y $S(4, 4)$ los puntos inicial y final de \mathbf{u} , como se muestra en la figura 1.3. Para demostrar que \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{RS} tienen la *misma longitud* se usa la fórmula de la distancia.

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{PQ}\| &= \sqrt{(3 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{13} \\ \|\overrightarrow{RS}\| &= \sqrt{(4 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

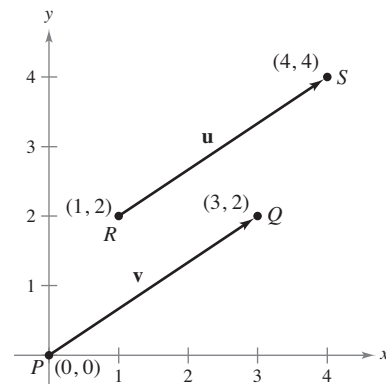
Los dos segmentos tienen la *misma dirección*, porque ambos están dirigidos hacia la derecha y hacia arriba sobre rectas que tienen la misma pendiente.

$$\text{Pendiente de } \overrightarrow{PQ} = \frac{2 - 0}{3 - 0} = \frac{2}{3}$$

y

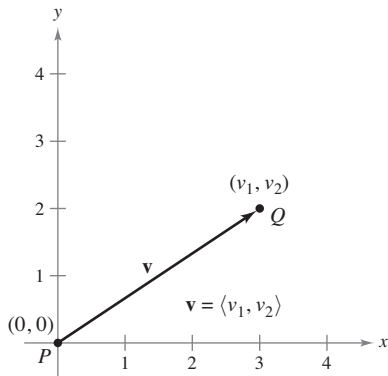
$$\text{Pendiente de } \overrightarrow{RS} = \frac{4 - 2}{4 - 1} = \frac{2}{3}$$

Como \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{RS} tienen la misma longitud y la misma dirección, puede concluir que los dos vectores son equivalentes. Es decir, \mathbf{v} y \mathbf{u} son equivalentes.



Los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} son equivalentes.

Figura 1.3



Posición estándar de un vector.
Figura 1.4

El segmento de recta dirigido cuyo punto inicial es el origen a menudo se considera el representante más adecuado de un conjunto de segmentos de recta dirigidos equivalentes como los que se muestran en la figura 1.3. Se dice que esta representación de \mathbf{v} está en la **posición canónica** o **estándar**. Un segmento de recta dirigido cuyo punto inicial es el origen puede representarse de manera única por medio de las coordenadas de su punto final $Q(v_1, v_2)$, como se muestra en la figura 1.4.

Definición de un vector en el plano mediante sus componentes

Si \mathbf{v} es un vector en el plano cuyo punto inicial es el origen y cuyo punto final es (v_1, v_2) , entonces el **vector** \mathbf{v} queda dado mediante sus **componentes** de la siguiente manera

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$$

Las coordenadas v_1 y v_2 son las **componentes de \mathbf{v}** . Si el punto inicial y el punto final están en el origen, entonces \mathbf{v} es el **vector cero** (o vector nulo) y se denota por $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$.

Esta definición implica que dos vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ son **iguales** si y sólo si $u_1 = v_1$ y $u_2 = v_2$.

Los procedimientos siguientes pueden usarse para convertir un vector dado mediante un segmento de recta dirigido en un vector dado mediante sus componentes o viceversa.

1. Si $P(p_1, p_2)$ y $Q(q_1, q_2)$ son los puntos inicial y final de un segmento de recta dirigido, el vector \mathbf{v} representado por \overrightarrow{PQ} , dado mediante sus componentes, es

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2 \rangle.$$

Además, de la fórmula de la distancia es posible ver que la longitud (o magnitud) de \mathbf{v} es

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} \\ &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \end{aligned}$$

Longitud de un vector

2. Si $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$, \mathbf{v} puede representarse por el segmento de recta dirigido, en la posición canónica o estándar, que va de $P(0, 0)$ a $Q(v_1, v_2)$.

A la longitud de \mathbf{v} también se le llama la **norma de \mathbf{v}** . Si $\|\mathbf{v}\| = 1$, \mathbf{v} es un vector unitario. Y $\|\mathbf{v}\| = 0$ si y sólo si \mathbf{v} es el vector cero $\mathbf{0}$.

EJEMPLO 2

Forma en componentes y longitud de un vector

Determine las componentes y la longitud del vector \mathbf{v} que tiene el punto inicial $(3, -7)$ y el punto final $(-2, 5)$.

Solución Sean $P(3, -7) = (p_1, p_2)$ y $Q(-2, 5) = (q_1, q_2)$. Entonces las componentes de $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ son

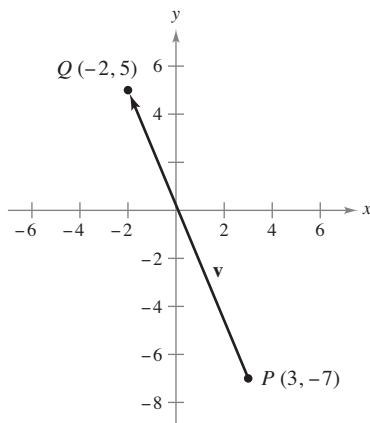
$$v_1 = q_1 - p_1 = -2 - 3 = -5$$

y

$$v_2 = q_2 - p_2 = 5 - (-7) = 12.$$

Así, como se muestra en la figura 1.5, $\mathbf{v} = \langle -5, 12 \rangle$, y la longitud de \mathbf{v} es

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13. \end{aligned}$$



Vector \mathbf{v} dado por medio de sus componentes: $\mathbf{v} = \langle -5, 12 \rangle$.

Figura 1.5

Operaciones con vectores

Definición de la suma de vectores y de la multiplicación por un escalar

Sean $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ vectores y sea c un escalar.

1. La **suma vectorial** de \mathbf{u} y \mathbf{v} es el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle$.

2. El **múltiplo escalar** de c y \mathbf{u} es el vector

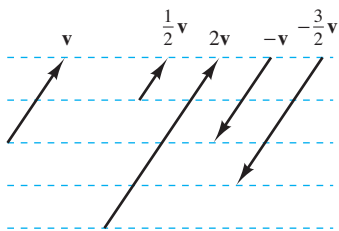
$$c\mathbf{u} = \langle cu_1, cu_2 \rangle.$$

3. El **negativo** de \mathbf{v} es el vector

$$-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} = \langle -v_1, -v_2 \rangle.$$

4. La **diferencia** de \mathbf{u} y \mathbf{v} es

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2 \rangle.$$



La multiplicación escalar por un vector \mathbf{v} .

Figura 1.6

Geoméricamente, el múltiplo escalar de un vector \mathbf{v} y un escalar c es el vector que tiene $|c|$ veces la longitud de \mathbf{v} , como se muestra en la figura 1.6. Si c es positivo, $c\mathbf{v}$ tiene la misma dirección que \mathbf{v} . Si c es negativo, $c\mathbf{v}$ tiene dirección opuesta.

La suma de dos vectores puede representarse geoméricamente colocando los vectores (sin cambiar sus magnitudes o sus direcciones), de manera que el punto inicial de uno coincida con el punto final del otro, como se muestra en la figura 1.7. El vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, llamado el **vector resultante**, es la diagonal de un paralelogramo que tiene \mathbf{u} y \mathbf{v} como lados adyacentes.



WILLIAM ROWAN HAMILTON
(1805-1865)

Algunos de los primeros trabajos con vectores fueron realizados por el matemático irlandés William Rowan Hamilton. Hamilton dedicó muchos años a desarrollar un sistema de cantidades semejantes a vectores llamados *cuaterniones*. No fue sino hasta la segunda mitad del siglo XIX cuando el físico escocés James Maxwell (1831-1879) reestructuró la teoría de los cuaterniones de Hamilton, dándole una forma útil para la representación de cantidades como fuerza, velocidad y aceleración.

Vea LarsonCalculus.com para leer más acerca de esta biografía.

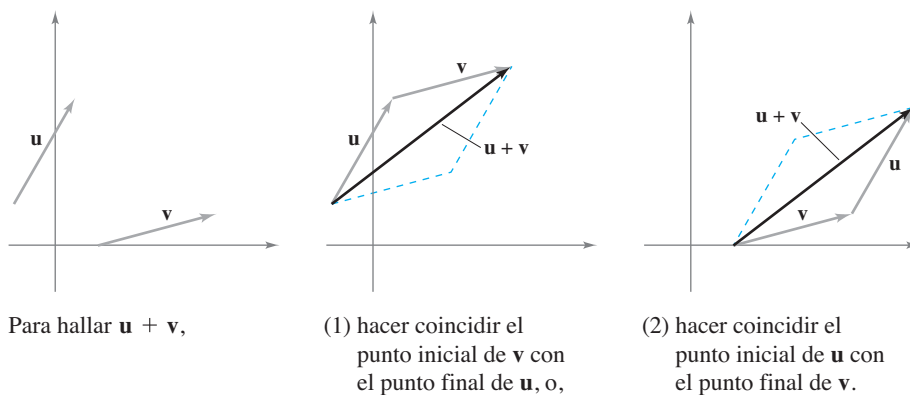
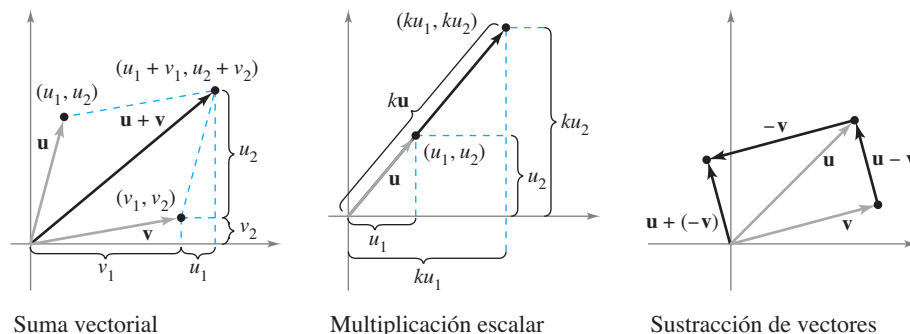


Figura 1.7

La figura 1.8 muestra la equivalencia de las definiciones geométricas y algebraicas de la suma de vectores y la multiplicación por un escalar, y presenta (en el extremo derecho) una interpretación geométrica de $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.



Suma vectorial

Multiplicación escalar

Sustracción de vectores

Figura 1.8

EJEMPLO 3 Operaciones con vectores

Dados $\mathbf{v} = \langle -2, 5 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 3, 4 \rangle$, encuentre cada uno de los vectores.

- a. $\frac{1}{2}\mathbf{v}$ b. $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ c. $\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$

Solución

a. $\frac{1}{2}\mathbf{v} = \langle \frac{1}{2}(-2), \frac{1}{2}(5) \rangle = \langle -1, \frac{5}{2} \rangle$

b. $\mathbf{w} - \mathbf{v} = \langle w_1 - v_1, w_2 - v_2 \rangle = \langle 3 - (-2), 4 - 5 \rangle = \langle 5, -1 \rangle$

c. Usando $2\mathbf{w} = \langle 6, 8 \rangle$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{v} + 2\mathbf{w} &= \langle -2, 5 \rangle + \langle 6, 8 \rangle \\ &= \langle -2 + 6, 5 + 8 \rangle \\ &= \langle 4, 13 \rangle.\end{aligned}$$

La suma de vectores y la multiplicación por un escalar comparten muchas propiedades con la aritmética ordinaria, como se muestra en el teorema siguiente.



EMMY NOETHER (1882–1935)

La matemática alemana Emmy Noether contribuyó a nuestro conocimiento de los sistemas axiomáticos. Noether generalmente se reconoce como la principal matemática de la historia reciente.

Teorema 1.1 Propiedades de las operaciones con vectores

Sean \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} los vectores en el plano, y sean c y d escalares.

- | | |
|--|-----------------------------------|
| 1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ | Propiedad conmutativa |
| 2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ | Propiedad asociativa |
| 3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ | Propiedad de la identidad aditiva |
| 4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ | Propiedad del inverso aditivo |
| 5. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$ | |
| 6. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ | Propiedad distributiva |
| 7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ | Propiedad distributiva |
| 8. $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, 0(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ | |

Demostración La demostración de la *propiedad asociativa* de la suma de vectores utiliza la propiedad asociativa de la suma de números reales.

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= [\langle u_1, u_2 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle] + \langle w_1, w_2 \rangle \\ &= \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle \\ &= \langle (u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2 \rangle \\ &= \langle u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2) \rangle \\ &= \langle u_1, u_2 \rangle + \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2 \rangle \\ &= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})\end{aligned}$$

Las otras propiedades pueden demostrarse de manera similar.

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de esta demostración de Bruce Edwards.

Cualquier conjunto de vectores (junto con uno de escalares) que satisfaga las ocho propiedades dadas en el teorema 1.1 es un **espacio vectorial**.* Las ocho propiedades son los *axiomas del espacio vectorial*. Por tanto, este teorema establece que el conjunto de vectores en el plano (con el conjunto de los números reales) forma un espacio vectorial.

*Para más información sobre espacios vectoriales, consulte *Elementary Linear Algebra*, 7a. ed., por Ron Larson (Boston: Boston, Massachusetts, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2013).

PARA INFORMACIÓN ADICIONAL

Para más información acerca de Emmy Noether, consulte el artículo “Emmy Noether, Greatest Woman Mathematician”, de Clark Kimberling, en *The Mathematics Teacher*. Para ver este artículo vaya a MathArticles.com.

TEOREMA 1.2 Longitud de un múltiplo escalar

Sea \mathbf{v} un vector y sea c un escalar. Entonces

$$\|c\mathbf{v}\| = |c| \|\mathbf{v}\|. \quad |c| \text{ es el valor absoluto de } c.$$

Demostración Como $c\mathbf{v} = \langle cv_1, cv_2 \rangle$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|c\mathbf{v}\| &= \|\langle cv_1, cv_2 \rangle\| \\ &= \sqrt{(cv_1)^2 + (cv_2)^2} \\ &= \sqrt{c^2v_1^2 + c^2v_2^2} \\ &= \sqrt{c^2(v_1^2 + v_2^2)} \\ &= |c| \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\ &= |c| \|\mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de esta demostración de Bruce Edwards. ■

En muchas aplicaciones de los vectores es útil encontrar un vector unitario que tenga la misma dirección que un vector dado. El teorema siguiente da un procedimiento para hacer esto.

TEOREMA 1.3 Vector unitario en la dirección de \mathbf{v}

Si \mathbf{v} es un vector distinto de cero en el plano, entonces el vector

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v}$$

tiene longitud 1 y la misma dirección que \mathbf{v} .

Demostración Como $1/\|\mathbf{v}\|$ es positivo y $\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{v}\|)\mathbf{v}$, se puede concluir que \mathbf{u} tiene la misma dirección que \mathbf{v} . Para ver que $\|\mathbf{u}\| = 1$, se observa que

$$\|\mathbf{u}\| = \left\| \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \right) \mathbf{v} \right\| = \left| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \right| \|\mathbf{v}\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \|\mathbf{v}\| = 1.$$

Por tanto, \mathbf{u} tiene longitud 1 y la misma dirección que \mathbf{v} .

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de esta demostración de Bruce Edwards. ■

Al vector \mathbf{u} del teorema 1.3 se le llama un **vector unitario en la dirección de \mathbf{v}** . El proceso de multiplicar \mathbf{v} por $1/\|\mathbf{v}\|$ para obtener un vector unitario se llama **normalización de \mathbf{v}** .

EJEMPLO 4 Hallar un vector unitario

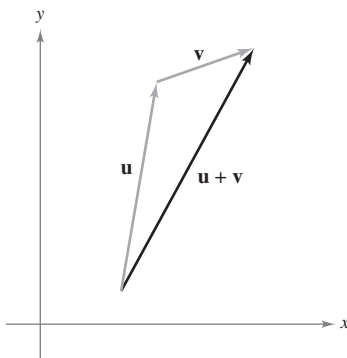
Halle un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v} = \langle -2, 5 \rangle$ y verifique que tiene longitud 1.

Solución Por el teorema 1.3, el vector unitario en la dirección de \mathbf{v} es

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\langle -2, 5 \rangle}{\sqrt{(-2)^2 + (5)^2}} = \frac{1}{\sqrt{29}} \langle -2, 5 \rangle = \left\langle \frac{-2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right\rangle.$$

Este vector tiene longitud 1, porque

$$\sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{29} + \frac{25}{29}} = \sqrt{\frac{29}{29}} = 1. \quad \blacksquare$$



Desigualdad del triángulo.
Figura 1.9

Generalmente la longitud de la suma de dos vectores no es igual a la suma de sus longitudes. Para ver esto, basta tomar los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} de la figura 1.9. Considerando a \mathbf{u} y \mathbf{v} como dos de los lados de un triángulo, se puede ver que la longitud del tercer lado es $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$, y

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

La igualdad sólo se da si los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} tienen la misma dirección. A este resultado se le llama la **desigualdad del triángulo** para vectores. (En el ejercicio 77, sección 1.3, se pide demostrar esto.)

Vectores unitarios canónicos o estándares

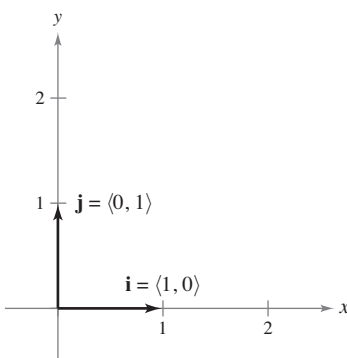
A los vectores unitarios $(1, 0)$ y $(0, 1)$ se les llama **vectores unitarios canónicos o estándares** en el plano y se denotan por

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle \quad \text{Vectores unitarios canónicos o estándares}$$

como se muestra en la figura 1.10. Estos vectores pueden usarse para representar cualquier vector de manera única, como sigue.

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, 0 \rangle + \langle 0, v_2 \rangle = v_1 \langle 1, 0 \rangle + v_2 \langle 0, 1 \rangle = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}$$

Al vector $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}$ se le llama una combinación lineal de \mathbf{i} y \mathbf{j} . A los escalares v_1 y v_2 se les llama las **componentes horizontal y vertical de \mathbf{v}** .



Vectores unitarios estándares o canónicos \mathbf{i} y \mathbf{j} .
Figura 1.10

EJEMPLO 5 Expresar un vector como combinación lineal de vectores unitarios

Sea \mathbf{u} el vector con punto inicial $(2, -5)$ y punto final $(-1, 3)$, y sea $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Expresa cada vector como combinación lineal de \mathbf{i} y \mathbf{j} .

- a. \mathbf{u} b. $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$

Solución

a. $\mathbf{u} = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2 \rangle = \langle -1 - 2, 3 - (-5) \rangle = \langle -3, 8 \rangle = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

b. $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} = 2(-3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) - 3(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) = -6\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} = -12\mathbf{i} + 19\mathbf{j}$

Si \mathbf{u} es un vector unitario y θ es el ángulo (medido en sentido contrario a las manecillas del reloj) desde el eje x positivo hasta \mathbf{u} , el punto final de \mathbf{u} está en el círculo unitario, y tiene

$$\mathbf{u} = \langle \cos \theta, \sen \theta \rangle = \cos \theta \mathbf{i} + \sen \theta \mathbf{j} \quad \text{Vector unitario}$$

como se muestra en la figura 1.11. Además, cualquier vector distinto de cero \mathbf{v} que forma un ángulo con el eje x positivo tiene la misma dirección que \mathbf{u} y puede escribir

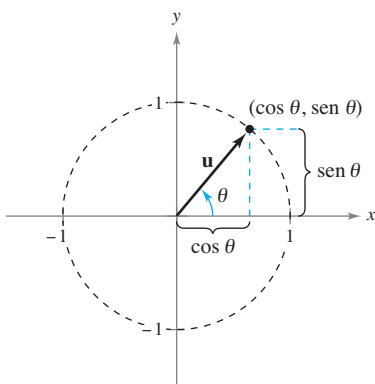
$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \langle \cos \theta, \sen \theta \rangle = \|\mathbf{v}\| \cos \theta \mathbf{i} + \|\mathbf{v}\| \sen \theta \mathbf{j}.$$

EJEMPLO 6 Escribir un vector de magnitud y dirección dadas

El vector \mathbf{v} tiene una magnitud de 3 y forma un ángulo de $30^\circ = \pi/6$ con el eje x positivo. Expresa \mathbf{v} como combinación lineal de los vectores unitarios \mathbf{i} y \mathbf{j} .

Solución Como el ángulo entre \mathbf{v} y el eje x positivo es $\theta = \pi/6$, puede escribir lo siguiente.

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \cos \theta \mathbf{i} + \|\mathbf{v}\| \sen \theta \mathbf{j} = 3 \cos \frac{\pi}{6} \mathbf{i} + 3 \sen \frac{\pi}{6} \mathbf{j} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \mathbf{i} + \frac{3}{2} \mathbf{j}.$$

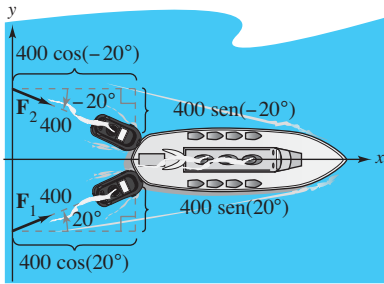


Ángulo θ desde el eje x positivo hasta el vector \mathbf{u} .
Figura 1.11

Los vectores tienen muchas aplicaciones en física e ingeniería. Un ejemplo es la fuerza. Un vector puede usarse para representar fuerza, porque la fuerza tiene magnitud y dirección. Si dos o más fuerzas están actuando sobre un objeto, entonces la fuerza resultante sobre el objeto es la suma vectorial de los vectores que representan las fuerzas.

EJEMPLO 7 Hallar la fuerza resultante

Dos botes remolcadores están empujando un barco, como se muestra en la figura 1.12. Cada bote remolcador está ejerciendo una fuerza de 400 libras. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre el barco?



Fuerza resultante sobre el barco ejercida por los dos remolcadores.

Figura 1.12

Solución Usando la figura 1.12, puede representar las fuerzas ejercidas por el primer y segundo botes remolcadores como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= 400\langle \cos 20^\circ, \sin 20^\circ \rangle = 400 \cos(20^\circ)\mathbf{i} + 400 \sin(20^\circ)\mathbf{j} \\ \mathbf{F}_2 &= 400\langle \cos(-20^\circ), \sin(-20^\circ) \rangle = 400 \cos(20^\circ)\mathbf{i} - 400 \sin(20^\circ)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

La fuerza resultante sobre el barco es

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \\ &= [400 \cos(20^\circ)\mathbf{i} + 400 \sin(20^\circ)\mathbf{j}] + [400 \cos(20^\circ)\mathbf{i} - 400 \sin(20^\circ)\mathbf{j}] \\ &= 800 \cos(20^\circ)\mathbf{i} \\ &\approx 752\mathbf{i}. \end{aligned}$$

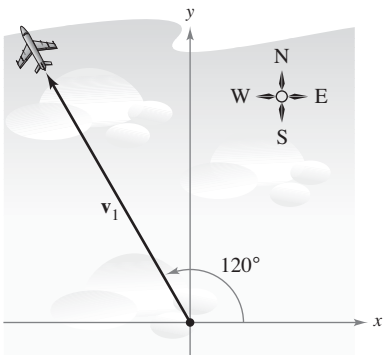
Por tanto, la fuerza resultante sobre el barco es aproximadamente 752 libras en la dirección del eje x positivo.

En levantamientos topográficos y en la navegación, un **rumbo** es una dirección que mide el ángulo agudo que una trayectoria o línea de mira forma con una recta fija nortesur. En la navegación aérea los rumbos se miden en el sentido de las manecillas del reloj en grados desde el norte.

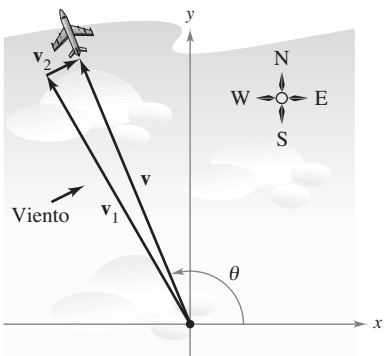
EJEMPLO 8 Hallar una velocidad

...► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Un avión viaja a una altitud fija con un factor de viento despreciable y mantiene una velocidad de 500 millas por hora con un rumbo de 330° , como se muestra en la figura 1.13(a). Cuando alcanza cierto punto, el avión encuentra un viento con una velocidad de 70 millas por hora en dirección 45° NE (45° este del norte), como se muestra en la figura 1.13(b). ¿Cuáles son la velocidad y la dirección resultantes del avión?



(a) Dirección sin viento.



(b) Dirección con viento.

Figura 1.13

Solución Usando la figura 1.13(a), represente la velocidad del avión (solo) como

$$\mathbf{v}_1 = 500 \cos(120^\circ)\mathbf{i} + 500 \sin(120^\circ)\mathbf{j}.$$

La velocidad del viento se representa por el vector

$$\mathbf{v}_2 = 70 \cos(45^\circ)\mathbf{i} + 70 \sin(45^\circ)\mathbf{j}.$$

La velocidad resultante del avión (en el viento) es

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ &= 500 \cos(120^\circ)\mathbf{i} + 500 \sin(120^\circ)\mathbf{j} + 70 \cos(45^\circ)\mathbf{i} + 70 \sin(45^\circ)\mathbf{j} \\ &\approx -200.5\mathbf{i} + 482.5\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Para encontrar la velocidad y la dirección resultantes, escriba $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j})$. Puede escribir $\|\mathbf{v}\| \approx \sqrt{(-200.5)^2 + (482.5)^2} \approx 522.5$,

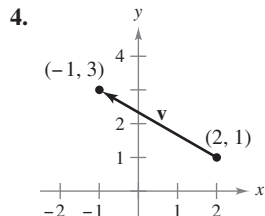
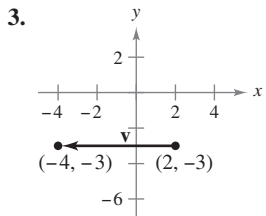
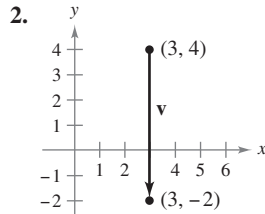
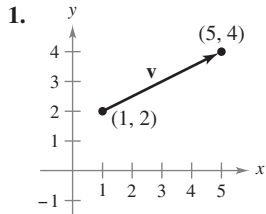
$$\mathbf{v} \approx 522.5 \left(\frac{-200.5}{522.5} \mathbf{i} + \frac{482.5}{522.5} \mathbf{j} \right) \approx 522.5 [\cos(112.6^\circ)\mathbf{i} + \sin(112.6^\circ)\mathbf{j}].$$

La nueva velocidad del avión, alterada por el viento, es aproximadamente 522.5 millas por hora en una trayectoria que forma un ángulo de 112.6° con el eje x positivo.

1.1 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Representar un vector En los ejercicios 1 a 4, (a) dé el vector \mathbf{v} mediante sus componentes y (b) dibuje el vector con su punto inicial en el origen.



Vectores equivalentes En los ejercicios 5 a 8, halle los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} cuyos puntos inicial y final se dan. Demuestre que \mathbf{u} y \mathbf{v} son equivalentes.

5. \mathbf{u} : (3, 2), (5, 6) 6. \mathbf{u} : (-4, 0), (1, 8)
 \mathbf{v} : (1, 4), (3, 8) \mathbf{v} : (2, -1), (7, 7)
7. \mathbf{u} : (0, 3), (6, -2) 8. \mathbf{u} : (-4, -1), (11, -4)
 \mathbf{v} : (3, 10), (9, 5) \mathbf{v} : (10, 13), (25, 10)

Escribir un vector en diferentes formas En los ejercicios 9 a 16 se dan los puntos inicial y final de un vector \mathbf{v} . (a) Dibuje el segmento de recta dirigido dado, (b) exprese el vector mediante sus componentes, (c) exprese el vector como la combinación lineal de los vectores unitarios estándares \mathbf{i} y \mathbf{j} , y (d) dibuje el vector con el punto inicial en el origen.

Punto inicial	Punto final	Punto inicial	Punto final
9. (2, 0)	(5, 5)	10. (4, -6)	(3, 6)
11. (8, 3)	(6, -1)	12. (0, -4)	(-5, -1)
13. (6, 2)	(6, 6)	14. (7, -1)	(-3, -1)
15. $(\frac{3}{2}, \frac{4}{3})$	$(\frac{1}{2}, 3)$	16. (0.12, 0.60)	(0.84, 1.25)

Representar múltiplos escalares En los ejercicios 17 y 18, dibuje cada uno de los múltiplos escalares de \mathbf{v} .

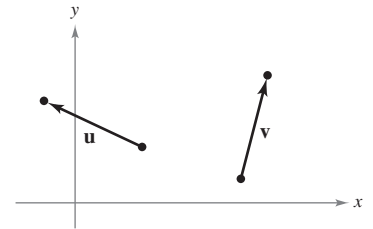
17. $\mathbf{v} = \langle 3, 5 \rangle$
 (a) $2\mathbf{v}$ (b) $-3\mathbf{v}$ (c) $\frac{7}{2}\mathbf{v}$ (d) $\frac{2}{3}\mathbf{v}$
18. $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$
 (a) $4\mathbf{v}$ (b) $-\frac{1}{2}\mathbf{v}$ (c) $0\mathbf{v}$ (d) $-6\mathbf{v}$

Uso de operaciones vectoriales En los ejercicios 19 y 20, halle (a) $\frac{2}{3}\mathbf{u}$, (b) $3\mathbf{v}$, (c) $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, y (d) $2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$.

19. $\mathbf{u} = \langle 4, 9 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -5 \rangle$ 20. $\mathbf{u} = \langle -3, -8 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 8, 25 \rangle$

Representar un vector En los ejercicios 21 a 26, use la figura para representar gráficamente el vector. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, vaya a MathGraphs.com.

21. $-\mathbf{u}$
 22. $2\mathbf{u}$
 23. $-\mathbf{v}$
 24. $\frac{1}{2}\mathbf{v}$
 25. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$
 26. $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$



Hallar un punto final En los ejercicios 27 y 28 se dan el vector \mathbf{v} y su punto inicial. Encuentre el punto terminal.

27. $\mathbf{v} = \langle -1, 3 \rangle$; Punto inicial: (4, 2)
 28. $\mathbf{v} = \langle 4, -9 \rangle$; Punto inicial: (5, 3)

Hallar una magnitud de un vector En los ejercicios 29 a 34, encuentre la magnitud de \mathbf{v} .

29. $\mathbf{v} = 7\mathbf{i}$ 30. $\mathbf{v} = -3\mathbf{j}$
 31. $\mathbf{v} = \langle 4, 3 \rangle$ 32. $\mathbf{v} = \langle 12, -5 \rangle$
 33. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ 34. $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

Encontrar un vector unitario En los ejercicios 35 a 38, halle el vector unitario en la dirección de \mathbf{v} y verifique que tiene longitud 1.

35. $\mathbf{v} = \langle 3, 12 \rangle$ 36. $\mathbf{v} = \langle -5, 15 \rangle$
 37. $\mathbf{v} = \langle \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \rangle$ 38. $\mathbf{v} = \langle -6.2, 3.4 \rangle$

Encontrar magnitudes En los ejercicios 39 a 42, encuentre lo siguiente.

- (a) $\|\mathbf{u}\|$ (b) $\|\mathbf{v}\|$ (c) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$
 (d) $\left\| \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right\|$ (e) $\left\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right\|$ (f) $\left\| \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|} \right\|$
39. $\mathbf{u} = \langle 1, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 2 \rangle$ 40. $\mathbf{u} = \langle 0, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, -3 \rangle$
 41. $\mathbf{u} = \langle 1, \frac{1}{2} \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 3 \rangle$ 42. $\mathbf{u} = \langle 2, -4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 5 \rangle$

Usar la desigualdad del triángulo En los ejercicios 43 y 44, represente gráficamente \mathbf{u} , \mathbf{v} y $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Después demuestre la desigualdad del triángulo usando los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} .

43. $\mathbf{u} = \langle 2, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 4 \rangle$ 44. $\mathbf{u} = \langle -3, 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, -2 \rangle$

Encontrar un vector En los ejercicios 45 a 48, halle el vector \mathbf{v} de la magnitud dada en la misma dirección que \mathbf{u} .

- | Magnitud | Dirección |
|--------------------------|--|
| 45. $\ \mathbf{v}\ = 6$ | $\mathbf{u} = \langle 0, 3 \rangle$ |
| 46. $\ \mathbf{v}\ = 4$ | $\mathbf{u} = \langle 1, 1 \rangle$ |
| 47. $\ \mathbf{v}\ = 5$ | $\mathbf{u} = \langle -1, 2 \rangle$ |
| 48. $\ \mathbf{v}\ = 2$ | $\mathbf{u} = \langle \sqrt{3}, 3 \rangle$ |

Encontrar un vector En los ejercicios 49 a 52, halle las componentes de \mathbf{v} dadas su magnitud y el ángulo que forman con el eje x positivo.

49. $\|\mathbf{v}\| = 3, \theta = 0^\circ$ 50. $\|\mathbf{v}\| = 5, \theta = 120^\circ$
 51. $\|\mathbf{v}\| = 2, \theta = 150^\circ$ 52. $\|\mathbf{v}\| = 4, \theta = 3.5^\circ$

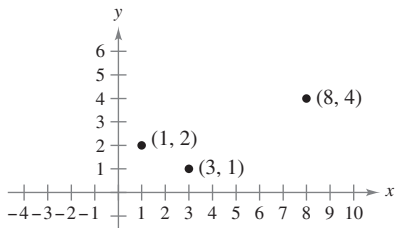
Encontrar un vector En los ejercicios 53 a 56, halle las componentes de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ dadas las longitudes de \mathbf{u} y \mathbf{v} , y los ángulos que \mathbf{u} y \mathbf{v} forman con el eje x positivo.

53. $\|\mathbf{u}\| = 1, \theta_u = 0^\circ$ 54. $\|\mathbf{u}\| = 4, \theta_u = 0^\circ$
 $\|\mathbf{v}\| = 3, \theta_v = 45^\circ$ $\|\mathbf{v}\| = 2, \theta_v = 60^\circ$
 55. $\|\mathbf{u}\| = 2, \theta_u = 4$ 56. $\|\mathbf{u}\| = 5, \theta_u = -0.5$
 $\|\mathbf{v}\| = 1, \theta_v = 2$ $\|\mathbf{v}\| = 5, \theta_v = 0.5$

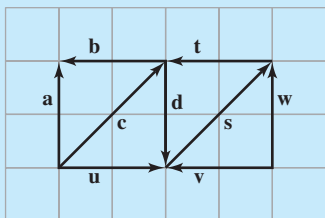
DESARROLLO DE CONCEPTOS

57. **Escalar y vector** Explique, con sus propias palabras, la diferencia entre un escalar y un vector. Dé ejemplos de cada uno.
 58. **Escalar o vector** Identifique la cantidad como escalar o como vector. Explique su razonamiento.
 (a) La velocidad en la boca de cañón de un arma de fuego.
 (b) El precio de las acciones de una empresa.
 (c) La temperatura del aire en un cuarto.
 (d) El peso de un automóvil.

59. **Usar un paralelogramo** Tres de los vértices de un paralelogramo son $(1, 2)$, $(3, 1)$ y $(8, 4)$. Halle las tres posibilidades para el cuarto vértice (vea la figura).



60. ¿CÓMO LO VE? Use la figura para determinar si cada enunciado es verdadero o falso. Justifique su respuesta.



- (a) $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ (b) $\mathbf{c} = \mathbf{s}$
 (c) $\mathbf{a} + \mathbf{u} = \mathbf{c}$ (d) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = -\mathbf{s}$
 (e) $\mathbf{a} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ (f) $\mathbf{u} - \mathbf{v} = -2(\mathbf{b} + \mathbf{t})$

Encontrar valores En los ejercicios 61 a 66, determine a y b tales que $\mathbf{v} = a\mathbf{u} + b\mathbf{w}$, donde $\mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 1, -1 \rangle$.

61. $\mathbf{v} = \langle 2, 1 \rangle$ 62. $\mathbf{v} = \langle 0, 3 \rangle$
 63. $\mathbf{v} = \langle 3, 0 \rangle$ 64. $\mathbf{v} = \langle 3, 3 \rangle$
 65. $\mathbf{v} = \langle 1, 1 \rangle$ 66. $\mathbf{v} = \langle -1, 7 \rangle$

Encontrar vectores unitarios En los ejercicios 67 a 72, determine un vector unitario (a) paralelo y (b) normal a la gráfica de f en el punto dado. A continuación, represente gráficamente los vectores y la función.

67. $f(x) = x^2, (3, 9)$ 68. $f(x) = -x^2 + 5, (1, 4)$
 69. $f(x) = x^3, (1, 1)$ 70. $f(x) = x^3, (-2, -8)$
 71. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, (3, 4)$
 72. $f(x) = \tan x, \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

Encontrar un vector En los ejercicios 73 y 74, exprese \mathbf{v} mediante sus componentes, dadas las magnitudes de \mathbf{u} y de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, y los ángulos que \mathbf{u} y $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ forman con el eje x positivo.

73. $\|\mathbf{u}\| = 1, \theta = 45^\circ$ 74. $\|\mathbf{u}\| = 4, \theta = 30^\circ$
 $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{2}, \theta = 90^\circ$ $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = 6, \theta = 120^\circ$

75. **Fuerza resultante** Fuerzas con magnitudes de 500 libras y 200 libras actúan sobre una pieza de la máquina a ángulos de 30° y -45° , respectivamente, con el eje x (vea la figura). Halle la dirección y la magnitud de la fuerza resultante.

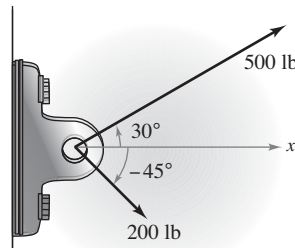


Figura para 75

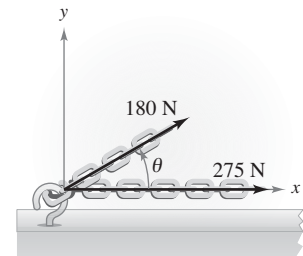


Figura para 76

76. Análisis numérico y gráfico Fuerzas con magnitudes de 180 newtons y 275 newtons actúan sobre un gancho (vea la figura). El ángulo entre las dos fuerzas es de θ grados.

- (a) Si $\theta = 30^\circ$, halle la dirección y la magnitud de la fuerza resultante.
 (b) Exprese la magnitud M y la dirección α de la fuerza resultante en funciones de θ , donde $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.
 (c) Use una herramienta de graficación para completar la tabla.

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
M							
α							

- (d) Use una herramienta de graficación para representar las dos funciones M y α .
 (e) Explique por qué una de las funciones disminuye cuando θ aumenta mientras que la otra no.

3

Funciones vectoriales

- 3.1 Funciones vectoriales
- 3.2 Derivación e integración de funciones vectoriales
- 3.3 Velocidad y aceleración
- 3.4 Vectores tangentes y vectores normales
- 3.5 Longitud de arco y curvatura



Rapidez (*Ejercicio 68, p. 167*)



Control de tráfico aéreo
(*Ejercicio 65, p. 156*)



Futbol (*Ejercicio 32, p. 145*)



Tiro de lanzamiento de
bala (*Ejercicio 42, p. 145*)



Resbaladilla (*Ejercicio 81, p. 129*)

3.1 Funciones vectoriales

- Analizar y dibujar una curva en el espacio dada por una función vectorial.
- Extender los conceptos de límite y continuidad a funciones vectoriales.

Curvas en el espacio y funciones vectoriales

En la sección 2.2 se definió una *curva plana* como un conjunto de pares ordenados $(f(t), g(t))$ junto con sus ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \quad y = g(t)$$

donde f y g son funciones continuas de t en un intervalo I . Esta definición puede extenderse de manera natural al espacio tridimensional como sigue. Una **curva en el espacio** C es un conjunto de todas las demás ordenadas $(f(t), g(t), h(t))$ junto con sus ecuaciones paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad y \quad z = h(t)$$

donde f, g y h son funciones continuas de t en un intervalo I .

Antes de ver ejemplos de curvas en el espacio, se introduce un nuevo tipo de función, llamada **función vectorial**. Este tipo de función asigna vectores a números reales.

Definición de función vectorial

Una función de la forma

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \quad \text{Plano}$$

o

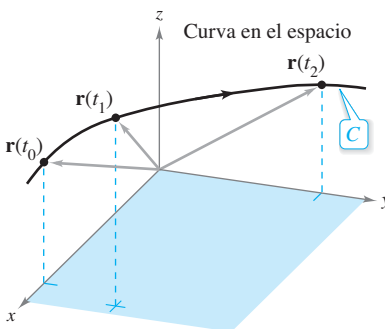
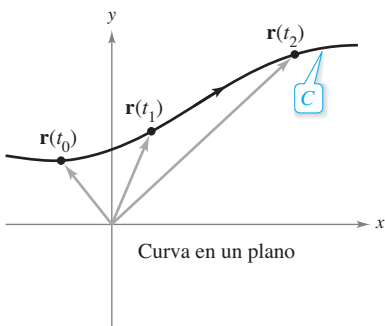
$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \quad \text{Espacio}$$

es una **función vectorial**, donde las **funciones componentes** f, g y h son funciones del parámetro t . Algunas veces las funciones vectoriales se denotan como

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t) \rangle \quad \text{Plano}$$

o

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle. \quad \text{Espacio}$$



La curva C es trazada por el punto final del vector posición $\mathbf{r}(t)$.

Figura 3.1

Técnicamente, una curva en el plano o en el espacio consiste en una colección de puntos y ecuaciones paramétricas que la definen. Dos curvas diferentes pueden tener la misma gráfica. Por ejemplo, cada una de las curvas dadas por

$$\mathbf{r}(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} \quad y \quad \mathbf{r}(t) = \sin t^2 \mathbf{i} + \cos t^2 \mathbf{j}$$

tiene como gráfica el círculo unitario, pero estas ecuaciones no representan la misma curva, porque el círculo está trazado de diferentes maneras.

Es importante que se asegure de ver la diferencia entre la función vectorial \mathbf{r} y las funciones reales f, g y h . Todas son funciones de la variable real t , pero $\mathbf{r}(t)$ es un vector, mientras que $f(t), g(t)$ y $h(t)$ son números reales (para cada valor específico de t).

Las funciones vectoriales juegan un doble papel en la representación de curvas. Tomando como parámetro t , que representa el tiempo, se puede usar una función vectorial para representar el movimiento a lo largo de una curva. O, en el caso más general, puede usar una función vectorial para *trazar la gráfica* de una curva. En ambos casos el punto final del vector posición $\mathbf{r}(t)$ coincide con el punto (x, y) o (x, y, z) de la curva dada por las ecuaciones paramétricas, como se muestra en la figura 3.1. La punta de flecha en la curva indica la *orientación* de la curva apuntando en la dirección de valores crecientes de t .

A menos que se especifique otra cosa, se considera que el **dominio** de una función vectorial \mathbf{r} es la intersección de los dominios de las funciones componentes f , g y h . Por ejemplo, el dominio de $\mathbf{r}(t) = \ln t \mathbf{i} + \sqrt{1-t} \mathbf{j} + t \mathbf{k}$ es el intervalo $(0, 1]$.

EJEMPLO 1 Trazar una curva plana

Dibujar la curva plana representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} - 3 \sin t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad \text{Función vectorial}$$

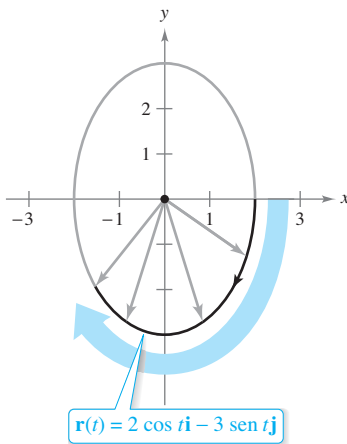
Solución A partir del vector de posición $\mathbf{r}(t)$, se pueden dar las ecuaciones paramétricas

$$x = 2 \cos t \quad y = -3 \sin t.$$

Despejando $\cos t$ y $\sin t$, y utilizando la identidad $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, se obtiene la ecuación rectangular

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1. \quad \text{Ecuación rectangular}$$

La gráfica de esta ecuación rectangular es la elipse mostrada en la figura 3.2. La curva está orientada en el *sentido de las manecillas del reloj*. Es decir, cuando t aumenta de 0 a 2π , el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ se mueve en el sentido de las manecillas del reloj, y sus puntos finales describen la elipse.



La elipse es trazada en el sentido de las manecillas del reloj a medida que t aumenta de 0 a 2π .

Figura 3.2

EJEMPLO 2 Trazar una curva en el espacio

...► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Dibuje la curva en el espacio representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 4 \cos t \mathbf{i} + 4 \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi. \quad \text{Función vectorial}$$

Solución De las dos primeras ecuaciones paramétricas

$$x = 4 \cos t \quad y = 4 \sin t$$

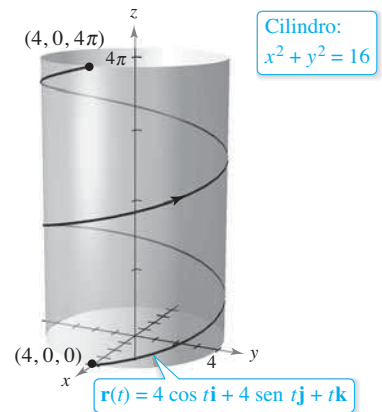
obtiene

$$x^2 + y^2 = 16. \quad \text{Función vectorial}$$

Esto significa que la curva se encuentra en un cilindro circular recto de radio 4, centrado en el eje z . Para localizar en este cilindro la curva, use la tercera ecuación paramétrica

$$z = t.$$

En la figura 3.3, observe que a medida que t crece de 0 a 4π el punto sube en espiral por el cilindro describiendo una **hélice**. Un ejemplo de una hélice de la vida real se muestra en el dibujo de la izquierda.



A medida que t crece de 0 a 4π , se describen dos espirales sobre la hélice.

Figura 3.3



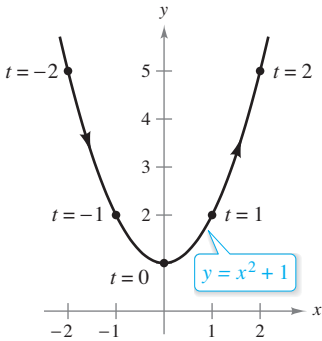
En 1953, Francis Crick y James D. Watson descubrieron la estructura de doble hélice del ADN.

En los ejemplos 1 y 2 se dio una función vectorial y se le pidió dibujar la curva correspondiente. Los dos ejemplos siguientes se refieren a la situación inversa: hallar una función vectorial para representar una gráfica dada. Claro está que si la gráfica se da en forma paramétrica, su representación por medio de una función vectorial es inmediata. Por ejemplo, para representar en el espacio la recta dada por $x = 2 + t$, $y = 3t$ y $z = 4 - t$, use simplemente la función vectorial dada por

$$\mathbf{r}(t) = (2 + t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + (4 - t)\mathbf{k}.$$

Si no se da un conjunto de ecuaciones paramétricas para la gráfica, el problema de representar la gráfica mediante una función vectorial se reduce a hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas.

EJEMPLO 3 Representar una gráfica mediante una función vectorial



Hay muchas maneras de parametrizar esta gráfica. Una de ellas es tomar $x = t$.

Figura 3.4

Represente la parábola

$$y = x^2 + 1$$

mediante una función vectorial.

Solución Aunque usted tiene muchas maneras de elegir el parámetro t , una opción natural es tomar $x = t$. Entonces $y = t^2 + 1$ y tiene

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j}. \quad \text{Función vectorial}$$

Observe en la figura 3.4 la orientación obtenida con esta elección particular de parámetro. Si hubiera elegido como parámetro $x = -t$, la curva habría estado orientada en dirección opuesta.

EJEMPLO 4 Representar una gráfica mediante una función vectorial

Dibuje la gráfica C representada por la intersección del semielipsoide

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{24} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad z \geq 0$$

y el cilindro parabólico $y = x^2$. Después, halle una función vectorial que represente la gráfica.

Solución En la figura 3.5 se muestra la intersección de las dos superficies. Como en el ejemplo 3, una opción natural para el parámetro es $x = t$. Con esta opción, se usa la ecuación dada $y = x^2$ para obtener $y = t^2$. Entonces

$$\frac{z^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{24} = 1 - \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{24} = \frac{24 - 2t^2 - t^4}{24} = \frac{(6 + t^2)(4 - t^2)}{24}.$$

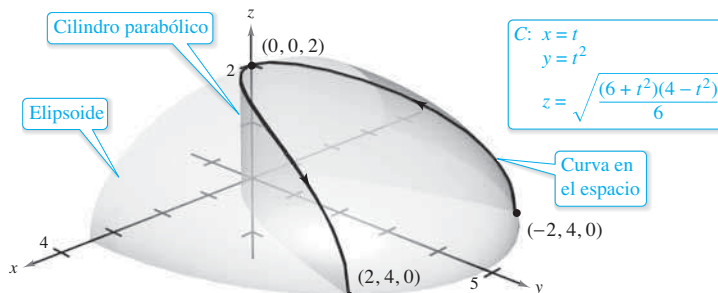
Como la curva se encuentra sobre el plano xy , debe elegir para z la raíz cuadrada positiva. Así obtiene las ecuaciones paramétricas siguientes.

$$x = t, \quad y = t^2 \quad y \quad z = \sqrt{\frac{(6 + t^2)(4 - t^2)}{6}}.$$

La función vectorial resultante es

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \sqrt{\frac{(6 + t^2)(4 - t^2)}{6}}\mathbf{k}, \quad -2 \leq t \leq 2. \quad \text{Función vectorial}$$

(Observe que el componente \mathbf{k} de $\mathbf{r}(t)$ implica $-2 \leq t \leq 2$.) De los puntos $(-2, 4, 0)$ y $(2, 4, 0)$ que se muestran en la figura 3.5, puede ver que la curva es trazada a medida que t crece de -2 a 2 .



La curva C es la intersección del semielipsoide y el cilindro parabólico.

Figura 3.5

•••**COMENTARIO** Las curvas en el espacio pueden especificarse de varias maneras. Por ejemplo, la curva del ejemplo 4 se describe como la intersección de dos superficies en el espacio.



Límites y continuidad

Muchas de las técnicas y definiciones utilizadas en el cálculo de funciones reales se pueden aplicar a funciones vectoriales. Por ejemplo, usted puede sumar y restar funciones vectoriales, multiplicar por un escalar, tomar su límite, derivarlas, y así sucesivamente. La estrategia básica consiste en aprovechar la linealidad de las operaciones vectoriales y extender las definiciones en una base, componente por componente. Por ejemplo, para sumar o restar dos funciones vectoriales (en el plano), tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t) &= [f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}] + [f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}] && \text{Suma} \\ &= [f_1(t) + f_2(t)]\mathbf{i} + [g_1(t) + g_2(t)]\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Para restar dos funciones vectoriales, puede escribir

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t) &= [f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}] - [f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}] && \text{Resta} \\ &= [f_1(t) - f_2(t)]\mathbf{i} + [g_1(t) - g_2(t)]\mathbf{j}.\end{aligned}$$

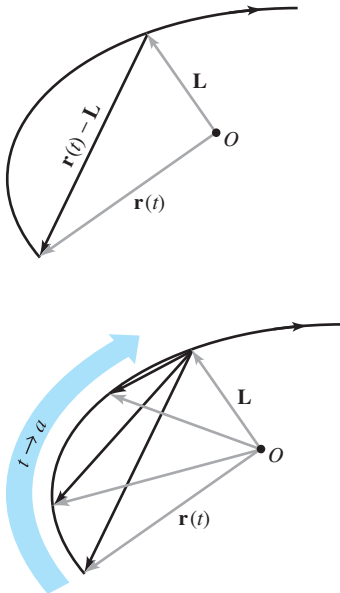
De manera similar, para multiplicar y dividir una función vectorial por un escalar tiene

$$\begin{aligned}c\mathbf{r}(t) &= c[f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}] && \text{Multiplicación escalar} \\ &= cf_1(t)\mathbf{i} + cg_1(t)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Para dividir una función vectorial entre un escalar,

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{r}(t)}{c} &= \frac{[f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}]}{c}, \quad c \neq 0 && \text{División escalar} \\ &= \frac{f_1(t)}{c}\mathbf{i} + \frac{g_1(t)}{c}\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Esta extensión, componente por componente, de las operaciones con funciones reales a funciones vectoriales se ilustra más ampliamente en la definición siguiente del límite de una función vectorial.



A medida que t tiende a a , $\mathbf{r}(t)$ tiende al límite \mathbf{L} . Para que el límite \mathbf{L} exista, no es necesario que $\mathbf{r}(a)$ esté definida o que $\mathbf{r}(a)$ sea igual a \mathbf{L} .

Figura 3.6

Definición del límite de una función vectorial

1. Si \mathbf{r} es una función vectorial tal que $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow a} f(t) \right] \mathbf{i} + \left[\lim_{t \rightarrow a} g(t) \right] \mathbf{j} \quad \text{Plano}$$

siempre que existan los límites de f y g cuando $t \rightarrow a$.

2. Si \mathbf{r} es una función vectorial tal que $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow a} f(t) \right] \mathbf{i} + \left[\lim_{t \rightarrow a} g(t) \right] \mathbf{j} + \left[\lim_{t \rightarrow a} h(t) \right] \mathbf{k} \quad \text{Espacio}$$

siempre que existan los límites de f , g y h cuando $t \rightarrow a$.

Si $\mathbf{r}(t)$ tiende al vector \mathbf{L} cuando $t \rightarrow a$, entonces la longitud del vector $\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}$ tiende a 0. Es decir,

$$\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow a.$$

Esto se ilustra de manera gráfica en la figura 3.6. Con esta definición del límite de una función vectorial, usted puede desarrollar versiones vectoriales de la mayor parte de los teoremas del límite. Por ejemplo, el límite de la suma de dos funciones vectoriales es la suma de sus límites individuales. También puede usar la orientación de la curva $\mathbf{r}(t)$ para definir límites unilaterales de funciones vectoriales. La definición siguiente extiende la noción de continuidad a funciones vectoriales.

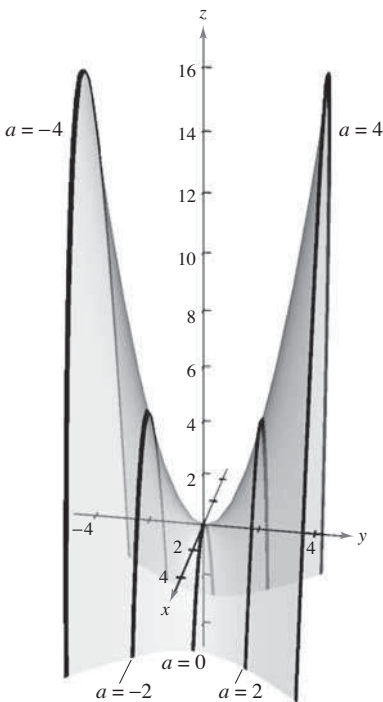
Definición de continuidad de una función vectorial

Una función vectorial \mathbf{r} es **continua en un punto** dado por $t = a$ si el límite de $\mathbf{r}(t)$ cuando $t \rightarrow a$ existe y

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a).$$

Una función vectorial \mathbf{r} es **continua en un intervalo** I si es continua en todos los puntos del intervalo.

De acuerdo con esta definición, una función vectorial es continua en $t = a$ si y sólo si cada una de sus funciones componentes es continua en $t = a$.



Para todo a , la curva representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + a\mathbf{j} + (a^2 - t^2)\mathbf{k}$ es una parábola.

Figura 3.7

► **TECNOLOGÍA** Casi

- cualquier tipo de dibujo tridimensional es difícil hacerlo a mano, pero trazar curvas en el espacio es especialmente difícil.
- El problema consiste en crear la impresión de tres dimensiones.
- Las herramientas de graficación usan diversas técnicas para dar la “impresión de tres dimensiones” en gráficas de curvas en el espacio: una manera es mostrar la curva en una superficie, como en la figura 3.7.

EJEMPLO 5 Continuidad de funciones vectoriales

Analice la continuidad de la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + a\mathbf{j} + (a^2 - t^2)\mathbf{k} \quad a \text{ es una constante.}$$

cuando $t = 0$.

Solución Cuando t tiende a 0, el límite es

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t) &= \left[\lim_{t \rightarrow 0} t \right] \mathbf{i} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} a \right] \mathbf{j} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} (a^2 - t^2) \right] \mathbf{k} \\ &= 0\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a^2\mathbf{k} \\ &= a\mathbf{j} + a^2\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= (0)\mathbf{i} + (a)\mathbf{j} + (a^2)\mathbf{k} \\ &= a\mathbf{j} + a^2\mathbf{k} \end{aligned}$$

puede concluir que \mathbf{r} es continua en $t = 0$. Mediante un razonamiento similar, concluye que la función vectorial \mathbf{r} es continua para todo valor real de t . ■

Para cada valor de a , la curva representada por la función vectorial del ejemplo 5,

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + a\mathbf{j} + (a^2 - t^2)\mathbf{k} \quad a \text{ es una constante.}$$

es una parábola. Usted puede imaginar cada una de estas parábolas como la intersección del plano vertical con el paraboloides hiperbólico

$$y^2 - x^2 = z$$

como se muestra en la figura 3.7.

EJEMPLO 6 Continuidad de funciones vectoriales

Determine los intervalo(s) en los cuales la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t+1}\mathbf{j} + (t^2 + 1)\mathbf{k}$$

es continua.

Solución Las funciones componentes son $f(t) = t$, $g(t) = \sqrt{t+1}$ y $h(t) = (t^2 + 1)$. Tanto f como h son continuas para todos los valores de t . Sin embargo, la función g es continua sólo para $t \geq -1$. Por lo que \mathbf{r} es continua en el intervalo $[-1, \infty)$. ■

3.1 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Determinar el dominio En los ejercicios 1 a 8, halle el dominio de la función vectorial.

1. $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{t+1}\mathbf{i} + \frac{t}{2}\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$

2. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{4-t^2}\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - 6t\mathbf{k}$

3. $\mathbf{r}(t) = \ln t\mathbf{i} - e^t\mathbf{j} - t\mathbf{k}$

4. $\mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + 4\cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

5. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)$, donde

$$\mathbf{F}(t) = \cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}, \quad \mathbf{G}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$$

6. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) - \mathbf{G}(t)$, donde

$$\mathbf{F}(t) = \ln t\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k}, \quad \mathbf{G}(t) = \mathbf{i} + 4t\mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k}$$

7. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t)$, donde

$$\mathbf{F}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}, \quad \mathbf{G}(t) = \sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$$

8. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t)$, donde

$$\mathbf{F}(t) = t^3\mathbf{i} - t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad \mathbf{G}(t) = \sqrt[3]{t}\mathbf{i} + \frac{1}{t+1}\mathbf{j} + (t+2)\mathbf{k}$$

Evaluar una función En los ejercicios 9 a 12, evalúe (si es posible) la función vectorial en cada valor dado de t .

9. $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} - (t-1)\mathbf{j}$

(a) $\mathbf{r}(1)$ (b) $\mathbf{r}(0)$ (c) $\mathbf{r}(s+1)$

(d) $\mathbf{r}(2+\Delta t) - \mathbf{r}(2)$

10. $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j}$

(a) $\mathbf{r}(0)$ (b) $\mathbf{r}(\pi/4)$ (c) $\mathbf{r}(\theta - \pi)$

(d) $\mathbf{r}(\pi/6 + \Delta t) - \mathbf{r}(\pi/6)$

11. $\mathbf{r}(t) = \ln t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

(a) $\mathbf{r}(2)$ (b) $\mathbf{r}(-3)$ (c) $\mathbf{r}(t-4)$

(d) $\mathbf{r}(1+\Delta t) - \mathbf{r}(1)$

12. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + t^{3/2}\mathbf{j} + e^{-t/4}\mathbf{k}$

(a) $\mathbf{r}(0)$ (b) $\mathbf{r}(4)$ (c) $\mathbf{r}(c+2)$

(d) $\mathbf{r}(9+\Delta t) - \mathbf{r}(9)$

Escribir una función vectorial En los ejercicios 13 a 16, represente el segmento de recta desde P hasta Q mediante una función vectorial y mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas.

13. $P(0, 0, 0), Q(3, 1, 2)$

14. $P(0, 2, -1), Q(4, 7, 2)$

15. $P(-2, 5, -3), Q(-1, 4, 9)$

16. $P(1, -6, 8), Q(-3, -2, 5)$

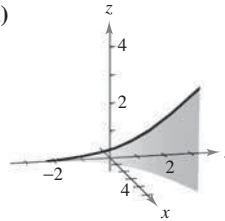
Piénselo En los ejercicios 17 y 18, halle $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)$. ¿Es el resultado una función vectorial? Explique.

17. $\mathbf{r}(t) = (3t-1)\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}(t) = t^2\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

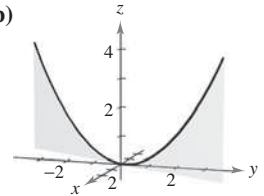
18. $\mathbf{r}(t) = \langle 3\cos t, 2\sin t, t-2 \rangle, \quad \mathbf{u}(t) = \langle 4\sin t, -6\cos t, t^2 \rangle$

Relacionar En los ejercicios 19 a 22, relacione cada ecuación con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a), (b), (c) y (d).]

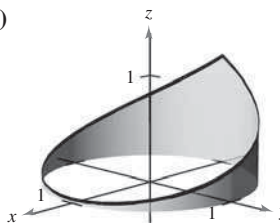
(a)



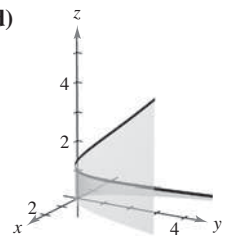
(b)



(c)



(d)



19. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad -2 \leq t \leq 2$

20. $\mathbf{r}(t) = \cos(\pi t)\mathbf{i} + \sin(\pi t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad -1 \leq t \leq 1$

21. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + e^{0.75t}\mathbf{k}, \quad -2 \leq t \leq 2$

22. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \ln t\mathbf{j} + \frac{2t}{3}\mathbf{k}, \quad 0.1 \leq t \leq 5$

Trazar una curva En los ejercicios 23 a 28, dibuje la curva representada por la función vectorial y dé la orientación de la curva.

23. $\mathbf{r}(t) = \frac{t}{4}\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}$

24. $\mathbf{r}(t) = (5-t)\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j}$

25. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$

26. $\mathbf{r}(t) = (t^2+t)\mathbf{i} + (t^2-t)\mathbf{j}$

27. $\mathbf{r}(\theta) = \cos \theta\mathbf{i} + 3\sin \theta\mathbf{j}$

28. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j}$

29. $\mathbf{r}(\theta) = 3\sec \theta\mathbf{i} + 2\tan \theta\mathbf{j}$

30. $\mathbf{r}(t) = 2\cos^3 t\mathbf{i} + 2\sin^3 t\mathbf{j}$

31. $\mathbf{r}(t) = (-t+1)\mathbf{i} + (4t+2)\mathbf{j} + (2t+3)\mathbf{k}$

32. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t-5)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

33. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

34. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 3\cos t\mathbf{j} + 3\sin t\mathbf{k}$

35. $\mathbf{r}(t) = 2\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$

36. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \frac{3}{2}t\mathbf{k}$

37. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, \frac{2}{3}t^3 \rangle$


38. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t, t \rangle$



Identificar una curva común En los ejercicios 39 a 42, use un sistema algebraico por computadora a fin de representar gráficamente la función vectorial e identifique la curva común.

39. $\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2\mathbf{k}$

40. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$
 41. $\mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}t\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{k}$
 42. $\mathbf{r}(t) = -\sqrt{2}\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \sqrt{2}\sin t\mathbf{k}$

 **Piénselo** En los ejercicios 43 y 44, use un sistema algebraico por computadora a fin de representar gráficamente la función vectorial $\mathbf{r}(t)$. Para cada $\mathbf{u}(t)$, haga una conjetura sobre la transformación (si la hay) de la gráfica de $\mathbf{r}(t)$. Use un sistema algebraico por computadora para verificar su conjetura.

43. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$
 (a) $\mathbf{u}(t) = 2(\cos t - 1)\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$
 (b) $\mathbf{u}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$
 (c) $\mathbf{u}(t) = 2\cos(-t)\mathbf{i} + 2\sin(-t)\mathbf{j} + \frac{1}{2}(-t)\mathbf{k}$
 (d) $\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 2\cos t\mathbf{k}$
 (e) $\mathbf{u}(t) = 6\cos t\mathbf{i} + 6\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$
 44. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$
 (a) $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 - 2)\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$
 (b) $\mathbf{u}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$
 (c) $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}t^3 + 4\right)\mathbf{k}$
 (d) $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{8}t^3\mathbf{k}$
 (e) $\mathbf{u}(t) = (-t)\mathbf{i} + (-t)^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}(-t)^3\mathbf{k}$

Representar una gráfica mediante una función vectorial En los ejercicios 45 a 52, represente la curva plana por medio de una función vectorial. (Hay muchas respuestas correctas.)

45. $y = x + 5$ 46. $2x - 3y + 5 = 0$
 47. $y = (x - 2)^2$ 48. $y = 4 - x^2$
 49. $x^2 + y^2 = 25$ 50. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$
 51. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ 52. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

Representar una gráfica mediante una función vectorial En los ejercicios 53 a 60, dibuje la curva en el espacio representada por la intersección de las superficies. Después represente la curva por una función vectorial utilizando el parámetro dado.

Superficies	Parámetro
53. $z = x^2 + y^2, \quad x + y = 0$	$x = t$
54. $z = x^2 + y^2, \quad z = 4$	$x = 2\cos t$
55. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = x^2$	$x = 2\sin t$
56. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16, \quad x = z^2$	$z = t$
57. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x + z = 2$	$x = 1 + \sin t$
58. $x^2 + y^2 + z^2 = 10, \quad x + y = 4$	$x = 2 + \sin t$
59. $x^2 + z^2 = 4, \quad y^2 + z^2 = 4$	$x = t$ (primer octante)
60. $x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad xy = 4$	$x = t$ (primer octante)

61. **Dibujar una curva** Demuestre que la función vectorial $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\cos t\mathbf{j} + 2t\sin t\mathbf{k}$ se encuentra en el cono $4x^2 = y^2 + z^2$. Dibuje la curva.

62. **Dibujar una curva** Demuestre que la función vectorial $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\cos t\mathbf{i} + e^{-t}\sin t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$ se encuentra en el cono $z^2 = x^2 + y^2$. Dibuje la curva.

Determinar un límite En los ejercicios 63 a 68, evalúe el límite (si existe).

63. $\lim_{t \rightarrow \pi} (t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k})$
 64. $\lim_{t \rightarrow 2} \left(3t\mathbf{i} + \frac{2}{t^2 - 1}\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k} \right)$
 65. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(t^2\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + \frac{1 - \cos t}{t}\mathbf{k} \right)$
 66. $\lim_{t \rightarrow 1} \left(\sqrt{t}\mathbf{i} + \frac{\ln t}{t^2 - 1}\mathbf{j} + \frac{1}{t - 1}\mathbf{k} \right)$
 67. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(e^t\mathbf{i} + \frac{\sin t}{t}\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k} \right)$
 68. $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{-t}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + \frac{t}{t^2 + 1}\mathbf{k} \right)$

Continuidad de una función vectorial En los ejercicios 69 a 74, determine el (los) intervalo(s) en que la función vectorial es continua.

69. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}$
 70. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \sqrt{t-1}\mathbf{j}$
 71. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \arcsen t\mathbf{j} + (t-1)\mathbf{k}$
 72. $\mathbf{r}(t) = 2e^{-t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \ln(t-1)\mathbf{k}$
 73. $\mathbf{r}(t) = \langle e^{-t}, t^2, \tan t \rangle$ 74. $\mathbf{r}(t) = \langle 8, \sqrt{t}, \sqrt[3]{t} \rangle$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

Escribir una transformación En los ejercicios 75 a 78, considere la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t-3)\mathbf{j} + t\mathbf{k}.$$

Dé una función vectorial $s(t)$ que sea la transformación especificada de \mathbf{r} .

75. Una traslación vertical tres unidades hacia arriba.
 76. Una traslación vertical dos unidades hacia abajo.
 77. Una traslación horizontal dos unidades en dirección del eje x negativo.
 78. Una traslación horizontal cinco unidades en dirección del eje y positivo.
 79. **Continuidad de una función vectorial** Escriba la definición de continuidad para una función vectorial. Dé un ejemplo de una función vectorial que esté definida pero no sea continua en $t = 2$.

80. **Comparar funciones** ¿Cuáles de las siguientes gráficas representa la misma gráfica?

- (a) $\mathbf{r}(t) = (-3\cos t + 1)\mathbf{i} + (5\sin t + 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
 (b) $\mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i} + (-3\cos t + 1)\mathbf{j} + (5\sin t + 2)\mathbf{k}$
 (c) $\mathbf{r}(t) = (3\cos t - 1)\mathbf{i} + (-5\sin t - 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
 (d) $\mathbf{r}(t) = (-3\cos 2t + 1)\mathbf{i} + (5\sin 2t + 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

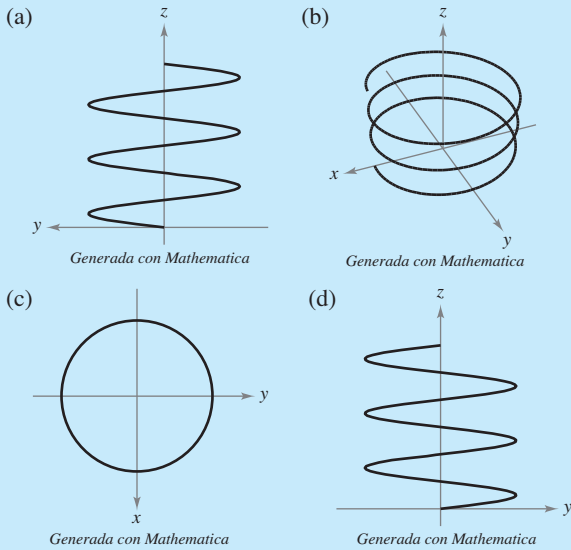
81. Resbaladilla

El borde exterior de una resbaladilla tiene forma de una hélice de 1.5 metros de radio. La resbaladilla tiene una altura de 2 metros y hace una revolución completa desde arriba hacia abajo. Encuentre una función vectorial para la hélice. Use un sistema algebraico por computadora para graficar la función. (Existen muchas respuestas correctas.)



82.

¿CÓMO LO VE? Las cuatro figuras que se muestran a continuación son las gráficas de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t \mathbf{i} + 4 \sin t \mathbf{j} + (t/4)\mathbf{k}$. Relacione cada una de las cuatro gráficas con el punto en el espacio desde el cual se ve la hélice. Los cuatro puntos son $(0, 0, 20)$, $(20, 0, 0)$, $(-20, 0, 0)$ y $(10, 20, 10)$.



- 83. Demostración** Sean $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ funciones vectoriales cuyos límites existen cuando $t \rightarrow c$. Demuestre que $\lim_{t \rightarrow c} [\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \lim_{t \rightarrow c} \mathbf{r}(t) \times \lim_{t \rightarrow c} \mathbf{u}(t)$.
- 84. Demostración** Sean $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ funciones vectoriales cuyos límites existen cuando $t \rightarrow c$. Demuestre que $\lim_{t \rightarrow c} [\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \lim_{t \rightarrow c} \mathbf{r}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow c} \mathbf{u}(t)$.
- 85. Demostración** Demuestre que si \mathbf{r} es una función vectorial continua en c , entonces $\|\mathbf{r}\|$ es continua en c .
- 86. Comprobar un inverso** Verifique que el recíproco de lo que se afirma en el ejercicio 85 no es verdad encontrando una función vectorial \mathbf{r} tal que $\|\mathbf{r}\|$ sea continua en c pero \mathbf{r} no sea continua en c .

Movimiento de una partícula En los ejercicios 87 y 88, dos partículas viajan a lo largo de las curvas de espacio $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$. Una colisión ocurrirá en el punto de intersección P si ambas partículas están en P al mismo tiempo. ¿Colisionan las partículas? ¿Se intersecan sus trayectorias?

- 87.** $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (9t - 20)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$
 $\mathbf{u}(t) = (3t + 4)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (5t - 4)\mathbf{k}$
- 88.** $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$
 $\mathbf{u}(t) = (-2t + 3)\mathbf{i} + 8t\mathbf{j} + (12t + 2)\mathbf{k}$

Piénselo En los ejercicios 89 y 90, dos partículas viajan a lo largo de las curvas de espacio $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$.

- 89.** Si $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ se intersecan, ¿colisionarán las partículas?
- 90.** Si las partículas colisionan, ¿se intersecan sus trayectorias $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$?

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 91 a 94, determine si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que pruebe que es falsa.

- 91.** Si f , g y h son funciones polinomiales de primer grado, entonces la curva dada por $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$ es una recta.
- 92.** Si la curva dada por $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$ es una recta, entonces f , g y h son funciones polinomiales de primer grado de t .
- 93.** Dos partículas viajan a través de las curvas de espacio $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$. La intersección de sus trayectorias depende sólo de las curvas trazadas por $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ en tanto la colisión depende de la parametrización.
- 94.** La función vectorial $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k}$ se encuentra en el paraboloides $x = y^2 + z^2$.

PROYECTO DE TRABAJO

Bruja de Agnesi

Con anterioridad se estudió una curva famosa llamada **bruja de Agnesi**. En este proyecto se profundiza sobre esta función.

Considere un círculo de radio a centrado en el punto $(0, a)$ del eje y . Sea A un punto en la recta horizontal $y = 2a$, O el origen y B el punto donde el segmento OA corta el círculo. Un punto P está en la bruja de Agnesi si P se encuentra en la recta horizontal que pasa por B y en la recta vertical que pasa por A .

- (a) Demuestre que el punto A está descrito por la función vectorial donde $\mathbf{r}_A(\theta) = 2a \cot \theta \mathbf{i} + 2a \mathbf{j}$ para $0 < \theta < \pi$, donde θ es el ángulo formado por OA con el eje x positivo.
- (b) Demuestre que el punto B está descrito por la función vectorial $\mathbf{r}_B(\theta) = a \sin 2\theta \mathbf{i} + a(1 - \cos 2\theta)\mathbf{j}$ para $0 < \theta < \pi$.
- (c) Combine los resultados de los incisos (a) y (b) para hallar la función vectorial $\mathbf{r}(\theta)$ para la bruja de Agnesi. Use una herramienta de graficación para representar esta curva para $a = 1$.
- (d) Describa los límites $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \mathbf{r}(\theta)$ y $\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \mathbf{r}(\theta)$.
- (e) Elimine el parámetro θ y determine la ecuación rectangular de la bruja de Agnesi. Use una herramienta de graficación para representar esta función para $a = 1$ y compare la gráfica con la obtenida en el inciso (c).

3.2 Derivación e integración de funciones vectoriales

- Derivar una función vectorial.
- Integrar una función vectorial.

Derivación de funciones vectoriales

En las secciones 3.3 a 3.5 estudiará varias aplicaciones importantes que emplean cálculo de funciones vectoriales. Como preparación para ese estudio, esta sección está dedicada a las mecánicas de derivación e integración de funciones vectoriales.

La definición de la derivada de una función vectorial es paralela a la dada para funciones reales.

Definición de la derivada de una función vectorial

La **derivada de una función vectorial** \mathbf{r} se define como

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

para todo t para el cual existe el límite. Si $\mathbf{r}'(t)$ existe, entonces \mathbf{r} es **derivable en t** . Si $\mathbf{r}'(t)$ existe para toda t en un intervalo abierto I , entonces \mathbf{r} es **derivable en el intervalo I** . La derivabilidad de funciones vectoriales puede extenderse a intervalos cerrados considerando límites unilaterales.

.....►
 ...COMENTARIO Además de la notación $\mathbf{r}'(t)$, otras notaciones para la derivada de una función vectorial son

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)], \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \text{y} \quad D_t[\mathbf{r}(t)].$$

La derivación de funciones vectoriales puede hacerse *componente por componente*. Para ver que esto es cierto, considere la función dada por $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$. Aplicando la definición de derivada se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t)\mathbf{i} + g(t + \Delta t)\mathbf{j} - f(t)\mathbf{i} - g(t)\mathbf{j}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right] \mathbf{j} \right\} \\ &= \left\{ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right] \right\} \mathbf{i} + \left\{ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right] \right\} \mathbf{j} \\ &= f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} \end{aligned}$$

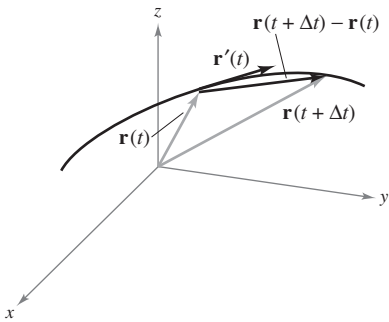


Figura 3.8

Este importante resultado se enuncia en el teorema de la página siguiente. Observe que la derivada de la función vectorial \mathbf{r} es también una función vectorial. En la figura 3.8 puede ver que $\mathbf{r}'(t)$ es un vector tangente a la curva dada por $\mathbf{r}(t)$ y que apunta en la dirección de los valores crecientes de t .

TEOREMA 3.1 Derivación de funciones vectoriales

1. Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, donde f y g son funciones derivables de t , entonces

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}. \quad \text{Plano}$$

2. Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, donde f , g y h son funciones derivables de t , entonces

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}. \quad \text{Espacio}$$

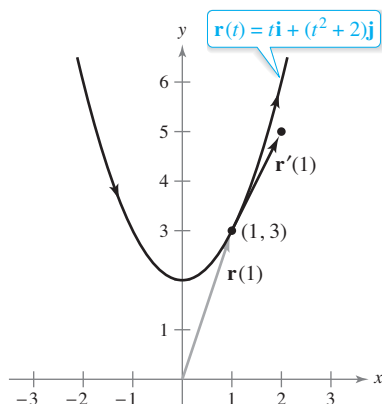


Figura 3.9

EJEMPLO 1 Derivación de funciones vectoriales

... ▶ Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Para la función vectorial dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 + 2)\mathbf{j}$$

encuentre $\mathbf{r}'(t)$. A continuación, bosqueje la curva plana representada por $\mathbf{r}(t)$ y las gráficas de $\mathbf{r}(1)$ y $\mathbf{r}'(1)$.

Solución Derive cada una de las componentes base para obtener

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}.$$

Derivada

Del vector de posición $\mathbf{r}(t)$, puede escribir las ecuaciones paramétricas $x = t$ y $y = t^2 + 2$. La ecuación rectangular correspondiente es $y = x^2 + 2$. Cuando $t = 1$,

$$\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{r}'(1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

En la figura 3.9, $\mathbf{r}(1)$ se dibuja iniciando en el origen, y $\mathbf{r}'(1)$ se dibuja en el punto final de $\mathbf{r}(1)$.

Derivadas de orden superior de funciones vectoriales se obtienen por derivación sucesiva de cada una de las funciones componentes.

EJEMPLO 2 Derivadas de orden superior

Para la función vectorial dada por

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

encuentre

- $\mathbf{r}'(t)$
- $\mathbf{r}''(t)$
- $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$
- $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$

Solución

$$\mathbf{a.} \quad \mathbf{r}'(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Primera derivada

$$\mathbf{b.} \quad \mathbf{r}''(t) = -\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$= -\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}$$

Segunda derivada

$$\mathbf{c.} \quad \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) = \sin t \cos t - \sin t \cos t = 0$$

Producto escalar

$$\mathbf{d.} \quad \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin t & \cos t & 2 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

Producto vectorial

$$= \begin{vmatrix} \cos t & 2 \\ -\sin t & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} -\sin t & 2 \\ -\cos t & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= 2 \sin t\mathbf{i} - 2 \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

En el inciso 2(c) observe que el producto escalar es una función real, no una función vectorial.

La parametrización de la curva representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

es suave en un intervalo abierto I si f' , g' y h' son continuas en I y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo valor de t en el intervalo I .

EJEMPLO 3 Intervalos en los que una curva es suave

Halle los intervalos en los que la epicicloide C dada por

$$\mathbf{r}(t) = (5 \cos t - \cos 5t)\mathbf{i} + (5 \sin t - \sin 5t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

es suave.

Solución La derivada de \mathbf{r} es

$$\mathbf{r}'(t) = (-5 \sin t + 5 \sin 5t)\mathbf{i} + (5 \cos t - 5 \cos 5t)\mathbf{j}.$$

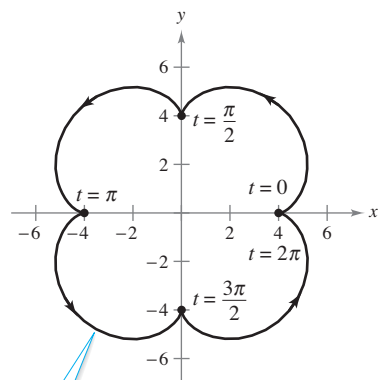
En el intervalo $[0, 2\pi]$ los únicos valores de t para los cuales

$$\mathbf{r}'(t) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$$

son $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ y 2π . Por consiguiente, puede concluir que C es suave en los intervalos

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ y } \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

como se muestra en la figura 3.10.



$$\mathbf{r}(t) = (5 \cos t - \cos 5t)\mathbf{i} + (5 \sin t - \sin 5t)\mathbf{j}$$

La epicicloide no es suave en los puntos en los que corta los ejes.

Figura 3.10

En la figura 3.10, observe que la curva no es suave en los puntos en los que tiene cambios abruptos de dirección. Tales puntos se llaman **cúspides** o **nodos**.

La mayoría de las reglas de derivación tienen sus análogas para funciones vectoriales, y varias de ellas se dan en el teorema siguiente. Observe que el teorema contiene tres versiones de “reglas del producto”. La propiedad 3 da la derivada del producto de una función real w y por una función vectorial \mathbf{r} , la propiedad 4 da la derivada del producto escalar de dos funciones vectoriales y la propiedad 5 da la derivada del producto vectorial de dos funciones vectoriales (en el espacio).

TEOREMA 3.2 Propiedades de la derivada

Sean \mathbf{r} y \mathbf{u} funciones vectoriales derivables de t , w una función real derivable de t y c un escalar.

1. $\frac{d}{dt}[c\mathbf{r}(t)] = c\mathbf{r}'(t)$
2. $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}'(t) \pm \mathbf{u}'(t)$
3. $\frac{d}{dt}[w(t)\mathbf{r}(t)] = w(t)\mathbf{r}'(t) + w'(t)\mathbf{r}(t)$
4. $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t)$
5. $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{u}(t)$
6. $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(w(t))] = \mathbf{r}'(w(t))w'(t)$
7. Si $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c$, entonces $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$.

•••**COMENTARIO** Observe que la propiedad 5 sólo se aplica a funciones vectoriales tridimensionales, porque el producto vectorial no está definido para vectores bidimensionales.

Demostración Para demostrar la propiedad 4, sea

$$\mathbf{r}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}(t) = f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}$$

donde f_1, f_2, g_1 y g_2 son funciones derivables de t . Entonces,

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t) = f_1(t)f_2(t) + g_1(t)g_2(t)$$

y se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] &= f_1(t)f_2'(t) + f_1'(t)f_2(t) + g_1(t)g_2'(t) + g_1'(t)g_2(t) \\ &= [f_1(t)f_2'(t) + g_1(t)g_2'(t)] + [f_1'(t)f_2(t) + g_1'(t)g_2(t)] \\ &= \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Consulte *LarsonCalculus.com* para el video de Bruce Edwards de esta demostración. 

Las demostraciones de las otras propiedades se dejan como ejercicios (vea los ejercicios 67 a 71 y el ejercicio 74).

Exploración

Sea $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$.
 Dibuje la gráfica de $\mathbf{r}(t)$.
 Explique por qué la gráfica es un círculo de radio 1 centrado en el origen. Calcule $\mathbf{r}(\pi/4)$ y $\mathbf{r}'(\pi/4)$. Coloque el vector $\mathbf{r}'(\pi/4)$ de manera que su punto inicial esté en el punto final de $\mathbf{r}(\pi/4)$. ¿Qué observa? Demuestre que $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$ es constante y que $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}''(t) = 0$ para todo t . ¿Qué relación tiene este ejemplo con la propiedad 7 del teorema 3.2?

EJEMPLO 4

Aplicar las propiedades de la derivada

Para $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}$ y $\mathbf{u}(t) = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, halle

a. $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)]$ y b. $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}'(t)]$.


Solución

a. Como $\mathbf{r}'(t) = -\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{k}$ y $\mathbf{u}'(t) = 2t\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] &= \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t) \\ &= \left(\frac{1}{t}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}\right) \cdot (2t\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) + \left(-\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{k}\right) \cdot (t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= 2 + 2 + (-1) + \frac{1}{t} \\ &= 3 + \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

b. Como $\mathbf{u}'(t) = 2t\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{u}''(t) = 2\mathbf{i}$, tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}'(t)] &= [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}''(t)] + [\mathbf{u}'(t) \times \mathbf{u}'(t)] \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t^2 & -2t & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{0} \\ &= \begin{vmatrix} -2t & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} t^2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} t^2 & -2t \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= 0\mathbf{i} - (-2)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k} \\ &= 2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Haga de nuevo los incisos (a) y (b) del ejemplo 4 pero formando primero los productos escalar y vectorial, y derivando después para comprobar que obtiene los mismos resultados. 

Matemáticas III

CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

Matemáticas III, Cálculo de varias variables es un libro de texto pedagógicamente preciso y entendible. En esta edición ofrecemos algo totalmente nuevo: a un solo clic de distancia, el **sitio web** en **LarsonCalculus.com** contiene varias herramientas y recursos para complementar su aprendizaje. El acceso a estos es gratuito. Videos con explicaciones de conceptos o demostraciones del libro, ejemplos para explorar, revistas de gráficas tridimensionales, descarga de artículos de revistas de matemáticas... Todo esto y mucho más, en las siguientes secciones:

- **Apertura de capítulo.** Aquí se resaltan aplicaciones reales utilizadas en los ejemplos y ejercicios.
- **Ejemplos interactivos.** Éstos acompañan los ejemplos del libro en **LarsonCalculus.com**.
- **Videos de demostraciones.** Vea videos del coautor Bruce Edwards, donde él mismo explica las demostraciones para cada teorema.
- **¿Cómo lo ve?** Este ejercicio es excelente para el análisis en clase o la preparación de un examen.
- **Comentario.** Estos consejos y sugerencias refuerzan o amplían conceptos, le ayudan a aprender cómo estudiar matemáticas, le advierten acerca de errores comunes, lo dirigen en casos especiales o le muestran los pasos alternativos o adicionales en la solución de un ejemplo.
- **Conjuntos de ejercicios.** Planeados cuidadosamente para reforzar habilidades, resolver problemas y dominar los conceptos, dando a los estudiantes la oportunidad de aplicarlos en situaciones de la vida real.
- **Apéndices.** Información complementaria para los temas desarrollados. Ideales para reforzar lo aprendido. Se presentan en inglés y formato de video (disponible en **LarsonCalculus.com**) y también textualmente (en inglés y con un costo adicional) en **CengageBrain.com**.
- **“¿Cuándo usaré esto?”.** Aplicaciones relacionadas con una amplia gama de intereses: acontecimientos actuales, datos del mundo, tendencias de la industria, etc.; su objetivo, entender en qué situaciones puede aplicarse el conocimiento del cálculo y fomentar una comprensión más completa de los temas.

