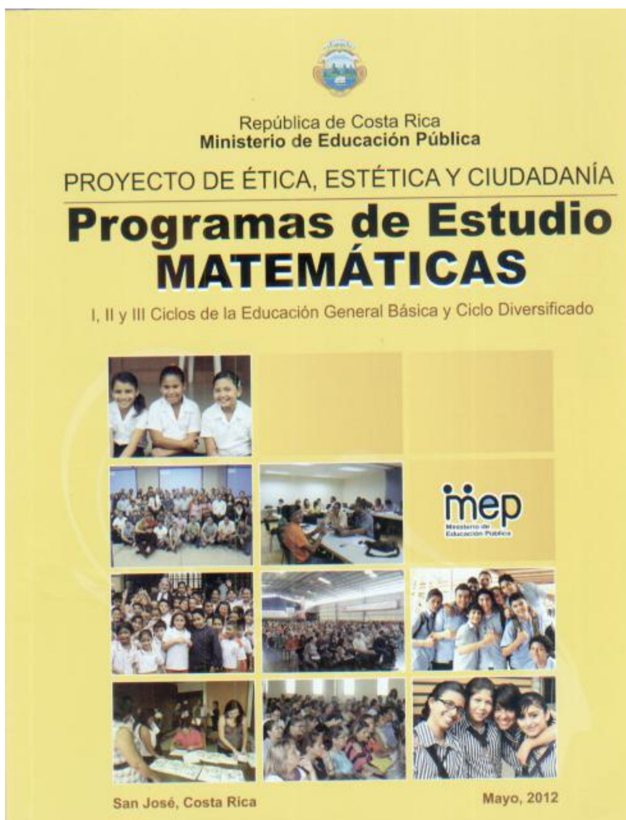
Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

www.reformamatematica.net

Apoyo curricular en Matemáticas

Segundo Ciclo de la Educación General Básica



Costa Rica

2013

Tabla de contenidos

Presentación

La aprobación por parte del Consejo Superior de Educación de nuevos programas de estudio en Matemáticas el 21 de mayo del 2012 constituye un momento decisivo para la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en el país. El proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* es consciente de que el profundo cambio metodológico propuesto debe ir acompañado con procesos de capacitación y con la participación de documentos que faciliten al docente su implementación.

Por esta razón, este documento brinda una serie de problemas que pretenden servir de apoyo al docente en su labor de aula; están organizados por áreas matemáticas, en cada año se presenta un problema interesante, aunque en ocasiones se incluyen dos. En este problema se trata de mostrar el estilo de organización de la lección a la luz de lo que se propone en los nuevos programas.

Se proponen dos tipos de problemas o actividades:

1. *Problemas principales.* Éstos presentan un análisis detallado que muestra:
   - ✓ los conocimientos y habilidades específicas que se quieren promover, así como las habilidades previas necesarias para favorecer el nuevo aprendizaje;
   - ✓ indicaciones sobre cómo desarrollar el problema propuesto en cada una de los cuatro momentos principales de la lección y sobre los procesos matemáticos que esta actividad permite activar;
   - ✓ algunos ejemplos de ítems que pueden contribuir a reforzar los conocimientos adquiridos en los diferentes niveles de complejidad (reproducción, conexión y reflexión);
   - ✓ una especificación de cómo se pueden potenciar los ejes disciplinares durante la actividad;
   - ✓ algunas sugerencias sobre cómo encaminar la evaluación.

Éstos no necesariamente están presentes en todas las áreas ni en todos los años.

2. *Problemas secundarios.* Éstos presentan un análisis menos detallado que en los problemas principales, incluyen:
   - ✓ conocimientos y habilidades específicas que se quieren introducir, así como las habilidades previas que se espera que posea cada estudiante;
   - ✓ la solución del problema.

En algunos casos, los problemas secundarios harán énfasis en ciertos ejes disciplinares. Además en ocasiones un problema secundario y uno principal se incluyen en un año particular.

En Estadística y Probabilidad se propone cada año un problema para Estadística y otro para Probabilidad. Además, los problemas principales propios de esta área tendrán el apoyo de un problema auxiliar que permite reafirmar una serie de conocimientos previos necesarios para su desarrollo.

Es importante destacar que aunque se realice un análisis detallado de algunos problemas, esto no significa que en la planificación de una lección de Matemáticas deban aparecer todos los elementos que incluye ese análisis. Este documento debe usarse como un respaldo para el docente, pero para la acción de aula siempre se requerirá una mediación pedagógica adecuada que solo el docente puede desarrollar.

Introducción al Segundo ciclo

Los problemas propuestos para este ciclo buscan ampliar conocimientos y procedimientos fundamentales que se han aprendido en el ciclo anterior. También, permiten introducir conocimientos y habilidades que conectan con la Educación Secundaria. Aunque en la resolución de estos problemas debe predominar lo intuitivo y sensorial, algunos introducen elementos matemáticos abstractos, sus relaciones y el uso de símbolos.

En el área de Números los problemas propuestos están enfocados a la introducción de conocimientos relacionados a la fracción impropia y la teoría de números. En esta área se incluye un problema principal en quinto año que permite introducir la noción de fracción impropia.

En Geometría las situaciones hacen énfasis en la introducción de conocimientos relacionados con las nociones de simetría (figura simétrica, eje de simetría y puntos homólogos), la noción de área (triángulos, paralelogramos, trapecios) y cuerpos sólidos (prisma, altura).

En Medidas los conocimientos que se trabajarán son: temperatura (grados Celsius, grados Fahrenheit, conversiones) y masa. Precisamente para este último se propone un problema principal en donde se pretende que el estudiante diferencie los términos peso y masa, que hasta el momento se han trabajado indistintamente con la misma unidad de medida, el kilogramo.

En Relaciones y Álgebra se trabajan las sucesiones y relaciones, en lo que respecta a cantidades constantes, cantidades variables, dependencia, independencia, escalas y ecuaciones, razón, proporción directa, porcentaje y regla de tres.

En Estadística y Probabilidad se proponen situaciones que permiten desarrollar conocimientos –en la parte de Estadística- relacionados con la recolección de información (el cuestionario y fuentes de error, base de datos, experimentación por medición), representación gráfica (diagramas de puntos), medidas de posición y variabilidad y los porcentajes para comparaciones entre grupos. En lo que respecta a Probabilidad se trabaja con los resultados a favor de un evento, eventos más probables, igualmente probables y menos probables que conducen a la comprensión de los eventos seguros, probables e imposibles.

Además, para esta área se incluye un problema principal que permitirán introducir la definición clásica o Laplaciana de Probabilidad.

Números

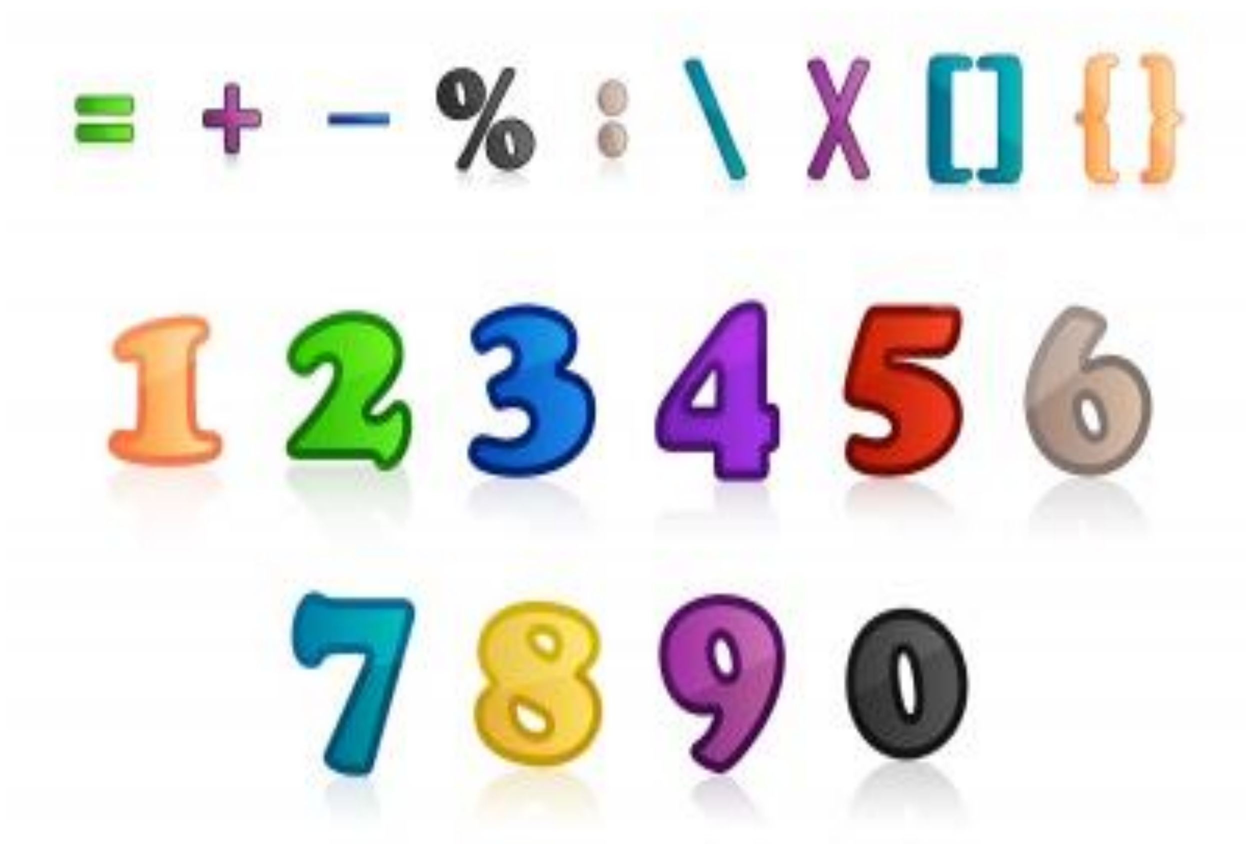


Imagen cortesía de digitalart en FreeDigitalPhotos.net

Quinto año. Problema principal

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
• Fracción propia e impropia • Representación mixta	• Identificar fracciones impropias. • Representar una fracción impropia como la suma de un número natural y una fracción propia. • Expresar una fracción impropia en notación mixta y viceversa.	**Números, Cuarto año** • Identificar las fracciones como parte de la unidad o parte de una colección de objetos. • Analizar las fracciones propias.

Etapas de organización de la lección

I Etapa: El aprendizaje del conocimiento

Propuesta de problema

Juan, Ana, Luis, Esteban, Vilma y Rita son un grupo de amigos que se reunieron para observar el partido entre Costa Rica y Jamaica. Durante el encuentro, don Manuel -el padre de Esteban- pregunta a los muchachos qué desean comer para pedirlo y que lo envíen por servicio express. Ellos llegan al acuerdo de pedir pizzas con jamón y queso. Sin embargo, con el afán de solicitar la cantidad justa, don Manuel pregunta a cada uno cuántas porciones consume regularmente. Éstos fueron los resultados:

Nombre	Cantidad de porciones
Juan	5
Ana	3
Luis	4
Esteban	7
Vilma	5
Rita	4

Cuando don Manuel llama al negocio “Pizza Mía”, le informan que puede solicitar una pizza de jamón y queso mediana (dividida en 8 piezas y a un precio de ₡ 11 000) o bien la grande (dividida en 12 piezas a ₡12 000). Si don Manuel decide comprar todas del mismo tamaño, ¿cuál opción resulta más barata? Justifique su respuesta mediante representaciones que apoyen la decisión.

Trabajo estudiantil independiente

Esta actividad puede ser desarrollada grupalmente a criterio del docente, esto para dar oportunidad a que se puedan activar los procesos *Comunicar* y *Razonar y argumentar* mientras los estudiantes se ponen de acuerdo sobre la mejor forma de iniciar la resolución del problema y al discutir la estrategia que podría brindar su solución. Una posible estrategia es usar representaciones para valorar cada una de las alternativas y elegir la mejor.

Por ejemplo, después del recuento, los jóvenes consumirán por lo menos 28 pedazos, con lo que se pueden plantear dos situaciones:

Caso 1: Si se decidiera pedir pizzas medianas, son necesarias 4 para satisfacer la demanda, con lo que se tendría que cancelar ₡ 44 000.

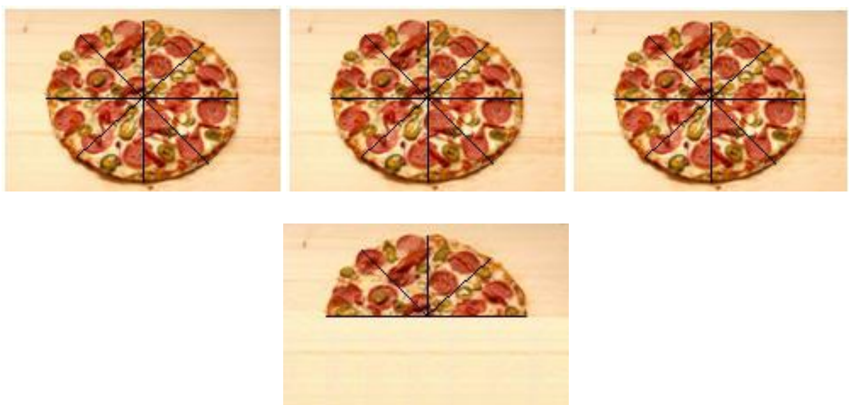


Imagen cortesía de Suat Eman en Freedigital.net

Caso 2: Si fueran pizzas grandes, entonces se comprarían 3 y cancelar así ₡ 36 000.

Imagen cortesía de -Marcus- en FreeDigitalPhotos.net

Otra estrategia que pueden implementar los estudiantes es usar la división de números naturales. A este nivel, los estudiantes pueden reconocer situaciones que se pueden resolver mediante esta operación, por lo que podrían emprender lo siguiente:

<table>
<tr>
<td>Para las pizzas medianas:
$\begin{array}{r|l} 28 & 8 \\ \hline \underline{-\,24} & 3 \\ 4 & \end{array}$
Se necesitan cuatro pizzas medianas, de las cuales se van a consumir tres completas y cuatro de los ocho pedazos que tiene la pizza mediana.</td>
<td>Para las pizzas grandes:
$\begin{array}{r|l} 28 & 12 \\ \hline \underline{-\,24} & 2 \\ 4 & \end{array}$
Se necesitan tres pizzas grandes, de las cuales se van a consumir dos completas y cuatro de los doce pedazos que tiene la pizza grande.</td>
</tr>
</table>

Si bien no se pregunta directamente en el problema, el docente puede intervenir y consultar al grupo de estudiantes cómo representarían numéricamente la cantidad de pizzas que consumirán estos jóvenes. Lo que se busca es que utilicen los conocimientos de fracción propia para representar la parte que no completa la unidad y brindar respuestas verbales como: *"si se pidiesen pizzas medianas, consumirían 3 pizzas y media y si solicitan grandes, se comerían 2 pizzas y* $\frac{4}{12}$*"*.

Discusión interactiva y comunicación

En esta etapa se espera que los estudiantes compartan sus hallazgos con los demás miembros de la clase. Por ejemplo, que comuniquen las estrategias utilizadas, incluso aquellas que no obtuvieron el resultado correcto, así como las respuestas encontradas.

Dependiendo de la cantidad de grupos formados, el docente puede tomar la decisión de que un representante de cada grupo exponga la solución del problema, o bien valorar aquellas estrategias que sean semejantes y elegir un grupo que lo haga.

Se espera que los alumnos comuniquen ideas semejantes a éstas:

- Al observar la representación (de las pizzas), si se decide comprar las medianas se necesitarían 4 pues no se puede pedir media pizza, por lo que habría que pagar ₡ 44 000. Similarmente ocurre con el caso de las pizzas grandes, donde son necesarias 3 y se deberían pagar ₡ 36 000. Es más rentable comprar pizzas grandes.

- Se puede usar la división para determinar cuántas pizzas se necesitan.

Por otra parte, el docente debe preguntar acerca de la forma en que los estudiantes decidieron representar numéricamente la cantidad de pizzas que se van a consumir, pues éste es uno de los elementos clave de la actividad, que dará pie posteriormente a la formalización del concepto de representación mixta. También, podría preguntárseles si se puede representar esta cantidad

> Se puede justificar en Sexto año la conversión de notación mixta a fracción impropia de forma sólo simbólica, utilizando para esto la suma de fracciones homogéneas. Realmente para dar la respuesta de 28/8 ellos realizan en forma intuitiva a partir de su representación una suma de fracciones homogéneas.

mediante una sola fracción. De responder afirmativamente, se esperaría que la representen mediante las fracciones $\frac{28}{8}$ (si se considera comprar pizzas medianas) y $\frac{28}{12}$ (si se considera comprar pizzas grandes). Esto permitirá incorporar el concepto de fracción impropia.

Clausura o cierre

El docente debe establecer el concepto de fracción impropia y número mixto con base en las ideas expuestas por los estudiantes. En todo momento debe establecerse una relación entre el trabajo efectuado al resolver el problema y las definiciones de los nuevos conocimientos. Por ejemplo, al ofrecer la noción de fracción impropia, hace referencia a la manera de representarla que brindaron los estudiantes. Por otra parte, retomando las representaciones gráficas realizadas y la estrategia que involucra el algoritmo de la división es posible establecer la equivalencia de las dos representaciones: la fracción impropia y la notación mixta.

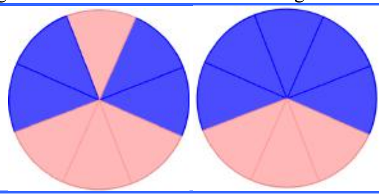
Si bien es claro que durante toda la actividad se activó la mayor parte de los procesos matemáticos, el proceso *Representar* fue el que permitió no sólo comprender concretamente la noción de fracción impropia como aquella que representa cantidades mayores a la unidad, sino que en forma natural los estudiantes pueden deducir y comprender la notación mixta.

Aunque se solicitaba el uso de representaciones en el cuerpo del problema, la intervención del docente mediante preguntas generadoras puede permitir que el estudiante de forma natural exprese dichas cantidades en las notaciones deseadas sin necesidad de que éstas constituyan una imposición.

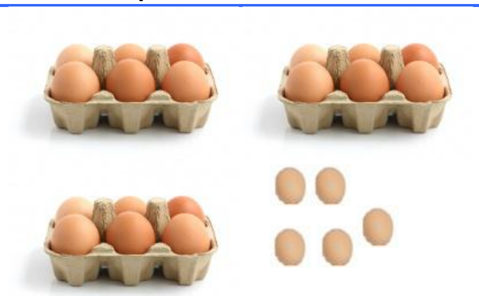
II Etapa: Movilización y aplicación de los conocimientos

En esta etapa, los estudiantes trabajarán de forma mecánica los procedimientos que permiten convertir fracciones impropias a números mixtos y viceversa, o bien establecer correspondencias entre diferentes tipos de representaciones. Con ello, los estudiantes estarán trabajando ejercicios del nivel de dificultad correspondiente a *Reproducción*. A continuación, algunos ejemplos:

1. Represente mediante fracciones cada una de las siguientes ilustraciones. Identifique si la fracción es propia o impropia. En las representaciones circulares, considere que la unidad es de color azul.

Ilustración	Fracción	Tipo
 Imagen cortesía de winnond en FreeDigitalPhotos.net		
		

2. Complete los espacios faltantes con las representaciones correspondientes. En la ilustración, considere un cartón de huevos como la unidad.

Representación concreta	Fracción	Número mixto
 Imagen cortesía de piyato en FreeDigitalPhotos.net		
	$\frac{35}{9}$	
		$8\frac{2}{5}$

Se pueden proponer ejercicios del nivel de *Conexión* que concedan al estudiante la aplicación de estos conocimientos a otros contextos y áreas matemáticas. A continuación, un ejemplo que permite establecer conexión con el área de *Medidas*:

Para una carrera se dispone de un garrafón de agua cuya capacidad es de 20 litros y se desea llenar envases de 250 ml para ofrecer hidratación a los competidores del evento.

a. Si se ofrece un vaso de agua a 10 competidores, ¿por medio de cuál fracción se puede representar la cantidad de agua entregada con respecto a la capacidad total del garrafón?

b. Si se ofrece un vaso de agua a 18 competidores, ¿por medio de cuál fracción se puede representar la cantidad de agua entregada con respecto a la capacidad total del garrafón?

c. ¿A cuántos competidores se les podría ofrecer un vaso de agua del garrafón?

Solución

a. 10 × 250 ml = 2500 ml.

$$\frac{2500}{20\,000} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$$

lo que representa un octavo del garrafón

b. 18 × 250 ml = 4500 ml

$$\frac{4500}{20\,000} = \frac{45}{200} = \frac{9}{40}$$

c. Una estrategia sería la siguiente: 2500 ml corresponden a un octavo del garrafón. Si a 10 competidores se entrega un octavo del agua del garrafón, se entregará la totalidad a 8 × 10 = 80 competidores.

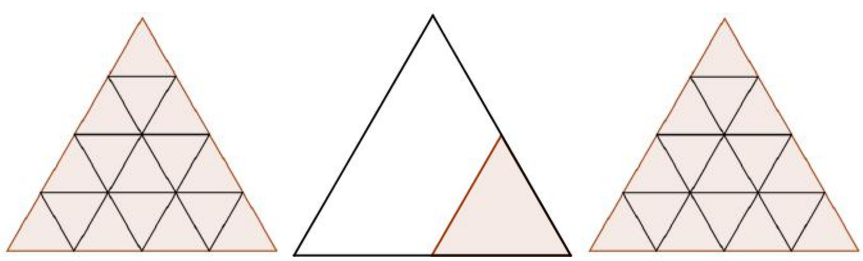
Una segunda solución es dividiendo:

20 000 : 250 = 80

Otro problema

El problema siguiente tiene conexión con el área de *Geometría:*

¿Qué número mixto o qué fracción permite representar la región marcada con rosado en la siguiente figura, tomando como unidad uno de los tres triángulos equiláteros grandes?



Es conveniente que no se incurra en repeticiones excesivas y desarrollo de actividades sin interés; deben ser tareas para reforzar un conocimiento aprendido, ya que siempre es posible encontrar problemas y acciones que complementen, señalando aspectos poco desarrollados o mostrando caminos motivadores de aplicación de estos conocimientos.

Estrategias posibles

- Cada triángulo equilátero se puede dividir en 4 triángulos equiláteros medianos. La fracción de la región marcada con rosado es:

$$\frac{4}{4}+\frac{1}{4}+\frac{4}{4}=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

- Cada triángulo se divide en 16 triángulos equiláteros pequeños. La fracción de la región marcada con rosado es:

$$\frac{16}{16}+\frac{4}{16}+\frac{16}{16}=2+\frac{4}{16}=\frac{36}{16}=\frac{9}{4}$$

- Dos triángulos grandes y ¼ :

$$2+\frac{1}{4}$$

Un posible error es que el estudiante tome como unidad el dibujo entero de los tres triángulos. Se tendrían 16 × 3 = 48 triángulos pequeños, de los cuales 16 + 4 + 16 = 36 serían rosados, y el estudiante puede proponer la solución errónea: 36 / 48 = 3 / 4.

Por eso hay que enfatizar sobre la importancia de precisar la unidad considerada.

Se puede aprovechar el problema para manipular fracciones equivalentes dibujando los tres triángulos equiláteros con regla y compás y dividiendo cada uno en 16 triángulos pequeños, o en 4 triángulos medianos.

Contextualización activa

En general, los fundamentos de los nuevos programas proponen la modelización de situaciones reales como un medio para que el docente propicie en el estudiante una contextualización activa de los problemas que se desarrollan. El área de *Números* brinda un sinnúmero de oportunidades para que el estudiantado pueda dotar de significado a muchos conceptos y procedimientos matemáticos.

El docente debe tener claro que no se trata de hacer una contextualización artificial de los problemas. Hay que proponer situaciones que sean parte de la cotidianidad del estudiante, o bien de temáticas que sean de su interés.

Por ejemplo, para introducir el concepto de fracción impropia y sus formas de representación, en una zona de tradición cafetalera se podría proponer un problema como el siguiente:

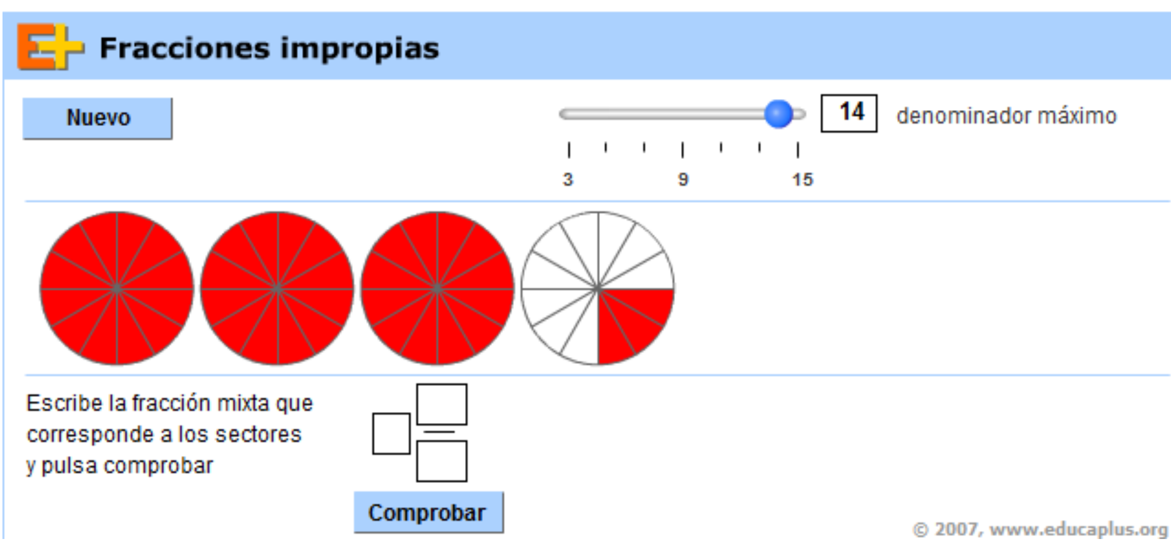
Luis, Miguel y Marianela son tres hermanos que al final del año recolectan café para ayudar a su familia en las compras de fin de año, así como de los útiles escolares del año *entrante. Un día en particular, a los tres les correspondió recoger café en un corte "malo". Luis cogió 3 cajuelas y media; Miguel 2 y un "cuartillo" y Marianela recolectó 4 y "tres cuartillos". ¿Qué número permite representar la cantidad de cajuelas de café que recolectaron entre los tres? ¿Cuántos "cuartillos" recolectaron en total?*

En estas zonas, los términos empleados en este problema son comprendidos por la mayoría de estudiantes. Además, no les representa mayor dificultad el resolverlo, pues muchos ya han experimentado el cálculo de cajuelas de café así como de sus "cuartillos", producto de su experiencia a la hora de medir el café que se recolecta.

Uso de tecnología

En el área de *Números* (y en particular en el tratamiento de las fracciones) se proyecta que el estudiantado fortalezca el sentido numérico por medio del uso de las representaciones y que inclusive sea capaz de hacer buenas estimaciones a partir de ello.

Aunque aquí la calculadora no constituye una herramienta necesaria para cumplir con este objetivo, existen diversos sitios o páginas interactivas en la red donde el docente puede buscar actividades que le permitan al estudiante ejercitar su destreza en el uso de representaciones numéricas de las fracciones y fortalecer así el sentido numérico. Por ejemplo, en el sitio web de educaplus se pueden encontrar diversas actividades con fracciones y en la dirección http://www.educaplus.org/play-91-Fracciones-impropias.html se encuentra una que permite verificar la representación en forma de número mixto a partir de su representación gráfica. Se puede disponer de este sitio en la etapa de movilización y aplicación de conocimientos como un refuerzo a los conocimientos desarrollados.



Uso de la historia de las Matemáticas

Como se describe en el capítulo de Metodología, en la sección de Fundamentos en los programas de Matemáticas, la Historia de las Matemáticas debe constituirse en un recurso que brinde oportunidades para generar actitudes y creencias positivas sobre las Matemáticas. Uno de los usos al que hace referencia y que puede ser potenciado por este tema de fracciones impropias y sus representaciones es el de *Fortalecimiento de la multiculturalidad,* donde se menciona*:*

> Se pueden introducir distintas aproximaciones culturales a conceptos matemáticos colocándolos en contextos históricos. Las Matemáticas contemporáneas se tienden a visualizar como un producto occidental, la Historia puede permitir identificar los aportes de distintas civilizaciones en los quehaceres matemáticos (China, India, los Mayas), y por lo tanto cultivar una visión más amplia de las Ciencias y la cultura. (p. 64)

En nuestro caso particular conviene que el docente busque en libros de Historia de las Matemáticas o videos, la historia y evolución del concepto de fracción desde civilizaciones antiguas y enseñarlo a sus estudiantes con el fin de discutir aspectos como:

- *¿Qué motivó el trabajo con fracciones?*

Uno de los acontecimientos que permite justificar ante los estudiantes el surgimiento de representaciones fraccionarias puede apoyarse en la necesidad que tenían los egipcios de medir los terrenos que poseían sus campesinos, pues ante la crecida anual del Río Nilo, los límites de las propiedades desaparecían y era necesario volverlos a establecer. Dicha labor era realizada por los agrimensores del faraón y para ello empleaban cuerdas con nudos separados por distancias iguales. La problemática que se presentaba la describe Macías (s.a):

> A estos medidores de cuerda les asaltó un gran problema: había veces que, al medir un campo, sobraba o faltaba un trozo de cuerda. Los campos no podían medir lo que ellos quisieran. Las cuerdas eran unidades de medida y ellos tenían que verificar que cada campo tenía un determinado número de cuerdas por cada lado. (p.34)

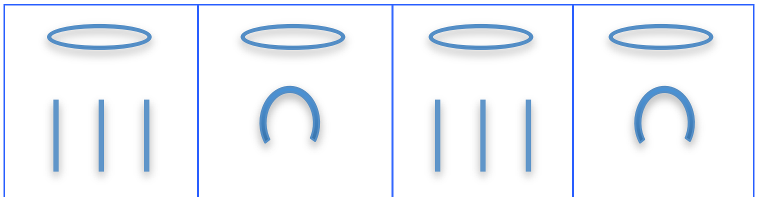
Imagen cortesía de Arvind Balaraman en FreeDigitalPhotos.net

- *¿Cuáles civilizaciones de la Antigüedad fueron las primeras de las que se tiene referencia su trabajo con fracciones?*

Se puede referenciar los aportes legados por los egipcios, los babilónicos y los chinos.

- *La simbología empleada por dichas civilizaciones para representar fracciones*.

Particularmente, en el caso de los egipcios poseían un sistema no posicional sumativo, donde existían jeroglíficos que representaban diferentes cantidades. En el caso de las fracciones, ellos las descomponían en otras denominadas *unitarias* (fracciones cuyo numerador es 1).



$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{13}{30}=\frac{1}{3}+\frac{1}{10}$

- *Limitaciones derivadas de estas formas de representación fraccionaria*.

Como lo menciona Ruiz (2003), el uso de fracciones *unitarias* era frecuente en la descomposición de otras fracciones y con ella realizaban operaciones aritméticas, principalmente multiplicaciones y divisiones. En el papiro de Ahmes, aparece una tabla con la descomposición de fracciones de la forma $\frac{2}{n}$ en fracciones unitarias.

- *Evolución hacia la forma de representación actual.*

La evolución a la forma actual de representar las fracciones se puede ubicar a partir de los indús en el año 628 d.c., pues fueron los primeros en ubicar un número sobre otro, sólo que no los separaban mediante la línea fraccionaria. Esta notación fue mejorada por los árabes, los cuales sí la incluyeron, y el primer europeo en utilizarla fue Fibonacci.

Hechas estas consideraciones, es fundamental que el docente cierre esta discusión enfatizando el aporte que brindaron estas culturas y civilizaciones para enriquecer el concepto de fracción y cómo ésta fue una noción en la que tuvieron que transcurrir muchos siglos para evolucionar a la forma de representación que hoy conocemos.

Varias estrategias para el uso de Historia de las Matemáticas

Se pueden promover diversas actividades para que los estudiantes puedan hacer uso de la Historia de las Matemáticas como un medio para su aprendizaje. Por ejemplo, la elaboración de carteles que muestren a la clase una línea de tiempo que refleje las diferentes formas de representación de la fracción empleadas por civilizaciones como la egipcia, babilónica, árabe, etc.

También, se pueden ofrecer videos que hagan referencia a la historia del concepto de fracción y que reflejen los diferentes usos de las fracciones en la vida cotidiana. A continuación se brinda el siguiente link donde se puede apreciar un video con estas características:

http://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=0zBfZHr-jdI

Actitudes y creencias

El tema de fracciones permite ser abarcado en diversidad de contextos, lo que facilita la implementación del eje de *Contextualización activa*. Por ejemplo:

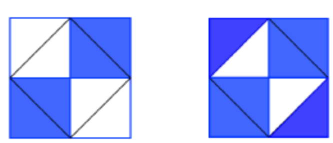
- En la manera con que se miden algunos ingredientes para elaborar una receta de cocina.
- Para establecer las dimensiones de algunas piezas de madera.
- Para denotar diversas medidas de longitud, área y capacidad.
- En expresiones asociadas a la forma como se dice la hora: “son las 3 y cuarto”, “falta un cuarto para las 5”.
- Para nombrar ciertas herramientas y materiales de uso común tales como clavos, tornillos, tuercas, llaves Allen, cubos, etc.

Es importante que el docente pueda escoger aquellos contextos que sean más cercanos al estudiante para que éste pueda visualizar la utilidad de este tema para la vida. Con ello se puede promover la *Confianza en la utilidad de las Matemáticas.*

Sugerencias de evaluación

A continuación se proponen dos tipos de ítems que se pueden implementar para trabajar las distintas representaciones de una fracción impropia. Inicialmente, uno de selección única, correspondiente al nivel de *Reproducción* y posteriormente otro de resolución de problemas donde se maneja un nivel de *Reflexión*.

1. Observe la siguiente representación:



¿Qué número permite representar las secciones azules de la figura anterior?

a. $1\frac{1}{4}$
b. $2\frac{10}{16}$
c. $2\frac{1}{4}$
d. 10

2. Un grupo de Quinto año de la escuela San Patricio se propuso pintar su aula. Una vez definido el color y la marca de la pintura, los estudiantes se organizaron en 4 subgrupos para asistir al comercio local a solicitar donaciones. Para pintar el aula son necesarios cuatro galones de pintura. Un subgrupo llevó tres cuartos de galón de pintura, otro llevó 1 galón y medio, otro llevó un galón y un cuarto y el último subgrupo aportó tres cuartos de galón. ¿Alcanzará la pintura para cumplir el objetivo? ¿Por qué?

Sexto año

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Teoría de números: divisibilidad, factores	• Aplicar los conceptos de divisibilidad, divisor, factor y múltiplo de un número natural en la resolución de problemas.	**Números, Quinto año** • Identificar divisores de un número natural. • Establecer si un número natural es divisible por 2, 3, 5 o 10 aplicando las reglas de divisibilidad.

Propuesta de problema

A continuación se muestra una representación que podría corresponder con varios números de 4 cifras que cumplen ciertas condiciones.

$$8\ \boxed{}\ 3\ \boxed{}$$

Complete los recuadros anteriores de manera que se obtengan números de 4 cifras que sean múltiplos de 3 y divisibles por 2 y 5.

Solución del problema

Aunque se podría pensar que este problema constituye un ejercicio rutinario y carente de contexto, no hay que olvidar que los programas actuales también proponen considerar problemas abstractos, pues son esenciales para estimular diferentes habilidades y procesos. A la vez, el problema permite reforzar nociones relacionadas a la divisibilidad, los múltiplos y factores de un número natural, que se abarcaron durante el Quinto año.

En un primer momento conviene propiciar un espacio para un acercamiento individual al problema planteado. Luego se pueden conformar parejas o tríos para que los estudiantes puedan establecer discusiones que permitan definir posibles estrategias y una aclaración de conceptos (especialmente la noción de divisibilidad y múltiplo de un número natural), con lo cual se activan los procesos *Razonar y argumentar* y *Comunicar.*

La pista de que estos números son divisibles por tres todavía no suministra certeza de cuáles cifras colocar en los recuadros. Sin embargo, la divisibilidad por dos garantizaría que la última cifra de estos números debe ser 0, 2, 4 o 6. Pero al ser divisible por 5, de las opciones anteriores se deduce que los posibles candidatos deben terminar en cero.

$$8\ \boxed{}\ 3\ \boxed{0}$$

Para completar la casilla restante, los estudiantes podrían asignar valores y realizar divisiones por tres para definir cuáles tienen residuo cero. Ante esto, el docente debe dejar que el estudiante sea persistente hasta que valore que esta estrategia podría resultar un poco extensa, máxime que no se permite el uso de la calculadora, y que así se cuestione si hay una manera más fácil de encontrar dichos números.

Es necesario que los estudiantes apliquen el hecho de que la divisibilidad por tres se determina verificando si la suma de sus cifras es múltiplo de tres. En caso de no recordar esto, el docente puede solicitar que investiguen las reglas de divisibilidad.

De este modo, se completaría el espacio faltante con aquella cifra que junto a las otras sumen un múltiplo de tres. Por ejemplo:

$$8\ \boxed{0}\ 3\ \boxed{0}$$

no es múltiplo de 3, pues 8 + 0 + 3 + 0 = 11 y éste no es múltiplo de 3.

Luego,

$$8\ \boxed{1}\ 3\ \boxed{0}$$

es múltiplo de tres pues 8 + 1 + 3 + 0 = 12, el cual sí es múltiplo de tres.

Si se continúa probando, los otros números que cumplen con la divisibilidad por tres son 8430 y 8730. Recapitulando, los números que cumplen las condiciones del problema son 8130, 8430 y 8730.

Hay otras estrategias de solución que los estudiantes podrían adoptar, aun cuando son menos eficientes. Por ejemplo, el estudiante podría primero suponer que son múltiplos de tres y obtiene todos los posibles; de éstos selecciona los que son divisibles por 2 y de éstos los que son divisibles por cinco.

Al compartir los resultados, los que ejecutaron esta última estrategia podrán tomar conciencia de que había una forma más fácil y eficiente de resolverlo.

Geometría

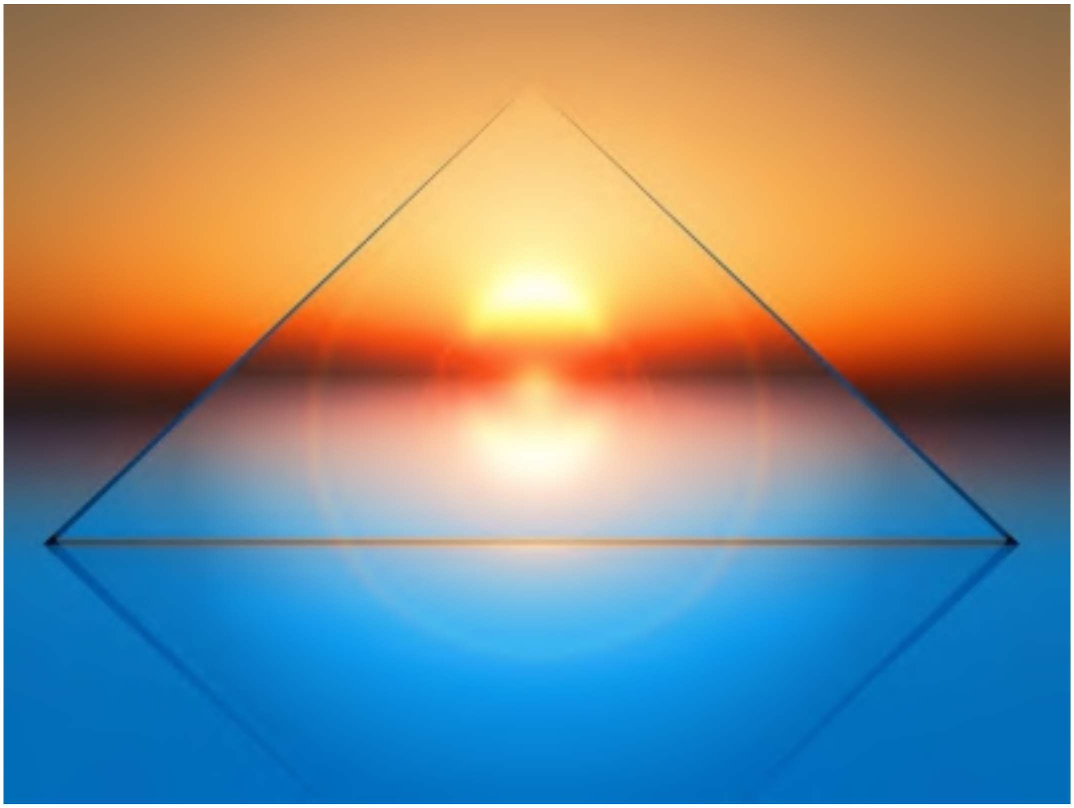


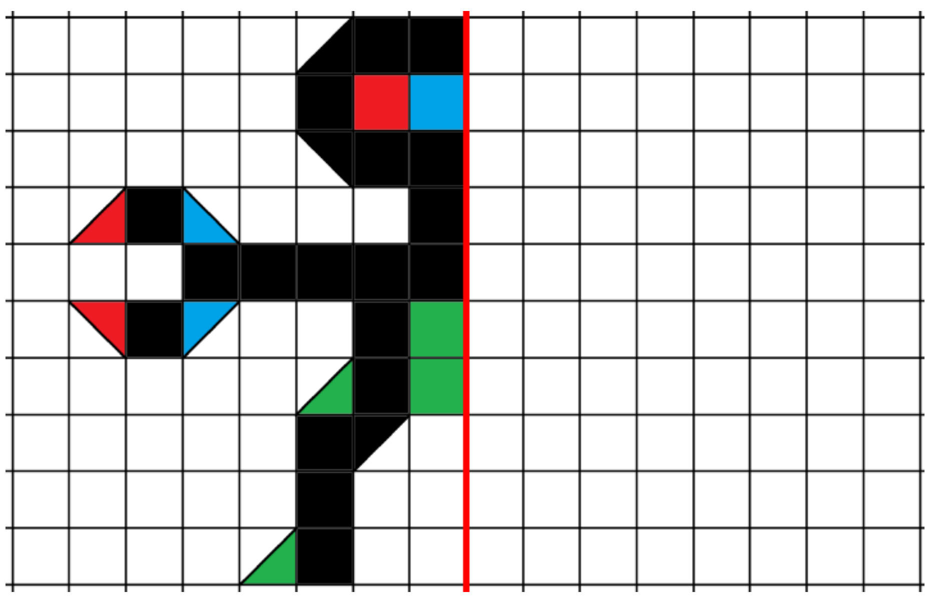
Imagen cortesía de dan en FreeDigitalPhotos.net

Cuarto año

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Simetría: figura simétrica, eje de simetría y puntos homólogos	Identificar los ejes de simetría de una figura. Ubicar un punto homólogo a otro respecto a una recta.	**Geometría, Cuarto año** Aplicar el concepto de paralelismo y perpendicularidad de planos en conexión con prismas rectangulares.

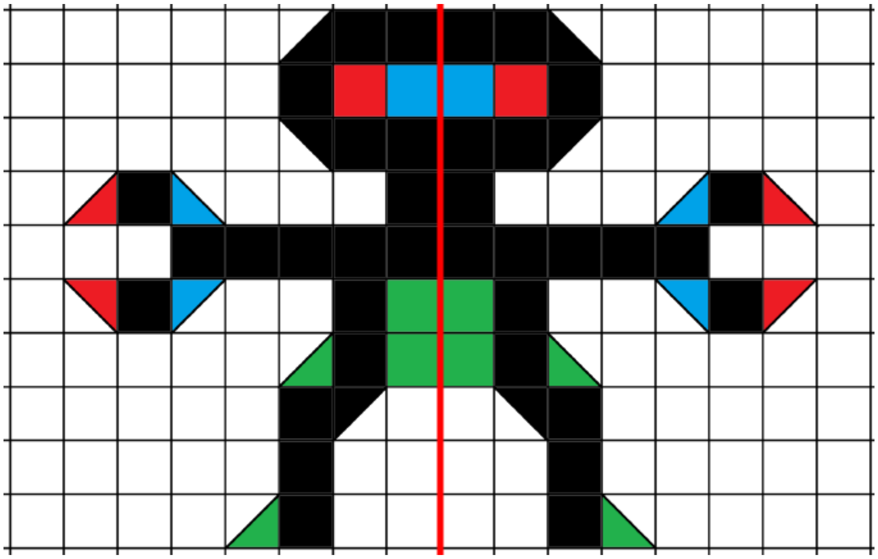
Propuesta de problema

La siguiente imagen representa la mitad del frente del robot CiberMate, creado para explicar temas matemáticos. Complete la imagen pintando la parte derecha de la cuadrícula.



Solución del problema

El propósito de este problema es afianzar intuitivamente el concepto de figuras simétricas, eje de simetría y puntos homólogos (que en este caso serán triángulos y cuadros homólogos). La siguiente imagen sería la solución al problema:



En los dibujos animados o programas televisivos para niños se presentan personajes robots, que por lo general son de forma simétrica y muchas veces de aspecto muy parecido al ser humano, por lo que no es extraño que los estudiantes logren fácilmente completar la cuadrícula.

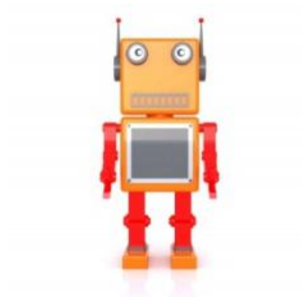
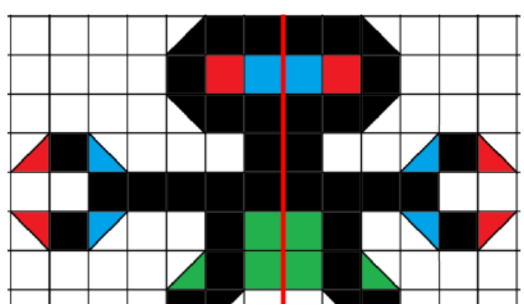


Imagen cortesía de supakitmod en FreeDigitalPhotos.net

Luego de completar la cuadrícula, el docente puede proponer las siguientes preguntas generadoras:

- ¿Son las mitades iguales entre sí?
- ¿Cómo lo podemos verificar?

Una manera de verificarlo es doblando la hoja en la línea roja y revisando que coincidan los triángulos, cuadros y colores. Si no fuera así es que habría algún error. Por ejemplo, puede existir la posibilidad de que un brazo haya sido pintado más corto, en dado caso la figura no sería simétrica.



En esta actividad se pueden establecer las condiciones para que una figura sea simétrica y relacionar la línea roja con el eje de simetría. De este modo, se puede introducir la noción de puntos homólogos utilizando las figuras (triángulos y cuadros) con sus respectivos colores, ya que los elementos del lado izquierdo de la línea roja guardan una correspondencia con los del lado derecho; o sea, son los mismos, están ubicados a igual distancia de la línea roja y en la posición equivalente.

La idea es que el estudiante pueda *Comunicar* y *Razonar y argumentar* que cuando una imagen o un cuerpo es dividido en dos partes por una línea o un plano y las partes resultantes son iguales entre sí, entonces se dice que la imagen o el cuerpo presenta alguna simetría o es simétrica.

El tema de simetría se puede introducir o fortalecer buscando en el entorno escolar o en la naturaleza, si es posible, objetos, animales, plantas, insectos que presenten alguna simetría, por ejemplo:




Imágenes con derechos adquiridos por el MEP

Quinto año

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Área: Triángulos, Paralelogramos, Trapecios	• Resolver problemas que involucren el cálculo de perímetros y áreas de triángulos y cuadriláteros.	**Geometría, Quinto año** • Estimar perímetros y áreas de figuras en conexión con objetos del entorno. • Calcular, utilizando fórmulas, el perímetro y el área de triángulos, cuadrados, rectángulos, paralelogramos y trapecios. • Reconocer figuras simples dentro de una más compleja. • Calcular perímetros y áreas de figuras planas compuestas por triángulos, cuadrados, rectángulos, paralelogramos y trapecios.

Propuesta de problema

De acuerdo al mapa de la provincia de Heredia, con indicación de la escala, estime la extensión territorial de dicha provincia.

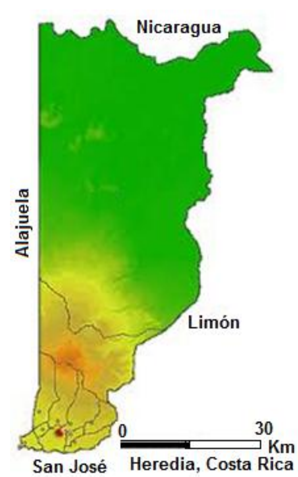


Imagen tomada de http://www.costarica21.com/Heredia-s.html

Solución del problema

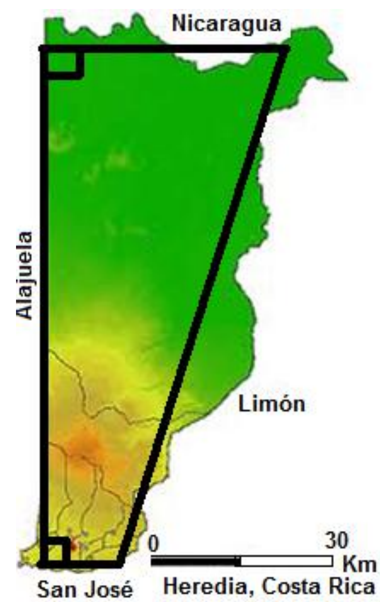
El estudiante debe ser creativo para establecer la estrategia que adoptará para resolver el problema. Por ejemplo, una estrategia sería calcar en papel cuadriculado el contorno del mapa y tomar cada cuadrito como unidad de medida de superficie tomando en cuenta la escala. También se podría visualizar la figura como una o varias figuras poligonales a las que puede calcular su área utilizando la escala.

Sugerencia: Previamente se puede iniciar con figuras en el geoplano o trama de puntos y luego con figuras como la mostrada.

Por ejemplo, dibujando un trapecio se puede lograr una aproximación del área de la provincia de Heredia. Midiendo y tomando en cuenta la escala del mapa se tiene que la base mayor mediría aproximadamente 45 km, la base menor 13 km y la altura 85 km. Por lo tanto, el área de la provincia de Heredia sería aproximadamente:

$$A = \frac{(45+13)\times 85}{2} = 2465\ km^2$$

Es oportuno comparar el resultado obtenido con el dato de la superficie real de la provincia de Heredia que es 2656 km^2. Se podrían proponer nuevas estrategias que logren una mejor aproximación, como utilizar varias figuras poligonales.



Lo cierto es que esta actividad puede tener múltiples y variadas soluciones por parte de los estudiantes.

Interesante: Un estudiante podría enmarcar el mapa entre dos polígonos, uno que contenga totalmente la figura y uno totalmente al interior de ella e indicar que "la superficie de la provincia sería mayor a… y menor a …"

También, hay que tener presente que lo que se quiere lograr aquí es una estimación de la superficie de la provincia de Heredia, así que no habrán datos exactos. Por lo que se deben analizar y valorar las diferentes estrategias de resolución para descubrir cuál puede llevarnos a una mejor aproximación y porqué; esto quiere decir que se activarán los procesos *Razonar y argumentar y Comunicar*.

Además, se puede trabajar de forma paralela con el área de *Medidas* desarrollando la habilidad *"Aplicar las diversas medidas en la resolución de problemas que se presenten en situaciones ficticias y del entorno"* e insistiendo en la importancia de la escala. Igualmente se tiene conexión con la asignatura de Estudios Sociales.

Quinto año. Problema principal

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Cuerpos sólidos: Prismas, altura	Reconocer prismas y algunos de sus elementos y propiedades (caras, bases, altura).	Las relacionadas con: • El reconocimiento de cuadrados rectángulos y sus elementos (lados, ángulos, vértices). • Reconocer “cajas” en objetos del entorno.

Etapas de organización de la lección

I Etapa: El aprendizaje del conocimiento

Propuesta de problema

Luis y Elena deben transportar algunos juguetes, para ello requieren cuatro cajas de modo que vayan clasificados (en una van carritos, en otra muñecas, en otra juegos educativos y en la otra lo demás). Cuentan con dos cajas como las que se ven en la siguiente imagen:

Imagen cortesía de FreeDigitalPhotos.net

Elena tiene un par de pliegos de cartón y una carrucha de cinta adhesiva, le dice a Luis que ella puede hacer dos cajas. Hace un solo dibujo sobre el cartón, luego corta por los bordes y dobla por algunas líneas que están en el dibujo y pega con la cinta adhesiva; le queda una caja como las de la figura. Haga un dibujo como el que hizo Luisa para obtener la caja.

Trabajo estudiantil independiente

Con este problema se pretende introducir el reconocimiento de prismas y el de sus elementos constituyentes: caras, aristas, vértices y de qué manera están relacionados; también se puede incorporar el concepto de altura. Debe observarse que no se proporcionan medidas ni del dibujo original ni del que resulte de la reproducción, sólo se procura que los estudiantes traten de dibujar el desarrollo plano de un prisma, luego usarlo para formar el prisma y a través de este proceso reconocer sus elementos y cuántos tiene de cada uno. Los estudiantes deberán contar con cartulina, tijeras, regla, lápiz y cinta adhesiva.

Lo que se espera es que los estudiantes se familiaricen con la forma de la caja y logren captar sus elementos por observación de la imagen que se les proporciona.

El docente debe tener claro que en esta etapa los estudiantes trabajarán individualmente o en grupos con la menor intervención posible. Pese a ello, su guía en momentos clave es muy valiosa. El problema solicita una estrategia que permita la construcción de la caja a partir de un dibujo único (observe que hay al menos otra manera de construir la caja que es cortando los diversos rectángulos que constituyen sus caras y luego pegándolos). Si bien los estudiantes pueden realizar un dibujo apropiado, como solución al problema deberán brindar indicaciones de cómo hacerlo y de por qué funciona, además del simple hecho de mostrarlo construyendo la caja.

Durante el proceso de búsqueda de la solución, si tienen muchas dificultades se les podría ayudar mostrándoles una caja real.

En esta fase, al elaborar un dibujo sobre un plano, que posteriormente puede servir para una construcción en tres dimensiones, se activa el proceso *Representar*.

Discusión interactiva y comunicación

Luego del trabajo independiente, los estudiantes exponen en plenaria a la clase los procedimientos que aplicaron para construir una caja. Aquí el proceso *Comunicar* es imprescindible, pues deberán dar las explicaciones de por qué su dibujo sirve para construir una caja.

El docente deberá formular preguntas apropiadas dirigidas a generar los conceptos que desea que sean adquiridos por sus alumnos. El dibujo que va a ser recortado estará formado por cuadriláteros que son rectángulos y tal vez cuadrados. El docente deberá preguntar cuántos rectángulos o cuadrados deberán aparecer en el dibujo, igualmente, cuántas líneas se requieren para doblar, cuántos bordes se pegan entre sí al final.

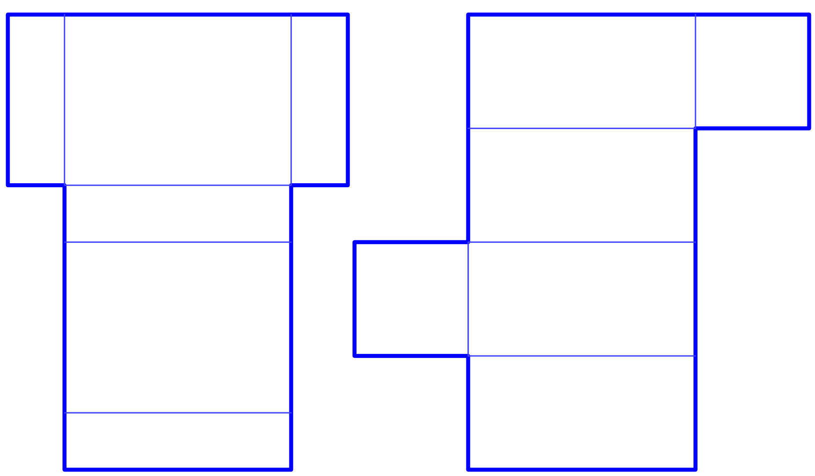
Éste es un momento apropiado para que el docente vaya aclarando o repasando algunos de los conocimientos previos como el de cuadrilátero, rectángulo, cuadrado, lado de un polígono y vértice de un polígono.

Clausura o cierre

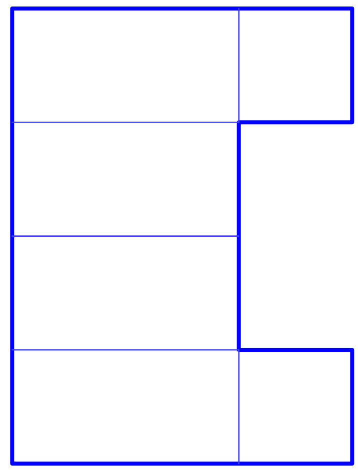
Mediante las exposiciones de los estudiantes y con la ayuda de las preguntas formuladas por el docente y las respuestas que se proporcionen,se irá desarrollando la organización de los conocimientos que se pretenden con el planteamiento del problema inicial. Es vital que los conceptos y relaciones matemáticas queden claramente expuestos al final de esta etapa. La discusión consumada en el momento anterior debe conducir a esto. El proponer un problema, el trabajo estudiantil independiente y la discusión interactiva están dirigidos a establecer conceptos, relaciones y resultados matemáticos que al final deben quedar completamente asimilados.

En este caso, el problema está dirigido a la introducción del concepto de prisma y otros ligados a él como caras, aristas, vértices y altura. Las soluciones al problema, que pudieron haber sido encontradas por los estudiantes durante el trabajo independiente o en la discusión plenaria mediante la guía del profesor, servirán como base para establecer los conceptos. De hecho, hay diversas soluciones al problema que tienen que ver con diferentes aspectos. Un aspecto es el de las dimensiones, aunque éste no es el más importante; puede que algunos construyan un cubo, otros un prisma en el que las bases sean cuadrados y las caras laterales sean rectángulos no cuadrados, o incluso otros podrán construir prismas en los que no hayan ni bases ni caras cuadradas; todos estos son correctos. Hay un asunto medular que es la construcción del dibujo propiamente; ¿cuáles sirven y cuáles no sirven?

Por ejemplo, los dos dibujos siguientes sirven para construir un prisma rectangular (que es lo que propone el problema):



El siguiente dibujo no sirve:



El proceso de resolver el problema lleva de manera natural a introducir el concepto de prisma, caras, aristas, vértice y alturas del prisma.

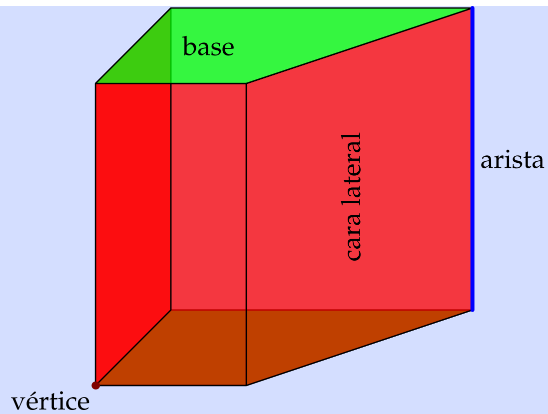
Prismas[1]

El prisma está constituido por dos polígonos iguales (congruentes) que son caras opuestas; éstas son las bases. Si estas caras son triángulos entonces el prisma tiene tres caras más (caras laterales) y son rectángulos, si las bases son cuadriláteros entonces tiene cuatro caras laterales, si las bases son pentágonos hay cinco caras laterales y así sucesivamente.

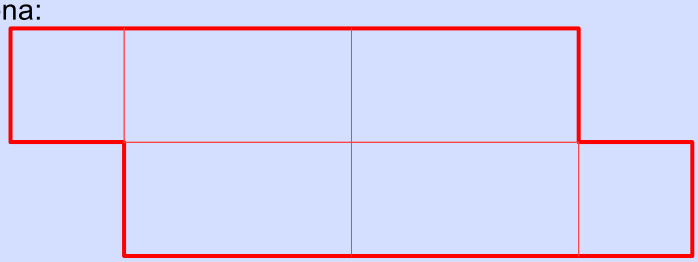
Los lados de los rectángulos que forman las caras del prima y los lados de las bases se llaman aristas del prisma y los vértices de esos rectángulos se llaman vértices del prisma. El número de aristas de un prisma es 3 veces el número de lados de la base. El número de vértices es 2 veces el número de lados de la base.

La altura del prisma es la distancia entre las caras que forman las bases y equivale a la longitud de uno de los lados de los rectángulos que son sus caras laterales.

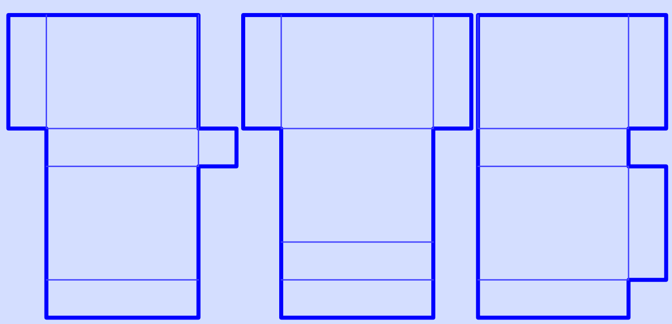
[1] Los prismas que aquí se tratan son rectos. Éstos son los que se estudian en este nivel.



- En cuanto al dibujo, para construir un prisma rectangular (aquel en el que las bases son rectángulos), algunas de sus características son:
- Tiene que constar de 6 rectángulos (uno por cada cara del prisma).
- No puede tener cuatro rectángulos que compartan un mismo vértice. La siguiente figura no funciona:



- Si hay una fila de cuatro rectángulos, éstos deben ser congruentes uno de por medio y los otros dos rectángulos tienen que ser congruentes y no pueden estar del mismo lado de la fila de cuatro. Ninguno de los siguientes dibujos produce un prisma:



II Etapa: Movilización y aplicación de conocimientos

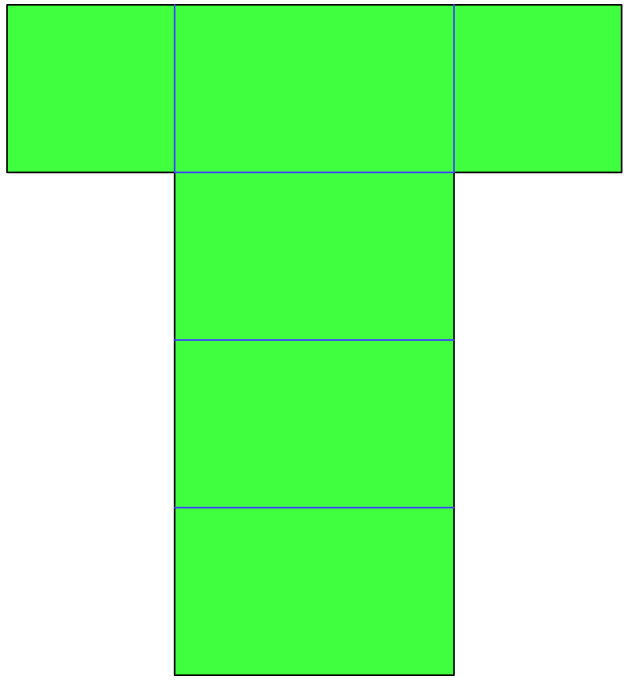
Esta etapa sirve para reforzar los conocimientos aprendidos ya sea en el mismo contexto o incluirlos en la aplicación de los nuevos conocimientos en contextos diferentes. También se plantea la evaluación de los conocimientos aprendidos. Mediante ilustraciones se proponen los siguientes ejercicios de diferente nivel de complejidad:

Ejercicio de Reproducción

En la siguiente imagen se representan envases de diferentes productos. ¿Cuáles corresponden a prismas y cuáles no? Explique.

Ejercicio de Conexión

Gerardo va a construir un prisma para presentarlo a la clase. Las bases son cuadrados de lado 6 cm y las caras laterales son rectángulos de 6 cm por 10 cm. Realiza el siguiente dibujo, lo va a recortar por los bordes, luego doblará por las líneas interiores y finalmente pegará con cinta adhesiva para obtener su prisma. ¿Cuál es la cantidad mínima de cinta adhesiva que necesita?



Ejercicio de Reflexión

Un envase de cierto producto es un prisma que tiene como caras laterales cuatro rectángulos iguales de lados 3 cm y 5 cm. ¿Qué polígonos son sus bases y cuáles pueden ser las dimensiones de esos polígonos?

Contextualización activa

El enfoque de los nuevos programas es la resolución de problemas, especialmente en contextos. Se pretende que la contextualización sea realista y lo más cercana posible a la experiencia de los estudiantes; la idea es promover la motivación y potenciar acciones cognitivas de nivel superior de modo que los estudiantes se involucren activamente.

En el caso particular de los prismas, éstos aparecen de múltiples maneras en la vida cotidiana: en cajas de todo tipo, envases de leche y de refresco, cajas que contienen juguetes, etc. Esto permite contextualizar fácilmente problemas relacionados con prismas.

Uso de tecnología

Internet ofrece amplios recursos que pueden ser aprovechados en la enseñanza de las Matemáticas. Por ejemplo:

- Como auxiliar en la etapa de clausura. Para el caso de los prismas se pueden encontrar videos explicativos bastante atractivos que pueden servir para ampliar el tema. En la dirección:
http://www.youtube.com/watch?v=P1m8J4aufCs
se presentan los prismas en su manera más general.

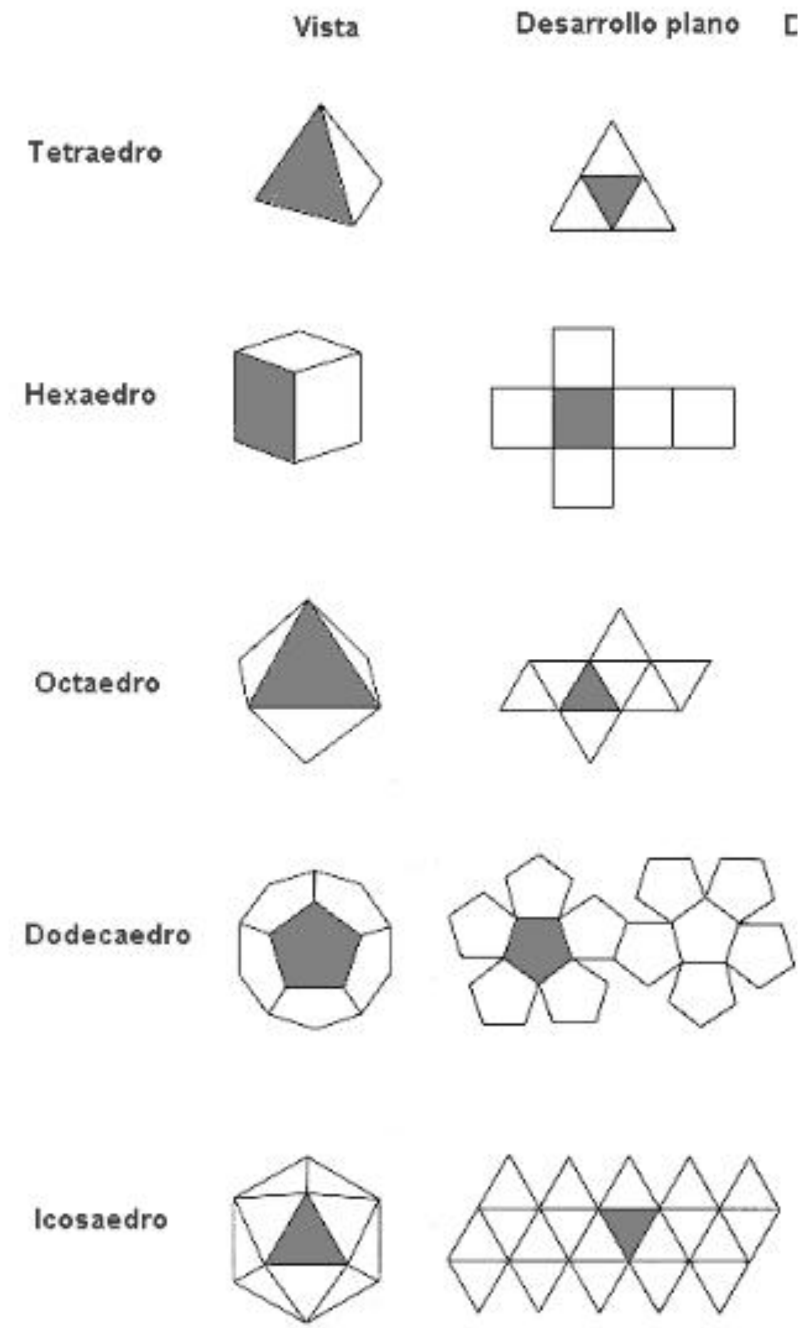
- Para el reforzamiento de aprendizajes. Por ejemplo, en el sitio: http://www.laslaminas.es/recursos-geometria-plana se encuentran ejercicios y problemas sobre homotecias y otros temas de geometría.

Uso de la historia de las Matemáticas

Una breve historia de los poliedros regulares puede servir como motivación para el estudio de los sólidos en general.

> Los poliedros regulares han sido parte de los estudios geométricos desde que tales estudios comenzaron. Tienen una belleza simétrica que ha fascinado a personas de todas las épocas. Algunos poliedros regulares fueron conocidos por los antiguos egipcios quienes los usaron en su arquitectura.
>
> Los pitagóricos (c. 500 A. C.) probablemente descubrieron tres de los cinco poliedros regulares e hicieron de ellos una importante parte del estudio de la geometría. Los griegos creían que los cinco sólidos correspondían a los elementos del universo – el tetraedro al fuego, el cubo a la tierra, el octaedro al aire, el icosaedro al agua y el dodecaedro al universo. Tiempo después de los pitagóricos, Platón (c. 350 A. C.) y sus seguidores estudiaron estos sólidos hasta tal punto que son conocidos como "Sólidos platónicos".
>
> Fuente: Klaasen, D. (2006). Regular Polyhedra. En Historical topics for the Mathematics classroom. Reston: NCTM.

Los sólidos platónicos son los poliedros regulares, es decir, poliedros cuyas caras son polígonos congruentes, de los cuales hay solamente cinco: tetraedro (cuatro caras), hexaedro o cubo (seis caras), octaedro (ocho caras), dodecaedro (doce caras) e icosaedro (veinte caras). En la siguiente figura se representan dichos sólidos y su desarrollo plano:



¿Cuál o cuáles de estos sólidos son prismas?

Actitudes y creencias

Entre las actitudes y creencias que mejor se pueden potenciar mediante una actividad como la desarrollada aquí se pueden enumerar:

- *Perseverancia*: Mediante el trabajo para encontrar una solución al problema. Se trata de que los estudiantes trabajen sin pensar en que el problema puede ser resuelto en muy poco tiempo, más bien sabiendo que quizá no lo puedan resolver, pero lo que importa es el aprendizaje que obtendrán durante el proceso.

- *Confianza en la utilidad de las Matemáticas*: El hecho de que diversos tipos de envases y otras construcciones humanas tengan forma de prisma puede apoyar la confianza en la utilidad de las Matemáticas.

- *Participación activa y colaborativa*: El proceso de resolución del problema y la discusión plenaria posterior ayudarán en el logro de mayor participación y colaboración entre los estudiantes.

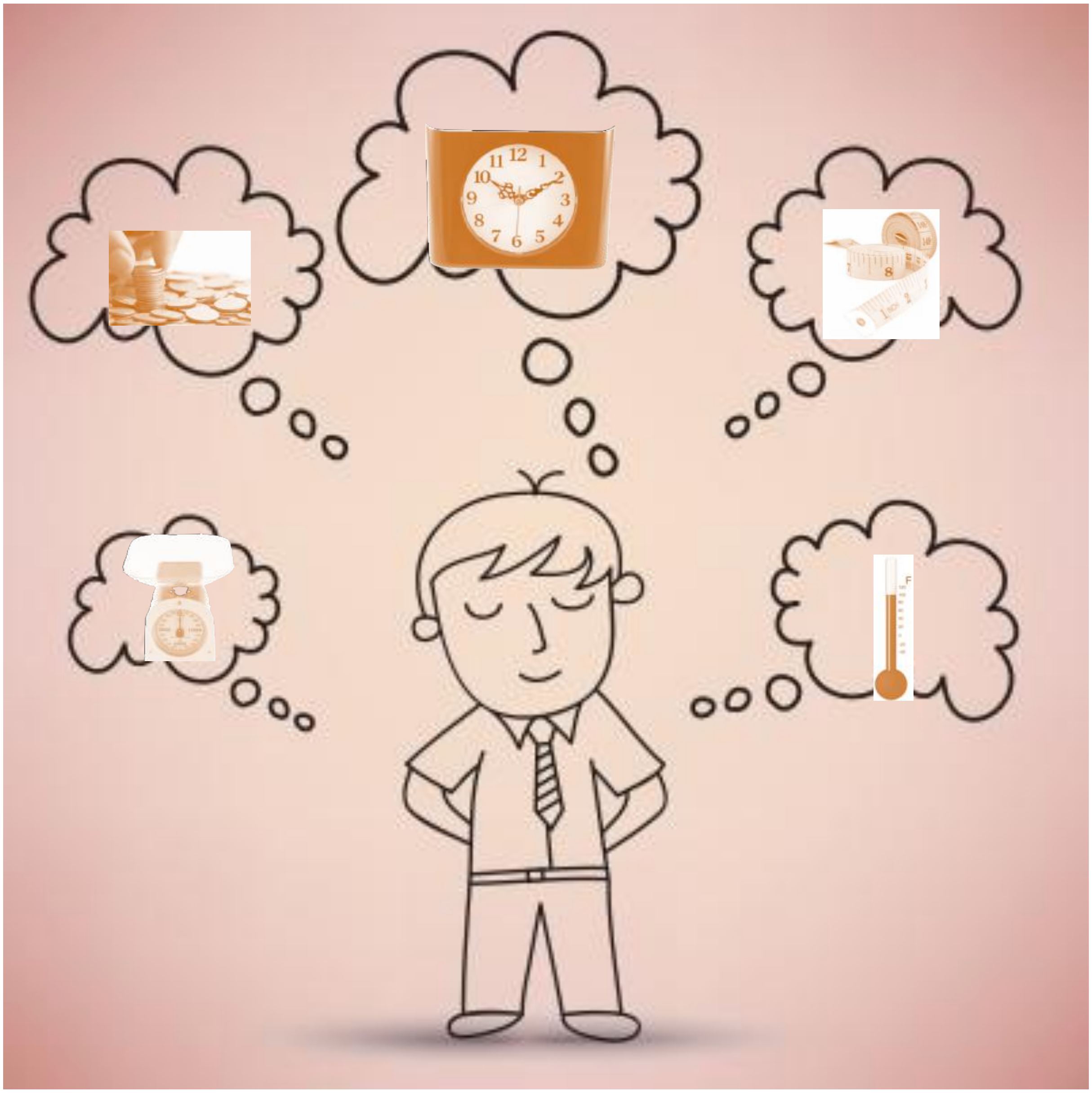
Sugerencias de evaluación

En general, la evaluación deberá girar en torno a problemas, de los tres niveles de complejidad, que tiendan a:

- Reconocer en objetos del entorno cuáles tienen forma de prisma.
- Reconocer en dibujos cuáles representan prismas.
- Identificar caras laterales, bases, aristas, vértice y altura de prismas, ya sea representados en forma tridimensional o dibujados en un plano.
- Determinar el tipo de polígono base de un prisma conociendo información sobre sus caras laterales.
- Determinar dimensiones de los rectángulos que forman las caras laterales de un prisma conociendo información sobre las bases y las alturas.

Con respecto a todo lo anterior, ver los problemas que se propusieron en el apartado *Movilización del conocimiento*.

Medidas



Imagenes cortesía de Keerati, mrpuen, digitalart, *89studio* y foto 76 en FreeDigitalPhotos.net

Cuarto año

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Temperatura: Grados Celsius, grados Fahrenheit, conversiones	• Medir temperaturas en las escalas Celsius y Fahrenheit utilizando instrumentos apropiados. • Realizar conversiones de mediciones de temperatura entre estas dos escalas. • Aplicar la medición de temperatura a situaciones reales o ficticias.	Las relacionadas con: • El sentido de medición • Operaciones con números

Propuesta de problema

Observe el aparato que se ve en la siguiente figura; ahí se muestran las escalas Celsius y Fahrenheit.

Con base en la figura:

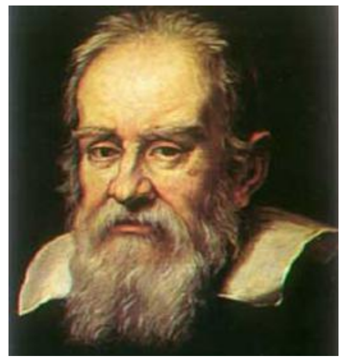
1. ¿A cuántos grados Fahrenheit equivalen 0 ^{o}C?
2. ¿A cuántos grados Celsius equivalen 100 ^{o}F?
3. El punto de ebullición del agua al nivel del mar es 100 ºC. ¿Cuál es su punto de ebullición en grados Fahrenheit?

Solución del problema

El propósito de este problema es verificar la relación entre grados Celsius y grados Fahrenheit. Mediante la observación de las escalas que aparecen en el aparato se puede ver la relación entre ambos tipos de medida para valores de hasta 60 ^{o}C.

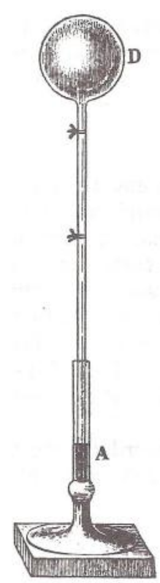
Durante el trabajo, los estudiantes se darán cuenta que en la escala no aparece 100 ^{o}C y que por lo tanto deberán idear una manera de encontrar la relación que se les hace en la tercera pregunta. Se les podrá señalar dicha relación y la relación general entre ambas escalas útiles para medir la temperatura.

Una historia como la siguiente puede resultar útil para motivar, contextualizar y mostrar el rostro humano de las creaciones matemáticas y científicas en general.



Galileo Galilei (1564-1642)

En tiempos de Galileo los naturalistas no sabían medir prácticamente nada. Hasta la medición más simple de longitud o volumen encontraba dificultades, pues no existían patrones de longitud de general aceptación. Las medidas de longitud en diversos lugares eran diferentes y era sumamente embarazoso compararlas. Medir el tiempo era aún más complicado. Claro que existían en uso relojes: de sol, de agua, de arena, etc., pero no servían para realizar mediciones precisas de cortos intervalos de tiempo. Se dice que en su juventud Galileo observó el balanceo de una lámpara en la catedral de Pisa y que midió el período de estas oscilaciones contando los latidos de su propio pulso. Galileo pudo descubrir las leyes de la mecánica únicamente porque fue uno de los primeros en comprender la importancia de realizar mediciones precisas.



El estudio de los fenómenos térmicos fue abordado por Galileo desde esas mismas posiciones: ante todo se ocupó del problema de cómo medir la temperatura de los cuerpos. Los termómetros construidos por Galileo (por el año 1597) consistían de un balón de cristal D lleno de aire, de cuya parte inferior descendía un tubo parcialmente lleno de agua que terminaba en un recipiente A lleno también de agua (ver la figura de la derecha).

Cuando el aire en el balón se dilataba o comprimía, el nivel de agua del tubo variaba, lo cual indicaba la temperatura, por ejemplo, de las manos que tocaban el balón. Sin embargo, la altura de la columna de agua dependía tanto de la temperatura como de la presión atmosférica y efectuar mediciones algo precisas con este termómetro era imposible. En los tiempos de Galileo no se conocía el barómetro. Sólo su discípulo Torricelli pudo más tarde establecer la relación entre la altura de la columna de mercurio y la presión atmosférica. En esos tiempos la propia idea de que el aire podría presionar sobre la tierra parecía absurda. Por eso el termómetro de Galileo medía una magnitud bastante indefinida, pero incluso tal termómetro permitía comparar la temperatura de diferentes cuerpos en un mismo momento y lugar.

Tomado de: Smorodinski, Y. (1983) La temperatura. Moscú: Mir.

Sexto año. Problema principal

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Diversas medidas: Masa	Aplicar las diversas medidas en la resolución de problemas dados en situaciones ficticias o del entorno. (Es una profundización de lo trabajado en años anteriores.)	**Medidas, Segundo grado:** Utilizar el kilogramo como unidad de masa. Reconocer el símbolo para kilogramos. Estimar medidas de peso. Comparar medidas de peso. **Medidas, Tercer grado** Estimar y comparar medidas de peso. **Medidas, Cuarto grado** Resolver problemas que involucren diversas medidas. **Medidas, Quinto grado** Resolver problemas que involucren diversas medidas.

Etapas de organización de la lección

I Etapa: El aprendizaje del conocimiento

Propuesta de problema

Se forman subgrupos de tres o cuatro estudiantes y a cada uno se le entrega la siguiente lámina. Deberán leerla, comentarla y responder a las preguntas que se le plantean justificando ampliamente cada conjetura. Posteriormente deben realizar una exposición oral por subgrupos acerca de las conclusiones y resultados que obtuvieron a través de la discusión.

Aventura espacial

En la imagen de la derecha se muestra al astronauta Edward M. Fincke en la Estación Internacional Espacial (ISS) (imagen cortesía de la NASA). Él tiene una fruta en cada mano y de repente las suelta.

a. ¿Qué creés que ocurre con ellas? ¿Caerían al piso de la nave o no? ¿Se desintegrarían?
b. ¿Qué creés que tiene mayor peso en el espacio, el astronauta o una fruta?

Imaginá que sos el astronauta que se muestra a la derecha. Si salís de la nave con tu traje espacial,

a. ¿Qué creés que ocurriría? ¿Caerías a la Tierra o no? ¿Tu peso se mantendría igual? Si creés que el peso cambia, ¿por qué ocurre esto?

Si luego llegás a la Luna,

b. ¿qué ocurriría con tu peso? ¿Se mantendría? Y si creés que cambia, ¿porqué hay un cambio? ¿Eso implica que haya un cambio en la masa de tu cuerpo, o sea en el tamaño de tu cuerpo?

Imagen cortesía de siraphat en FreeDigitalPhotos.net

Trabajo estudiantil independiente

Con este problema se pretende generar discusión grupal y concretar las diferencias entre el concepto de peso y el de masa, que hasta el momento se han trabajado indistintamente con la misma unidad de medida, el kilogramo.

Hay que tener presente que los estudiantes de Sexto grado conocen de alguna forma, por medio de películas, noticias, series televisivas, internet, etc., que en el espacio exterior los astronautas “flotan” y que en la Luna el peso de un cuerpo es menor al que se registra en la Tierra.

Imagen tomada de http://www.actualidadsimpson.com

Episodio “Homer en el espacio exterior” (Deep Space Homer)

Asimismo, en la asignatura de Ciencias se trabaja el eje temático *La Tierra, el Universo y la exploración espacial*, en el cual se desarrollan objetivos muy útiles que sirven de conocimientos previos para desarrollar esta actividad. Por ejemplo, en Cuarto año se desarrolla el objetivo “Describir algunos de los principales acontecimientos del inicio de la exploración espacial.” Incluso esta actividad puede desarrollar paralelamente el objetivo de Sexto grado “Justificar la importancia de la exploración espacial, sus ventajas y desventajas para la humanidad.”

De este modo, se intenta establecer en el estudiante un “conflicto cognitivo” con respecto a lo que conoce intuitivamente del comportamiento del espacio exterior y los conceptos de peso y de masa. Este “conflicto” se debe a que hasta el momento el estudiante no ha tenido ningún problema al utilizar en su contexto la unidad de masa (kilogramo) para hacer referencia al peso de los objetos. Sin embargo, al cambiar el contexto por el de los astronautas en el espacio exterior o en la Luna se crean las siguientes posibles interrogantes:

- Si los astronautas “flotan” en el espacio, ¿será que ya no tienen peso? Y si no tienen peso, entonces ¿es porque perdieron su masa?
- Si en la Luna los astronautas tienen un menor peso, ¿el astronauta habrá disminuido la cantidad de materia en su cuerpo?, o sea ¿tendrá menos cantidad de kilogramos?

A partir de estas experiencias previas se generará una discusión y un debate grupal intentando responder las interrogantes formuladas en la actividad y todas aquellas que pueden surgir.

El docente debe tener claro que en esta fase aunque no ejecuta una intervención directa, es necesaria una acción apropiada, precisa y dinámica. Claro está, debe permitir a los estudiantes enfrentar el problema por sí mismos. No hay aprendizaje significativo si el estudiante no confronta el problema.

En esta *fase independiente* se promueven varios procesos matemáticos; como por ejemplo *Razonar y argumentar*, a la hora de formular y analizar conjeturas referentes a las interrogantes que ahí se proponen. Directamente, al ser ésta una situación que provoca la indagación, se potencia el proceso *Plantear y resolver problemas*, ya que intenta desarrollar capacidades para identificar, formular y resolver problemas en un contexto científico de carácter universal. Esto a su vez fortalece el proceso matemático *Conectar,* que busca cultivar no sólo las relaciones entre las distintas partes de las Matemáticas escolares, en este caso Medidas, con otras asignaturas que recurren a la matemática de forma aplicada como lo es la asignatura de Ciencias, si no también trabajar en contextos diferentes como la navegación espacial.

Discusión interactiva y comunicación

En este momento educativo cada subgrupo de estudiantes expone a la clase las conjeturas y respuestas a las interrogantes planteadas en la actividad. Aquí se abre un espacio para la valoración y contrastación de argumentos elaborados por cada subgrupo. Por lo tanto, entra en juego el proceso matemático *Comunicar*, ya que se busca con la exposición de subgrupos potenciar la capacidad para expresar ideas de manera oral a otros estudiantes.

Enlazado al proceso *Comunicar* está el proceso *Razonar y argumentar,* ya que el estudiante debe buscar los medios para justificar las ideas y resultados que expondrá a sus compañeros, y el docente puede realizar preguntas generadoras. Por ejemplo:

"En años anteriores se estudió que el kilogramo es una medida de masa, y que la masa es la cantidad de materia en un cuerpo. Si en el espacio exterior o en la Luna disminuyeras o aumentaras tu peso, ¿qué significaría esto? ¿Disminuirías o aumentarías tu masa? ¿Te harías más delgado o más grueso, más pequeño o más grande?"

Imagen cortesía de marin en FreeDigitalPhotos.net

Respuestas a las interrogantes:

Pregunta a.

Las frutas no caerían, ya que en el espacio la fuerza gravitacional se reduce. Por supuesto, la gravedad está en todas partes; el efecto se reduce a mayor distancia del cuerpo que lo atrae. En el espacio parece que todo flota, pero conforme haya algún acercamiento a algún cuerpo celeste grande como el planeta Tierra, se iría sintiendo una atracción (tal como un imán y un metal), y mientras más cerca se esté más atracción se sentiría. Ésta sería la fuerza gravitacional de la Tierra.

Pregunta b.

A pesar de que el astronauta tiene mayor masa que una fruta, en el espacio ambos cuerpos pesarían aproximadamente lo mismo. Sus pesos se acercarían a cero.

Pregunta c.

Como se indicó antes, el astronauta no caería a la Tierra ya que la fuerza gravitacional que ejerce se reduce, por lo que el peso cambiaría.

Pregunta d.

En este caso, el astronauta estaría bajo la influencia de la fuerza gravitacional de la Luna, la cual es menor que la del planeta Tierra, por lo que el peso del astronauta sería menor al que tiene en el planeta Tierra. Aunque por supuesto, la masa no cambia.

El papel del docente en este momento es el de generar discusión y potenciar el desarrollo de capacidades para señalar y expresar con precisión matemática las ideas y argumentos razonados por los estudiantes, así como las conclusiones a las que se hayan llegado. Es un papel activo, ya que el docente debe esclarecer ideas matemáticas, compartirlas, revelar dimensiones distintas y ampliar la participación estudiantil.

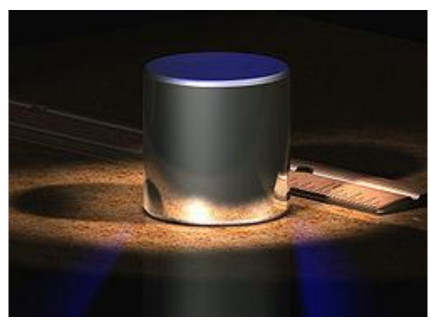
Clausura o cierre

Tomando en cuenta las conjeturas y respuestas de los estudiantes a las preguntas consideradas en el problema y la discusión generada, esta etapa se entrelaza a la anterior de manera natural para crear una síntesis cognoscitiva que estructure y organice los conocimientos que se usaron a lo largo del proceso y precise los conocimientos nuevos a través de éstos.

El docente debe establecer la diferencia entre el concepto de masa y el de peso, tomando en cuenta las nociones intuitivas que se generaron con la actividad. Por ejemplo, debe precisar que mientras la masa del astronauta (en kilogramos) es una propiedad característica de cuerpo que depende del tipo y cantidad de materia que lo conforma, su peso es la fuerza con que lo atrae a la Tierra, la cual depende directamente de la masa del mismo. Por ejemplo, un cuerpo con el doble de masa que otro también pesará el doble.

Hay que explicar al estudiante que al ser la diferenciación entre el peso y la masa de un cuerpo un descubrimiento relativamente reciente, ambos conceptos han sido asociados como sinónimos, y se ha utilizado indistintamente el kilogramo para medir el peso. Por eso, cuando subimos a una balanza decimos que nos estamos "pesando", en realidad estamos usando la fuerza de gravedad que ejerce la Tierra sobre nuestro cuerpo para medir nuestra cantidad de masa, que se expresa en kilogramos. Esto se puede hacer debido a que el peso de un cuerpo está directamente relacionado con la masa de un cuerpo.

Desde 1889, el Sistema Internacional de Medidas define que la unidad de masa debe ser igual a la masa del prototipo internacional del kilogramo. El prototipo es un cilindro circular recto con altura y diámetro de 39 milímetros. Éste se hizo así con el objetivo de que tuviera un peso de 1 kg-fuerza o kilopondio.



Prototipo de kilogramo
Imagen tomada de
http://es.wikipedia.org/wiki/Kilogramo

El kilopondio o también llamado kilogramo-fuerza corresponde, aproximadamente, con el peso de una masa de 1 kilogramo situada en la superficie terrestre, a nivel del mar. Por lo que un estudiante que “pese” en una balanza 41 kg en realidad lo que está midiendo es su peso de 41 kilopondios (o kilogramo-fuerza), que es el peso de un cuerpo de 41 kilogramos de masa. Ahora bien, la definición sólo es correcta en la Tierra, por cuanto interviene el valor de la gravedad. Por lo que si estuviera en la Luna pesaría tan sólo 6,806 kg-fuerza o kilopondios, pero su masa seguiría siendo de 41 kg. El peso de un objeto en la Luna representa la fuerza con que ésta lo atrae. En este sentido, en el espacio su peso sería aproximadamente 0 kg-fuerza, aunque su masa siga siendo la misma.

Por lo tanto, el kilogramo es una unidad de masa, no de peso. No obstante, muchos aparatos empleados para medir pesos (básculas, por ejemplo) tienen sus escalas graduadas en kg en lugar de kg-fuerza. Esto no suele representar normalmente ningún problema, ya que como se comentó anteriormente, 1 kg-fuerza es el peso en la superficie de la Tierra de un objeto de 1 kg de masa.

Diferencia entre peso y masa

Características de masa	Características del peso
• Es la cantidad de materia que tiene un cuerpo. • Se mide con la balanza. • Su valor es constante, es decir, independiente de la posición. • Su unidad de medida de acuerdo al S.I. es el kilogramo (kg).	• Es la fuerza que ocasiona la caída de los cuerpos. • Se mide con el dinamómetro. • Varía según su posición, es decir, depende de la altitud y latitud. • Su unidad de medida en el S.I. es el Newton.

Es necesario aclarar a los estudiantes que lo importante es que entiendan el concepto y la diferencia entre peso y masa, aunque se sigan usando expresiones como "voy a pesarme a la báscula" o “peso 53 kilogramos”.

II Etapa: Movilización y aplicación de conocimientos

En esta etapa se trata de fortalecer los conocimientos aprendidos ya sea en el mismo contexto o incluirlos en la aplicación de los nuevos conocimientos en contextos diferentes y se plantea la evaluación de los conocimientos asimilados. A manera de ilustración se sugieren los siguientes ejercicios de diferente nivel de complejidad.

Ejercicio de Reproducción

Si en el planeta Tierra un astronauta tiene un peso de 74 kg-fuerza y en la Luna tiene un peso de 12,28 kg-fuerza: ¿Cuál es su masa en la Tierra? ¿Cuál es su masa en la Luna? y ¿A cuánto equivale un kg-fuerza de la Tierra en la Luna?

Solución

La masa en la Tierra es de 74 kg.

La masa en la Luna no cambia, es de 74 kg.

Un kg-fuerza de la Tierra es 74:12,28 sea 6,02 kg-fuerza en la Luna. Es 6,02 veces mayor.

Ejercicio de Conexión

Imaginá que sos un astronauta y realizás una misión por todo el sistema solar en una nave espacial. Investigá tu peso en kg-fuerza en cada planeta.

Si tu masa es de 67 kg completá el siguiente cuadro.

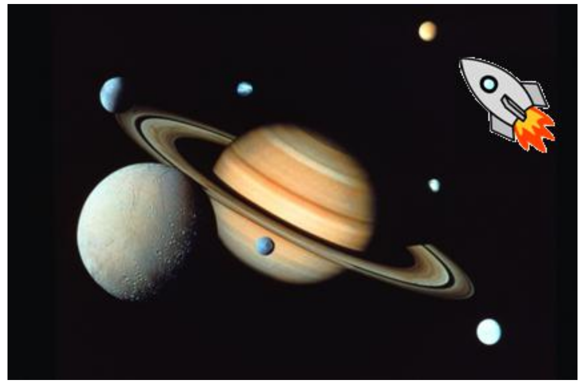


Imagen con derechos adquiridos por el MEP

Planeta	Masa en el Planeta (kg)	Peso en el Planeta (kg-fuerza)	Razón entre la fuerza de atracción del planeta con respecto a la de la Tierra
Mercurio	67	25,33	
Venus			$\frac{907}{1000}$
Tierra	67		
Marte		25,26	
Júpiter	67		0,591
Saturno		71,29	
Urano			0,889
Neptuno			$\frac{9}{8}$

Ejercicio de Reflexión

La gravedad es la responsable de la caída de los cuerpos en la Tierra. El Peso es la cuantificación de la fuerza ejercida por la gravedad sobre un cuerpo y se calcula como el producto entre la masa por la constante gravitacional, que en el caso de la Tierra es 9,8 m/s^2. De acuerdo al Sistema Internacional de Medidas, la unidad de medida del Peso es el Newton (N = masa × constante gravitacional = kg × m/s^2).

Si un astronauta tiene una masa de 185 libras y en la Luna tiene un peso de 136,23 N, ¿cuál es la constante gravitacional de la Luna?

Solución

El peso de un objeto expresado en Newton es igual al producto de la masa del objeto multiplicado por la constante gravitacional del planeta o cuerpo celeste.

Una masa de 185 libras corresponde a una masa de 84,1 kg (185:2,2), ya que 1 kg equivale aproximadamente a 2,2 libras.

Entonces, la constante gravitacional es de 136,23 : 84,1 = 1,62 m/s^2.

Si se compara con la gravedad en la Tierra (9,8 m/s^2), se puede decir que el Peso es 6 veces menor en la Luna que en la Tierra.

Contextualización activa

Como se indica en la fundamentación teórica de los programas de estudio, la resolución de problemas en contextos reales es el enfoque principal del currículo. Es por eso que la contextualización que se haga en el problema no debe ser artificial, debe ser no sólo realista sino también cercana al estudiante, con el propósito de movilizar intereses y acciones cognitivas de nivel superior que involucren al estudiantado de una forma activa.

El estudio del Universo y más concretamente del Sistema Solar despierta en los estudiantes mucha curiosidad e interés por las interrogantes que revela. El estudio del Universo se encuentra por doquier hoy en día en nuestra vida cotidiana (películas de ciencia ficción, documentales, Internet, programas educativos para niños, etc.), e incluso, la cultura popular contemporánea ha llevado la interacción humana con el Cosmos a los medios masivos de comunicación, formando parte de nuestra percepción de la sociedad actual.

Por lo anterior, es natural para el estudiante trabajar un problema bajo este contexto. Éste despertará el interés y la participación, y con ello provocará la construcción de conocimientos nuevos.

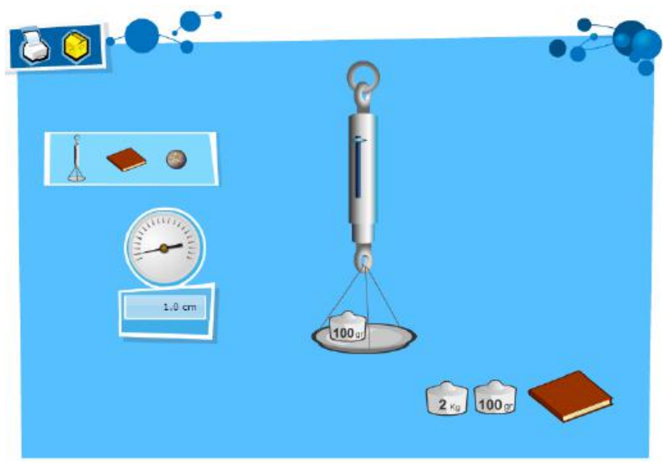
Uso de tecnología

El uso del Internet ofrece a las Matemáticas y su enseñanza múltiples oportunidades de construcción de aprendizajes y de movilización y aplicación de conocimientos. Por ejemplo, se pueden encontrar sitios especializados con plataformas interactivas que pueden servir para el reforzamiento de aprendizajes. En el sitio http://conteni2.educarex.es/mats/14341/contenido se exhibe un laboratorio interactivo acerca de la medida de masas, haciendo la diferenciación en cuanto al peso.

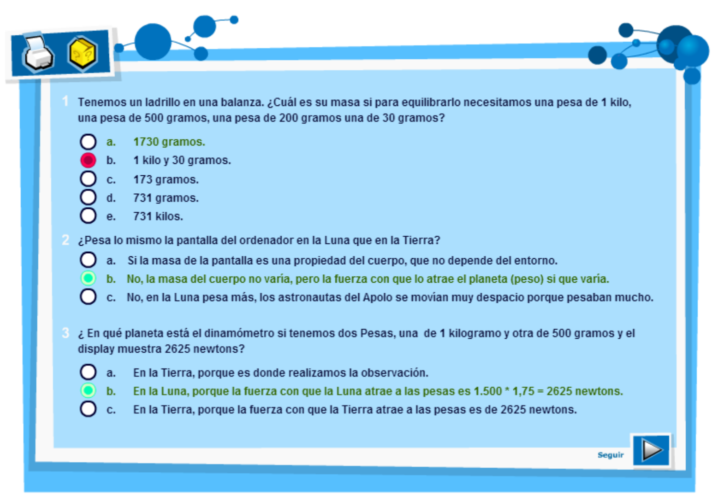
En este laboratorio el estudiante selecciona un cuerpo, un aparato de medición y el planeta donde se realizará la medición.

Si el estudiante elige una balanza, debe equilibrarla, colocando pesas en el platillo correspondiente; una vez equilibrada debe calcular la masa del cuerpo y anotarla en el recuadro correspondiente.

En el caso de que elija el dinamómetro, estará midiendo el peso del cuerpo, por lo cual deberá primero calibrarlo con las pesas con que se dispone, colocar el cuerpo y determinar su masa. Luego, debe relacionar el peso del cuerpo con el planeta en el que se realiza la medición.



Adicionalmente se presenta una autoevaluación de los conocimientos:

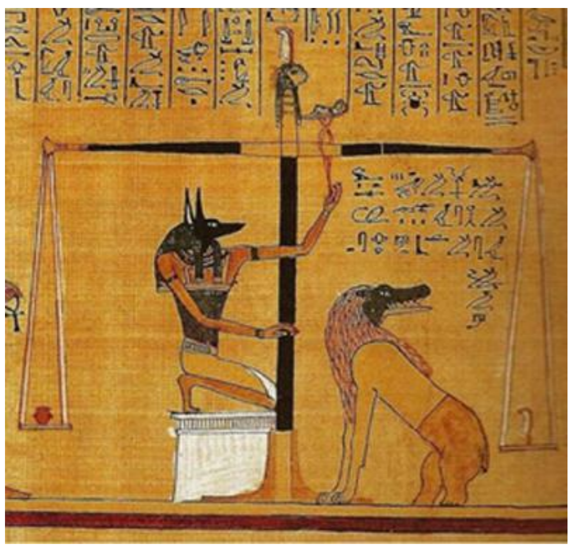


Uso de la historia de las Matemáticas

Es esencial aclarar que si bien el concepto de masa de un cuerpo es relativamente nuevo, a través de la historia ha sido de gran relevancia en las diferentes culturas, sobre todo para el comercio. Al igual que lo es ahora, era trascendental cuantificar la cantidad de materia de un cuerpo.

Aproximadamente en el año 3500 antes de Cristo, el comercio era una de las actividades más notorias. Debido a la evolución en el intercambio de mercancías, el pueblo egipcio se vio forzado a "pesar" y medir esos productos destinados a la venta. Por esta razón, fue inevitable el surgimiento de un nuevo aparato que colaborara en este aspecto tan crucial. Éstos son los inicios de la historia de la balanza egipcia.

La balanza egipcia consistía de una columna con un astil atado con una cuerda en cuyos extremos, a su vez, se sostenían unas bandejas mediante otras cuerdas. En dichas bandejas era donde se colocaban, por un lado, la mercancía que se quería "pesar" y, por el otro, una "pesa" de un valor que debía ser convenido.



Anubis pesando el corazón del alma en la balanza de Maat

Imagen tomada de http://www.todoterapias.com/articulo.php?id=145

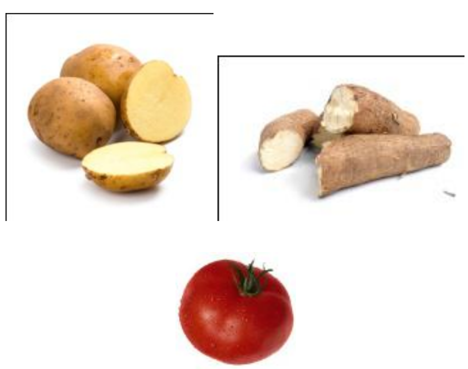
Pero la civilización romana no se quedó atrás. Cerca del año 200 a.C. los romanos lograron darle forma a lo que luego se conoció como *romana de gancho*.

Imagen tomada de
http://www.lasbasculas.com/Historia-balanza-sp-11.html

Desde su extremo de menor longitud se puede colgar un gancho. En dicho gancho debe colgarse la mercancía, y posteriormente se perfeccionaría el invento gracias al agregado de un plato. Por otro lado, desde el extremo más largo se desliza un peso fijo, que además tiene que ser dentado y graduado. Tan importante sería esta creación de los romanos que se constituiría en el perfecto antecedente de las llamadas básculas de plataforma, las cuales se utilizan debido a que su resistencia les permite soportar grandes pesos.

Los instrumentos para cuantificar la masa han evolucionado con el pasar del tiempo hasta construirse aparatos sofisticados que miden masas de objetos muy grandes, como por ejemplo el peso de un camión o de un contenedor en un muelle.

Más cercana al contexto del estudiante, tenemos la báscula para "pesar" las verduras en la feria o la verdulería.



Imágenes con derechos adquiridos por el MEP

Imagen cortesía de Keerati en FreeDigitalPhotos.net

Hay que recordar que este instrumento mide en realidad los kg-fuerza que ejerce la Tierra sobre los cuerpos (papas, yuca, etc.), pero un objeto que pesa 1 kg-fuerza tiene de masa 1 kg. Por eso la numeración del aparato está en kilogramos.

Es significativo observar que con estos elementos de historia se puede potenciar la contextualización activa del problema, ya que se puede ver la evolución de un concepto y se puede ampliar el problema a un entorno y circunstancias particulares de una cultura o una época distinta a la actualidad.

Al mismo tiempo, el poder entender la necesidad de cuantificar la masa de un cuerpo desde hace tantos siglos atrás y la evolución de los instrumentos de medición de acuerdo a las necesidades de la sociedad, le dan un sentido especial a las Matemáticas como construcciones humanas en un determinado pasaje de la historia. Eso sí, hay que destacar que en este avance se han dado errores y aproximaciones diversas hasta llegar a lo que ahora existe.

Con esta actividad se enfatiza que las Matemáticas no están tan alejadas de otras ciencias naturales. Y esto es elemental expresarlo en el aula.

Actitudes y creencias

Precisamente en esta actividad se trabaja la creencia equivocada de asociar la masa y el peso como sinónimos. En Costa Rica se acostumbra utilizar desde la niñez sólo el concepto de peso, el cual se ha asociado siempre al kilogramo, y se ha habituado a usarlo, sin saberlo, como sinónimo de masa. Por eso, cuando una persona sube a una balanza se emplean expresiones como "estoy pesándome" o “pesé 48 kilos”, cuando en realidad estamos midiendo nuestra cantidad de masa, que se expresa en kilogramos. Es por lo anterior que se pretende, mediante el apoyo pedagógico y la interacción estudiante-estudiante y estudiante-docente, analizar estas expresiones y diferenciar conceptualmente la masa del peso.

Otra expresión incorrecta es usar el término “kilo” para referirse a kilogramo; por ejemplo, al ir a la feria o a la verdulería se escuchan expresiones como “déme un kilo de papas”. Hay que dejar claro al estudiante que el vocablo kilo es un prefijo que denota mil, por sí solo no es una unidad de medida. Es necesario referirse a la palabra completa kilogramos para evidenciar que lo que se pide son “mil gramos de papas”, por ejemplo.

Asimismo, como en esta actividad se busca promover la discusión en subgrupos, es conveniente monitorear el trabajo de cada estudiante e intervenir oportunamente cuando se observa que algún miembro está teniendo dificultades para participar o comunicar sus ideas. Cuando se trabaja en esta modalidad, es posible que por las diferencias de personalidad de los estudiantes haya algunos integrantes que acaparen la discusión y no dejen participar a los demás. El docente debe estar atento y hacer acertadamente preguntas a los diferentes alumnos para indagar si realmente todos están aportando ideas. Esto es sustancial, ya que cada estudiante debe sentir que sus aportes son necesarios y significativos para sus compañeros, de modo que se fortalezca su autoestima.

Además, al conectar con la asignatura de Ciencias esta actividad ayuda a mostrar la utilidad de las Matemáticas en diferentes ámbitos. Es por esto que se propone trabajar de manera integrada con dicha asignatura, tomando en cuenta que en la mayoría de escuelas el docente se encarga de impartir casi todas las materias.

También con el uso de la historia, en este caso de los instrumentos creados para medir la masa en las diferentes culturas, es fundamental visualizar el papel vital de las Matemáticas en el desarrollo tecnológico y científico a través de los siglos. Efectivamente, en esta actividad se puede evidenciar que las Matemáticas son prácticas y necesarias en el diario vivir.

Sugerencias de evaluación

Es pertinente evaluar en el *trabajo cotidiano* el uso de instrumentos de medición como la balanza, la báscula y si es posible el dinamómetro. También el uso correcto de los instrumentos y el análisis de los resultados que se hagan de las mediciones.

A la vez conviene evaluar la identificación apropiada del tipo de medición que requiere el atributo a ser medido y el instrumento que permite realizar tal medición. Por ejemplo, la balanza y la báscula se utilizan para medir la masa de un cuerpo; en cambio, el dinamómetro sirve para medir el peso.

En el *trabajo extraclase* se recomiendan tareas cortas que permitan la resolución de problemas de diferentes niveles de complejidad y en contextos diversos.

Para las pruebas se pueden usar ítems de diferente complejidad, por ejemplo un problema de reproducción en un ítem de selección única y un problema de conexión en un ítem de desarrollo.

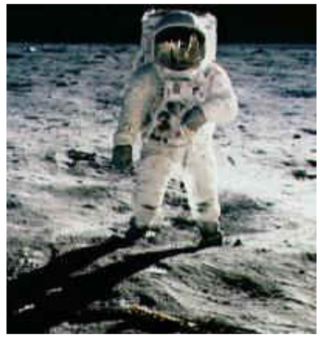
A continuación se ofrecen algunos ejercicios de evaluación que se pueden derivar de esta actividad:

1. El sobrepeso de los camiones contribuye al daño de las carreteras y de los puentes. En un puente se restringe el paso para vehículos con carga mayor a 20 toneladas. Un camión remolque sin carga tiene un peso de 12 toneladas. Se carga de 12 cajas con un peso de 102 kg cada una y de 4 contenedores con un peso de 220 kg cada uno. ¿Puede pasar sin riesgo de dañar la estructura del puente?

2. Miguel quiere pesar su gato. El gato es inquieto y no se va a quedar sobre la pesa. Así que Miguel sube sobre la pesa, la cual indica su propio peso: 27 kg. Después sube con su gato en los brazos y la pesa marca 31,5 kg. ¿Cuánto pesa el gato?

   Nota: Si tenés en la casa una pesa y un perro, podés intentar pesarlo de esta manera.

3. Neil Armstrong es el primer hombre en haber pisado la Luna el 21 de julio de 1969. Antes de salir, en la Tierra tenía un peso de 74 kg-fuerza. En el viaje perdió 2 kg de masa.



Si un kg-fuerza en la Tierra es 6 veces mayor que un kg-fuerza en la Luna, ¿cuál era el peso de Neil Armstrong en la Luna?

4. El Peso evaluado en Newton es la cuantificación de la fuerza de atracción gravitacional ejercida sobre un cuerpo, entonces en el cohete que llevaba a Armstrong a la Luna, ¿cuál era el peso de Armstrong?

Relaciones y Álgebra

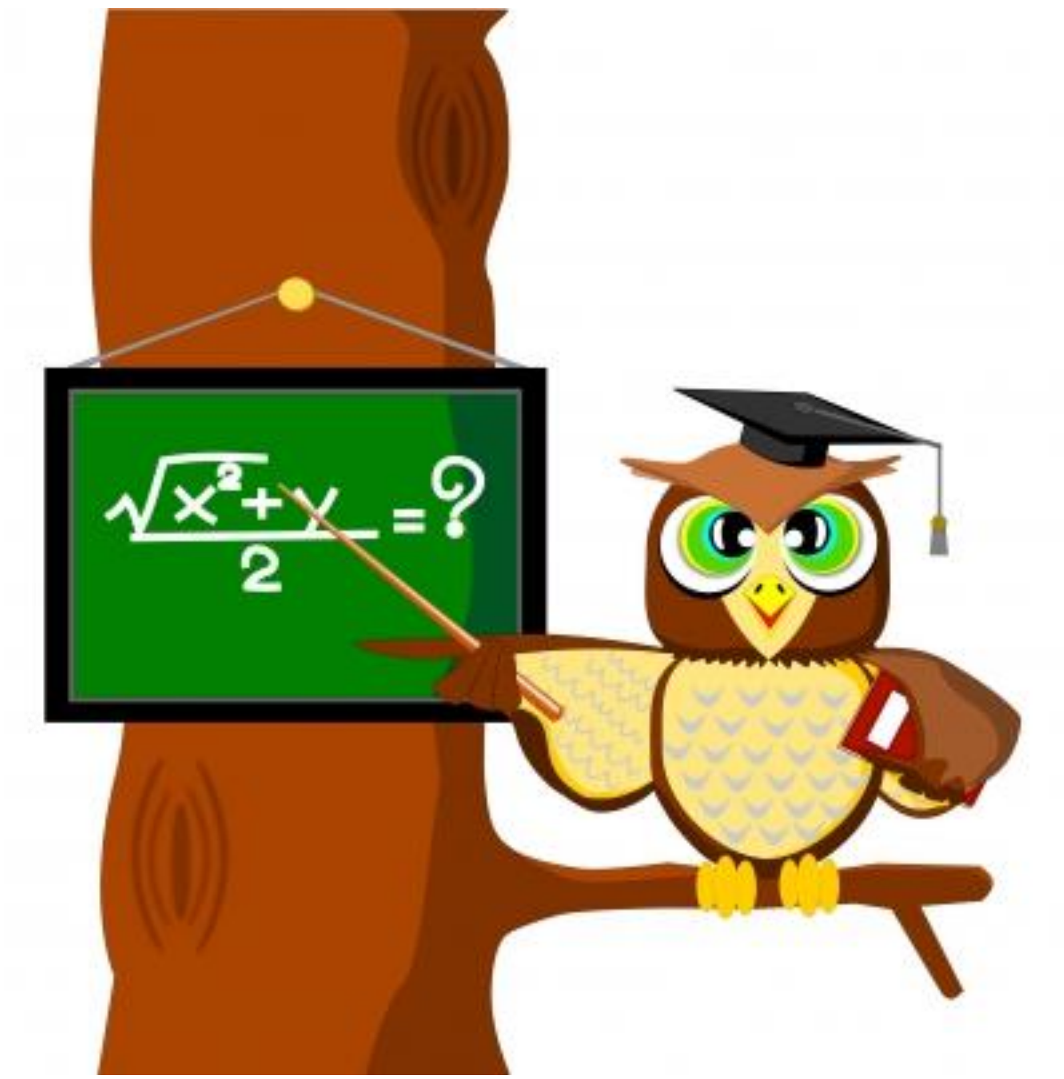


Imagen cortesía de bandrat en FreeDigitalPhotos.net

Cuarto año

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Sucesiones: Patrones	Analizar patrones en sucesiones con figuras, representaciones geométricas y en tablas de números naturales menores que 1 000 000.	**Relaciones y Álgebra, Segundo grado** Identificar patrones o regularidades en sucesiones o en tablas de números naturales menores que 1 000, con figuras o con representaciones geométricas. **Relaciones y Álgebra, Tercer grado** Identificar y construir sucesiones con figuras, representaciones geométricas o con números naturales menores a 100 000 que obedecen a un patrón dado de formación.

Propuesta de problema

Proponga a los estudiantes el siguiente reto:

Complete los espacios representados por una línea con los números que faltan:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ___, _____ , ___ .

Explique: ¿Cómo logró obtener los números faltantes?

Solución del problema

Al abordar el problema anterior, se debe dar a los estudiantes el tiempo suficiente para explorar el comportamiento de la sucesión de números. Luego, se debe discutir ampliamente con ellos los posibles patrones que hayan encontrado.

Es necesario discutir cómo en esta sucesión no se suma, resta o multiplica un valor constante, sino que cada término se obtiene sumando los dos términos anteriores. En la siguiente tabla se representa el comportamiento de la sucesión:

Patrón	Términos de la sucesión
	1
	1
1+1	2
1+2	3
2+3	5
3+5	8
5+8	13
8+13	21
13+21	34
21+34	55

Para complementar la actividad se puede trabajar la historia de la Sucesión de Fibonacci, nombre de la sucesión presentada previamente. Ésta fue descrita en Europa por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII conocido como Fibonacci.

Por lo demás, se puede ampliar explicando que tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación, matemáticas y teoría de juegos. También aparece en configuraciones biológicas, como por ejemplo en las ramas de los árboles, en la disposición de las hojas sobre el tallo, en la flor de la alcachofa y en el arreglo de un cono.

A continuación se ofrece una reseña de *Fibonacci* y los números de Fibonacci; este material es para el docente, al ser llevado a las aulas debe ser adaptado al nivel de los estudiantes.

Fibonacci y los números de Fibonacci

Los patrones formados por sucesiones aritméticas y geométricas son muy antiguos.

El papiro Rhind contiene problemas relacionados con estas sucesiones, que fueron copiados por el escriba egipcio Ahmes, alrededor de 1650 A. C. En el año 1202, el matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), conocido como Fibonacci y considerado uno de los matemáticos más importantes de la Edad Media en Europa, planteó problemas parecidos a los encontrados en dicho papiro, en su obra *Liber Abaci* (Libro del Ábaco), un libro con quince capítulos que popularizó el sistema de numeración indo-arábico en Europa. En la época en que vivió Fibonacci no existía la imprenta. Sus libros, así como las copias de ellos, fueron escritos a mano.

Un problema famoso planteado por Fibonacci en la obra mencionada es el de la reproducción de conejos: suponga que la vida de los conejos es eterna y que cada mes una pareja de conejos procrea una nueva pareja, que es fértil a los dos meses. Si comenzamos con una pareja de recién nacidos:

¿Cuántas parejas de conejos tendremos al final de 1 año?

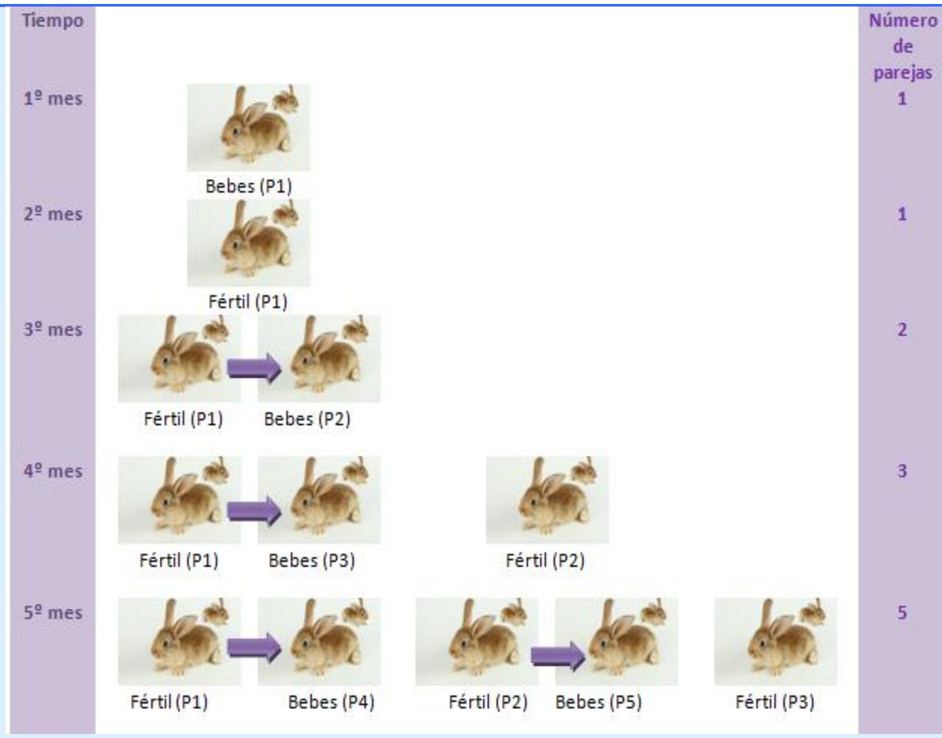


Imagen cortesía de FreeDigitalPhotos.net

Nota: Una pareja de conejos tarda 1 mes para estar sexualmente madura. Suponga que tienen relaciones al inicio del mes siguiente. Como el embarazo dura aproximadamente 1 mes, entonces esta primera pareja tendrá otra pareja después de 2 meses. A partir de este punto se supone que (como la primera pareja ya está madura sexualmente) tendrán otra pareja cada mes. Por ejemplo:

Tiempo	Número de conejos
1º enero	1 pareja P1 recién nacida.
1º febrero	P1 está sexualmente madura (fértil) y está preñada (hay que esperar 1 mes para que nazca).
1º marzo	P1 tiene una pareja P2. Entonces ya tengo 2 parejas (una fértil y la otra no).
1º abril	P1 tiene nueva pareja P3, P2 está fértil. Entonces tengo P1 (fértil), P2 (fértil), P3 (no fértil).
1º mayo	P1 tiene nueva pareja P4, P2 tiene nueva pareja P5. Tenemos P1, P2, P3 (fértil), P4 y P5 (no fértil), etc.

Los primeros números de Fibonacci son: $1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144.$ Se observa que cada término, a partir del tercero, es la suma de los dos anteriores. La sucesión anterior se conoce como sucesión de Fibonacci, mientras que los números que aparecen en ella se llaman números de Fibonacci. Esta sucesión tiene múltiples aplicaciones en las artes, la arquitectura, el mercado financiero y con la razón áurea. Realmente es un tema interesante para un trabajo de investigación de los estudiantes.

Por ejemplo, en la flor del girasol se encuentran pequeños granos en forma de diamante, encerrados por arcos de curvas en forma de espirales logarítmicas con origen en el centro, y de tal manera que el número de espirales en la dirección de las agujas del reloj y el número de espirales en la dirección contraria son términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci: 55 espirales en un sentido y 89 en el otro, o bien 89 en un sentido y 144 en el otro.

Imagen cortesía de FreeDigitalPhotos.net

Las margaritas presentan las semillas en forma de 21 y 34 espirales. El número de espirales de una piña también sigue un patrón de acuerdo a la sucesión de Fibonacci: 8 y 13, o bien 5 y 8.

Según la filotaxia, ciencia que estudia la disposición de las hojas en los tallos, la ubicación de cada hoja pretende garantizar el máximo de luz. Por eso ninguna hoja nace justo en la vertical de la anterior. La distribución de las hojas alrededor del tallo de las plantas se produce siguiendo la sucesión de Fibonacci.

Imagen cortesía de FreeDigitalPhotos.net

Por lo general, las sucesiones como las de Fibonacci, cuyo término que ocupa la posición *n* depende de dos o más términos anteriores, son muy importantes, y la expresión que permite calcular un término de la sucesión a partir de términos anteriores se denomina relación recursiva, y es usual decir que la sucesión es recursiva o definida recursivamente.

En Internet (http://oeis.org/) existe una base de datos con las sucesiones utilizadas por los científicos y aficionados, con más de 150 mil tipos de sucesiones. En esta enciclopedia en línea de sucesiones de enteros el usuario puede seleccionar el idioma, digitar los primeros términos de una sucesión no conocida y presionar el ícono de búsqueda para encontrar posibles informaciones acerca de la sucesión.

Fuente: La Enciclopedia On-Line de las Secuencias de Números Enteros. http://oeis.org

Con el objetivo de complementar un texto como el anterior, se puede ofrecer al estudiantado un applet de GeoGebra sobre la sucesión de Fibonacci que describe de manera sencilla la historia y además es manipulable, disponible en

https://mailattachment.googleusercontent.com/attachment/?ui=2&ik=4b5846dde5&view=att&th=13ece2f71d02de64&attid=0.1&disp=inline&realattid=f_hh11c9fb0&safe=1&zw&saduie=AG9B_P9OW-M7vdssQFfySz0H8ZvJ&sadet=1369263082705&sads=dCuRn6XqRHFoeeBP3RkTk1bC2sQ

Quinto año

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Relaciones: cantidades constantes, cantidades variables, dependencia, independencia, escalas y ecuaciones	Determinar relaciones de dependencia entre cantidades.	**Relaciones y Álgebra, Cuarto grado** Identificar el número que falta en una expresión matemática, una figura o en una tabla.

Propuesta de problema

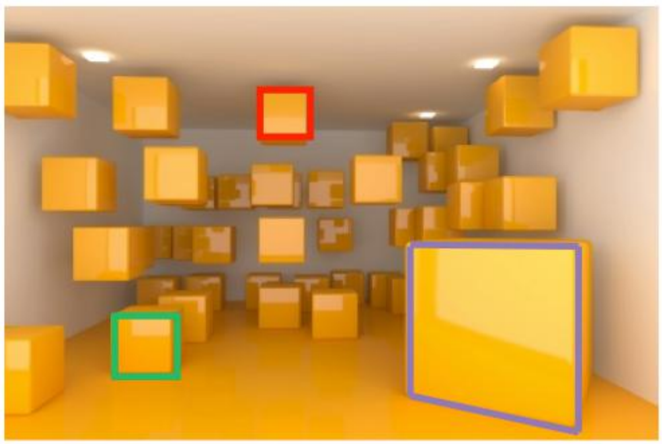


Imagen cortesía de FreeDigitalPhotos.net

Considere la tabla para responder a las preguntas planteadas.

Perímetro del cuadrado (cm)	8	12	20	56	?
Lado del cuadrado (cm)	2	3	5	?	17

¿Cuánto mide el perímetro si el lado del cuadrado mide 17 cm? ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado si su perímetro es de 56 cm?

Solución del problema

En el cuadro se puede apreciar que el perímetro de un cuadrado es igual a cuatro veces la medida de su lado.

Perímetro del cuadrado (cm)	4×2	4×3	4×5	4×?=56	?
Lado del cuadrado (cm)	2	3	5	?	17

Si el perímetro de un cuadrado es 4 veces la medida de su lado, entonces la medida del lado es la cuarta parte del perímetro de la figura. Si el perímetro es 56 cm entonces el lado mide

$$56 \div 4 = 14\ cm$$

Además, si el lado es 17 cm entonces el perímetro P = 17 × 4 = 68 cm.

Es indispensable subrayar la relación existente entre el lado del cuadrado y el perímetro, debido a que esto permite encontrar la solución de la última parte del problema, e incluso llegar a la conclusión de que $P = 4\times\ell$, o sea que el perímetro de un cuadrado (P) es el producto de cuatro veces el lado (ℓ) de la figura.

El docente puede permitir que el estudiantado experimente con cordeles, geoplanos y tramas de puntos el comportamiento propuesto en el problema.

Además, este problema tiene conexión con el área de *Geometría*; es fundamental indicar que la habilidad propuesta en este problema de *Relaciones y Álgebra* también permite adquirir o fortalecer habilidades de Geometría como las siguientes:

- Estimar perímetros y áreas de figuras en conexión con objetos del entorno.
- Calcular, utilizando fórmulas, el perímetro y el área de triángulos, cuadrados, rectángulos, paralelogramos y trapecios.

Conjuntamente, para fortalecer las habilidades de Relaciones y Álgebra y de Geometría se puede emplear la siguiente herramienta de GeoGebra, de Manuel Sada Allo, elaborado en abril 2005, disponible en

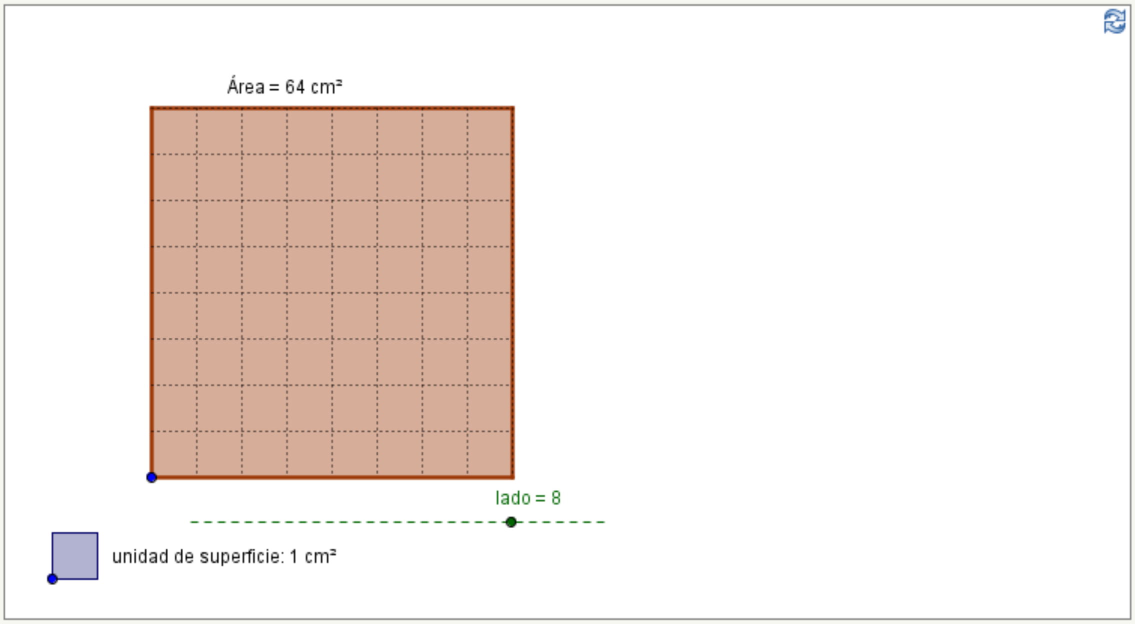
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/a2_cuadrado.htm

Al usar la aplicación, se deben vigilar algunos aspectos:

- Debido a que la respuesta del problema surge inmediatamente a través del software, es necesario incorporar una pregunta que solicite la justificación de la respuesta, esto garantiza que la mayoría de los estudiantes analicen los datos ofrecidos por la página.
- Después de resolver el problema, al exponer la aplicación se pueden reforzar las habilidades pretendidas explorando la representación geométrica de la situación estudiada.

A continuación se muestra una imagen de la herramienta, que vincula el área del cuadrado en función de la medida del lado, ésta es una variante del problema considerado anteriormente.

Área del cuadrado



- ¿Cuál es el área del cuadrado? Es decir, ¿cuántos cuadraditos como el azul caben en el cuadrado?

Modifica el polígono arrastrando el punto verde

- ¿Cuál será la formula que permita calcular el área de un cuadrado a partir de su lado?

Sexto año

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Relaciones: razón, proporción directa, porcentaje y regla de tres	• Plantear y resolver problemas aplicando porcentajes y regla de tres.	**Relaciones y Álgebra, Quinto grado** • Determinar el valor desconocido en una ecuación matemática dada. **Relaciones y Álgebra, Sexto grado** • Analizar la proporción entre cantidades numéricas.

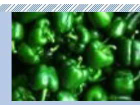
Propuesta de problema

Carlos encontró en un supermercado de su barrio la siguiente lista de ofertas de verduras:

₡790 Normal: ₡955

Ahorre: ₡165

Cebolla granel kilo



₡170 Normal: ₡205

Ahorre: ₡35

Chile dulce unidad

₡1 435 Normal: ₡1 690

Ahorre: ₡255

Brócoli empacado kilo

₡130 Normal: ₡160

Ahorre: ₡30

Plátano maduro unidad

₡320 Normal: ₡380

Ahorre: ₡60

Chayote tierno

Empacado 3 unidades

₡240 Normal: ₡285

Ahorre: ₡45

Remolacha unidad

Imagen cortesía de FreeDigitalPhotos.net

Si Carlos compró 2 kilogramos de cebolla, 4 plátanos maduros y 3 remolachas, ¿cuántos colones ahorró en la compra y qué porcentaje representa este ahorro comparado con el precio normal de las verduras?

Solución del problema

La solución del problema por parte del estudiantado puede realizarse de la siguiente forma:

Se puede efectuar una comparación entre el ahorro y el precio normal. La información se señala a continuación:

Ahorro según producto	**Costo de compra realizada con el precio normal**
Al comprar: **2 kilogramos de cebolla ahorro** 165 × 2 = ¢330 **4 plátanos maduros ahorro** 30 × 4 = ¢120 **3 remolachas ahorro** 45 × 3 = ¢135 El total del ahorro en la compra es: 330 + 120 + 135 = ¢585	Cuando compro: **2 kilogramos de cebolla debo pagar** 955 × 2 = ¢1 910 **4 plátanos maduros debo pagar** 160 × 4 = ¢640 **3 remolachas debo pagar** 285 × 3 = ¢855 Compra total: 1 910 + 640 + 855 = ¢3 405

Hay un ahorro de ¢585. Para calcular el porcentaje que representa este ahorro comparado con el precio normal de las verduras, se divide el total de ahorro entre el total de la compra con el precio normal y se multiplica por 100, o sea 585 ÷ 3 405 × 100 = 17,18%. Puede exponerse la solución de otra manera: 585 x 100 $\div 3405 = 17{,}18\%$. Sin embargo, existen otras posibilidades que el estudiantado puede explorar empleando algunos conocimientos previos.

Es oportuno indicar que este problema y sus posibles estrategias de solución tienen relación con el área de Números, debido a que implica estimación y el uso de operaciones básicas. Por otro lado, el docente debe valorar la pertinencia del uso de la calculadora en el problema.

Es primordial que se aprovechen las oportunidades que se tienen en el aula para arraigar las actitudes positivas hacia las Matemáticas. Este problema tiene un claro sentido de utilidad y requiere de trabajo por parte de todos los estudiantes para identificar datos, realizar cálculos y ordenar la información antes de obtener una respuesta.

En los nuevos programas se indica que se debe cambiar la creencia sobre el tiempo que se dedica a la solución de un problema, en el sentido que al trabajar más de 10 minutos, media hora o una hora, aunque no se obtenga la solución se logra aprendizaje, pues se entrena la mente, se repasa teoría, se exploran alternativas fallidas y se aprende sobre los límites de los métodos (MEP, 2012, p.75). Asimismo, una actividad como la anterior permite *involucrar a los familiares* debido a la cotidianidad del problema, en especial en los años de la Primaria.

Con un problema de esta índole se fortalecen las cinco actitudes pretendidas en los programas de estudio: *Perseverancia*, *Confianza en la utilidad de las Matemáticas*, *Participación activa y colaborativa*, *Autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas* y *Respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas.*

Estadística y Probabilidad

Imagen cortesía de renjith krishnan y jscreationzs en FreeDigitalPhotos.net

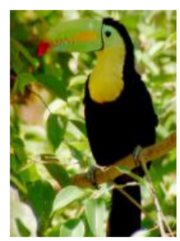
Cuarto año. Probabilidad

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Probabilidad - Resultados a favor de un evento - Eventos más probables, igualmente probables y menos probables	- Identificar los distintos resultados simples de un experimento aleatorio. - Identificar los resultados a favor de la ocurrencia de un evento. - Determinar eventos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples.	**Estadística y Probabilidad, Tercer grado** - Identificar todos los posibles resultados al realizar experimentos simples.

Propuesta de problema

El siguiente problema puede ser resuelto en subgrupos de tres estudiantes.

Costa Rica es un país privilegiado en cuanto a la variedad de su fauna. En aves, es posible encontrar verdaderas joyas de la biodiversidad. Cuatro de las más imponentes y que se encuentran en peligro de extinción son la lapa verde, el quetzal, la lapa roja y el tucán.

Lapa verde	Quetzal	Lapa roja	Tucán
			

Imágenes con derechos adquiridos por el MEP

Suponga que en una reserva biológica conviven estas cuatro especies de aves; se han marcado para su estudio cuatro lapas verdes, seis quetzales, seis lapas rojas y diez tucanes. Un zoólogo coloca una trampa para escoger aleatoriamente una de las aves del refugio para analizar su estado de salud; cae en la trampa una de las aves que se han marcado.

Con base en la información descrita responda las siguientes preguntas:

a) Determine el número total de resultados posibles en la selección de una de las aves.
b) Indique ¿qué especie de ave tiene mayor probabilidad de ser seleccionada? ¿Cuál tiene menor probabilidad?
c) ¿Cuál de los siguientes eventos es más probable? A: el ave seleccionada es un quetzal o B: el ave seleccionada es una lapa roja. Justifique la respuesta.
d) ¿Es más probable que el ave seleccionada sea una lapa (verde o roja) a que sea un tucán?

Solución del problema

a) Para resolver esta pregunta se debe contar el número total de aves que han sido marcadas: cuatro lapas verdes, seis quetzales, seis lapas rojas y diez tucanes. En total hay 26 aves que pueden caer en la trampa, por lo que hay 26 resultados posibles en la selección de una de las aves.

b) Para responder ésta y las siguientes preguntas debe enfocarse en identificar los resultados a favor de la ocurrencia de cada uno de los eventos. A continuación se muestra una tabla con los resultados a favor de algunos eventos.

Evento	Resultados a favor
Seleccionar una lapa verde	4
Seleccionar un quetzal	6
Seleccionar una lapa roja	6
Seleccionar un tucán	10
Total	26

Bajo el supuesto que la especie (dentro de las aves marcadas) que tiene mayor probabilidad de ser capturada es aquella que tiene más resultados simples a favor, y por su parte la especie con menos resultados simples a favor tendría menos probabilidad, se podría concluir que los tucanes tienen mayor probabilidad de salir seleccionados, pues es la especie que presenta más resultados simples a favor. Asímismo, las lapas verdes tienen menor probabilidad de ser seleccionadas ya que la cantidad de resultados simples a favor es menor que el de las otras especies.

c) Por el mismo razonamiento previo, se puede deducir que ambas especies de aves tienen igual probabilidad de salir seleccionadas, ya que la cantidad de resultados simples a favor de los quetzales que han sido marcados es igual a la cantidad de resultados simples a favor de las lapas rojas que han sido marcadas.

d) Nuevamente se debe analizar la cantidad de aves marcadas entre las especies; se puede deducir que ambas especies tienen igual probabilidad de salir seleccionadas, ya que la cantidad de resultados simples a favor de los tucanes que han sido marcados (diez) es igual a la cantidad de resultados simples a favor de las lapas (verdes o rojas) que han sido marcadas.

Se pueden formular otras preguntas relacionadas con el tema. En el cierre se deben formalizar los conceptos de resultados simples de un experimento, resultados a favor de un evento, eventos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples. Es significativo hacer notar que, en este caso, la identificación de estos conceptos está asociada con la identificación de los resultados simples a favor de esos eventos. Para ello, es necesario que los resultados simples a favor de cada evento sean igualmente probables entre sí, es decir, para este ejemplo se supone que las 26 aves tienen la misma probabilidad de caer en la trampa.

Para finalizar, se puede generar una discusión vinculada con la siguiente pregunta: ¿Qué importancia tiene la conservación de éstas y otras especies de fauna en Costa Rica? ¿Qué aporte puede dar cada persona para que podamos heredar a las futuras generaciones esta riqueza en biodiversidad que tenemos?

Con este problema se pueden promover las siguientes actitudes positivas hacia las Matemáticas:

- *Confianza en la utilidad de las Matemáticas:* Ya que se emplean conocimientos matemáticos para resolver problemas relacionados con el entorno.

- *Participación activa y colaborativa:* Dado que cada estudiante se enfrenta al problema en subgrupos en los cuales comparten sus hallazgos. La organización de la lección brinda oportunidades para que el estudiantado participe de manera enérgica.

Cuarto año. Estadística

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Estadística • Recolección de información: experimentación por medición • Representación gráfica: diagramas de puntos • Medidas de posición: moda, media aritmética, máximo, mínimo • Medidas de variabilidad: el recorrido	• Recolectar datos del entorno por medio de la medición. • Emplear los diagramas de puntos para representar grupos de datos cuantitativos. • Resumir un grupo de datos mediante el empleo de la moda y la media aritmética (o promedio) de un grupo de datos e interpretar estas medidas en relación con la información recabada. • Identificar el recorrido de un grupo de datos como la diferencia entre el máximo y el mínimo. • Identificar posibles errores en los datos recolectados.	**Estadística y Probabilidad, Tercer año** • Resumir e interpretar información utilizando la moda, el máximo y el mínimo de un grupo de datos. **Estadística y Probabilidad, Cuarto año** • Identificar diferencias entre datos cuantitativos, según las estrategias de recolección de información: por conteo o por medición.

Propuesta de problema

Se sugiere dividir el grupo en subgrupos de trabajo. Cada subgrupo de trabajo resolverá el siguiente problema.

En la enciclopedia Wikipedia, de la página Web http://es.wikipedia.org/wiki/Estatura, se indica lo siguiente:

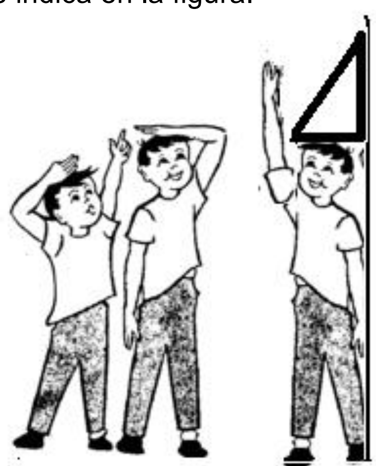
> La altura promedio para cada sexo dentro de una población es significativamente diferente, con los varones adultos teniendo un promedio más alto que las mujeres adultas. Esta diferencia puede atribuirse a diferencias de sexo cromosómico, XY (varón) en contraposición a XX (hembra). <u>Las mujeres generalmente alcanzan su mayor altura a una edad más temprana que los hombres</u>. El crecimiento se detiene cuando los huesos largos dejan de prolongarse, lo que ocurre con el cierre de las placas epifisarias. (lo subrayado no es del original)

Con base en el supuesto que se ha subrayado en el párrafo anterior, realice un análisis estadístico que le permita evidenciar si esta hipótesis es válida para los estudiantes de este grupo. Utilice los materiales necesarios y las técnicas estadísticas que considere pertinentes.

Solución del problema

Se debe dar la libertad para que cada subgrupo sea capaz de generar una estrategia que le permita analizar la situación, establecer una estrategia para recolectar y resumir la información necesaria y finalmente dar una respuesta al problema general. Así, deben preverse de antemano los materiales que se pueden necesitar, entre ellos: una lista de clase, una cinta métrica, una escuadra, una calculadora, entre otros. Cada grupo deberá decidir cuáles utilizar.

La estrategia más viable para recolectar la información consistiría en llevar a cabo las mediciones correspondientes. Los estudiantes del subgrupo encargado de realizar la actividad deben determinar la estatura de cada estudiante y anotarla en una lista donde estén los nombres de todos los compañeros. Pueden emplear una cinta métrica pegada a la pared y una escuadra tal como se indica en la figura.



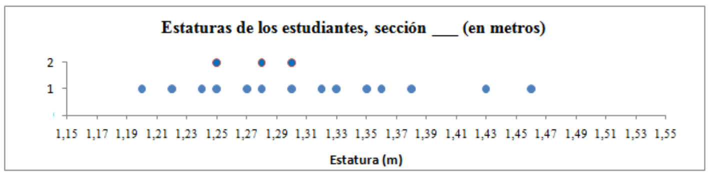
Se espera que el subgrupo pueda listar la información en una tabla de la siguiente manera:

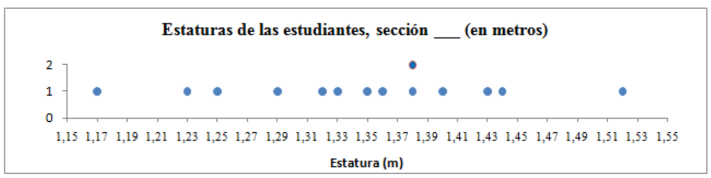
	Nombre del estudiante	Estatura en metros
1	Abarca Rojas Mafalda	1,44
2	Alvarado Pérez Manolito	1,35
3	Barrantes Mena Libertad	1,29
	⋮	⋮
	⋮	⋮
31	Zamora Jiménez Riguito	1,32

Con esta información cada subgrupo deberá establecer la estrategia para comparar la información de hombres y mujeres. Debido a que los datos podrían variar mucho entre sí, no es viable hacer una lista de frecuencias, pues quedan muchas categorías. Debido a lo anterior no sería muy útil representar la información por medio de un cuadro de frecuencias o de un gráfico de barras pues no serían muy ilustrativos. Supongamos que la información recabada por los estudiantes es la siguiente:

Hombres	1,20	1,22	1,24	1,25	1,25	1,27	1,28	1,28	1,30	1,30	1,32	1,33	1,35	1,36	1,38	1,43	1,46
Mujeres	1,17	1,23	1,25	1,29	1,32	1,33	1,35	1,36	1,38	1,38	1,40	1,43	1,44	1,52			

Una forma simple mediante la cual se podría realizar la comparación de las estaturas entre los sexos consiste en construir diagramas de puntos con las estaturas de cada uno de los sexos. Los diagramas correspondientes a los datos anteriores son los siguientes:





Estos diagramas se pueden construir manualmente. Este tipo de gráfico permite analizar la posición y la variabilidad de los datos cuantitativos, además efectuar un análisis comparativo en forma simple. Para realizar análisis comparativos se requiere utilizar la misma escala en los ejes para cada uno de los gráficos. En el análisis de estos diagramas se puede observar que, en términos generales, las estaturas de las mujeres son mayores a las estaturas de los hombres, pues los puntos correspondientes a las estaturas de los hombres se concentran mayoritariamente a la izquierda, más que los puntos correspondientes a las estaturas de las mujeres.

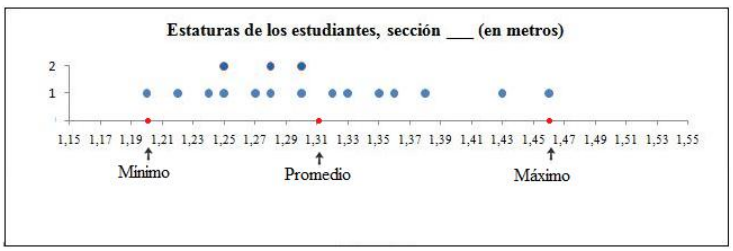
Pero también, se debe observar que las estaturas de las mujeres son más variables que las estaturas de los hombres, pues los puntos correspondientes a sus estaturas tienen una mayor separación unos de otros que las correspondientes a los hombres, los cuales están más juntos.

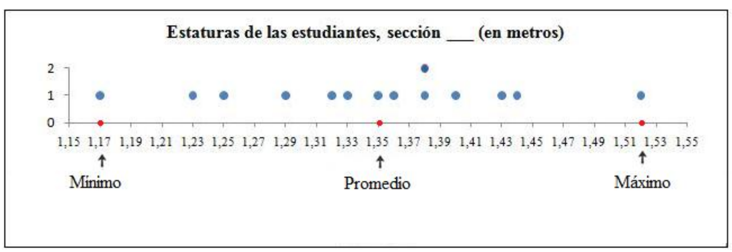
Otro método de abordar el análisis es por medio de medidas estadísticas, utilizando el máximo, el mínimo, la moda y el promedio o media aritmética, ya que estas medidas permiten realizar un análisis comparativo con respecto a las estaturas. Los valores de estas medidas se indican en la siguiente tabla.

Medidas estadísticas de posición para las estaturas de los estudiantes, por sexo. Sección ___ (en metros)

Medidas	Hombres	Mujeres
Mínimo	1,20	1,17
Máximo	1,46	1,52
Moda	1,25; 1,28, 1,30	1,38
Promedio	1,31	1,35

Según los datos del cuadro anterior, puede notarse que las mujeres presentan la estatura más pequeña, pero también las mujeres presentan la mayor estatura. En el caso de la moda, las estaturas de los hombres presentan tres modas y las de las mujeres una. Para este caso la moda no es una buena medida para resumir los datos, debido a que su frecuencia es muy pequeña, únicamente dos. No obstante, la estatura modal en las mujeres es superior a las tres modas de los hombres. El valor promedio de la estatura es mayor en las mujeres por 0,04 metros que equivale a 4 centímetros. El promedio, el máximo y el mínimo pueden representarse según el sexo en los siguientes diagramas de puntos:





Es fundamental que el subgrupo concluya respecto al problema original que el análisis estadístico confirma que las estaturas son mayores entre las mujeres que entre los hombres. Por lo tanto, las estaturas de los estudiantes del grupo cumplen con lo que se afirma en la Enciclopedia Wikipedia, respecto a la relación de las estaturas entre niños y niñas.

Para complementar el análisis de la variabilidad de los datos, el docente puede hacer referencia al recorrido, que constituye la diferencia entre el máximo y el mínimo, representa la mayor diferencia en la estatura; este valor en los hombres es de 1,46 – 1,20 = 0,26 y en las mujeres es 1,52 – 1,17 = 0,35. En los hombres la mayor diferencia es de 26 cm y en las mujeres es de 35 cm.

El docente puede aprovechar el problema para destacar que no necesariamente todos los subgrupos obtuvieron las mismas medidas de sus compañeros de clase, y esto se debe a que hay errores en la medición y problemas con la exactitud del instrumento empleado para realizar las mediciones.

En el cierre se deben formalizar los conceptos de media aritmética y recorrido, junto con su interpretación.

Quinto año. Probabilidad

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Probabilidad Eventos seguros, probables e imposibles Eventos más probables, igualmente probables y eventos menos probables	Determinar eventos seguros, probables e imposibles en situaciones aleatorias particulares. Interpretar los conceptos de eventos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples.	**Estadística y Probabilidad, Cuarto año** Identificar los resultados simples a favor de la ocurrencia de un evento. Representar los posibles resultados de un experimento o situación aleatoria.

Propuesta de problema

Proponer el siguiente problema para que sea analizado en subgrupos:

Suponga que usted junto a otros dos compañeros deciden jugar con una moneda de ₡100 para analizar las probabilidades que se asocian con ella. El juego consiste en lanzar la moneda tres veces, con lo que se establecen los siguientes eventos:

A: Obtener cero escudos

B: Obtener un escudo

C: Obtener dos escudos

D: Obtener tres escudos

E: Obtener cuatro escudos

F: Obtener escudo o corona

a) Determine los resultados simples a favor de cada uno de los eventos descritos.
b) ¿Cuál de los eventos anteriores ocurre siempre, cuál no es posible que ocurra y cuál sí podría ocurrir?
c) Si usted debe seleccionar primero y puede escoger entre los eventos A, B o C, ¿cuál de ellos escogería para tener mayor probabilidad de ganar? ¿Por qué?

Solución del problema

Si anteriormente no se han resuelto en clase problemas vinculados con monedas o dados, es importante que primeramente se inicie experimentando, para ello se pueden efectuar algunos lanzamientos con las monedas y observar los resultados obtenidos. Por

ejemplo, podrían determinar cuántos resultados posibles tiene el experimento y también se pueden formular algunas hipótesis respecto a los eventos.
a) Se espera que el estudiantado identifique sin dificultad los resultados simples a favor de la ocurrencia de cada uno de los eventos descritos, ya que ésta es una habilidad previa. Inicialmente se debería identificar que para el lanzamiento de una moneda existen dos resultados igualmente probables (éste es el supuesto básico):

1. Obtener un escudo: E
2. Obtener una corona: C

Sin embargo, al repetir tres veces el lanzamiento de la moneda, se obtienen diferentes combinaciones de resultados, los cuales se pueden representar por ternas de letras de la forma ECC, que representaría un resultado en el que se obtuvo primero un escudo y luego dos coronas seguidas. A continuación se muestran todos los posibles resultados que se obtienen al lanzar tres monedas:

Resultados posibles	**Primer lanzamiento**	**Segundo lanzamiento**	**Tercer lanzamiento**
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

Como se observa, hay ocho posibles resultados que se pueden representar por: EEE, EEC, ECE, CEE, ECC, CEC, CCE, CCC.

Otra manera de determinar los posibles resultados es que se les entregue tres monedas a cada subgrupo para que jueguen con ellas y así puedan deducir la cantidad de formas que pueden ordenarse en secuencia.
Estos ocho posibles resultados se consideran igualmente probables, por lo que es igualmente probable obtener el resultado CEE que el resultado CCC, y así para todos ellos. Debido a esto, para calcular las probabilidades de los eventos descritos se puede emplear la definición clásica o Laplaciana de Probabilidad.

La información anterior es suficiente para identificar cuáles de esos posibles resultados favorecen a cada uno de los eventos iniciales. En la siguiente tabla se muestra cada evento, los resultados simples a favor de ese evento y el número total de resultados simples a favor de ese evento.

Evento	**Resultados simples**	**Número total de resultados simples**
Evento A: Obtener cero escudos	CCC	1
Evento B: Obtener un escudo	ECC, CEC, CCE	3
Evento C: Obtener dos escudos	EEC, ECE, CEE	3
Evento D: Obtener tres escudos	EEE	1
Evento E: Obtener cuatro escudos	---	0
Evento F: Obtener escudo o corona	EEE, EEC, ECE, ECC, CEE, CEC, CCE, CCC	8

b) Al observar los datos de la tabla obtenida en a) se podría concluir que un evento que ocurre siempre es el evento F: Obtener escudo o corona, pues al lanzar las tres monedas de seguro en alguna de ellas caerá escudo o corona, además el número de resultados a favor de este evento es igual al total de resultados posibles del experimento. Por el contrario, el evento que nunca ocurre es el evento E: Obtener cuatro escudos, pues el número de resultados simples a favor de este evento es cero. Por último, cualquiera de los eventos A, B, C y D pueden ocurrir, ya que tienen al menos un resultado simple a favor.

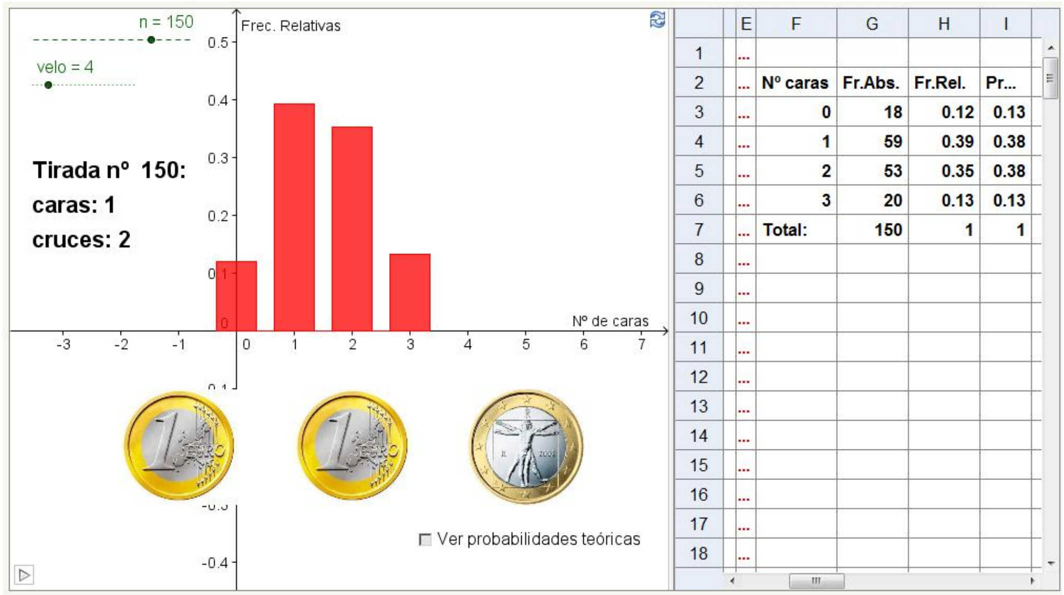
c) Los eventos B y C son igualmente probables, mientras que el evento A tiene menos probabilidad que los eventos B y C, por lo que se debe seleccionar cualquiera de los eventos B o C.

En el cierre se deben definir formalmente los conceptos de eventos seguros, probables e imposibles, eventos más probables, igualmente probables y menos probables.


En el siguiente link:

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/azar_monedas3.htm

hay un applet para simular el lanzamiento de tres monedas y permite contar la cantidad de veces que se obtiene cero, uno, dos o tres caras y además muestra un gráfico de estos resultados. En la siguiente figura se presenta la frecuencia con la que se pueden obtener cero, uno, dos y tres caras al lanzar tres monedas ciento cincuenta veces.



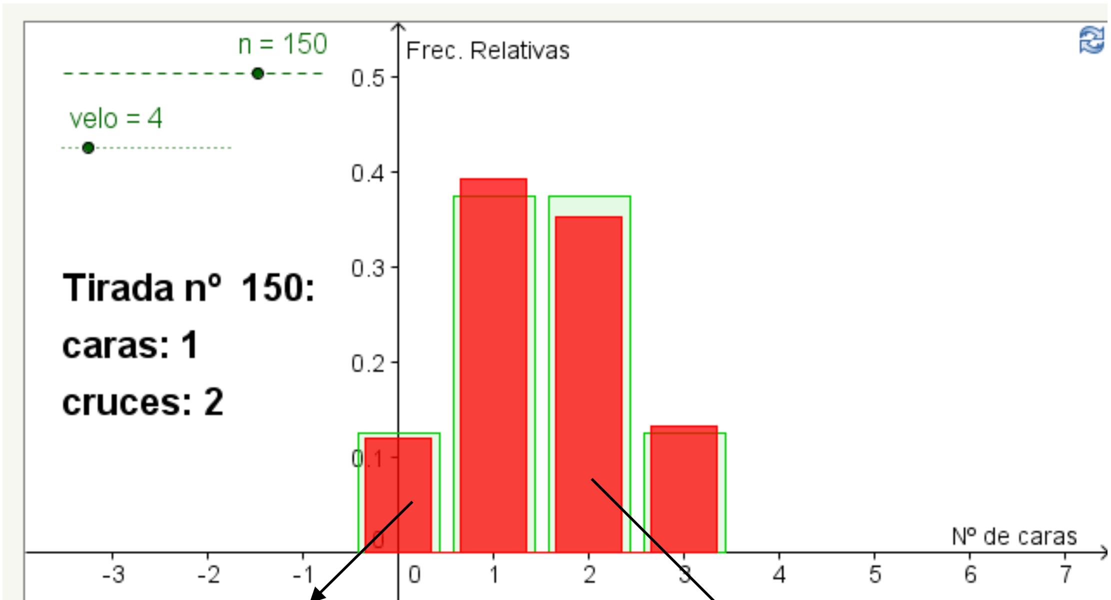
Como se observa en la figura anterior, este applet contiene un cuadro donde se resumen los resultados obtenidos.

En la tabla anterior (a la derecha de la figura) se puede observar que en dieciocho de los lanzamientos de las tres monedas se obtuvo cero caras, en cincuenta y nueve de los lanzamientos se obtuvo una cara, en cincuenta y tres se obtuvo dos caras y en veinte de los lanzamientos tres caras. Los resultados obtenidos concuerdan con los del problema anterior, pues los eventos menos probables son obtener cero y tres caras, mientras que los más probables son obtener una y dos caras.

Es relevante destacar que aunque teóricamente los eventos obtener cero caras y tres caras tienen los mismos resultados simples a favor, en este caso los resultados simples conseguidos al lanzar las tres monedas ciento cincuenta veces no coinciden, debido a que se trata de un experimento con una cantidad fija de ensayos. Al realizar una cantidad mayor de ensayos el número de resultados simples a favor de cada uno de los eventos se aproximará al número de ensayos que se obtiene del análisis teórico.

Este mismo applet puede utilizarse en Sexto año para calcular la probabilidad de ocurrencia de estos eventos, la cual se encuentra en la columna “Fr.Rel”. De este modo, según los resultados obtenidos en estos ciento cincuenta lanzamientos de las tres monedas, la probabilidad de obtener cero caras es 0,12, la de obtener una cara 0,39, la probabilidad de obtener dos caras 0,35 y la de obtener tres caras 0,13.

También puede compararse la probabilidad teórica de obtener cero, uno, dos y tres caras con las probabilidades obtenidas al realizar una cantidad fija de ensayos. La siguiente figura muestra la comparación de las probabilidades de obtener cero, una, dos y tres caras al lanzar tres monedas cincuenta veces y la probabilidad teórica de obtener esos mismos resultados. La probabilidad teórica de obtener esos resultados se calculó en el problema anterior, por ejemplo la probabilidad teórica de obtener cero caras es $\frac{1}{8} = 0{,}12$, la de obtener una cara $\frac{3}{8} = 0{,}375$, la de obtener dos caras es igual a la de obtener una cara $\frac{3}{8} = 0{,}375$ y la obtener tres caras es igual a la de cero caras $\frac{1}{8} = 0{,}12$.



Probabilidad teórica de obtener cero caras $\frac{1}{8} = 0{,}12$.

Probabilidad de ocurrencia de cero caras en cincuenta lanzamientos es 0,12.

En este caso las probabilidades coinciden.

Probabilidad teórica de obtener dos caras $\frac{3}{8} = 0{,}375$.

Probabilidad de ocurrencia de cero caras en cincuenta lanzamientos es 0,35.

En este caso las probabilidades no coinciden, pero son similares.

Quinto año. Estadística

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Estadística Recolección de información: el cuestionario y fuentes de error, base de datos	- Reconocer la importancia del cuestionario en los procesos de selección de información. - Identificar fuentes potenciales de errores en la recopilación de datos por medio del cuestionario. - Diseñar cuestionarios simples enfocados hacia la búsqueda de información. - Recolectar datos por medio de la aplicación de un cuestionario y resumir la información correspondiente en una base de datos codificada. - Analizar la información recolectada por medio de un cuestionario mediante la elaboración de cuadros, gráficos con frecuencias absolutas y el cálculo de medidas de posición y variabilidad.	**Estadística y Probabilidad, Quinto año** - Resumir un grupo de datos mediante el empleo de la moda, la media aritmética (o promedio), el máximo y el mínimo de un grupo de datos e interpretar estas medidas en relación con la información recabada. - Identificar el recorrido de un grupo de datos como la diferencia entre el máximo y el mínimo.

Propuesta de problema

Se recomienda organizar al grupo en subgrupos. Mientras uno de los subgrupos resuelve el siguiente problema los demás resuelven problemas similares.

Suponga que se desea determinar la distribución del tiempo de los estudiantes en sus actividades fuera de la escuela: ¿cuántas horas al día invierten los estudiantes del grupo en actividades recreativas o a dormir en un día cualquiera entre semana? Para ello deben seleccionar las actividades habituales que acostumbran desempeñar los estudiantes; entre ellas:

- Ver televisión.

- Jugar fuera de la casa.
- Jugar dentro de la casa.
- Realizar trabajos escolares.
- Realizar tareas de la casa.
- Dormir.
- Otros.

Solución del problema

Cada subgrupo debe consultar a todos los miembros de la clase para caracterizar estas actividades. Se les puede orientar para que elaboren un cuestionario como el siguiente:

CUESTIONARIO SOBRE EL USO DEL TIEMPO POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES

El presente cuestionario tiene por objetivo conocer la distribución del tiempo fuera de la escuela de los estudiantes del grupo, en un día normal de clases.

Complete la información del cuadro incluyendo el número de horas por día que usted invierte, en promedio, a cada una de las siguientes actividades.

No. de cuestionario ____

Actividad	Número de horas diarias
1) Ver televisión	
2) Jugar fuera de la casa	
3) Jugar dentro de la casa	
4) Realizar trabajos escolares	
5) Realizar tareas de la casa	
6) Dormir	
7) Otras	

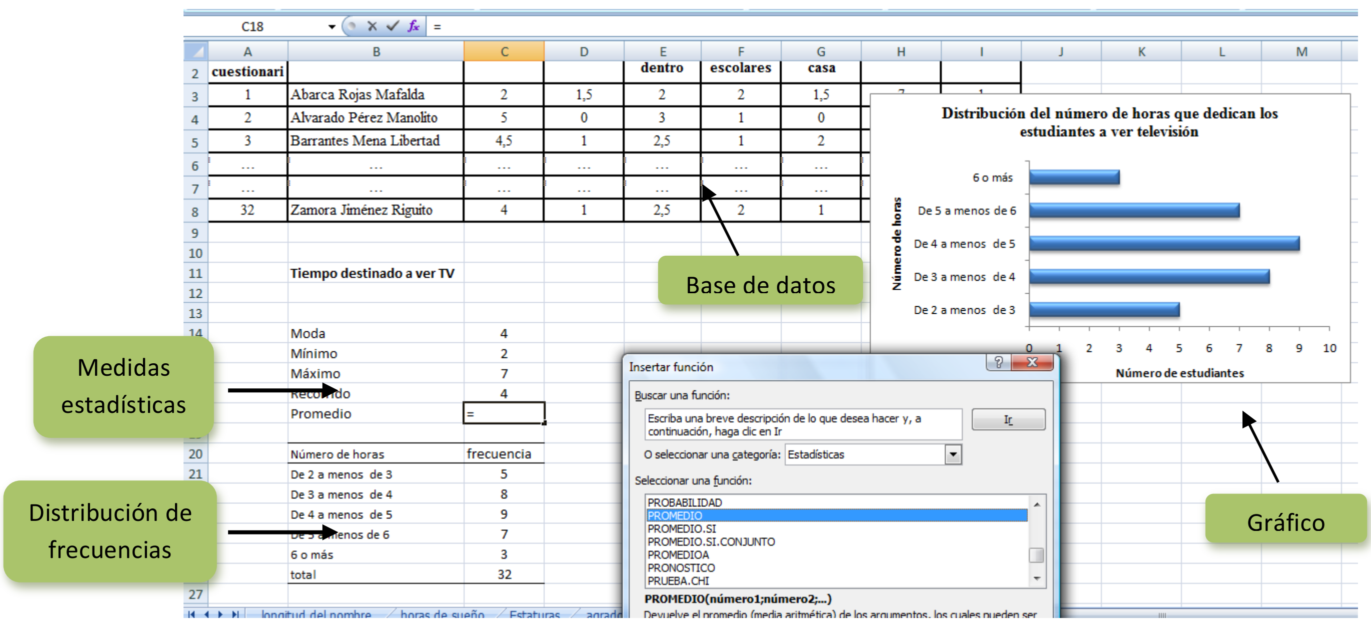
¡Muchas gracias!

Una vez recolectada la información se debe identificar una buena estrategia para procesarla. Una forma de llevar a cabo esta labor es mediante la elaboración de una base de datos:

Número de cuestionario	Nombre del estudiante	Ver TV	Jugar fuera	Jugar dentro	Trabajos escolares	Tareas en casa	Dormir	Otras
1	Abarca Rojas Mafalda	2	1,5	2	2	1,5	7	1
2	Alvarado Pérez Manolito	5	0	3	1	0	8	1
3	Barrantes Mena Libertad	4,5	1	2,5	1	2	6	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
32	Zamora Jiménez Riguito	4	1	2,5	2	1	7	0

Una vez recabada la información se requiere que utilicen algunas técnicas estadísticas para resumir estos datos. Una forma para resumirlos sería cuadros de frecuencia para cada variable, o bien gráficos de barras. Otra estrategia es emplear medidas de resumen, mínimo, máximo, moda, promedio y recorrido. Con esta información se refleja la distribución de tiempo para cada una de las actividades, tanto de la posición como de la variabilidad de los datos.

Se recomienda que en este tipo de problemas los cálculos sean desarrollados mediante la calculadora, pero si se cuenta con la posibilidad de recurrir a una computadora, específicamente a una hoja de cálculo, se puede resumir la información de una manera simple. Veamos la siguiente imagen:



En dicha imagen se despliega el estudio de la variable "tiempo destinado por los estudiantes a ver televisión". Aparecen cuadros, cálculo de medidas y la construcción del gráfico correspondiente. Evidentemente, con este apoyo tecnológico resulta más sencillo llevar a cabo el análisis de la información recabada. No obstante, si no se tuviera el recurso, el docente puede encontrar estrategias manuales para simplificar los análisis.

Para favorecer la comprensión de los análisis y una adecuada interpretación de los datos, el docente puede apoyarse en preguntas como:

a) ¿A qué actividad invierten más tiempo los estudiantes, a ver televisión o a jugar (dentro o fuera de la casa)?
b) De las tareas analizadas, ¿en cuál de ellas invierten más tiempo los estudiantes durante el día?
c) ¿Consideran ustedes que es suficiente el tiempo que los estudiantes invierten para realizar tareas escolares? Si la respuesta fuera negativa, ¿de qué manera podrían

dedicar más tiempo?, es decir, ¿a qué actividad o actividades reducirían el tiempo para invertir más en tareas escolares?

Una vez finalizada la actividad, el profesor debe institucionalizar las principales características y propiedades de los cuestionarios, así como su pertinencia en los procesos de recolección de datos cualitativos o cuantitativos. Acá puede proponer un cuestionario utilizado en el censo como un ejemplo de un cuestionario complejo y que se aplica cada diez o más años, o bien otras encuestas que se aplican regularmente en el país.

Como se mencionó en la solución del problema, se recomienda valerse de una hoja de cálculo como Microsoft Office Excel, que simplifica los cálculos de las medidas de posición, permitiendo también elaborar cuadros y gráficos. En caso de no contar con la posibilidad de utilizar un software puede emplearse la calculadora para obtener las medidas estadísticas.

Sexto año. Probabilidad

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Probabilidad Propiedades de las probabilidades: la probabilidad de cualquier evento es un valor numérico entre 0 y 1 inclusive; la probabilidad de un evento seguro es 1 y de un evento imposible es 0.	• Deducir mediante situaciones concretas los valores que puede tomar la probabilidad de un evento cualquiera, de un evento seguro y de un evento imposible.	• Identificar el número de resultados favorables de un evento dado. • Determinar eventos seguros, probables e imposibles en situaciones aleatorias particulares. • Interpretar los conceptos de eventos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples. • Comparar las fracciones propias utilizando los símbolos <, > o =. • Representar fracciones mediante un número con expansión decimal. • Analizar la proporción entre dos cantidades numéricas. • Definición clásica o Laplaciana de Probabilidad.

Propuesta del problema

Para el siguiente problema se puede preguntar a cada estudiante del grupo por el principal medio de transporte que utiliza para trasladarse de la casa al colegio y luego se resumen las frecuencias en un cuadro. A partir de los datos recolectados se pueden plantear preguntas similares a las que se presentan en el problema.

Suponga que en un grupo de Sexto año los 32 estudiantes utilizan regularmente distintos medios de transporte para trasladarse del hogar a la escuela y viceversa. La siguiente tabla muestra el número de estudiantes que utilizan un medio de transporte específico:

Medio de transporte	Número de estudiantes
Transporte público	12
Bus o buseta privada	8
Vehículo familiar o de vecinos	4
Caminando	8
Total	32

De acuerdo con la información anterior, si se selecciona un estudiante del grupo mediante una rifa, considere los siguientes eventos:

A: El estudiante viaja en transporte público a la escuela.

B: El estudiante viaja en bus o buseta privada a la escuela.

C: El estudiante va en bicicleta al colegio.

D: El estudiante viaja en vehículo familiar o de vecinos a la escuela.

E: El estudiante va caminando a la escuela.

F: El estudiante va en tren al colegio.

G: El estudiante viaja a la escuela en transporte público o en bus o buseta privada o en vehículo familiar o de vecinos o va caminando.

Resuelva lo siguiente:

a) Determine el número de resultados simples a favor de cada uno de los eventos anteriores y clasifíquelos en eventos imposibles, seguros y probables.
b) Calcule la probabilidad de cada uno de los eventos anteriores.
c) A partir de la información obtenida en a) y b) deduzca lo siguiente: ¿Cuál es la probabilidad de un evento imposible? ¿Cuál es la probabilidad de un evento seguro? ¿Cuál es la probabilidad de un evento probable? ¿Entre qué par de números se encuentra la probabilidad de cualquier evento? Justifique sus respuestas.

Solución del problema

a) Se espera que los estudiantes contesten esta pregunta sin ninguna dificultad, ya que es un conocimiento previo que poseen. Puede suceder que no recuerden qué es un evento seguro, probable e imposible, pero el docente podría recordarles estos conceptos. Sin embargo, se recomienda no recordarlos hasta que algún estudiante pregunte por ellos. El número de resultados simples a favor de cada uno de los eventos se señala en la siguiente tabla.

Evento	N° de resultados simples
A	12
B	8
C	0
D	4
E	8
F	0
G	32

A continuación se presenta la clasificación de los eventos según sean eventos seguros, probables e imposibles.

Eventos imposibles	Eventos seguros	Eventos probables
C y F	G	A, B, D y E

b) En este problema se puede aplicar la definición clásica o Laplaciana de Probabilidad para calcular la probabilidad de cada uno de los eventos descritos, dado que cada estudiante tiene la misma posibilidad de ser seleccionado. Para calcular la probabilidad de cada uno de los eventos se debe dividir el número de resultados simples a favor del evento entre el total de resultados posibles (32). En la siguiente tabla se indica la probabilidad de cada uno de los eventos.

Evento	Probabilidad
A	$\frac{12}{32} \approx 0{,}38$
B	$\frac{8}{32} = 0{,}25$
C	$\frac{0}{32} = 0$
D	$\frac{4}{32} \approx 0{,}13$
E	$\frac{8}{32} = 0{,}25$
F	$\frac{0}{32} = 0$
G	$\frac{32}{32} = 1$

c) Mediante la observación de los resultados obtenidos en los incisos a) y b) se podría deducir que:

La probabilidad de un evento imposible es 0, ya que no posee resultados simples a favor y por tanto el resultado de dividir el número de resultados a favor entre el número de resultados posibles da 0, tal como sucede con los eventos C y F.

La probabilidad de un evento seguro es 1, ya que un evento seguro tiene a favor todos los resultados posibles, como ocurre con el evento G.

La probabilidad de un evento probable es mayor que 0 y menor que 1, puesto que el número de resultados simples a favor de un evento probable es mayor que cero y menor que el número de resultados posibles, como ocurre con los eventos A, B, D y E.

La probabilidad de cualquier evento es un número mayor o igual que cero y menor o igual que uno, puesto que un evento se clasifica en un evento seguro, imposible o probable. De esta forma hay tres resultados posibles para los valores que puede tomar la probabilidad de un evento: que sea cero (evento imposible), uno (evento seguro) o un número entre cero y uno (evento probable).

Durante el cierre o clausura se deben formalizar las propiedades de las probabilidades. En todo momento es oportuno relacionar los nuevos conceptos con la resolución del problema planteado, así el aprendizaje es significativo.

Para agilizar los cálculos el docente puede pedir a los estudiantes que utilicen la calculadora. Esto permitirá que concentren sus esfuerzos en el análisis de los valores obtenidos y no en el cálculo aritmético. Por ejemplo, se puede manipular la calculadora para determinar la expansión decimal de las fracciones que representan las probabilidades de los eventos, esto permitiría comparar la probabilidad de los eventos de una manera más sencilla.

Sexto año. Estadística

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Estadística Porcentajes: comparaciones entre grupos	- Identificar la frecuencia porcentual como herramienta fundamental para los análisis comparativos entre dos o más grupos de datos. - Utilizar diagramas lineales para representar tendencias en series de tiempo.	**Estadística y Probabilidad, Sexto año** - Resumir y clasificar grupos de datos utilizando la frecuencia porcentual.

Propuesta de problema

Se sugiere llevar a cabo el problema siguiente junto con otros de la misma naturaleza, de modo que sea resuelto en un subgrupo y presentado posteriormente a una discusión general; pueden emplear calculadoras para simplificar los cálculos:

De acuerdo con información del Centro Centroamericano de Población de la Universidad de Costa Rica, se tiene la siguiente información:

Estimación de la población de 70 años y más para Costa Rica, 30 de junio del 2012, según el sexo

Edad en años cumplidos	Masculino	Femenino	Total
70-74	39 163	42 686	81 849
75-79	27 026	32 285	59 311
80-84	17 675	22 656	40 331
85-89	8 937	12 394	21 331
90-94	3 230	4 853	8 083
95 y más	1 207	1 930	3 137
Total	97 238	116 804	214 042

Fuente: http://ccp.ucr.ac.cr

En otro documento de esta misma página Web se señala: La experiencia indica que por cada 100 nacimientos de niñas, nacen aproximadamente 105 varones.

Realice un análisis de la información anterior, comparando la distribución de la población adulta mayor masculina con la femenina de Costa Rica estimada para el 2012.

Solución del problema

En este nivel el estudiantado debe haber desarrollado diversas habilidades para la lectura de datos, de modo que no se quede simplemente con los datos numéricos sino que pueda identificar lo que hay detrás de ellos. En este sentido, se podría indicar mediante la comparación de datos absolutos que pareciera existir una contradicción, pues aunque nacen más hombres que mujeres, se estipula que para personas mayores de 70 años hay muchas más mujeres que hombres.

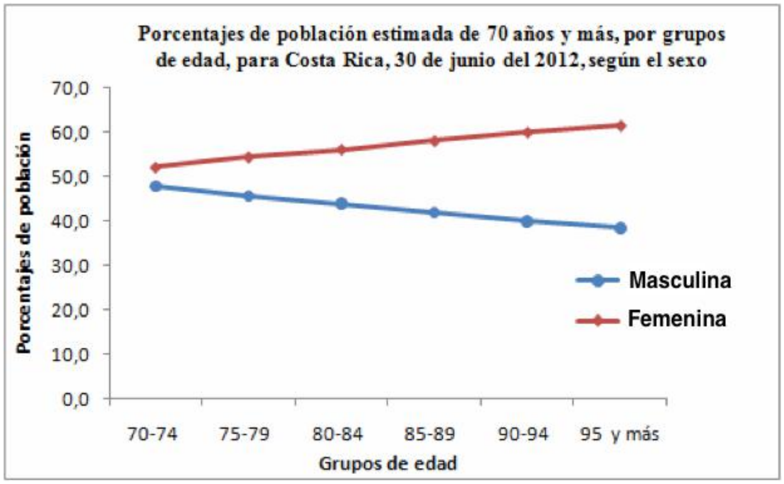
Aquí se podría intervenir para que los estudiantes formulen algunas hipótesis del por qué ocurre eso. Al respecto, diversas investigaciones han establecido que el riesgo de mortalidad es mucho mayor para los varones, por lo que conforme se avanza en edad los porcentajes de muertes son mayores entre los hombres que entre las mujeres. Por ello, a la edad adulta llegan con vida una mayor cantidad de mujeres que de hombres, y este hecho se mantiene en los grupos de edad de las personas adultas mayores.

Para tener una mejor idea de lo que se presenta, el profesor puede orientarles para que determinen el porcentaje de población masculina o femenina para cada grupo de edad, tal como se señala en el cuadro (los cálculos deben hacerlos mediante la calculadora).

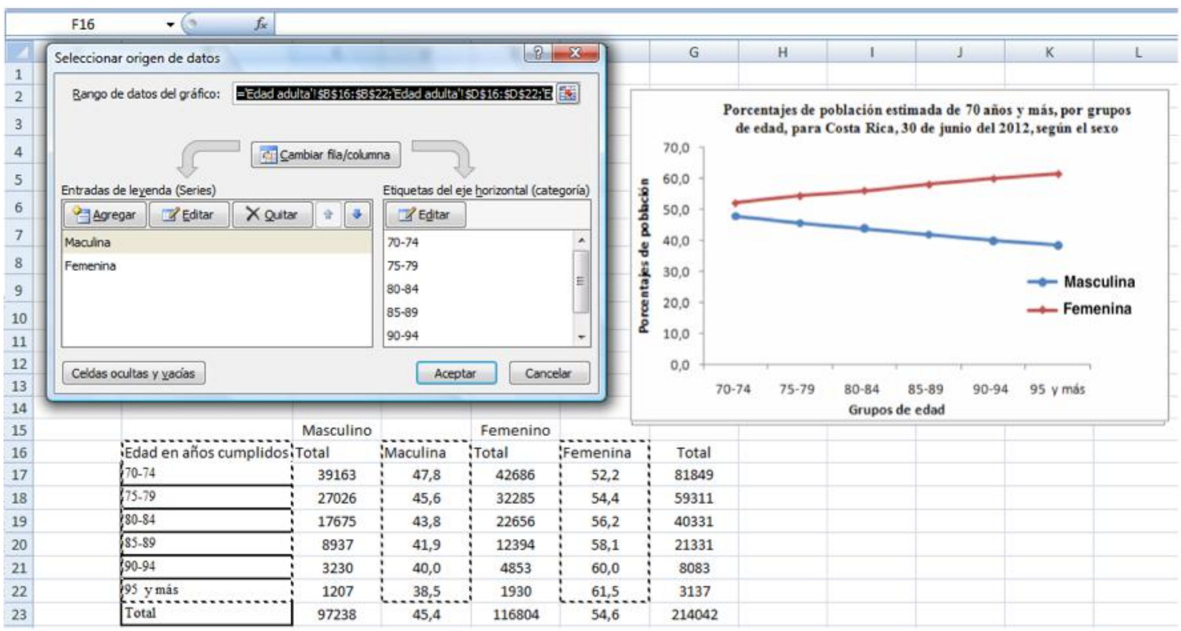
Estimación de la población de 70 años y más para Costa Rica, 30 de junio del 2012, según el sexo

Edad en años cumplidos	Masculino		Femenino		
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje	Total
70-74	39163	47,8	42686	52,2	81849
75-79	27026	45,6	32285	54,4	59311
80-84	17675	43,8	22656	56,2	40331
85-89	8937	41,9	12394	58,1	21331
90-94	3230	40,0	4853	60,0	8083
95 y más	1207	38,5	1930	61,5	3137
Total	**97238**	**45,4**	**116804**	**54,6**	**214042**

Una vez que hayan definido los porcentajes para cada grupo de edad, se puede evidenciar que conforme se avanza en edad los porcentajes de población masculina se hacen cada vez más pequeños, y como consecuencia, los porcentajes de mujeres aumentan. Esto ratifica que hay una mayor cantidad de muertes entre hombres que entre mujeres. Dicha tendencia puede ser mejor visualizada por medio de un gráfico lineal como el siguiente:



El gráfico evidencia la ampliación de la brecha en los porcentajes de población masculina y femenina. Pese a que este gráfico puede haber sido elaborado manualmente, si se cuenta con acceso a computadoras puede mejorarse su calidad, tal como se muestra en la imagen:



Para finalizar la actividad, el profesor debe mostrar la conveniencia de hacer una lectura profunda de la información que se recibe y emplear las técnicas estadísticas que se conocen para examinar más allá de la información dada. En este sentido, debe resaltar la importancia de los porcentajes y de la visualización gráfica de los datos. Por último, en el cierre se debe indicar que los gráficos de línea son una valiosa estrategia visual para analizar tendencias de datos en el tiempo.

Como se observó en la resolución del problema anterior, se puede recurrir a la tecnología, específicamente a una hoja de cálculo como Microsoft Office Excel para elaborar un gráfico lineal. También puede usarse este software para calcular el porcentaje de población masculina o femenina para cada grupo de edad. En caso de no tener acceso a este tipo de software puede emplearse la calculadora para obtener los porcentajes respectivos.

Sexto año. Problema principal

Se expone a continuación un análisis detallado de dos problemas sobre probabilidades para Sexto grado que permitirán introducir la definición clásica o Laplaciana de Probabilidad y además visualizar de una forma clara y concreta algunos elementos incluidos en los fundamentos de los nuevos programas de estudio.

El objetivo del primer problema (problema auxiliar) es repasar los conceptos de resultados simples de un evento y su relación con la identificación de los eventos más probables, igualmente probables y menos probables. El segundo problema pretende afianzar la definición clásica o Laplaciana de Probabilidad. Los dos problemas se refieren a una situación en la cual dos personas juegan a seleccionar de una urna bolas de dos colores diferentes. Los problemas se distinguen porque en el primero hay una sola urna que contiene más bolas de un color que del otro, mientras que en el segundo problema hay dos urnas cuyo total de bolas en cada una es diferente, también la cantidad de bolas de los dos colores son diferentes en las dos urnas.

Descripción: problema auxiliar

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
• Resultados simples a favor de un evento • Eventos más probables, igualmente probables y eventos menos probables	• Interpretar los conceptos de eventos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo con la frecuencia de sus resultados simples.	**Estadística y Probabilidad, Cuarto año** • Identificar los distintos resultados simples de un experimento aleatorio.

Etapas de organización de la lección

Como se mencionó antes, en el desarrollo de las lecciones hay dos etapas que se pueden distinguir según los propósitos de la enseñanza y aprendizaje: el aprendizaje del conocimiento, y la movilización y aplicación de los conocimientos. En la primera etapa se realiza el aprendizaje de conocimientos nuevos, mientras que la segunda ocurre una vez efectuada la primera y busca reforzar y ampliar los aprendizajes consumados. A continuación se presenta un análisis detallado de un problema concreto organizado según estas dos etapas. Con este problema se procura que los estudiantes recuerden los conocimientos descritos.

I Etapa: El aprendizaje del conocimiento

Para insertar el tema, se puede llevar a la clase una bolsa de papel con la cantidad de bolas de dos colores que aparecen en la figura del problema. Antes de revelar el problema se pueden realizar algunos ensayos con el objetivo de captar el interés del grupo y para que entiendan la dinámica del juego.

Propuesta del problema

Resuelva el siguiente problema individualmente:

Lucrecia y Alberto juegan a sacar bolas de colores de una bolsa de papel que contiene cinco bolas rojas y diez bolas azules todas del mismo tamaño. Lucrecia gana el juego si saca de la bolsa una bola roja y Alberto gana si saca una azul. Ninguno de los dos puede ver dentro de la bolsa qué color se está escogiendo.

Imagen de elaboración propia

a) ¿Tienen Lucrecia y Alberto la misma probabilidad de ganar el juego? Justifique su respuesta.

b) En caso de que el juego no sea justo, ¿qué cambios realizaría al juego para que Lucrecia y Alberto tengan la misma probabilidad de ganar?

Trabajo estudiantil independiente

a) Se debe idear una estrategia para determinar si Lucrecia y Alberto tienen la misma probabilidad de ganar el juego o si uno de ellos tiene ventaja sobre el otro, esto lo pueden hacer analizando las posibilidades que tiene cada quién.

Este análisis de posibilidades se genera observando los resultados simples a favor de cada uno. Se espera que cada estudiante posea la habilidad de identificar el número de resultados simples a favor de un evento e interpretar los conceptos de eventos más probables, igualmente probables y menos probables tomando como referencia la frecuencia de sus resultados simples. Una posible estrategia consiste en identificar los resultados simples a favor de cada uno de los dos eventos siguientes:

A: Seleccionar una bola roja.

B: Seleccionar una bola azul.

La bolsa contiene cinco bolas rojas y diez azules, por lo tanto:

- El número de resultados simples a favor del evento A es cinco.
- El número de resultados simples a favor del evento B es diez.

De este modo, cada estudiante puede observar qué tipo de bola (roja o azul) es más probable que se seleccione, sin ver dentro de la bolsa. Deberían deducir que seleccionar una bola azul tiene más posibilidades que una bola roja, pues el evento B: "Seleccionar una bola azul" tiene más resultados simples a favor que el evento A: "Seleccionar una bola roja".

En conclusión, Alberto tiene más probabilidad de seleccionar una bola azul que la probabilidad que tiene Lucrecia de seleccionar una bola roja.

b) Debido a que Lucrecia y Alberto no tienen la misma probabilidad de ganar el juego, cada alumno debe proponer los cambios que realizarían para que exista justicia o equidad en las probabilidades de selección. Una vez más se debe recurrir a un conocimiento previo: que dos eventos son igualmente probables si tienen el mismo número de resultados simples a favor.

Por lo tanto, para que el juego sea justo se deben proponer cambios que promuevan que haya la misma cantidad de bolas rojas y azules dentro de la bolsa. Hay dos formas diferentes de igualar el número de bolas de cada color que deben estar dentro de la bolsa:

i. Agregar a la bolsa cinco bolas rojas más, de esta forma habría la misma cantidad de bolas rojas y azules (diez de cada color).
ii. Sacar de la bolsa cinco bolas azules para que queden cinco bolas de cada color.

En ambos casos hay igual número de resultados simples a favor de los eventos "Seleccionar una bola roja" y "Seleccionar una bola azul". En general, cualquier cambio que produzca que haya la misma cantidad de bolas azules que rojas en la bolsa hará que el juego sea justo.

En caso que algún estudiante no tuviera las bases previas que se indican anteriormente, el docente puede considerar algunas interrogantes para que, mediante la reflexión y el razonamiento lógico, se puedan deducir estos principios básicos que se requieren para resolver el problema. Algunas de las intervenciones que puede realizar el docente son:

- ¿Hay en la bolsa la misma cantidad de bolas rojas que azules?
- ¿Cuántos resultados simples tiene a favor el evento "seleccionar una bola roja"? ¿Qué indica este número?
- ¿Cuántos resultados simples tiene a favor el evento "seleccionar una bola azul"? ¿Qué indica este número?

- Compare los resultados obtenidos y formule una conclusión al respecto.

Discusión interactiva y comunicativa

En una plenaria, se solicita a algunos estudiantes que comuniquen los resultados obtenidos en el problema. Para ello, primero les pregunta por la estrategia que aplicaron para resolverlo, luego pregunta si Lucrecia y Alberto tienen la misma posibilidad de ganar el juego. Si la respuesta es que no tienen la misma posibilidad de ganar, entonces se debe preguntar quién tiene más posibilidades de ganar el juego, si Lucrecia o Alberto, y qué razones fundamentan cada respuesta.

En esta etapa se debe promover la participación de cada estudiante y escuchar con atención sus respuestas con el objetivo de identificar la aplicación correcta de las habilidades descritas en la resolución del problema, además de contrastar los resultados obtenidos y verificar que cada quién use correctamente el lenguaje matemático y probabilístico.

Clausura y cierre

En la clausura de este problema se debe recordar a los miembros del grupo los siguientes conceptos:

- Resultados simples de un evento.
- Eventos más probables, igualmente probables y menos probables.

El objetivo de este problema es precisamente que cada alumno recuerde los conceptos descritos, pues son necesarios para resolver el siguiente problema con el cual se pretende introducir la definición clásica o Laplaciana de Probabilidad.

Se debe enfatizar una particularidad del problema, y es que cada bola tiene la misma probabilidad de ser seleccionada, esto porque todas son de la misma forma y tienen el mismo tamaño y peso, por lo que al seleccionar una bola sin ver dentro de la bolsa no hay forma de saber cuál color se está escogiendo. El hecho que las bolas tengan la misma forma y el mismo tamaño y peso anula la posibilidad de que haya una bola con más probabilidad de selección que otra. A continuación se presenta una situación en la que los elementos a seleccionar no cumplen con estas características.

Se introducen cinco manzanas y diez bolas azules en una bolsa, tal como se muestra en la figura de la derecha. Sin ver dentro de la bolsa que se está escogiendo, ¿qué es más probable seleccionar, una manzana o una bola azul?

En la situación anterior debe observarse que las manzanas y las bolas no tienen la misma forma ni tampoco el mismo tamaño o peso, por lo que al seleccionar una de las dos podría saberse por su forma, tamaño o peso cuál se está escogiendo, incluso si no se ve dentro de la bolsa. Debido a esto no se puede comprobar fácilmente si es más probable seleccionar una manzana o una bola azul.

II Etapa: Movilización y aplicación de los conocimientos

Para favorecer una mejor comprensión de los conceptos, se recomienda plantear algunos problemas de reproducción, conexión o de reflexión antes de presentar el problema con el cual se pretende incorporar la definición clásica o Laplaciana de Probabilidad. A continuación se ofrece un problema que puede ser considerado en esta etapa.

Roberto construyó un dado de la siguiente manera. Colocó en dos de sus caras el número tres, en las otras caras simbolizó los números dos, cuatro, cinco y seis. En ninguna cara trazó el uno. Si Roberto lanza el dado dos veces y suma los puntos obtenidos, conteste las siguientes preguntas:

1. *¿Es más probable que el resultado de la suma sea cuatro o que sea cinco?*
2. *¿Cuál es el resultado de la suma más probable?*
3. *Indique dos resultados que sean igualmente probables.*

Se puede llevar a la clase un dado con las características descritas y hacer una serie de lanzamientos con el propósito que se entienda la situación a la cual hace referencia el problema, esto podría motivarlos a resolverlo.

Es pertinente que se realicen algunas intervenciones para corroborar que el estudiantado comprendió el problema, por ejemplo se pueden formular preguntas similares a las siguientes:

- ¿Qué números se deben obtener en cada lanzamiento para que el resultado de la suma sea diez?
- ¿Cuántos resultados simples a favor tiene el evento “obtener una suma igual a diez”?

Se espera que a partir de las intervenciones realizadas se obtengan todos los posibles resultados. La siguiente tabla reseña todos los posibles resultados para la suma de los puntos obtenidos.

	Segundo lanzamiento					
Primer lanzamiento	2	3	3	4	5	6
	4	5	5	6	7	8
	5	6	6	7	8	9
	5	6	6	7	8	9
	6	7	7	8	9	10
	7	8	8	9	10	11
	8	9	9	10	11	12

El siguiente cuadro expresa el número de resultados simples a favor de cada una de las sumas posibles.

Sumas posibles (resultados posibles)	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Resultados simples a favor	1	4	6	6	7	6	3	2	1

Según los datos de la tabla anterior:

a) Es más probable que el resultado de la suma sea cinco que cuatro, pues hay cuatro resultados simples a favor del evento “obtener una suma igual a cinco”, mientras que el número de resultados simples a favor del evento “obtener una suma igual a cuatro” es uno.
b) Además, el resultado de la suma más probable es ocho pues tiene siete resultados simples a favor.
c) Por último, obtener un seis y un siete son dos resultados igualmente probables pues tienen la misma cantidad de resultados simples a favor. También son igualmente probables los resultados obtener un cuatro y un doce.

Este es un problema de *Conexión,* debido a que es un problema similar al anterior en cuanto que hay que determinar los resultados simples a favor de los eventos; sin embargo, el determinar estos resultados simples es más complejo que en el problema anterior, pues hay que considerar las distintas posibilidades y que el dado que se utiliza no es un dado común, por lo que es un problema de mayor exigencia cognitiva. Por ejemplo, un posible resultado es obtener una suma de siete. Este resultado se puede obtener de seis maneras diferentes que aparecen de color rojo en el siguiente cuadro:

	Segundo lanzamiento					
Primer lanzamiento	2	3	3	4	5	6
2	4	5	5	6	7	8
3	5	6	6	7	8	9
3	5	6	6	7	8	9
4	6	7	7	8	9	10
5	7	8	8	9	10	11
6	8	9	9	10	11	12

Se recomienda presentar el segundo problema después de que algunos estudiantes comuniquen los hallazgos obtenidos y que se sugieran algunos problemas adicionales de reproducción, conexión o reflexión.

Éste es un problema auxiliar que pretende entrenar al estudiantado en algunos conocimientos que necesita para aprender la definición clásica o Laplaciana de Probabilidad. Ofrecer un problema que permita introducir la definición clásica o Laplaciana de Probabilidad es el objetivo principal de este documento de apoyo para Probabilidad en Sexto año.

Problema para introducir la definición clásica o Laplaciana de Probabilidad

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Definición clásica o Laplaciana de Probabilidad	- Determinar la probabilidad de un evento como la proporción de resultados favorables del evento entre el total de resultados.	- Resultados a favor de un evento. - Eventos más probables, igualmente probables y eventos menos probables. - Comparar las fracciones propias utilizando los símbolos <, > o =. - Representar fracciones mediante un número con expansión decimal. - Analizar la proporción entre dos cantidades numéricas. - Identificar la frecuencia porcentual como herramienta fundamental para los análisis comparativos entre dos o más grupos de datos.

Etapas de organización de la lección

I Etapa: El aprendizaje del conocimiento

Para introducir el tema, se podrían llevar a la clase dos urnas con bolas de dos colores distintos, tal como se indica en la figura del problema. Antes de presentar el problema se pueden realizar algunos ensayos con el objetivo de captar el interés y para que se entienda la dinámica del juego.

Para resolver el siguiente problema se recomienda organizar la clase en subgrupos de tres estudiantes.

Propuesta de problema

Lucrecia y Alberto juegan ahora cada uno con una urna diferente. Lucrecia escogió la urna que contiene cuatro bolas rojas y cinco azules, mientras que Alberto optó por la urna que contiene tres bolas rojas y tres azules. Ellos juegan a que cada uno saca de su urna una bola roja. Ninguno de los dos puede ver qué color está escogiendo.

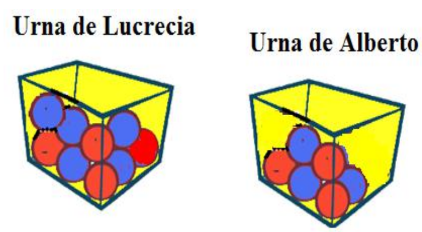


Imagen: Elaboración propia

a) ¿En este nuevo juego quién tiene más probabilidad de ganar: Lucrecia o Alberto? Justifique su respuesta.

b) ¿Qué cambios realizaría al juego para que sea un juego justo?

Trabajo estudiantil independiente

a) Debido a que se debe idear una estrategia para resolver el problema se activa el proceso *Plantear y resolver problemas.* En este caso cada subgrupo podría emplear la misma estrategia que en el problema anterior e identificar el número de resultados simples a favor de los siguientes eventos:

A: Seleccionar una bola roja de la urna de Lucrecia.

B: Seleccionar una bola roja de la urna de Alberto.

La urna de Lucrecia contiene cuatro bolas rojas y la de Alberto contiene tres, por lo tanto:

- El número de resultados simples a favor del evento A es cuatro.
- El número de resultados simples a favor del evento B es tres.

Basados en los resultados obtenidos hasta el momento y mediante un razonamiento incorrecto, algún subgrupo podría responder que en este juego Lucrecia tiene más probabilidad de ganar que Alberto debido a que hay más bolas rojas en la urna de Lucrecia que en la de Alberto. Si algún subgrupo utiliza este argumento se debe orientar a que encuentre el error cometido. Por ejemplo, se puede preguntar ¿en cuál de las urnas es más probable obtener una bola azul?, esto llevará a los estudiantes a descubrir que también en la urna de Lucrecia hay más bolas azules, lo cual genera una contradicción.

Igualmente se podría preguntar por la diferencia entre este juego y el anterior. Los subgrupos deberán descubrir que en este nuevo juego el número total de bolas en cada urna es diferente (nueve en la urna de Lucrecia y seis en la urna de Alberto). En el juego anterior había una sola bolsa con quince bolas en total, por lo que cada uno escogía una bola entre quince posibles, mientras que en el nuevo juego Lucrecia escoge una bola entre nueve posibles y Alberto una entre seis posibles. Cada subgrupo debe tomar en cuenta este descubrimiento para concretar cuál de los dos tiene más posibilidad de ganar.

En este momento se promueve el proceso *Razonar y argumentar,* ya que se debe justificar cada respuesta y a la vez porque se efectúa una comparación analítica del número de bolas que hay en cada urna.

Una vez que se haya descubierto que el número total de bolas en cada urna es diferente y que este hecho afecta las probabilidades de cada caso, se espera que hagan uso de las habilidades adquiridas en el área de *Relaciones y Álgebra* sobre razones y proporciones, para determinar que en el caso de Lucrecia la proporción de bolas rojas es cuatro de nueve, mientras que en el caso de Alberto esta proporción es tres de seis. Debido al uso de habilidades aprendidas en otras áreas de conocimiento, en este momento se activa el proceso *Conectar.*

Si no logran identificar estas relaciones, el docente puede formular algunas interrogantes, tales como:

- ¿Cuál es el número de resultados simples a favor del evento “seleccionar una bola roja de la urna de Lucrecia”?
- ¿Cuál es el número de resultados simples del evento “seleccionar una bola (no importa el color) de la urna de Lucrecia”?
- ¿Qué relación existe entre el número de resultados simples del evento seleccionar una bola roja de la urna de Lucrecia y el número de resultados simples del evento seleccionar una bola (no importa el color) de la urna de Lucrecia?

En todo momento se busca que cada estudiante, en vez de realizar una comparación absoluta de los resultados posibles, lleve a cabo una comparación relativa entre los resultados simples de un evento y el total de resultados posibles. Se espera que logre descubrir la proporción de bolas rojas en cada urna y con ello proceda a realizar la comparación correspondiente.

Cada estudiante debe estar en capacidad de manejar la habilidad del área de *Números* "Analizar la proporción entre dos cantidades numéricas" para representar la respuesta dada, esto es que la probabilidad que tiene Lucrecia de seleccionar una bola roja de su urna es $\frac{4}{9}$. Mediante un razonamiento similar se podría descubrir que la probabilidad que tiene Alberto de seleccionar una bola roja de su urna es $\frac{3}{6}$ (tres de las seis bolas de la urna de Alberto son rojas). Una vez más, en este momento se impulsa el proceso *Conectar,* dado que se emplean habilidades aprendidas en otras áreas de conocimiento.

Hasta este momento se ha determinado que la posibilidad que tiene Lucrecia de ganar es $\frac{4}{9}$ (cuatro de las nueve bolas son rojas) y la posibilidad que tiene Alberto de ganar es $\frac{3}{6}$ (tres de las seis bolas son rojas). Si los subgrupos consideran que ya han resuelto el problema, se debe intervenir para preguntarles quién tiene más probabilidad de ganar, si Lucrecia o Alberto. Para definir esto deben comparar ambas cantidades y determinar cuál es mayor, para ello podrían emplear la habilidad "comparar las fracciones propias utilizando los símbolos <, > o =" del área de *Números*. Empleando esta habilidad, adquirida previamente, se logra establecer que $\frac{4}{9} < \frac{3}{6}$, por lo que Alberto tiene más probabilidad de ganar el juego. Por tercera vez en este problema se activa el proceso *Conectar.*

Asímismo podrían utilizar la habilidad previa "representar fracciones mediante un número con expansión decimal" del área de *Números* para comparar las probabilidades de cada uno, activándose de esta manera los procesos *Conectar* y *Representar,* ya que se representa de dos formas distintas el mismo número. Por ejemplo, mediante el uso de la calculadora se encuentra la expansión decimal de las dos fracciones, esto es $\frac{4}{9} \approx 0.44$ y $\frac{3}{6} = 0.5$ y de igual modo se concluye que Alberto tiene más probabilidad de ganar.

b) En la solución al inciso a) se descubrió que para realizar la comparación entre eventos en cuanto a probabilidades se debe dividir el número de resultados simples a favor de cada evento entre el total de resultados. Debido a esto algunos cambios que se podrían proponer son los siguientes:

i. Agregar a la urna de Lucrecia una bola roja, de esta forma la probabilidad que tiene Lucrecia de ganar es $\frac{5}{10}$(cinco de las diez bolas son rojas), que es la misma probabilidad que tiene Alberto de ganar, ya que $\frac{5}{10}=\frac{3}{6}$.

ii. Quitar de la urna de Lucrecia una bola azul, así la probabilidad que tiene Lucrecia de ganar es $\frac{4}{8}$ (cuatro de las ocho bolas son rojas), que es la misma probabilidad que tiene Alberto de ganar, debido que $\frac{4}{8}=\frac{3}{6}$.

iii. Agregar una bola azul en la urna de Lucrecia y quitar una bola roja de la urna de Alberto, este cambio hace que la probabilidad de ganar que tiene Lucrecia sea $\frac{4}{10}$ (cuatro de las diez bolas son rojas) y la probabilidad que tiene Alberto de ganar sea $\frac{2}{5}$ (dos de las cinco bolas son rojas).

En general, cualquier cambio que produzca que haya la misma cantidad de bolas rojas y azules en cada urna o bien que favorezca que Lucrecia y Alberto tengan la misma probabilidad de ganar hará que el juego sea justo.

Discusión interactiva y comunicativa

En una plenaria se pregunta a cada subgrupo por la estrategia escogida para resolver el problema. Seguidamente se pide a cada subgrupo que comunique los resultados obtenidos y que mencione quién tiene más probabilidad de ganar el juego, si Lucrecia o Alberto. Una vez que se compartan las estrategias y los resultados obtenidos, es importante analizar que para determinar cuál de dos eventos es más probable no es suficiente con realizar una comparación absoluta de los resultados favorables de cada evento. Es necesario efectuar una comparación relativa entre el número de resultados favorables y el total de resultados posibles. En esta etapa se incentiva el proceso *Comunicar,* pues cada subgrupo comparte sus ideas con los demás miembros del grupo. También se activa el proceso *Razonar y argumentar,* ya que se deben justificar matemáticamente las ideas que se comuniquen.

Clausura y cierre

En este paso se deben analizar las respuestas que haya propuesto cada subgrupo. Es esencial también establecer una relación entre el trabajo desarrollado al resolver el problema y la definición clásica o Laplaciana de Probabilidad. Se debe enfatizar que en algunos casos no es suficiente con realizar una comparación absoluta de los resultados favorables de los eventos para determinar cuál es más probable, sino que cuando el número total de resultados posibles de dos o más eventos es diferente, se vuelve necesaria una comparación relativa de los resultados favorables con respecto al total de resultados.

A partir de estas comparaciones se puede introducir la definición clásica o Laplaciana de probabilidad, que es la siguiente.

Definición clásica o Laplaciana de Probabilidad

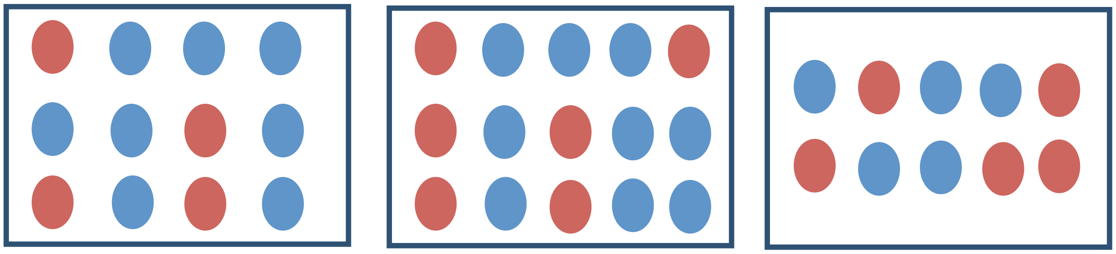
Si los resultados simples de un experimento son igualmente probables, entonces la probabilidad de un evento es la proporción de resultados simples a favor del evento entre el total de resultados posibles del experimento.

En resumen, en la resolución de este problema pueden activarse los cinco procesos matemáticos que se proponen en los programas de estudio. Se activa el proceso *Razonar y argumentar* debido a que cada subgrupo argumenta ante los demás miembros del grupo los resultados obtenidos. Se genera el proceso *Plantear y resolver problemas,* pues por las características del problema su resolución no es trivial y por ende se debe diseñar una estrategia y los métodos más adecuados para resolverlo. Por ejemplo, hay que valorar si la estrategia de determinar los resultados simples favorables de cada evento les permitirá resolver el problema. En la resolución del problema se puede activar el proceso *Comunicar,* ya que los estudiantes expresan oralmente las estrategias que les permitieron resolver el problema así como los resultados y argumentos matemáticos que justifican la solución. Se fortalece el proceso *Conectar* debido a que en la resolución de problemas se emplean habilidades de las áreas *Números* (comparar fracciones propias utilizando los símbolos <, > o = o mediante su expansión decimal) y *Relaciones y Álgebra* (analizar la proporción entre dos cantidades numéricas). Por último, se promueve el proceso *Representar,* pues se debe idear una manera de representar la noción matemática “cuatro de las nueve bolas son rojas”, la cual puede representarse mediante la fracción propia $\frac{4}{9}$ o mediante el número decimal $0{,}44$.

II Etapa: Movilización y aplicación de los conocimientos

En esta etapa se busca reforzar y ampliar los aprendizajes asimilados. Para reforzar la definición clásica o Laplaciana de Probabilidad se propone el siguiente problema para que sea resuelto en los mismos subgrupos de trabajo conformados para resolver el problema anterior.

Según la figura adjunta, en la caja A se han colocado ocho fichas azules y cuatro rojas. En la caja B se han introducido nueve fichas azules y seis rojas y la caja C contiene cinco fichas azules y cinco rojas. Se han movido bien las cajas para que las fichas se mezclen. Con los ojos vendados se debe sacar una ficha roja para ganar un premio. ¿Cuál de las tres cajas escogería para sacar la ficha roja? Justifique su respuesta.



Caja A **Caja B** **Caja C**

Imagen de elaboración propia

Se debe estar alerta en caso de que algún estudiante responda que se deben seleccionar las cajas B o C por tener la mayor cantidad de bolas rojas, ya que como se explicó en la resolución del problema anterior, éste es un razonamiento incorrecto. Si esto sucede se puede preguntar si el número de bolas azules y rojas en todas las cajas es el mismo.

Una forma de resolver el problema es calcular la probabilidad de sacar una ficha roja en cada caja y luego comparar los valores obtenidos. En la siguiente tabla aparece la probabilidad de seleccionar una ficha roja según sea la caja:

Caja	**Probabilidad de seleccionar una ficha roja**
A	$\frac{4}{12} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$
B	$\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0{,}4$
C	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Al comparar los valores obtenidos se concluye que debe escogerse la caja C, pues presenta la mayor probabilidad de obtener una ficha roja.

Es importante destacar que en este problema se puede emplear la definición clásica o Laplaciana de Probabilidad debido a que en todas las cajas cada ficha tiene la misma probabilidad de ser seleccionada.

Otro problema que puede proponer es el siguiente; se recomienda que sea trabajado individualmente y luego discutido en una plenaria.

Un ratón se ubica en el inicio del laberinto, tal como se muestra en la figura. El laberinto tiene tres puertas que conducen a dos recintos A y B, en los que se encuentran trozos de queso. Se supone que el ratón elegirá aleatoriamente la puerta, y es igualmente probable que elija cualquiera de las tres puertas; pero una vez que haya ingresado por una de ellas no puede salir y debe continuar su camino hasta el recinto correspondiente. De acuerdo *con esta situación, utilice probabilidades para determinar cuál de los recintos tiene más probabilidad de que el ratón termine en él, si el recinto A o el recinto B.*

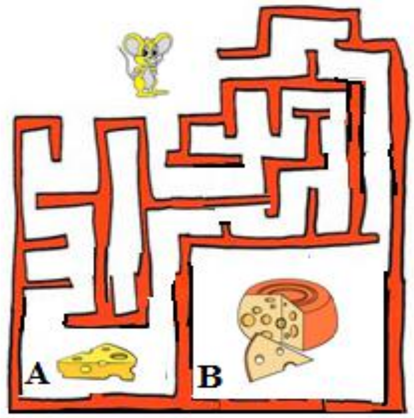


Imagen: Elaboración propia

Si se analiza muy superficialmente el esquema, el estudiantado podría pensar que es más probable que el ratón termine en el recinto B, debido a que es más grande y tiene un trozo de queso mucho mayor. No obstante, debido a que se ha insistido en que los problemas deben ser ampliamente analizados antes de generar una respuesta, debería observarse que para ir al recinto A hay dos puertas que comunican, mientras que para el recinto B solamente hay una. Debido a que la selección de las puertas se hace en forma aleatoria y todas tienen la misma probabilidad de ser elegidas, entonces la probabilidad de selección del recinto A es dos de tres, es decir $\frac{2}{3}$, mientras que la probabilidad de selección del recinto B es una de tres, o sea $\frac{1}{3}$. Por todo ello, es dos veces más probable que el ratón termine en el recinto A que en el B.

Como se mencionó anteriormente, este tipo de problemas requiere ser discutido mediante una plenaria, donde cada estudiante tenga la oportunidad de exponer su punto de vista.

El primero de los problemas puede clasificarse como de conexión, pues debe realizarse una interpretación de la información del problema, por ejemplo que debe escogerse la caja en la cual sea mayor la probabilidad de seleccionar una ficha roja. Igualmente, debe analizarse si en este caso los elementos que se seleccionan tienen la misma probabilidad de ser escogidos; si es así puede aplicarse la definición clásica de Probabilidad. Con respecto al segundo problema puede clasificarse como de reflexión, ya que se debe reflexionar que no importa el tamaño del recinto ni el tamaño del queso, sino el número de puertas que conducen a cada recinto; luego deben realizar una comparación relativa del número de puertas que conducen a cada recinto y el número total de puertas disponibles. Este problema en particular implica reflexión, pues el estudiante de este nivel es muy visual y por ende se basa principalmente en lo que ve.

Contextualización activa

El área de *Estadística y Probabilidad* es una de las áreas que más se presta para la elaboración de problemas contextualizados. Específicamente los conceptos relacionados con Probabilidad pueden introducirse mediante juegos en los cuales intervenga el azar o la aleatoriedad, por ejemplo en juegos como piedra, papel o tijera, el lanzamiento de dados o monedas, urnas con bolas, entre otros.

También pueden utilizarse datos reales, por ejemplo podría preguntarse a los estudiantes por el mes en el que nacieron. Con esta información se construye una distribución de frecuencias similar a la siguiente:

Mes de nacimiento	Cantidad de estudiantes
Enero	2
Febrero	4
Marzo	1
Abril	0
Mayo	3
Junio	4
Julio	1
Agosto	5
Setiembre	1
Octubre	3
Noviembre	2
Diciembre	3
Total	29

Con base en la información anterior se pueden plasmar las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar aleatoriamente a un estudiante del aula que haya nacido en el mes de mayo?
- ¿Qué es más probable, seleccionar aleatoriamente un estudiante del aula que haya nacido en febrero o en diciembre?
- Si uno de los estudiantes es seleccionado aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad que haya nacido en abril?
- Si uno de los estudiantes es seleccionado aleatoriamente, ¿en cuál de todos los meses es más probable que haya nacido?

Problemas como el anterior promueven habilidades relacionadas con la Estadística como recolectar datos mediante la interrogación, así como resumir datos por medio de cuadros que incluyan frecuencias absolutas, con lo cual se activa el proceso matemático conectar.

El uso de problemas contextualizados despierta un mayor interés, promueve actitudes positivas hacia las Matemáticas y una mayor participación del estudiante en la construcción de su aprendizaje.

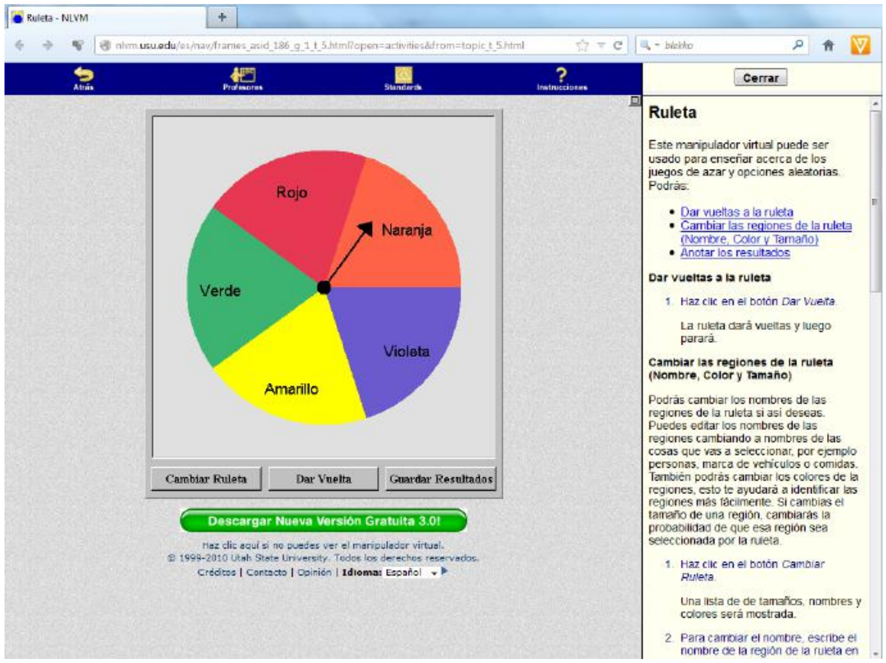
Uso de tecnología

En el área de Probabilidad la calculadora es un recurso tecnológico que permite simplificar los cálculos, principalmente al momento de comparar la probabilidad de dos eventos, pues podría ser un trabajo laborioso el representar mediante un número decimal la fracción propia que corresponde a la probabilidad de un evento usando sólo papel y lápiz. Por ejemplo, en la resolución del problema con el cual se introduce la definición clásica o Laplaciana de Probabilidad se recomendó manipular la calculadora para encontrar la expansión decimal de la probabilidad de que Alberto gane el juego y la probabilidad de que Lucrecia gane el juego. La probabilidad de que Lucrecia gane el juego es $\frac{4}{9}$, cuya expansión decimal es aproximadamente $0{,}44$ y la probabilidad de que Alberto gane el juego es $\frac{3}{6}$ que es igual a $0{,}5$, por lo que comparando los números decimales obtenidos se concluye que Alberto tiene más probabilidad de ganar.

Pueden encontrarse en internet algunas páginas web que ofrecen contenidos relacionados con la probabilidad. Se puede recurrir a este tipo de sitios web para reforzar de una forma interactiva los conocimientos adquiridos. Estas páginas pueden ser consultadas por docentes, ya que en ellas podrán encontrar, entre otras cosas, problemas con distintos niveles de complejidad para proponer a sus estudiantes. Un sitio de internet con contenidos relacionados con la probabilidad es:

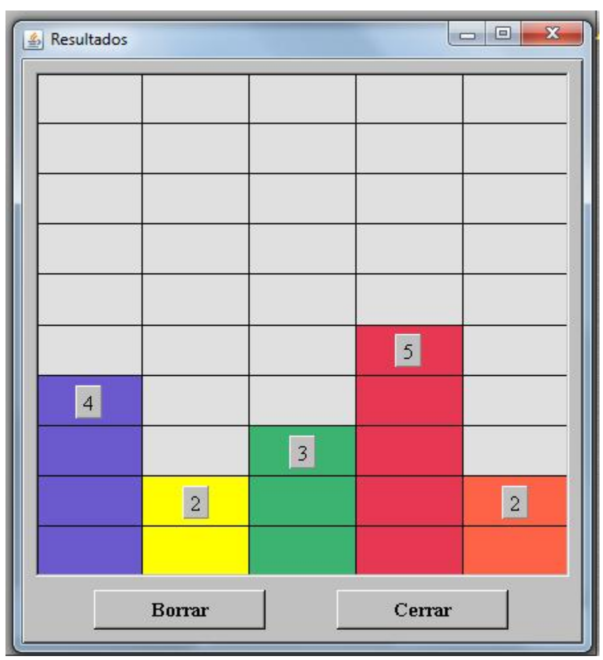
http://nlvm.usu.edu/es/nav/topic_t_5.html

La dirección web anterior corresponde a la Biblioteca virtual de recursos manipulativos. Allí se pueden encontrar actividades sobre Estadística y Probabilidad para grados desde el Pre-kinder hasta la Secundaria. Por ejemplo, en esta página web se puede encontrar el siguiente juego con el cual se puede introducir el concepto de azar y aleatoriedad.



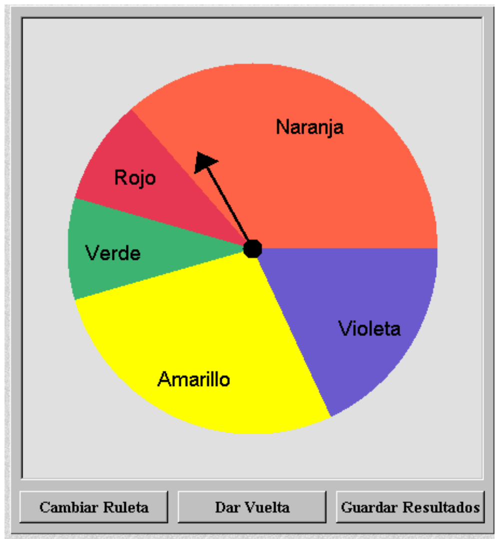
El juego consiste en darle vuelta a la ruleta y observar a cuál color apunta la flecha. Se puede aplicar este juego para preguntar a los estudiantes a cuál color creen que apuntará la flecha en cada caso. Se debe aprovechar la actividad para formalizar el concepto de situaciones aleatorias y seguras.

Este applet tiene un botón para guardar los resultados obtenidos, los cuales se presentan mediante un gráfico de barras horizontales, como se refleja en la siguiente figura:



Este gráfico representa los resultados obtenidos al repetir el experimento dieciséis veces. Con este gráfico se puede introducir el concepto de resultado simple de un experimento aleatorio.

También hay un botón con el cual se puede cambiar el tamaño de las regiones coloreadas. Por ejemplo, en la siguiente ruleta las regiones de color rojo y verde tienen el mismo tamaño. Las regiones violeta, amarilla y naranja son respectivamente dos, tres y cuatro veces más grandes que las regiones roja o verde.



Con la ruleta construida de esta manera se pueden explicar los conceptos de evento más probable, menos probable e igualmente probable. Por ejemplo, se podría preguntar:

- ¿Cuál evento es más probable, que la flecha caiga sobre la región amarilla o sobre la región roja?
- ¿Cuál de todos los eventos del experimento es el menos probable y cuál es el más probable?
- ¿Cuáles eventos son igualmente probables?

Otras páginas web que pueden consultarse son:

http://centralvirtual.webclic.es

Esta dirección web corresponde a la central virtual de recursos didácticos; en ella se pueden descargar libros y documentos sobre Probabilidad tanto para estudiantes como para docentes.

http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/elementary/index.html

En esta web se pueden visualizar actividades en línea relacionadas con conceptos de Probabilidad como el juego de Monty Hall.

http://www.ugr.es/~batanero

Esta dirección web corresponde a la página web de la profesora Dra. Carmen Batanero Bernabeu de la Universidad de Granada en España. La Dra. Batanero es una de las principales impulsoras de la enseñanza y aprendizaje de la Estadística y Probabilidad en España. En esta web se encuentran libros sobre Estadística y Probabilidad, además de numerosos artículos científicos relacionados con esta área. Esta Web es un recurso dirigido principalmente a docentes e investigadores.

Uso de la historia de las Matemáticas

Una vez que se haya presentado la solución al problema se puede compartir con el estudiantado la siguiente reseña histórica con la cual se pretende dar a conocer la forma en que surge la teoría de la Probabilidad.

Hoy en día, la Probabilidad tiene un fuerte impacto en el pensamiento científico moderno y su influencia se nota en campos tan diversos como explotación de recursos renovables, demografía, medicina, comunicaciones, computación, finanzas, economía, entre otros. Pese a ello, la Teoría de Probabilidad no siempre gozó de un estatus privilegiado y de tanta popularidad entre los científicos; de hecho, a diferencia de otras ramas clásicas de la Matemática, su certificación como teoría matemática se dio hasta el siglo XX con la axiomatización propuesta por A. N. Kolmogorov (1903-1987) en los años treinta.

La Probabilidad tiene sus orígenes en los juegos de azar, principalmente los juegos con dados y cartas, muy populares desde tiempos antiguos. Los primeros estudios “científicos” sobre fenómenos aleatorios se centraban en dos problemas:

1. Contabilizar el número de posibles resultados de lanzar un dado varias veces.

2. Distribuir las ganancias entre jugadores cuando el juego se interrumpía antes de finalizar, conocido como el ‘problema del reparto de apuestas’.

Aunque ahora puede parecer una cuestión sencilla, en aquella época no lo era, y varios estudiosos de la época erraron al intentar resolverlos, generalmente porque no tenían en cuenta todos los posibles resultados o porque estos resultados no eran igualmente probables.

El primero en dar la definición clásica de Probabilidad fue Jakob Bernoulli (1654–1705) en su obra *El Arte de Predecir* -publicada póstumamente en 1713- muy influenciado por los trabajos de Graunt y Petty, que habían demostrado las ventajas de incluir en sus tablas no sólo los números absolutos, sino también las proporciones respecto del total. Más adelante, el matemático francés exiliado en Inglaterra Abraham De Moivre (1667–1754) aceptó la definición dada por Bernoulli y la reformuló en términos modernos: «una fracción en la que el numerador es igual al número de apariciones del suceso y el denominador es igual al número total de casos en los que el suceso pueda o no pueda ocurrir, tal fracción expresa la probabilidad de que ocurra el suceso».

Actitudes y creencias

Según los nuevos programas de Matemáticas: "al igual que sucede con las capacidades matemáticas, el progreso de las actitudes y creencias positivas hacia las Matemáticas se debe promover en la acción de aula a través de la intervención docente" (p. 38). En este sentido, empleando los problemas propuestos se pueden promover las siguientes actitudes y creencias positivas hacia las Matemáticas.

- *Perseverancia:* Debido a que la estrategia mediante la cual se puede resolver el primer problema no se puede emplear para resolver el segundo problema, el estudiantado mostrará perseverancia al momento de idear una estrategia diferente. Los problemas propuestos no son repeticiones mecánicas de procedimientos simples ni requieren la memorización sin sentido de fórmulas matemáticas, por lo que su resolución no es trivial y por ende requiere la persistencia en su búsqueda.

  Es imprescindible la labor docente para que ningún estudiante se dé por vencido y continúe buscando estrategias que le permitan resolver el problema.

- *Confianza en la utilidad de las Matemáticas:* Al resolver el problema se puede visualizar la utilidad de conceptos probabilísticos en la resolución de problemas relacionados con juegos. Por supuesto, la resolución de este tipo de problemas permitirá tener una mejor comprensión de las situaciones aleatorias del entorno.

- *Participación activa y colaborativa:* La manera en que se organiza la lección ofrece oportunidades para que cada estudiante participe de forma dinámica, por ejemplo al momento de comunicar los resultados obtenidos a los demás miembros del grupo. También se promueve la participación colaborativa al resolver el segundo problema en subgrupos de trabajo.

Sugerencias de evaluación

A continuación se proponen dos problemas que pueden servir de ejemplo para evaluar los aprendizajes adquiridos.

1. En dos cajas etiquetadas como A y B se introducen las siguientes cantidades de fichas rosadas y azules:

	Color de ficha		
Caja	Rosadas	Azules	Total
A	6	4	10
B	60	40	100
Total	66	44	110

Si se extrae una ficha aleatoriamente de cada caja, una afirmación correcta es:

a) la caja A da más probabilidad de obtener una ficha azul.
b) la caja B da más probabilidad de obtener una ficha azul.
c) ambas cajas dan igual probabilidad de obtener una ficha azul.
d) no se puede saber cuál de las cajas da más probabilidad de obtener una ficha azul.

El estudiantado ya ha resuelto problemas similares al anterior, de hecho el problema que se propone para introducir la definición clásica o Laplaciana de Probabilidad es muy similar a éste. No obstante, en este problema se presenta la información de una forma novedosa dado que se requiere interpretar los datos de la tabla. Por otra parte, sí es posible determinar cuál caja tiene más probabilidad de obtener una ficha azul, ya que se puede aplicar la definición clásica o Laplaciana de Probabilidad pues las fichas de la caja A tienen la misma posibilidad de ser seleccionadas; lo mismo ocurre con las fichas de la caja B.

Debido a que en la caja A cuatro de las diez fichas son azules, la probabilidad de obtener una ficha azul de la caja A es $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$. En el caso de la caja B, cuarenta de las cien fichas son azules, por lo tanto la probabilidad de obtener una ficha azul de la caja B es $\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$. En conclusión, comparando estas probabilidades tenemos que ambas cajas dan igual probabilidad de obtener una ficha azul.

En este problema se debe estar atento pues el estudiantado puede cometer el error de indicar que la probabilidad de seleccionar una ficha azul de la caja A es $\frac{4}{6}$, que corresponde al cociente entre el número de fichas azules y rosadas de la caja A. En este caso se está aplicando incorrectamente la definición clásica o Laplaciana de Probabilidad, ya que el total de fichas de la caja A es diez.

Otro problema que podría servir de ejemplo para evaluar los conocimientos es el siguiente:

2. Considere el siguiente experimento:

Se lanza al aire una moneda de ₡100 y un dado de seis caras numeradas del uno al seis, tal como se muestra en la figura:

Al realizar el experimento anterior:

a) ¿Cuál es el número total de resultados posibles de este experimento?
b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener corona y un número par?
c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener escudo y un número mayor que 3?

Para resolver el problema anterior hay que identificar el número total de resultados del experimento y luego los resultados posibles de cada uno de los eventos descritos en los incisos b y c.

El número total de resultados del experimento es doce, los cuales se pueden representar por medio de la siguiente tabla.

	Posibles resultados al lanzar el dado					
Posibles resultados al lanzar la moneda	1	2	3	4	5	6
Escudo (E)	E1	E2	E3	E4	E5	E6
Corona (C)	C1	C2	C3	C4	C5	C6

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Resultados del experimento}}$

Observando la tabla anterior los posibles resultados del experimento son: $\mathrm{E1, E2, E3, E4, E5, E6, C1, C2, C3, C4, C5, C6}$. Por ejemplo, el resultado $\mathrm{E6}$ significa que al lanzar la moneda y el dado se obtuvo escudo y el número seis, respectivamente.

Para representar los posibles resultados del experimento podría elaborarse un diagrama en árbol como el siguiente:

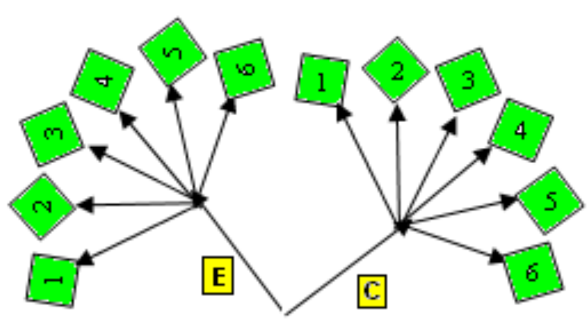


Imagen: Elaboración propia

Es importante destacar que en este problema se puede aplicar la definición clásica o Laplaciana de Probabilidad, pues cada uno de los doce posibles resultados tiene la misma posibilidad de ocurrencia.

Debido a que el número de resultados simples a favor del evento obtener corona y un número par es tres ($\mathrm{C}2, \mathrm{C}4$ y $\mathrm{C}6$), la probabilidad de obtener corona y un número par es $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Por otra parte, el número de resultados simples a favor del evento obtener escudo y un número mayor que tres es tres ($\mathrm{E}4, \mathrm{E}5, \mathrm{E}6$). Por lo anterior, la probabilidad de obtener escudo y un número mayor que tres es $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Bibliografía

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula. (2006). Cálculo mental con números racionales: Apuntes para la enseñanza. Argentina: Plan plurianual para el mejoramiento de la enseñanza 2004-2007. Recuperado de http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pdf/primaria/calculo_racional_web.pdf

Barba, C. *Actividades de conteo en Nivel inicial*. Uruguay Educa. Recuperado de http://phobos.xtec.es/sgfprp/resum.php?codi=908

Katz, V. (2010). *A History of Mathematics.* An introduction. Tercera Edición. Addison-Wesley.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de estudio de Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado*. San José, Costa Rica: autor.

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las Matemáticas*. EUNED, San José, CR.

Smorodinski, Y. (1983) *La temperatura*. Moscú: Mir.

The National Council of Teachers of Mathematics (2006) *Historical topics for the Mathematics classroom*. Reston: NCTM, Inc.

Vázquez, A. M. (2006). Grecia, un universo de agua. Disponible en http://info.uned.es/geo-1-historia-antigua-universal/PDF/09_GRECIA_AGUA%20Y%20CULTURA.pdf

Créditos

Este documento de apoyo a la implementación de los nuevos programas de Matemáticas fue elaborado por el proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado financieramente por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación, y es ejecutado administrativamente por la Fundación Omar Dengo.

Autores
Ángel Ruiz
Edison De Faria Campos
Edwin Chaves Esquivel
Hugo Barrantes Campos
Jonathan Espinoza González
Luis Armando Hernández Solís
Marianela Zumbado Castro
Miguel González Ortega
Ricardo Poveda Vásquez

Revisores
Angel Ruiz
Christiane Valdy
Damaris Oviedo Arce
Grace Vargas
Javier Barquero
Susanne Blais

Editor gráfico
Miguel González Ortega

Edición filológica
Julián Ruiz

Director general del proyecto
Ángel Ruiz

Para referenciar este documento:
Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2013). *Apoyo curricular en Matemáticas. Segundo Ciclo de la Educación General Básica.* San José, Costa Rica: autor.