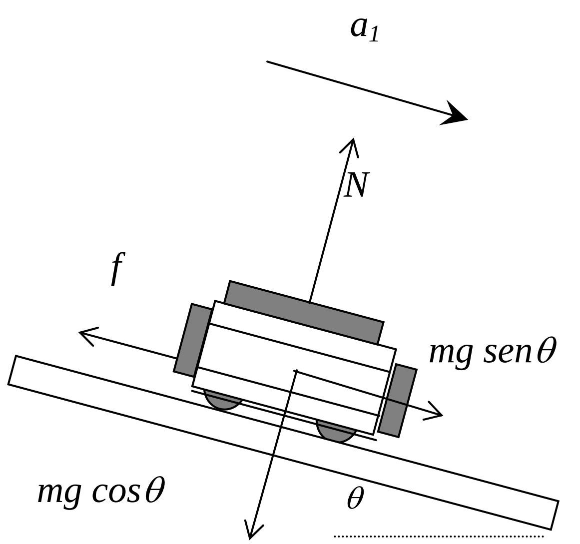
Manual de Prácticas para el Laboratorio de Física



Recopilación y adaptación:

Prof. Ing. Esteban Durán H.

PRESENTACION

Este manual de prácticas surgió como la respuesta a la gran necesidad que existía de poder contar con una guía específica para el curso de "Laboratorio de Física" de la Universidad. Con él se ha pretendido adecuar y adaptar algunas de las prácticas de laboratorio más comunes a la infraestructura y equipo con que se cuenta en la Universidad; además se realizaron modificaciones con el fin de lograr los objetivos de enseñanza planteados para este curso referentes a la experimentación y manejo de datos experimentales.

Como se mencionó anteriormente, mucho del trabajo realizado fue de recopilación de diferentes fuentes, las cuales se mencionan en la bibliografía; no obstante la adaptación al equipo de laboratorio con que se cuenta y a los objetivos deseados fue ardua.

El manual consta de dos secciones básicas. Una primera donde se presentan las guías para cada una de las prácticas a realizar en el laboratorio, las cuales orientan al estudiante en los objetivos de la misma, le dan una introducción teórica al tema, le establecen el equipo a utilizar y le proporcionan el procedimiento a seguir para llevar a cabo exitosamente la experiencia. La otra sección se compone de una serie de apéndices, en los cuales se expone toda la teoría referente a las mediciones, cálculo de incertidumbres, propagación de errores, graficación, método de regresión lineal por mínimos cuadrados, linealización de curvas, entre otros apartados.

Realmente espero que este manual le sea de gran ayuda en este curso.

José Esteban Durán Herrera

Profesor de Física
Universidad Hispanoamericana

INDICE

TIEMPO DE REACCION

Objetivos

1) *Medir el tiempo de reacción de una persona utilizando el conocimiento de caída libre que posee el estudiante.*
2) *Aplicar los conocimientos adquiridos referentes al cálculo del promedio de una serie de mediciones con su respectivo error estándar.*
3) *Realizar el cálculo de la incertidumbre de una medición indirecta.*

Introducción

El tiempo de reacción de una persona, lo podemos describir como el intervalo de tiempo que transcurre entre dos instantes: el primero cuando la persona percibe un estímulo y el segundo cuando reacciona a él. Por ejemplo, es el tiempo que transcurre entre el instante que observamos un objeto caer y movemos nuestra mano para detenerlo.

El tiempo que tarda un objeto en recorrer una altura *h* en caída libre partiendo del reposo, depende de la gravedad y de dicha altura recorrida. Según las ecuaciones de caída libre éste está dado por la fórmula

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{1.1}$$

Antes de ir al laboratorio, asegúrese de comprobar la validez de la ecuación (1.1) y de repasar la materia expuesta en el apéndice A.

Equipo

1. Regla graduada de un metro de longitud.

Procedimiento

1. Un estudiante sostiene una regla métrica verticalmente, desde su extremo de 100 cm, mientras otro estudiante, con su brazo apoyado al sobre de la mesa, coloca sus dedos pulgar e índice a ambos lados de la marca de 50 cm, pero sin rozar la regla.

2. El estudiante que sostiene la regla la soltará y el otro tratará de detenerla lo más pronto posible, sin incurrir en algún movimiento vertical de su mano.

3. Se mide la distancia vertical *h* que descendió la regla y se anota. Observe que la incertidumbre de esa medida puede estimarse como el grosor del dedo pulgar, o sea aproximadamente 1 cm.

4. El proceso se repite 10 veces para cada estudiante que detiene la regla. Tabule sus datos adecuadamente.

5. Calcule el promedio de la distancia recorrida *h* y su respectivo error estándar.

6. Con el promedio de las distancias recorridas y la ecuación (1.1), calcule su tiempo de reacción con su respectiva incertidumbre (utilice el valor g = 978,2 cm/s^2 ± 0,5 cm/s^2 en esta y todas las demás prácticas del laboratorio).

No se olvide de la
Discusión de los resultados
y las
Conclusiones

LEY DE HOOKE

Objetivos

1) *Investigar el comportamiento elástico de un resorte*
2) *Iniciar el entrenamiento sobre confección de gráficas*
3) *Aprender la técnica de ajuste por mínimos cuadrados para una línea recta*

Introducción

Para mantener estirado un resorte en una elongación δx (como por ejemplo la situación mostrada en la Figura 2.1), se debe ejercer una fuerza F en un extremo y una fuerza igual y opuesta en el otro. Si la elongación no es demasiado grande, F es directamente proporcional a δx:

$$F = k\,\delta x \qquad (2.1)$$

donde k es una constante denominada *constante de rigidez* del resorte. Esta proporcionalidad directa entre fuerza y elongación, para el caso de elongaciones que no sean demasiado grandes, fue descubierta en 1698 por Robert Hooke y se conoce como la *Ley de Hooke.*

Procure repasar sus conocimientos sobre este tema, además de estudiar la materia referente a graficación y el método de regresión lineal por mínimos cuadrados expuesta en los apéndices B y C respectivamente.

Recuerde llevar hojas de papel milimétrico al laboratorio para que pueda realizar en una forma más adecuada los gráficos.

Equipo

1. Regla graduada
2. Resortes de diferente rigidez
3. Soporte metálico con prensas
4. Juego de pesas y portapesas
5. Balanza electrónica

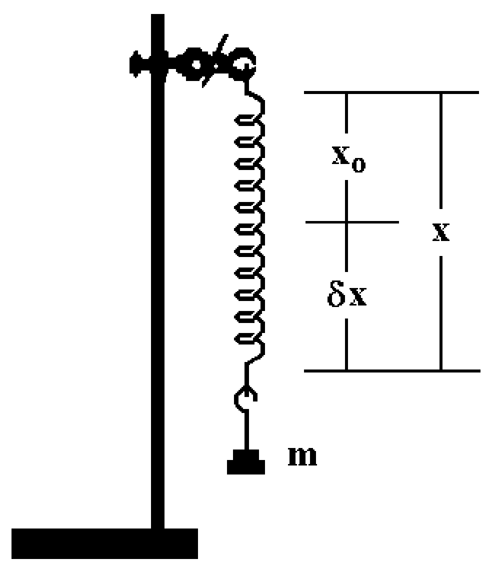


Figura 2.1. Dispositivo experimental para estudiar la Ley de Hooke

Procedimiento

1. Sujete firmemente a un soporte el extremo superior de un resorte como se muestra en la Figura 2.1. Mida y anote la posición del extremo inferior del resorte x_o, desde un nivel de referencia fijo y estable.

2. Cuelgue del resorte el portapesas con algún peso adecuado. Mida y anote x, la nueva posición del extremo inferior del resorte. Recuerde que la fuerza que está ocasionando la deformación es la suma del peso del portapesas y las pesas adicionales, o sea $F = mg$, donde m es la masa del portapesas junto con las pesas y g la aceleración gravitacional.

3. Repita el punto 2. para al menos otros 4 valores de peso (fuerza).

4. Presente los resultados en un cuadro cuyo encabezado sea como el mostrado a continuación:

Cuadro 2.1. Deformación sufrida por el resorte, cuya elongación natural es x_o= ___ cm ± ___ cm, con diferentes fuerzas aplicadas.

x (cm) ± ____ cm	$\delta x = x - x_o$ (cm) ± ____ cm	m (g) ± ____ g	F (N) ± ____ N

5. En papel milimétrico marque los pares ordenados (δx, F), para luego hacer una gráfica de la fuerza en función de la elongación del resorte. Por ahora no trace la recta de mejor ajuste; sin embargo, note que la posible gráfica es una línea recta.

6. Calcule mediante el método de mínimos cuadrados la pendiente y el intercepto de la recta de mejor ajuste. También calcule el error estándar de la estimación ($s_{y/x}$), el coeficiente de correlación (r) de los datos, el error estándar de la pendiente y el del intercepto.

7. Establezca entonces cuál es la ecuación matemática que relaciona sus datos de fuerza-elongación y comparándola con la ecuación (2.1). Determine la constante de rigidez del resorte (note que la constante de proporcionalidad de los datos es la pendiente de la recta de mejor ajuste).

8. En el gráfico elaborado en el punto 5., grafique la recta de mejor ajuste.

No se olvide de la
Discusión de los resultados
y las
Conclusiones

LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

Objetivos

1) *Estudiar el enfriamiento de un cilindro sólido de metal, determinando si bajo las condiciones del laboratorio, el enfriamiento cumple con la ley de Newton.*
2) *Analizar el posible decaimiento exponencial de una cantidad física.*
3) *Determinar la relación de una función de decaimiento exponencial mediante la linealización y uso del método de mínimos cuadrados.*
4) *Continuar el entrenamiento sobre confección de gráficas.*

Introducción

El enfriamiento de un objeto es uno de los fenómenos físicos que obedecen las leyes del decaimiento exponencial. Las funciones del decaimiento exponencial tienen como punto de partida la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha\, x \qquad (3.1)$$

cuya solución es de la forma $x = x_o\, e^{-\alpha\, t}$ y donde α se conoce como la constante de decaimiento.

Esta ecuación también describe la Ley de Newton sobre el enfriamiento de un objeto:

$$\frac{d(T - T_a)}{dt} = -\alpha\,(T - T_a) \qquad (3.2)$$

en la cual T es la temperatura del objeto que se enfría y T_a es la temperatura ambiente. Según esta ley, la velocidad de descenso de la temperatura es proporcional a la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y el ambiente. Esto es cierto solamente cuando el cuerpo es enfriado en condiciones de convección forzada (o sea, con una corriente de aire). Aunque no se puede esperar que la ley se aplique bajo otras condiciones (convección natural por ejemplo), la experiencia indica que siempre que la diferencia de temperaturas no sea demasiado grande, la velocidad de enfriamiento es casi proporcional a la diferencia de temperaturas.

La solución de la ecuación diferencial (3.2), nos ofrece la ecuación que relaciona la temperatura del objeto con el tiempo (T_o es la temperatura en el tiempo t = 0 s):

$$(T - T_a) = (T_0 - T_a)\, e^{-\alpha t} \qquad (3.3)$$

Es conveniente que para esta práctica repase la materia expuesta en el apéndice B referente a graficación y la del apéndice C sobre linealización de curvas. También es conveniente llevar al laboratorio hojas de papel milimétrico.

Equipo

1. Cilindro de metal
2. Termómetro
3. Calentador eléctrico
4. Cronómetro
5. Abanico

Procedimiento

1. Tome el valor de la temperatura ambiente.

2. Calentar el cilindro metálico hasta unos 90 °C sobre el calentador eléctrico.

3. Retire el cilindro del calentador y póngalo sobre su mesa. Introduzca el termómetro en el agujero que posee el cilindro y espere a que la temperatura que marque el termómetro suba hasta un valor máximo (temperatura a la que se encuentra inicialmente el metal) y luego empiece a descender debido al enfriamiento del cilindro. Ponga el abanico a unos 30 cm del cilindro y enciéndalo. Luego, tome la temperatura del cilindro en un momento arbitrario que usted fija como $t = 0$ s y accione el cronómetro.

4. Mida la temperatura en los tiempos correspondientes a 30 s, 1 min, 2 min, 3 min, 5 min, 7 min, 10 min y 15 min.

5. Haga un gráfico en papel milimétrico de la diferencia entre la temperatura y la temperatura ambiente (T-T_a) del cilindro contra el tiempo y asegúrese que la funcionalidad sea del tipo de decaimiento exponencial (no trace la curva aún).

6. Grafique en papel milimétrico el ln(T-T_a) contra t y observe que bajo esta otra escala los datos se comportan linealmente (no trace la recta aún).

7. Tal y como se establece en el apéndice C, la mejor forma de encontrar la ecuación matemática que mejor correlaciona estos datos, es por medio de un ajuste por mínimos cuadrados, sustituyendo en las fórmulas de regresión lineal, ln y_i en vez de y_i y dejando las x_i inalteradas. Encuentre el valor de la pendiente y el intercepto y con ellos determine la ecuación que relaciona (T-T_a) con t (recuerde calcular r y los errores estándar). La mayoría de las calculadoras programables manejan subrutinas de ajuste lineal, potencial, logarítmico y exponencial. Si usted tiene una que puede hacerlo, úsela.

8. Con las ecuaciones obtenidas en el punto 7., trace en el gráfico del punto 6. la recta de mejor ajuste y luego en el gráfico del punto 4., la curva de mejor ajuste. Escriba también es estos gráficos las ecuaciones de mejor ajuste correspondientes.

No se olvide de la
Discusión de los resultados
y las
Conclusiones

MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE ACELERADO

Objetivos

1) *Estudiar las características del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.*
2) *Obtener la relación entre la posición, la velocidad, la aceleración y el tiempo para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.*
3) *Utilizar las técnicas de linealización de curvas para la interpretación de gráficos de movimiento y obtención de funcionalidades.*

Introducción

Si un objeto parte del reposo sobre un plano inclinado, este se acelerará aumentando su rapidez hasta llegar al pie del plano (siempre y cuando la componente de la fuerza de gravedad que lo está acelerando sea mayor que las fuerzas de fricción que actúan sobre el mismo). El movimiento que experimenta este objeto es rectilíneo uniformemente acelerado y si se cuenta con los datos del tiempo que tarda en recorrer una distancia determinada, usted puede demostrar con los conocimientos adquiridos en el curso de Física I, que la velocidad y aceleración en ese instante están dados, respectivamente, por las siguientes ecuaciones

$$v = \frac{2x}{t} \tag{4.1}$$

$$a = \frac{2x}{t^2} \tag{4.2}$$

Asegúrese de repasar bien antes de ir al laboratorio la materia referente al movimiento uniformemente acelerado y lo referente a linealización de curvas expuesto en el apéndice C. Además debe llevar a la práctica papel logarítmico.

Equipo

1. Regla graduada de un metro de longitud.
2. Cronómetro
3. Balín
4. Carril metálico

Procedimiento

1. Marque en el carril metálico distancias consecutivas de 30 cm, partiendo de 0 hasta 150 cm.

2. Dele al carril metálico una pequeña inclinación sobre su mesa, de manera que la velocidad que adquiera el balín sea tal, que le permita medir en forma adecuada los intervalos de tiempo que tarda en recorrer las distancias marcadas. Mida el ángulo de inclinación dado.

3. Coloque el balín en la posición 0 y tome el tiempo que tarda en recorrer los primeros 30 cm. Anote el valor obtenido.

4. Repita el procedimiento anterior 2 veces más y calcule el tiempo promedio.

5. Repita el procedimiento de los puntos 3. y 4. anteriores, para las distancias x = (60,90,120,150) cm. En todos los casos el tiempo se empieza a contar desde el momento en que se suelta el balín en $x = 0$.

6. Construya una tabla de valores con los datos de tiempo promedio, distancia, velocidad y aceleración del balín en los diferentes puntos de su movimiento utilizando las ecuaciones (4.1) y (4.2).

7. Sobre papel milimétrico, construya la gráfica de posición en términos del tiempo (x vrs t) y observe que los datos poseen una funcionalidad parabólica.

8. Linealice la gráfica anterior y halle la ecuación de la recta; y en última instancia, la ecuación de la posición en términos del tiempo. Comparando la ecuación teórica y la obtenida experimentalmente, determine el valor de la aceleración.

9. Construya la gráfica de velocidad como función del tiempo (v vrs t) en papel milimétrico y observe su funcionalidad lineal.

10. Halle la ecuación de la recta de la gráfica anterior (v vrs t). Comparando aquí también la ecuación teórica y la obtenida experimentalmente, determine el valor de la aceleración.

11. Calcule el valor promedio de los datos de aceleración tabulados en la tabla del punto 6.

12. Si se desprecia la fuerza de rozamiento entre el balín y el carril, la aceleración que estaría experimentando el balín sería $a = g \, sen \, \theta$, donde θ es el ángulo de inclinación del plano. Determine este valor de aceleración.

13. Compare los valores de aceleración obtenidos en los puntos 8., 10., 11. y 12.

No se olvide de la
Discusión de los resultados
y las
Conclusiones

ROZAMIENTO

Objetivos

1) *Determinar el coeficiente de rozamiento cinético entre un plano inclinado y un bloque que resbala sobre él.*
2) *Determinar el coeficiente de rozamiento estático entre un plano horizontal y un bloque ubicado sobre éste.*
3) *Discutir las diferencias conceptuales entre fuerzas de rozamiento estático y cinético.*

Introducción

Cuando la superficie de un cuerpo se desliza sobre la de otro, cada cuerpo ejerce sobre el otro una fuerza de rozamiento paralela a las superficies, la cual es denominada fuerza de rozamiento cinética. Las fuerzas de rozamiento actúan también cuando no hay movimiento relativo, a éstas se les llama fuerzas de rozamiento estáticas. Tanto las fuerzas de rozamiento cinéticas como las estáticas son directamente proporcionales a la fuerza normal; a cada una de las constantes de proporcionalidad se les denomina, respectivamente, coeficiente de rozamiento cinético y estático.

Ahora, considere un plano inclinado como el de la Figura 5.1 de longitud *L* y un bloque que parte del reposo de la cumbre del plano.

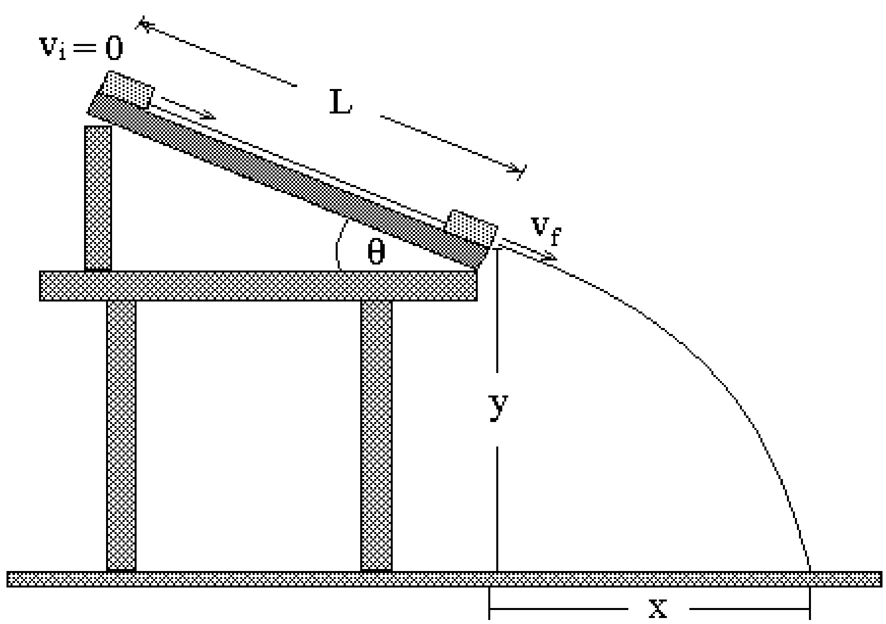


Figura 5.1. Plano inclinado utilizado en el estudio sobre la fuerza de rozamiento cinética.

De un análisis de fuerzas, la aceleración es

$$a = g\,(\text{sen}\,\theta - \mu\cos\theta) \tag{5.1}$$

y puesto que los bloques parten del reposo

$$L = \frac{1}{2} a\,t^2 \tag{5.2}$$

por lo tanto el coeficiente de rozamiento cinético está dado por

$$\mu_k = tan\,\theta - \frac{2L}{gt^2\cos\theta} \tag{5.3}$$

Ahora, si tratamos el sistema desde el punto de vista de energías, sabemos que el cambio de energía mecánica que sufre el bloque es igual al trabajo realizado por la fuerza de fricción. Usted puede verificar que entonces

$$\mu_k = \tan\theta - \frac{v_f^{\,2}}{2gL\cos\theta} \tag{5.4}$$

donde v_f es la rapidez del bloque al llegar al pie del plano inclinado. Para establecer la velocidad final, considere ésta como la velocidad inicial del movimiento de proyectiles que describe el objeto una vez que abandona el plano inclinado y verifique que

$$v_f = \sqrt{\frac{g\,x^2}{2\cos^2\theta\,(y - xtan\theta)}} \tag{5.5}$$

La Figura 5.2 ilustra un segundo dispositivo utilizado para determinar coeficientes de rozamiento estáticos. Consiste en un bloque de masa *M* sobre un plano horizontal atado a una cuerda que pasando por la polea lleva en el otro extremo un pequeño recipiente de masa *m*. Si la masa *m* es tal que apenas logra que el bloque *M* comience a moverse, entonces verifique que el coeficiente de rozamiento estático está dado por

$$\mu_e = \frac{m}{M} \tag{5.6}$$

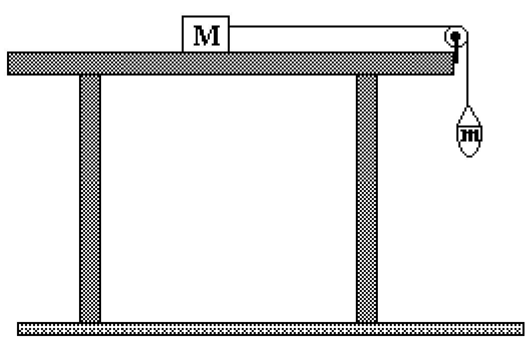


Figura 5.2. Sistema usado para determinar el coeficiente de rozamiento estático entre el bloque *M* y el plano.

Asegúrese de comprobar cada una de las ecuaciones anteriormente expuestas y además llevar hojas de papel bond y papel carbón al laboratorio.

Equipo

1. Plano inclinado
2. Bloque de madera
3. Cronómetro
4. Metro
5. Polea
6. Recipiente pequeño
7. Arena
8. Cuerda
9. Balanza electrónica
10. Angulímetro

Procedimiento

Parte I: Determinación del coeficiente de rozamiento cinético

1. Dele al plano una inclinación adecuada para que el bloque pueda deslizarse, tal como lo muestra la Figura 5.1.

2. Deje deslizarse el bloque sobre el plano inclinado unas 7 veces, y en cada una de ellas mida el tiempo que tarda en recorrerlo, así como la distancia horizontal *x* que alcanza. Debe tomar mediciones de la traslación del centro de masa del objeto y utilice papel carbón para imprimir las marcas de donde cae el bloque.

3. Determine los demás datos necesarios (y, L y θ).

4. Calcule μ_k utilizando las ecuaciones (5.3) y (5.4) y determine el porcentaje de diferencia.

Parte II: Determinación del coeficiente de rozamiento estático

1. Con el plano puesto sobre su mesa en forma horizontal, arme el equipo según la Figura 5.2.

2. Vacíe arena en el recipiente pequeño hasta que se observe que el bloque inicia su movimiento sobre la mesa. Mida la masa *m* del recipiente y la arena juntos.

3. Repita el punto anterior unas dos veces más y obtenga un valor promedio para *m*.

4. Mida la masa del bloque (*M*) y mediante la ecuación (5.6) estime el coeficiente de rozamiento estático μ_e.

No se olvide de la
Discusión de los resultados
y las
Conclusiones

DENSIDAD Y PRINCIPIO DE ARQUIMEDES

Objetivos

1) *Calcular la densidad volumétrica de masa del agua utilizando la definición de densidad.*
2) *Medir la densidad volumétrica de masa de un objeto sólido homogéneo, cuya densidad es mayor que la del agua, utilizando varios métodos.*
3) *Demostrar experimentalmente el principio de Arquímedes.*

Introducción

El principio de Arquímedes tiene gran utilidad, se utiliza entre otras cosas para estudiar y planificar situaciones en las que cuerpos flotan en fluidos, así como para investigar densidades de diferentes cuerpos. De hecho, una versión histórica dice que Arquímedes pensó en esto último cuando su rey le asignó el determinar si una corona era realmente de oro o no. Por supuesto, él no podía dañar la corona de manera alguna (tal como fundirla, en una forma sencilla para calcular la densidad). La leyenda dice que Arquímedes se encontraba en su bañera cuando se le ocurrió como hacerlo y se emocionó tanto que salió gritando : ¡Eureka! ¡Eureka! (lo encontré, lo encontré), causando gran conmoción al correr por las calles desnudo.

En sí, el principio de Arquímedes afirma que cuando un cuerpo está sumergido en un fluido, este ejerce sobre el cuerpo una fuerza hacia arriba igual al peso del fluido desalojado por él.

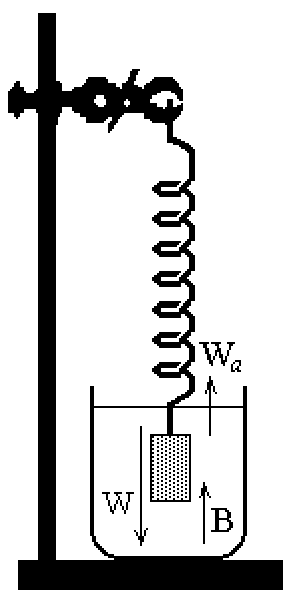


Figura 6.1. Dispositivo experimental para el estudio del principio de Arquímedes.

Si tenemos una situación como la mostrada en la Figura 6.1, el objeto cuando se encuentra fuera del fluido marca en el resorte calibrado un peso W. Una vez que se sumerge, marca un peso menor a W, llamado peso aparente W_a. Esta diferencia de pesos es debida a la fuerza de empuje que establece el principio de Arquímedes. Realizando un balance de fuerzas se tiene que

$$W = W_a + B \tag{6.1}$$

A partir de esta ecuación y utilizando la definición de densidad, usted puede verificar que la densidad del cilindro se puede determinar mediante la siguiente ecuación:

$$\rho = \frac{W}{W - W_a}\ \rho_{H_2O} \tag{6.2}$$

Equipo

1. Probeta de 100 ml
2. Resorte calibrado
3. Soporte metálico con prensa
4. Regla graduada
5. Vernier
6. Cilindro de metal sólido
7. Balanza electrónica

Procedimiento

1. Mida en la balanza electrónica la masa de la probeta vacía.

2. Llene la probeta con agua hasta su máxima línea indicadora de lectura y mida entonces la masa del agua y la probeta juntas. Por diferencia calcule la masa del agua.

3. Con los datos de masa y volumen calcule la densidad del agua y la diferencia porcentual con el valor teórico que es de aproximadamente 1 g/ml.

4. Utilizando un vernier mida las dimensiones del cilindro que le permitirán calcular su volumen y calcúlelo.

5. Mida la masa del cilindro en la balanza y conjuntamente con el volumen calculado en punto 4. encuentre la densidad del cilindro.

6. Derrame un poco de agua de la probeta (suficiente para que al sumergir el cilindro aún pueda realizarse la lectura del volumen bajo la superficie del agua). Sin estar el cilindro sumergido, anote la lectura de la probeta.

7. Utilizando el resorte que usted calibró en la práctica de la Ley de Hooke, mida el peso del cilindro (mida la elongación a partir de la posición de equilibrio y con la información que usted obtuvo de su ajuste, calcule la fuerza).

8. Mantenga el cilindro colgando del resorte y sumérjalo en el agua. Mida su peso aparente.

9. Anote también el volumen del fluido desplazado a partir de la lectura en la probeta (que es igual al volumen del cuerpo sumergido, compare sus valores).

10. Calcule la fuerza de empuje a partir de la ecuación (6.1) junto con su incertidumbre.

11. Calcule el peso del agua desplazada con su respectiva incertidumbre y compárelo con la fuerza de empuje calculada en el punto anterior. Verifique si dentro de la incertidumbre experimental el principio de Arquímedes se cumple.

12. Calcule la densidad del cilindro utilizando la ecuación (6.2) y compare los diferentes valores obtenidos (puntos 5. y 12.) con el reportado en la literatura.

No se olvide de la
Discusión de los resultados
y las
Conclusiones

MOVIMIENTO OSCILATORIO

Objetivo

Estudiar algunas características del período del movimiento oscilatorio de un péndulo simple y de un sistema masa resorte.

Introducción

Todo movimiento oscilatorio es caracterizado básicamente por dos magnitudes físicas de fácil interpretación. La amplitud *A* y el período *T*. La primera nos brinda información respecto a cuánto se aleja el sistema oscilante de su posición de equilibrio y el período es el intervalo de tiempo transcurrido al completar una oscilación. Dos sistemas físicos oscilantes se muestran en la Figura 7.1.

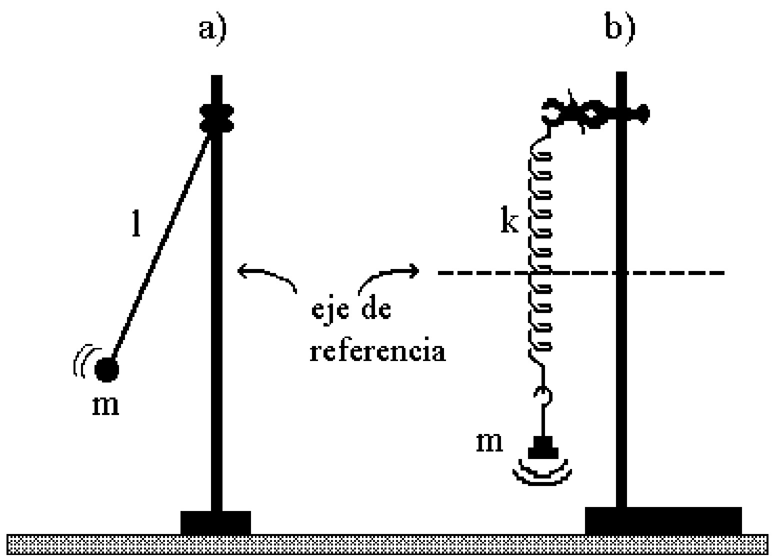


Figura 7.1. Sistemas oscilantes típicos utilizados para estudiar la relación entre frecuencia, período y amplitud.

Suponga que se definen dos ejes de referencia, uno para cada sistema de la Figura 7.1, siendo una línea vertical para el primero y una horizontal para el segundo. Se pone a oscilar cada sistema y se mide, para un número de oscilaciones previamente especificado, el intervalo de tiempo que dura. Al dividir ese número de veces entre el tiempo transcurrido se obtiene un parámetro que da información respecto a que tan frecuente es el paso del objeto por el punto de referencia, esto es, se habrá obtenido la frecuencia del movimiento oscilatorio en estudio.

Debe investigar antes de ir al laboratorio, qué funcionalidad existe entre el período de oscilación de un péndulo simple y los parámetros amplitud, masa y longitud del péndulo y entre el período de un sistema masa resorte y los parámetros amplitud y masa. Además debe llevar un transportador.

Equipo

1. Soporte metálico con prensas
2. Cuerda
3. Masas
4. Cronómetro
5. Transportador
6. Resorte

Procedimiento

1. Una vez montado el dispositivo de la Figura 7.1.a), mida el intervalo de tiempo que tarda el péndulo en completar 3 oscilaciones con una amplitud dada. Repita esto 5 veces, procurando que en forma aproximada la posición inicial de la masa m sea la misma en todos los casos (para esto utilice el transportador). Con el valor promedio calcule el período y la frecuencia respectivos, llenando en su cuaderno una tabla como la indicada en el Cuadro 7.1.

2. Ahora procure poner a oscilar el sistema con una amplitud aproximadamente el doble de la que usó antes y de nuevo repita las 5 mediciones de período.

3. Volviendo a utilizar la amplitud original, duplique la masa oscilante y realice las 5 mediciones de frecuencia.

4. Reduzca l a la mitad y proceda de nuevo con las mediciones de frecuencia.

5. Arme ahora el dispositivo que se muestra en la Figura 7.1.b) y repita el procedimiento establecido en los puntos 1., 2. y 3.

Cuadro 7.1. Medición de la frecuencia y del periodo de un péndulo simple, bajo diferentes condiciones.

Sistema	n	# Oscilaciones	Tiempo (s)	Período (s)	Frecuencia (Hz)
l *A* *m*	1	3		-	-
	2	3		-	-
	3	3		-	-
	4	3		-	-
	5	3		-	-
Promedio		3			
l 2 *A* *m*	1	3		-	-
	2	3		-	-
	3	3		-	-
	4	3		-	-
	5	3		-	-
Promedio		3			
l *A* 2 *m*	1	3		-	-
	2	3		-	-
	3	3		-	-
	4	3		-	-
	5	3		-	-
Promedio		3			
l/2 *A* *m*	1	3		-	-
	2	3		-	-
	3	3		-	-
	4	3		-	-
	5	3		-	-
Promedio		3			

No se olvide de la
Discusión de los resultados
y las
Conclusiones

ONDAS ESTACIONARIAS EN UNA CUERDA

Objetivo

Estudiar en una onda estacionaria generada en una cuerda, la relación o dependencia entre la longitud de onda λ y la tensión T a la cual está sometida la cuerda.

Introducción

El concepto de onda mecánica viajera es un tanto abstracto, pues en él está implícita la existencia de un medio material de dimensiones infinitas, a través del cual se propaga la onda, la que a su vez, fue producida por una perturbación aplicada en determinada región de dicho medio. Esto es un primer paso para introducir los conceptos básicos usados en la descripción del movimientos ondulatorio.

Una onda es caracterizada por los parámetros conocidos como amplitud *A*, frecuencia angular ω, velocidad de propagación v_p y longitud de onda λ; además de su naturaleza transversal o longitudinal.

En las fronteras del medio se producen, en mayor o menor grado, efectos muy propios de las ondas: reflexión y transmisión. En particular, la onda original (incidente) y la reflejada se superponen en cada punto del medio material, si la frecuencia de estas ondas y las dimensiones del medio en que se propaga guardan una relación característica (según la geometría del sistema físico), entonces la onda resultante es estacionaria.

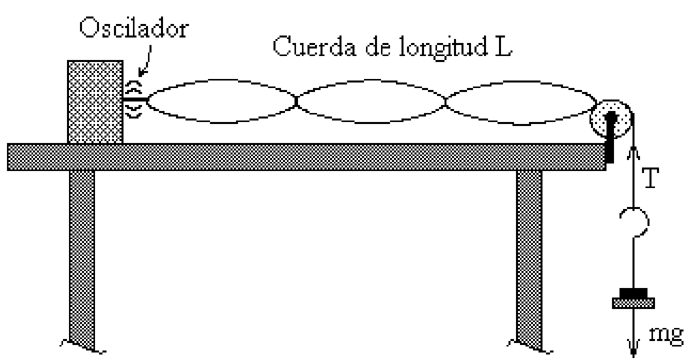


Figura 8.1. Dispositivo utilizado para generar y estudiar ondas estacionarias.

Si consideramos una cuerda con uno de sus extremos fijos, oscilando en el otro extremo y bajo tensión (tal como la de la Figura 8.1), las ondas estacionarias que se pueden generar son básicamente transversales y su perfil corresponde al de una función senoidal. La relación característica del sistema está dada por

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \tag{8.1}$$

siendo n = 1,2,3,...el número de antinodos presentes (éstos son aquellos puntos de la cuerda en los cuales la oscilación es máxima). Además, la velocidad de propagación y la tensión, a la que está sometida la cuerda, se relacionan mediante la ecuación:

$$v_p = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{8.2}$$

donde μ es la densidad lineal de masa de la cuerda. Combinando las ecuaciones (8.1) y (8.2) mediante la relación general que satisfacen las ondas:

$$v_p = \lambda f \tag{8.3}$$

se obtiene la relación entre λ y T:

$$\lambda = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{8.4}$$

Equipo

1. Pesas
2. Portapesas
3. Cuerda
4. Oscilador de frecuencia conocida
5. Balanza
6. Regla graduada de un metro de longitud

Procedimiento

1. Una vez montado el dispositivo de la Figura 8.1, encienda el oscilador y cuelgue pesas en el extremo derecho de la cuerda. Moviendo el oscilador hacia adelante o hacia atrás, varíe la longitud L de la cuerda hasta que obtenga un patrón de onda estacionaria bien definido.

2. Proceda a determinar λ midiendo la separación entre dos antinodos o nodos adyacentes de la onda y considerando que esta distancia es la mitad de λ, llamada semilongitud de onda.

3. Apague el oscilador y mida la masa de las pesas junto con el portapesas y calcule su peso, así obtendrá el valor de la tensión $T = mg$.

4. Repita los puntos 1., 2. y 3. para al menos cuatro valores distintos de tensión, obteniendo así los valores de la tensión y su respectiva longitud de onda, los cuales puede ir tabulando en un cuadro cuyo encabezado sea como el mostrado en el Cuadro 8.1.

Cuadro 8.1. Longitud de onda λ y tensión T para las ondas estacionarias de frecuencia f = _____ Hz.

n	L (m)	λ (m)	T (N)

5. Haga el gráfico de λ contra T y obtenga la función matemática que relaciona sus datos. Compare la ecuación obtenida con la ecuación (8.4).

Nota : De necesitar el valor de la densidad lineal de masa de la cuerda, puede utilizar μ = 0,37 g/m.

No se olvide de la
Discusión de los resultados
y las
Conclusiones

GAS IDEAL

Objetivos

1) *Observar y comprobar la variación del volumen de un gas con la presión cuando la temperatura permanece constante, bajo las condiciones del laboratorio (Ley de Boyle).*
2) *Determinar la relación entre el volumen y la temperatura de un gas a presión constante, bajo las condiciones del laboratorio (Ley de Charles).*
3) *Extrapolar el cero absoluto de temperatura.*

Introducción

Los experimentos hechos con varios gases demuestran que las cuatro variables: temperatura (T), presión (P), volumen (V) y cantidad de gas en moles (n) son suficientes para definir el estado de muchas sustancias gaseosas.

La primera relación entre estas variables fue descubierta por Robert Boyle (1627-1691). La ley de Boyle establece que *el volumen de una cantidad fija de gas mantenida a una temperatura constante es inversamente proporcional a la presión del gas ($V \propto 1/P$).*

La relación entre el volumen de un gas y la temperatura fue descubierta en el año 1787 por Jacques Charles (1746-1823), un científico francés. Charles encontró que el volumen de una cantidad fija de gas a una presión constante aumenta en una proporción lineal con la temperatura. Si esta relación lineal obtenida en sus experimentos se extrapolaba para encontrar el cero, se obtenía una temperatura de -273°C, independientemente de cual gas se utilizara. En 1848 William Thomson (1824-1907), un físico británico cuyo título era Lord Kelvin, propuso la idea de una escala de temperatura absoluta (escala Kelvin) con -273°C = 0 K. En términos de esta escala absoluta, la ley de Charles puede expresarse de la siguiente manera: *el volumen de una cantidad fija de gas mantenido a una presión constante es directamente proporcional a la temperatura absoluta ($V \propto T$).*

La relación entre el volumen del gas y la cantidad del mismo, se debió a los trabajos del científico francés Joseph Louis Gay-Lussac (1778-1850) y al científico italiano Amadeo Avogadro (1776-1856). Como resultado de sus investigaciones se establece que *el volumen de un gas mantenido a una presión y temperatura constantes es directamente proporcional a la cantidad del gas ($V \propto n$).*

Si unimos las tres relaciones discutidas anteriormente, obtenemos una relación más general: $V \propto nT/P$. Si utilizamos una constante de proporcionalidad R, obtenemos la denominada Ley de los gases ideales, la cual reordenada en su forma más conocida es:

$$PV = nRT \tag{9.1}$$

Equipo

1. Termómetro
2. Pesas
3. Jeringa de 1 cm^3
4. Balanza
5. Vernier
6. Beakers
7. Erlenmeyer con tapón
8. Soporte metálico con prensas
9. Calentador de gas

Procedimiento

Parte I: Ley de Boyle

1. Tome el valor de la temperatura ambiente T_a, el de la presión atmosférica P_a en el laboratorio y el del diámetro interno de la jeringa *D* para calcular su área transversal *A*, antes de iniciar las otras medidas.

2. Ajuste la cantidad de aire en la jeringa hasta el valor inicial de 1 cm^3 y tápela. Se puede despreciar el peso del émbolo y suponer que la presión ejercida en el mismo por el aire encerrado en la jeringa es igual a la presión que ejerce la atmósfera hacia abajo sobre su parte superior.

3. Para variar la presión sobre el aire ponga pesas de valores previamente determinados (*m*) sobre el émbolo sosteniéndolo en una forma vertical. Mida el nuevo volumen que adquiere el gas bajo esta presión. Recuerde que la presión manométrica a la que está sometido el gas es debido al peso de las masas sobre el émbolo $P_{man} = mg/A$; la presión absoluta es la suma de la monométrica más la atmosférica $P_{abs} = P_{man} + P_a$. Organice una tabla para anotar los datos necesarios con un encabezado como el mostrado en el Cuadro 9.1.

Cuadro 9.1. Datos de la variación del volumen del aire sometido a diferentes presiones a una temperatura constante de _____ °C.

V (cm^3)	m (kg)	P_{man} (Pa)	P_{abs} (Pa)

4. Tome al menos 5 pares de datos de presión y volumen diferentes. Considere que siempre que vaya a tomar un par de datos debe agregar peso, nunca quitar.

5. Haga una gráfica en papel milimétrico del volumen en función de la presión absoluta del aire encerrado. Encuentre la relación existente entre sus datos haciendo las transformaciones pertinentes y compare con la teoría.

Parte II: Ley de Charles

1. Introduzca un erlenmeyer con tapón y tubo de vidrio en agua hirviendo como se muestra en la Figura 9.1.a). Al cabo de unos cinco minutos, el aire en el erlenmeyer estará a la temperatura del agua hirviendo; procure asegurarse de que así sea, sino déjelo más tiempo sumergido. Tome el valor de la temperatura del agua hirviendo.

2. Con su dedo colocado firmemente en el extremo del tubo de vidrio, para evitar que el aire entre al erlenmeyer, introdúzcalo invertido en un beaker con agua helada como se muestra en la Figura 9.1.b). Quite su dedo cuando el cuello esté completamente sumergido, y cubra todo el erlenmeyer con la mezcla de hielo y agua. Después de algunos minutos la temperatura del aire en el erlenmeyer se igualará con la del agua helada. Asegúrese de dejarlo el tiempo suficiente para que esto se cumpla. Tome el valor de la temperatura del agua helada.

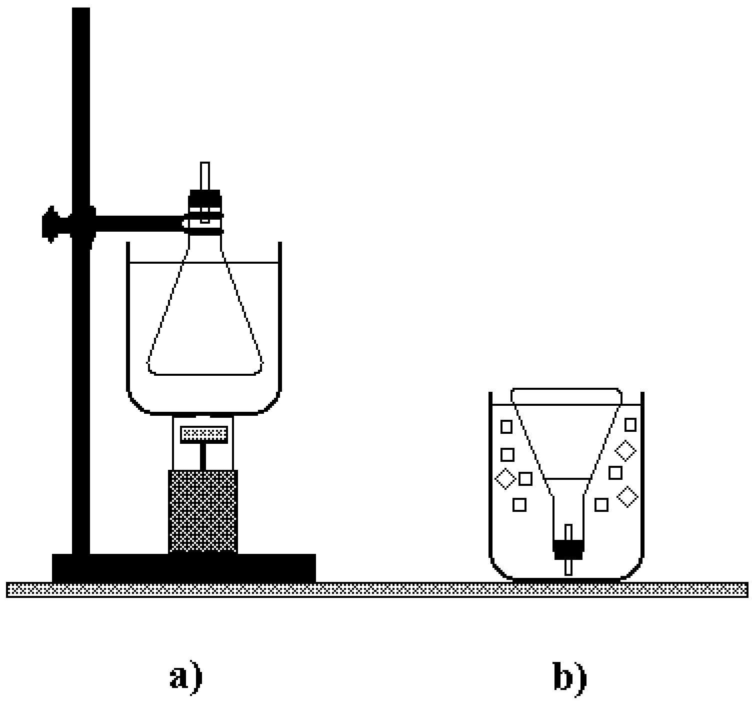


Figura 9.1. Disposición del equipo a utilizar para determinar el volumen de una cantidad de aire a dos temperaturas fijas.

3. Antes de sacar el erlenmeyer del agua helada, asegúrese de que la presión del aire interior es igual a la del laboratorio. Esto puede hacerse graduando la inmersión del erlenmeyer hasta que el nivel del agua dentro y fuera sea el mismo.

4. Coloque ahora su dedo en el extremo del tubo de vidrio y saque el erlenmeyer del agua helada. Midiendo cuidadosamente el volumen del agua dentro y el volumen del erlenmeyer mismo (equipado con tapón y tubo de vidrio), determine el volumen que ocupó el aire estando al punto de ebullición y al punto de congelación del agua.

5. Haga la gráfica del volumen del gas en función de la temperatura trazando una línea recta por los dos puntos obtenidos. Determine la función de la recta y además extrapole la recta hasta un volumen cero. Obtenga el valor experimental de la temperatura absoluta y compare con la teoría.

No se olvide de la
Discusión de los resultados
y las
Conclusiones

CALORIMETRIA

Objetivos

1) *Comprobar la conservación de la energía calórica cuando se mezclan sustancias a diferentes temperaturas dentro de un calorímetro.*
2) *Determinar el calor de fusión del hielo.*
3) *Determinar la capacidad calórica de algunas sustancias.*

Introducción

Las medidas de los efectos del calor se conocen como *calorimetría*. Por definición, el calor o energía térmica es la energía que se transmite de los cuerpos que están a mayor temperatura a los de menor temperatura. La temperatura de un objeto, que es una medida de la energía cinética media de cada molécula, determina la dirección de la transmisión del calor cuando dos objetos se ponen en contacto. Un cuerpo muy caliente contiene moléculas con mucha energía cinética. Un cuerpo frío es un cuerpo cuyas moléculas se mueven lentamente pues contienen, cada una de ellas en promedio, poca energía cinética.

Cuando dos sustancias originalmente a temperaturas diferentes se mezclan dentro de un calorímetro, ocurrirá una transferencia de calor desde el de mayor temperatura hacia el de menor, cumpliéndose que el calor Q que pierde (cede) uno, lo gana (absorbe) el otro. De aquí la ecuación

$$Q_{ganado} = - Q_{perdido} \tag{10.1}$$

Este calor que gana o pierde la sustancia puede implicar dos cambios en la misma: uno es que su temperatura cambie ya sea calentándose o enfriándose, y el otro es que le ocurra un cambio de fase. El calor que está asociado al cambio en la temperatura se denomina *calor sensible* y lo podemos calcular conociendo la masa m, el calor específico c y el cambio de temperatura que sufre la sustancia, mediante la ecuación

$$Q = m\,c\,\Delta T \tag{10.2}$$

Por otra parte, el calor que está asociado a un cambio de fase se le denomina *calor de transformación* y es necesario conocer la masa y el calor latente L de ese cambio de fase (puede ser de fusión o de vaporización) para calcularlo mediante la ecuación

$$Q = m\,L \tag{8.3}$$

Equipo

1. Calentador de gas
2. Termómetro
3. Balanza electrónica
4. Beakers
5. Calorímetro
6. Algunos trozos de diferentes metales

Procedimiento

1. Mezcle en el calorímetro masas conocidas de agua a temperatura ambiente y a la temperatura de fusión del hielo y determine la temperatura de equilibrio. Aplique las ecuaciones (10.1) y (10.2) para calcular teóricamente esa temperatura. Si hay diferencia calcule el porcentaje de error.

2. Repita el procedimiento anterior pero esta vez mezcle agua a la temperatura ambiente con agua hirviendo.

3. Repita con agua hirviendo y agua a la temperatura de fusión del hielo.

4. Determine el calor de fusión del hielo, L_f. Para esto coloque agua caliente en el calorímetro y agregue unos dos o tres "cubos" de hielo; el agua debe ser la suficiente para que todo el hielo se funda. Combinando las ecuaciones (10.1), (10.2) y (10.3) y haciendo uso de los datos obtenidos, calcule L_f y compare con el teórico.

5. Ahora usted debe calcular el calor específico de algunos metales. Ponga una masa conocida de agua fría en el calorímetro y mida su temperatura. Cuelgue un trozo de metal previamente pesado de un hilo y sumérjalo en agua hirviendo durante unos minutos (es de suponer que la temperatura de todo el trozo de metal se igualará a la del agua hirviendo). Mida esta temperatura. Rápidamente, pero sin precipitación, tome el trozo de metal por medio del hilo y métalo en el calorímetro. Determine la temperatura final de equilibrio y calcule el calor específico del metal haciendo uso de las ecuaciones (10.1) y (10.2). Compare con el valor reportado en la literatura para ese material.

No se olvide de la
Discusión de los resultados
y las
Conclusiones

APENDICE

A. MEDICIONES[1]

Ninguna medición puede dar un valor absolutamente exacto de una cantidad física. Un valor rigurosamente exacto tendría en principio infinitas cifras significativas. Las posibilidades de las mediciones tienen un límite. Cuando se refiera más adelante al *verdadero valor* de una cantidad física, siempre debe entenderse como una abstracción.

El resultado de una medición es un número, el cual se obtiene mediante algún procedimiento de comparación de la magnitud física, con otra de la misma especie que se ha tomado como patrón y que se define como la unidad de medida de la especie. Además toda medición debe estar acompañada de una indicación sobre la *incertidumbre* de la misma.

Una medición es *directa* si resulta de la comparación con el patrón y es *indirecta* si es el resultado de operaciones matemáticas con medidas directas.

Los requisitos de *exactitud* demandan que cada medida se haga tan cuidadosamente como sea posible y para cumplir con esto es una práctica universal en las mediciones físicas, *estimar la lectura de la escala en décimas de la menor división*, cuando esto sea posible, o por lo menos en la mitad de la menor división, cuando la escala es muy pequeña y difícil de leer. Así, por ejemplo, si se tiene una escala cuya menor división es un milímetro, al estimar el décimo las mediciones pueden ser 25,38 cm, 67,10 cm, etc., y si estimamos la mitad serán 25,50 cm ó 67,00 cm. Este criterio deberá usarse con cualquier instrumento de medida tal como una balanza, medidores eléctricos, termómetros, reglas, etc. y se exigirá como norma de trabajo en el laboratorio.

También será requerido el uso de *cifras significativas*, las que se definen como el número de dígitos acerca de los cuales nos sentimos razonablemente seguros en una medición.

La última cifra significativa en una medición directa, generalmente se obtiene estimando la fracción de la menor división de la escala, según se indicó en el párrafo anterior. Así, por ejemplo, la mediciones de longitud hechas con regla graduada en milímetros podrían ser: 3,4758 m, ó 347,58 cm, ó $3{,}4758 \times 10^{3}$ mm, las que contienen cinco cifras significativas.

En las mediciones hechas con un *vernier* o con un *micrómetro*, cuyos resultados sean por ejemplo 0,005 cm y 0,0050 cm, los tres ceros delante del número cinco no son cifras significativas, pero el número cero después del cinco en la segunda medición sí lo es, ya que si no lo fuera no tendría sentido escribirlo. En este último caso quizás es mejor escribir la medición como $5{,}0 \times 10^{-3}$ cm.

El usuario de un reporte considera que el aspecto de cifras significativas se ha manejado con propiedad por el investigador. En todas las mediciones se considera que *sólo la última cifra* está afectada por la incertidumbre en las medidas.

Cuando se realizan operaciones matemáticas con las mediciones, por lo general se considera que el resultado tendrá igual número de cifras significativas que la cantidad que posee el menor número de ellas.

Más adelante se estudiarán algunos métodos de cálculo para la propagación de incertidumbres y se volverá a discutir sobre cifras significativas.

---

[1]Tomado con algunas modificaciones de la referecia [11].

En este laboratorio una medición hecha con una regla graduada en milímetros y expresada como 32,5 cm ó 32,530 cm, no es aceptable, ya que evidencia un tratamiento descuidado de las cifras significativas.

En nuestro afán de obtener una medición exacta (cercana al valor real), en muchas ocasiones resulta mejor no solo tomar una, sino una serie de mediciones. Los diferentes resultados de una serie de mediciones presentan una dispersión en torno al valor promedio. En principio sólo puede afirmarse que el verdadero valor de la cantidad que se mide, se haya con gran probabilidad dentro del ámbito de dispersión y precisamente en la región de máxima acumulación de las distintas medidas; pero ¿cuál es entonces el valor óptimo de una medición? Para esta pregunta no existe una contestación demostrable, sólo se puede postular un principio de cálculo. Según Gauss se toma como valor óptimo el que hace mínima la suma de los cuadrados de las desviaciones de los valores aislados (método de mínimos cuadrados). Se puede demostrar que esa cantidad es el promedio aritmético de los valores x_i, es decir,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \text{(A.1)}$$

La incertidumbre en las mediciones

Cuando se cita el resultado de una medición de la velocidad de la luz el cual es $2{,}99792458 \times 10^8$ m/s ± $0{,}00000002 \times 10^8$ m/s, el número $2{,}99792458 \times 10^8$ m/s representa la *mejor estimación* de dicha velocidad, que es el resultado de cuidadosos experimentos, realizados rigurosamente para controlar la *exactitud* y *precisión* de la medición. El número 0.00000002×10^8 m/s es la *incertidumbre* determinada por el experimentador.

Generalmente se considera que en una medición pueden darse dos tipos de incertidumbre:

Las sistemáticas:

Son producidas por:

a) defectos de calibración de los instrumentos
b) errores personales causados por hábitos del experimentador
c) condiciones experimentales del equipo, diferentes de como fue calibrado
d) técnica imperfecta en la realización del experimento

En el laboratorio se pueden producir incertidumbres sistemáticas, si se usa una regla mal graduada, una balanza sin calibrar el cero, un cronómetro que adelante o que atrasa, una probeta fuera de su ámbito de temperatura de trabajo, etc. Este tipo de incertidumbres siempre afecta la medición de la misma forma, y esa es la manera de descubrirlas.

Las aleatorias:

Son las que ocurren al azar, aumentando o disminuyendo aleatoriamente el valor de la medición y se producen por:

a) errores de juicio al estimar la fracción de la menor división de la escala

b) condiciones fluctuantes de presión, temperatura, voltaje, iluminación, etc.
c) pequeños disturbios (vibraciones mecánicas, señales ilegítimas recogidas por instrumentos eléctricos, etc.)
d) adelantos o atrasos entre la ocurrencia de un fenómeno y el accionar de un cronómetro

Además, podría decirse que están *los errores inaceptables*, los cuales deben ser evitados y no tienen cabida en un experimento que se realice cuidadosamente, suponiéndose que en un reporte no están presentes. Entre ellos tenemos:

a) disparates, causados por la equivocación completa de leer un instrumento, al ajustar las condiciones del experimento o al hacer cálculos
b) errores de cómputo, producidos por el uso de calculadoras en mal estado
c) errores caóticos, causados por disturbios irracionalmente grandes comparados con los aleatorios normales

en estos casos el experimento debe suspenderse hasta que la causa del disturbio sea eliminada.

Otro aspecto interesante de un experimento es la *precisión* y la *exactitud*. Si un experimento está afectado por incertidumbres aleatorias pequeñas, se dice que es *preciso*. Si también la incertidumbre de naturaleza sistemática es pequeña, el experimento es *exacto*.

Si denotamos por x_v el verdadero valor y por $\overline{x}$ el promedio de un conjunto de mediciones, se puede interpretar la exactitud como el grado en que una medición particular x_i, y en última instancia $\overline{x}$, se acerca a x_v y la precisión como el grado en que los x_i se aproximan entre sí.

La Figura A.1 muestra los valores de las mediciones de una cierta cantidad física *x*, en los meses de enero, febrero y marzo. Se indica también el supuesto valor exacto x_v. Observe que los datos de enero son precisos pero poco exactos, los de febrero altamente imprecisos e inexactos, en cambio los de marzo tienen mayor grado de precisión y exactitud.

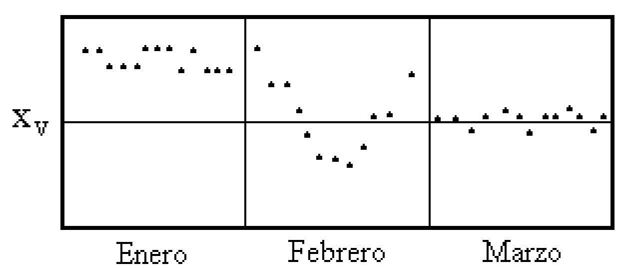


Figura A.1. Valores del parámetro *x* en los meses de enero, febrero y marzo

Es importante establecer un método para el manejo de redondeo de cifras. El más usado es el siguiente:
Si un número de (n+1) cifras va a ser redondeado a n cifras, se debe observar la cifra (n+1) y proceder así:

a) Si es mayor que 5, entonces la enésima cifra se aumenta en 1
b) Si es menor que 5, entonces la enésima cifra se deja como está
c) Si es igual a 5, entonces si la enésima es par se deja como está y si es impar, entonces se redondea al número par más cercano

Cálculo de incertidumbres

Para iniciar el estudio del cálculo de incertidumbres definiremos en primer lugar las *desviaciones* o *residuos*.

Para un cierto valor x_i de un conjunto de mediciones la desviación o residuo se define como:

$$\delta x_i = x_i - \overline{x} \tag{A.2}$$

Una solución un poco pesimista sería considerar que la incertidumbre es igual al valor absoluto de la desviación máxima, esto es $|\delta x$ (máximo)$|$. Sin embargo, pronto veremos que hay mejores opciones.

El promedio de las desviaciones no proporciona una información útil, ya que si el experimento sólo está afectado por incertidumbres aleatorias, su valor es cero.

Una solución más optimista sería considerar el promedio del valor absoluto de las desviaciones a, definido como:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \overline{x} \right|}{n} \tag{A.3}$$

que representa una buena opción de cálculo más expedito.

La teoría y la práctica recomiendan que el mejor método para evaluar la incertidumbre de un conjunto de mediciones es por medio de la desviación estándar promedio, que se estudiará a continuación.

Incertidumbre en medidas directas

Si solamente se ha hecho una medición de una variable y si se considera que no está afectada por incertidumbres de tipo sistemático, ésta se determina como una apreciación de la precisión del instrumento, como ya se dijo antes. Por ejemplo, en la medición de longitud

$$l = 3{,}25 \text{ cm} \pm 0{,}01 \text{ cm}$$

la *incertidumbre absoluta* es $\Delta l = \pm\, 0{,}01$ cm.

El resultado de los cálculos de incertidumbres nunca se debe considerar como exacto, ya que descansa en consideraciones de probabilidad. Las incertidumbres se dan por lo general con dos cifras significativas como máximo y en caso de duda redondeadas por exceso. **En este curso tomaremos como norma expresar la incertidumbre con una sola cifra significativa**.

Existe una gran diferencia de calidad en un experimento en que la incertidumbre absoluta es 0,01 cm, cuando se midió una longitud de 1,00 cm, y en otro con la misma incertidumbre absoluta pero cuando la medición fue de 100,00 cm. En el primer caso la incertidumbre es de ± 1 % del valor medido, mientras que en el segundo caso es solamente de ± 0,01% del valor medido. Es conveniente entonces definir la incertidumbre relativa, de la siguiente manera:

$$incertidumbre\ relativa = \frac{\Delta x}{x} \tag{A.4}$$

Si se ha hecho un número grande *n* de medidas de una misma cantidad física, se puede demostrar que la *desviación estándar* o simplemente la *incertidumbre media de los valores aislados* es:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{A.5}$$

La incertidumbre en el valor promedio de las mediciones, también denominada *desviación estándar promedio* o *error estándar del promedio*, es igual a la desviación estándar de las mediciones individuales, dividida entre la raíz cuadrada del número de mediciones independientes, esto es

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} \tag{A.6}$$

La teoría probabilística nos establece que si los datos poseen una distribución normal y utilizamos un error estándar ($s_{\bar{x}}$) como la incertidumbre del valor promedio calculado, se tendrá una probabilidad de aproximadamente 68.2 % de que el valor real esté en ese ámbito reportado; si utilizamos $2s_{\bar{x}}$ la probabilidad sería de aproximadamente 95.4 % y si usamos $3s_{\bar{x}}$ la probabilidad sería cercana a 99.7 %. En este curso se reportará normalmente la incertidumbre del promedio como un solo error estándar.

Si el número de mediciones *n* se aumenta, con cada valor aislado que se agregue, el promedio y el error estándar se modifican en general, pero en un porcentaje menor a medida que aumenta el número de valores utilizados. Por ejemplo, si en lugar de 10 medidas se toman 100, la incertidumbre del resultado (promedio) sólo se reduce en un tercio y no en un décimo. Esto indica que para un determinado valor, un número de mediciones excesivo no compensa el tiempo invertido en ellas. Es preferible dedicar el esfuerzo a una realización cuidadosa de las mediciones, para asegurar la calidad.

Como un ejemplo de cálculo del error estándar, se muestra en el Cuadro A.1 los resultados para un conjunto de 51 mediciones de una longitud *x*. En la primera columna aparecen los diversos valores medidos y en la segunda el número de veces *f* que ocurrió cada valor.

Promedio : $\bar{x} = \frac{53.73\,cm}{51} = 1.054\,cm$

Desviación promedio: $a = \frac{0.88\,cm}{51} = 0.02\,cm$

Desviación estándar : $s_x = \sqrt{\frac{0.0226}{50}}\,cm = 0.02\,cm$

Error estándar : $$s_{\bar{x}} = \frac{0.02\ cm}{\sqrt{51}} = 0.003\,cm$$

De tal manera que el resultado de este conjunto de mediciones puede escribirse como :

$$\boxed{x = 1.054 \text{ cm} \pm 0.003 \text{ cm}}$$

Cuadro A.1. Ejemplo de cálculo del error estándar de una serie de mediciones

x (cm)	f	$f \times x$ (cm)	δx (cm)	$f \times \lvert \delta x \rvert$ (cm)	$(\delta x)^2$ (cm^2)	$f \times (\delta x)^2$ (cm^2)
1.01	1	1.01	-0.04	0.04	0.0019	0.0019
1.02	3	3.06	-0.03	0.10	0.0012	0.0035
1.03	6	6.18	-0.02	0.14	0.0006	0.0034
1.04	8	8.32	-0.01	0.11	0.0002	0.0016
1.05	10	10.50	0.00	0.04	0.0000	0.0002
1.06	7	7.42	0.01	0.04	0.0000	0.0003
1.07	8	8.56	0.02	0.13	0.0003	0.0021
1.08	4	4.32	0.03	0.10	0.0007	0.0027
1.09	3	3.27	0.04	0.11	0.0013	0.0039
1.10	0	0.00	0.05	0.00	0.0021	0.0000
1.11	1	1.11	0.06	0.06	0.0031	0.0031
$\sum$	51	53.75		0.88		0.0226

* Los valores que aparecen en el cuadro están redondeados,
sin embargo los cálculos se realizaron con los valores sin redondear.

Mediciones indirectas
Propagación de incertidumbres

Suponga que una cantidad física f va a ser calculada por medio de alguna fórmula desarrollada teórica o empíricamente, a partir de algunas cantidades medidas x_i, las cuales tienen sus respectivas incertidumbres Δx_i. Sea entonces $f = f\,(x_1, x_2, \ldots , x_n)$.

Incertidumbres totalmente independientes

Suponga que se hace un cierto número de mediciones de las variables x_i, las que se consideran "*independientes*" en cuanto a las incertidumbres, es decir, la causa y el valor de la incertidumbre de una, no afecta a la otra. Por ejemplo, en la medición de la masa, la elongación y el período de un sistema masa-resorte, las incertidumbres son totalmente independientes, aunque las variables estén relacionadas, ya que la primera se mide con balanza, la segunda con reglas graduadas y la tercera con cronómetros.
El mejor valor de f (el valor más probable) es el promedio $\bar{f}$, definido como

$$\overline{f} = f\,(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}) \qquad \text{(A.7)}$$

La incertidumbre relacionada con el valor $\overline{f}$ calculado, la cual denotaremos por Δf se calcula de la siguiente manera:

$$\Delta\, f \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\, f}{\partial\, x_i}\right)^2 \Delta x_i^2} \qquad \text{(A.8)}$$

donde las derivadas parciales se evalúan con los valores promedio.

Incertidumbres dependientes

En el caso de que las incertidumbres de las variables x_i tengan una causa común, por ejemplo en las mediciones del largo, ancho y espesor de un bloque de madera, realizadas con la misma regla, se dice que son dependientes, o que están correlacionadas.

Para el cálculo de propagación de incertidumbres de este tipo deben usarse los métodos del cálculo infinitesimal en su forma general.

$$\Delta f \;=\; \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta x_i \qquad \text{(A.9)}$$

Ejemplo :

Se desea determinar la densidad de un sólido amorfo, mediante el empleo de la definición de densidad :

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \text{(A.10)}$$

Para ello se midió entonces la masa del sólido en una balanza electrónica obteniéndose que era ***m* = 47 g ± 1 g**. El volumen se midió por desplazamiento de agua al sumergir el sólido en una probeta, resultando ser ***V* = 7,5 cm^3 ± 0,5 cm^3**.

Aplicando la definición de densidad [ecuación (A.10)], se obtiene

$$\rho = \frac{47g}{7{,}5cm^3} = 6.2\overline{6}\,\frac{g}{cm^3} \qquad \text{(A.11)}$$

Ahora, para calcular la incertidumbre de esta medición indirecta, debemos reconocer primeramente que las incertidumbres de las mediciones directas que se realizaron son *independientes* entre sí, por cuanto se utilizaron instrumentos diferentes. Por lo tanto se debe usar la ecuación (A.8) para el cálculo de la misma, la cual aplicada a este caso queda

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial V}\right)^2 \Delta V^2} \qquad \text{(A.12)}$$

Como siguiente paso se calculan las derivadas parciales de la función densidad [ecuación (A.10)] con respecto a cada una de las variables independientes

$$\frac{\partial\rho}{\partial m} = \frac{1}{V} \qquad \text{(A.13)}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial V} = -\frac{m}{V^2} \qquad \text{(A.14)}$$

Sustituyendo en la ecuación (A.12) y evaluando

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{V}\right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{-m}{V^2}\right)^2 \Delta V^2}$$

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{7{,}5}\right)^2 (1)^2 + \left(\frac{-47}{(7{,}5)^2}\right)^2 (0{,}5)^2}$$

$$\Delta\rho = \sqrt{0{,}018 + 0{,}175}$$

$$\Delta\rho = 0{,}4 \frac{g}{cm^3}$$

Entonces el resultado de la medición se reportaría como

$$\boxed{\rho = 6{,}3 \frac{g}{cm^3} \pm 0{,}4 \frac{g}{cm^3}}$$

B. GRAFICACION

Si se tiene un conjunto de datos (x, y) asociados a una serie de mediciones, su representación gráfica es un primer paso en procura de establecer el grado de relación entre las variables x y y. Otras aplicaciones que tienen las gráficas en física experimental son el determinar el valor de alguna magnitud y como ayuda visual para analizar datos. Previo a la graficación, el experimentador ya ha catalogado a una de las variables como la *independiente* (aquella cuyo valor controla en el laboratorio) y a la otra como *dependiente*. Así , en el eje horizontal o *eje de las abscisas* se representa la variable independiente x, y en el horizontal o *eje de las ordenadas* la variable dependiente y.

Es habitual representar las variables usando una escala lineal en ambos ejes, o en otras palabras, usar *papel milimétrico* para hacer la gráfica. Sin embargo, dos pueden ser las razones básicas que nos hagan considerar el uso de *escalas semilogarítmicas* o bien *logarítmicas*.

Suponga que en el conjunto de datos el ámbito de valores de x es tal que entre el mínimo y máximo valor de x no hay diferencias en el *orden de magnitud*, en tanto que tratándose de la variable y si las hay; por ejemplo, el mínimo valor de y es 10,6 y el máximo 10 000,4. El usar papel milimétrico en este caso, conduciría a tener una gráfica poco precisa, y en la cual el trazo de una curva de ajuste es difícil, pues ante pequeños cambios en x, se muestran grandes variaciones en y. El uso de una escala semilogarítmica es más apropiado. La variable x se sigue representando en una escala lineal, y la variable y ahora es representada sobre una escala logarítmica. Se justifica la utilización de este tipo de escala, recordando una particularidad de la función logaritmo. Al considerar dos pares ordenados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) si

$$\frac{x_2}{x_1} \approx 1 \quad ; \quad \frac{y_2}{y_1} >> 1 \tag{B.1}$$

esto significa que los puntos están muy distanciados en sentido vertical, o sea

$$\Delta y = y_2 - y_1 >> 1 \tag{B.2}$$

Una cantidad que puede ser construida a partir de los valores de y_1 y y_2 y que resulta mucho menor que Δy, es

$$\Delta(\ln y) = \ln y_2 - \ln y_1 \tag{B.3}$$

Si sobre papel milimétrico señalamos los pares ordenados (x, ln y) en vez de (x, y), los puntos tienen a estar más cercanos entre si y se facilita trazar una curva de ajuste que nos permita evaluar el tipo de dependencia entre ln y y x. Otra forma de proceder es utilizar papel semilogarítmico, en el que se anotan directamente los pares ordenados (x, y), ya que el tipo de rayado se encarga automáticamente de colocar logaritmos *en base* 10.

Luego, si es en ambos parámetros donde se dan variaciones en orden de magnitud conviene graficar los pares ordenados (ln x, ln y) o bien el uso del papel logarítmico.

Otra razón para el empleo de una escala semilogarítmica o en su lugar la utilización de una logarítmica, aún cuando no se den variaciones en orden de magnitud en una o ambas variables respectivamente, es el hecho que algunas gráficas en escala lineal se comportan como curvas, pero en escalas adecuadas (semi-log ó log-log) se comportan como líneas rectas. Este hecho hace entonces posible poder establecer en una manera más sencilla la funcionalidad de la curva, obteniendo la ecuación de la línea recta sobre la escala semi-log ó log-log. Este tema se trata con más detalle en el apéndice C bajo el tema “Linealización de relaciones no lineales”

Otras recomendaciones para la construcción de una gráfica son:

- ✓ Haga uso de la página completa pues una gráfica comprimida reducirá la precisión en cualquier análisis posterior.
- ✓ Los ejes deben ser rotulados claramente con el nombre, el símbolo y las unidades respectivas de las magnitudes físicas representadas.
- ✓ La escala debe ser sencilla. La más sencilla es aquella en la cual una división apropiada del papel representa una unidad (ó 100, 10, 0,1, etc.) de la magnitud medida. La siguiente en complejidad es aquella en que una división representa 2 ó 5 unidades.
- ✓ No siempre es necesario incluir el origen dentro de la escala.
- ✓ Es conveniente escoger la potencia de 10 de la unidad de medida adecuada para que las divisiones de los ejes puedan numerarse con 1, 2, 3, ..., ó con 10, 20, 30, ..., en vez de por ejemplo 10 000, 20 000, 30 000, ..., ó 0,0001, 0,0002, 0,0003, ..., etc..
- ✓ Use un lápiz de trazo fino para señalar los puntos y la curva de ajuste. Sobre cada punto haga un círculo pequeño o una cruz, de modo que puedan distinguirse de otros puntos que por casualidad aparezcan en el papel. El uso de un lápiz de trazo grueso introduciría innecesarias imprecisiones.
- ✓ Debe enumerar la gráfica como una figura y acompañarla de un título breve a la vez que descriptivo, ubicado en la parte inferior.

Reglas específicas para graficar en papel semilogarítmico o logarítmico

- ✍ Dado un conjunto de datos que serán representados en un eje de escala logarítmica, primero debe establecerse el número mínimo de ciclos requeridos. Tome el cociente entre el orden de magnitud $M_{\text{máx}}$ inmediatamente superior al mayor de sus datos y el orden de magnitud M_{min} inmediatamente inferior al menor de los datos. La potencia del factor de diez que obtenga de este cociente, es el número de ciclos requeridos (N_c) :

$$N_c = \log \frac{M_{max}}{M_{min}} \tag{B.4}$$

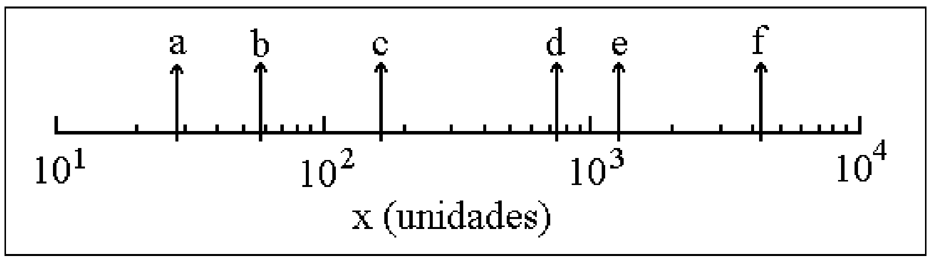
Señale en los extremos del eje los órdenes de magnitud máximo y mínimo, y también rotule los ciclos intermedios. Por ejemplo, se tienen seis datos de una magnitud física *x* medida en unidades arbitrarias.

	a	b	c	d	e	f
x (unidades)	28,6	57,5	162,0	740,2	1 260,1	4 280,0

Entonces :

Orden de magnitud mínimo : $M_{\text{min}} = 10^1 < 2.86 \times 10^1$
Orden de magnitud máximo : $M_{\text{máx}} = 10^4 < 4.28 \times 10^3$
Número mínimo de ciclos requeridos : $N_c = \log \frac{M_{max}}{M_{min}} = \log \frac{10^4}{10^1} = 3$

Y representados sobre un eje logarítmico se tendría



✍ Si una vez trazados los puntos sobre el papel logarítmico o semilogarítmico, estos muestran un comportamiento lineal, la ecuación de la línea recta (la pendiente y el intercepto) que mejor se ajusta a los datos se puede determinar por dos medios: uno, el cual es el óptimo, es utilizando el método estadístico de *mínimos cuadrados* que se trata en el apéndice C; el otro es un método aproximado, en el cual se traza con una regla transparente la recta de ajuste "*al ojo*", de tal manera que pase por la mayor cantidad de puntos posible y que los que queden fuera, queden distribuidos aleatoriamente a ambos lados de la recta. De utilizarse el segundo método, la pendiente de la recta se calcula usando dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de fácil lectura en la recta (preferiblemente se usan dos de los datos experimentales que quedaron sobre las recta). Si se está trabajando sobre papel log-log, la pendiente m estaría dada por

$$m = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} \tag{B.5}$$

y de estarse trabajando sobre papel semi-log

$$m = \frac{\log y_2 - \log y_1}{x_2 - x_1} \tag{B.6}$$

El intercepto en ambos casos (papel log-log ó semi-log) se puede determinar leyendo directamente de la gráfica, o bien, de no ser esto posible, se puede evaluar la función (conociendo ya la pendiente) en algún punto adecuado y despejar el valor del mismo.

A continuación se presentan ejemplos de gráficos hechos sobre escalas lineales, semilogarítmicas y logarítmicas. A la vez se ilustran los casos de datos, que en una escala lineal se comportan curvilíneos, pero en la escala apropiada se comportan de una forma lineal.

En la Figura B.1 se puede observar como varía la presión de la atmósfera estándar con la altura; estos mismos datos graficados en una escala semilogarítmica, se comportan linealmente, tal y como se observa en la Figura B.2.

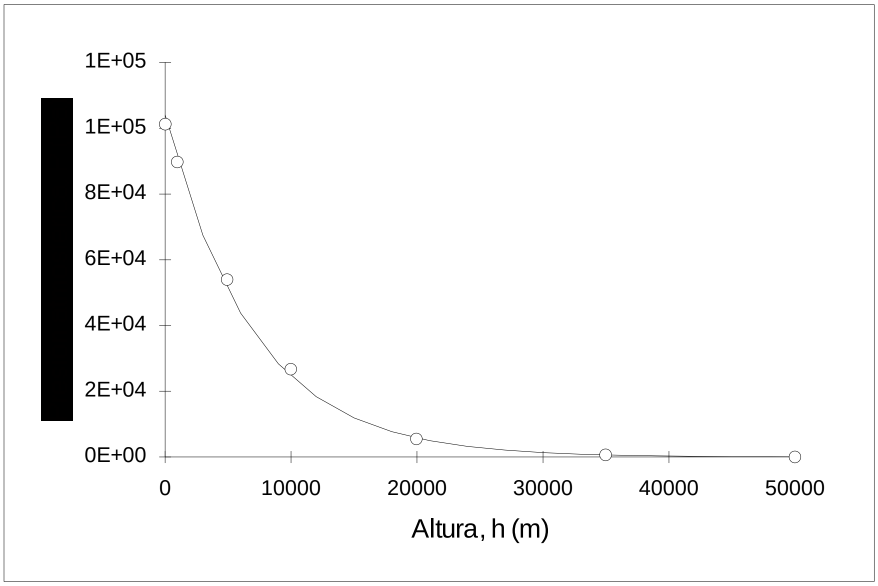


Figura B.1. Variación de la presión de la atmósfera estándar con la altura representada en un gráfico con escalas lineales.

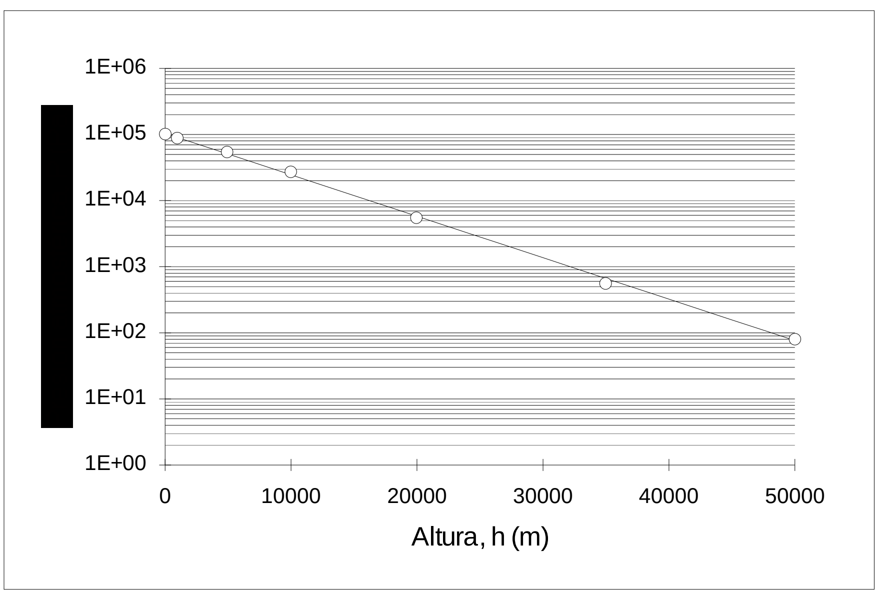


Figura B.2. Variación de la presión de la atmósfera estándar con la altura representada en un gráfico con escalas semilogarítmicas.

En las Figuras B.3 y B.4 se representan en forma análoga la relación del volumen de una esfera con su diámetro. En este caso los datos se comportan linealmente en escalas logarítmicas.

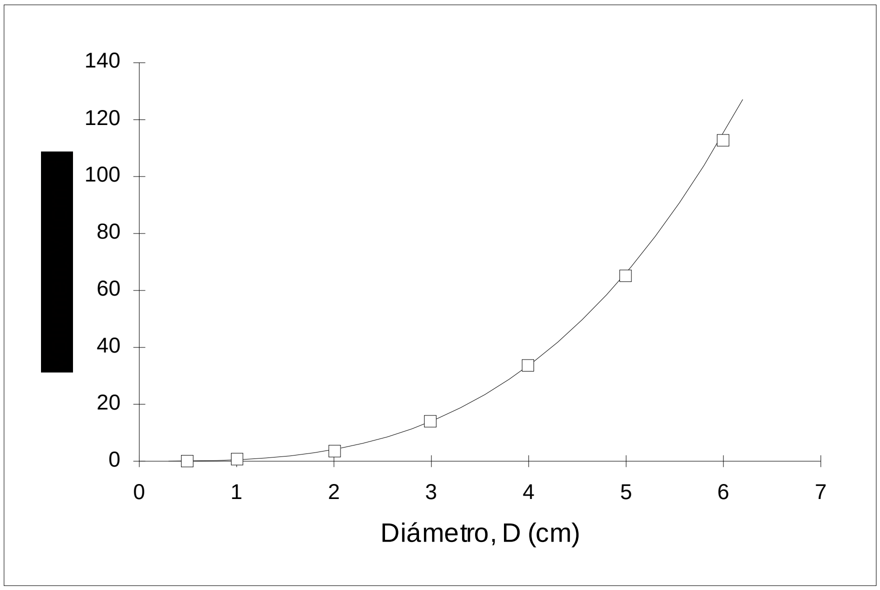


Figura B.3. Volúmenes medidos de esferas de diferentes diámetros representados en una escala lineal.

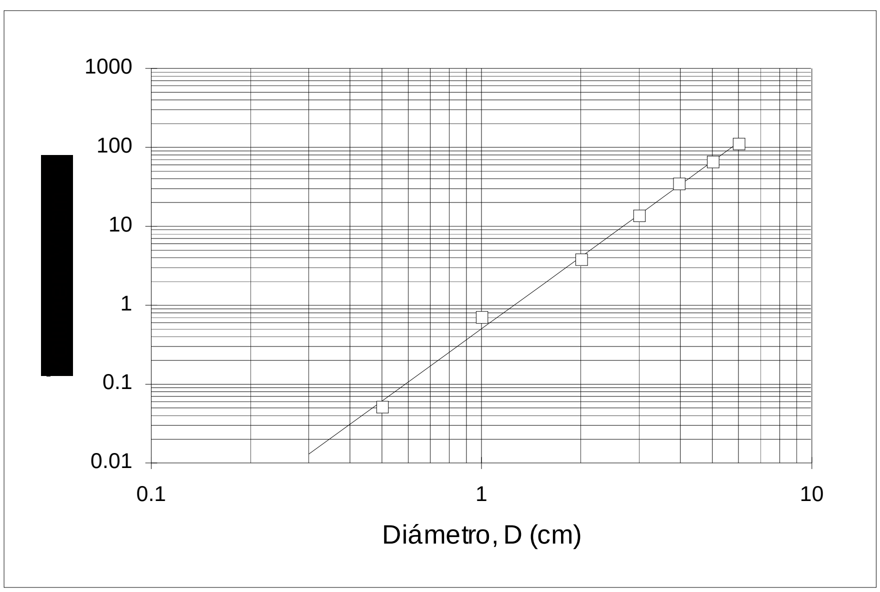


Figura B.4. Volúmenes medidos de esferas de diferentes diámetros representados en una escala logarítmica.

C. EL METODO DE MINIMOS CUADRADOS

Es frecuente al realizar un experimento, obtener un conjunto de pares de datos (x, y) que presentan un comportamiento lineal y por los cuales es necesario pasar no solo una recta, sino ajustar la mejor recta, la cual supondremos cumple la ecuación

$$y = mx + c \tag{C.1}$$

Esto traduce el problema a calcular los valores de m y c en función de los valores obtenidos experimentalmente.

Ahora, ¿cuál criterio o definición podemos utilizar para encontrar esa recta que mejor ajusta los datos? Para motivar una posible definición consideremos la Figura C.1, en la cual los pares de datos son (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Para un valor dado de x, por ejemplo x_1, habrá una diferencia entre el valor de y_1 y el valor correspondiente determinado de la recta arbitraria l. Denotamos esta diferencia por d_1, que algunas veces se conoce como *desviación*, *error*, o *residuo* y puede ser positivo, negativo o cero. Análogamente, correspondiendo a los valores x_2, ...,x_n obtenemos las desviaciones d_2,..., d_n.

Una medida de la "bondad del ajuste" de la recta l al conjunto de datos la suministra la cantidad $d_1^2 + d_2^2 + ... + d_n^2$. Si la suma es pequeña, el ajuste es bueno, si es grande es malo. Por lo que tomaremos la siguiente definición: De todas las rectas de aproximación de un conjunto de puntos de datos dados, la recta que tenga la propiedad de que la suma de sus desviaciones sea mínima, es la *recta de mejor ajuste*. Una recta con esta propiedad se dice que ajusta los datos en el *sentido de mínimos cuadrados* y se llama *recta de regresión de mínimos cuadrados* o simplemente *recta de mínimos cuadrados*. Esta definición de mejor ajuste no se limita solo a rectas, sino que también se aplica para ajustar curvas más generales.

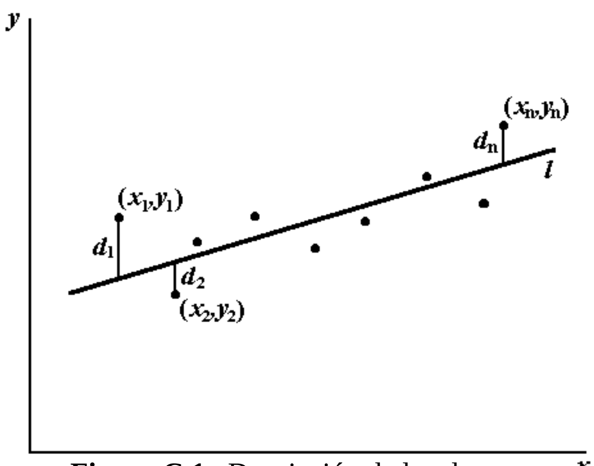


Figura C.1. Desviación de los datos con respecto a la recta l.

Es posible definir otra recta de mínimos cuadrados considerando distancias perpendiculares desde los puntos de datos a la curva en lugar de sus distancias verticales u horizontales; sin embargo, esto no se emplea con frecuencia.

Empleando entonces la definición anterior se puede demostrar que la pendiente m y el intercepto c de la recta de mínimos cuadrados se determinan solucionando simultáneamente las ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = m \sum_{i=1}^{n} x_i + n\,c \tag{C.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{C.3}$$

que se conocen como las *ecuaciones normales* para la recta de mínimos cuadrados. Los valores de m y c que se obtienen al solucionar las ecuaciones (C.2) y (C.3) son

$$m = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x\Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \tag{C.4}$$

$$c = \frac{\Sigma y}{n} - m\,\frac{\Sigma x}{n} \tag{C.5}$$

donde los símbolos de las sumatorias se simplificaron por brevedad.

El coeficiente de correlación r es una medida de que tan bien o mal se ajusta la recta a los datos. Su valor absoluto varía entre 0 y 1, indicando un valor de 1 una regresión lineal perfecta, es decir, que todos los puntos quedaron sobre la recta. Este coeficiente se calcula mediante la siguiente ecuación

$$r = \frac{n\Sigma\, xy - \Sigma x\Sigma y}{\sqrt{\left[n\Sigma x^2 - (\,\Sigma x\,)^2\,\right]\left[n\Sigma y^2 - (\,\Sigma y\,)^2\right]}} \tag{C.6}$$

Si denotamos por y_{est} el valor estimado de y para un valor dado de x, obtenido de la recta de regresión, entonces una medida de la dispersión con respecto a la recta de regresión está suministrada por la cantidad

$$s_{y/x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\,y_i - y_{est\,i}\,)^2}{n-2}} \tag{C.7}$$

donde $s_{y/x}$ se denomina el *error estándar de la estimación*. La notación con subíndice “y/x” indica que el error es para un valor predicho de y correspondiente a un valor particular de x. Una ecuación equivalente a la (C.7) y que está en términos que pueden facilitar su cálculo es

$$s_{y/x} = \sqrt{\frac{\Sigma y^2 - c\Sigma y - m\Sigma xy}{n-2}} \tag{C.8}$$

Así como la desviación estándar, el error estándar de la estimación cuantifica la dispersión de los datos; sin embargo $s_{y/x}$ cuantifica la dispersión alrededor de la línea de regresión, tal como se muestra en la Figura C.2. Otra propiedad análoga a la desviación estándar, es que si se construyen pares de rectas paralelas a la recta de regresión a distancias verticales $s_{y/x}$, $2s_{y/x}$ y $3s_{y/x}$ respectivamente, y si los datos se distribuyen normalmente alrededor de la recta, entre estas se encontrarán incluidos alrededor de 68,2%, 95,4% y 99,7% de los puntos muestrales respectivamente. Esto también se puede observar ilustrado en la Figura C.2.

Algunas veces se hace necesario también cuantificar el *error estándar de la pendiente* (s_m) y *el error estándar del intercepto* (s_c) de la recta de mínimos cuadrados. Estos errores se pueden calcular a partir del error estándar de la estimación mediante las siguientes ecuaciones

$$s_m = s_{y/x}\sqrt{\frac{n}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}} \tag{C.9}$$

$$s_c = s_{y/x}\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}} \tag{C.10}$$

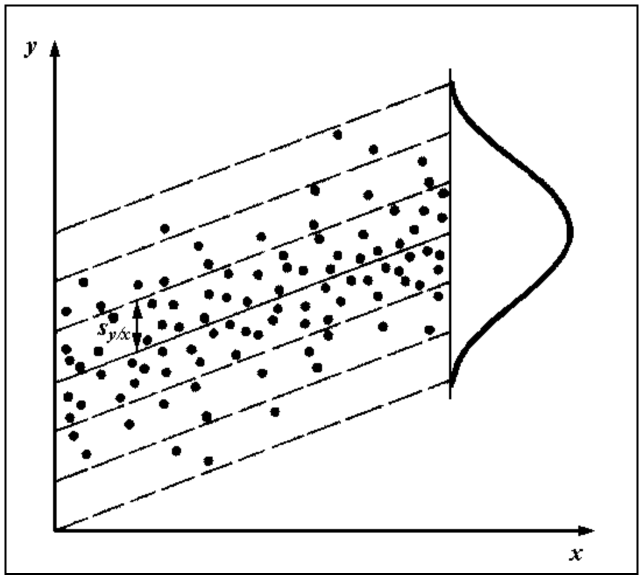


Figura C.2. Muestra de la dispersión de datos alrededor de una línea recta ajustada.

Ejemplo:

El grosor de una capa de plata que se deposita sobre un chip de circuito integrado es una función del tiempo que este pase en el evaporador al vacío. Se realizó un experimento donde se registró el grosor de la capa para diferentes tiempos y los datos experimentales obtenidos se muestran en el Cuadro C.1. Determine la funcionalidad entre los datos mediante un ajuste de regresión lineal, calculando también el coeficiente de regresión y el error estándar de la estimación, de la pendiente y el intercepto.

Cuadro C.1. Grosor de la capa de plata depositada en diferentes tiempos

Tiempo (min)	Grosor (mm)
1.0	13.2
1.5	15.1
2.0	16.7
2.5	17.7
3.0	21.1

El primer paso a seguir es graficar los datos experimentales; en la Figura C.3 estos se muestran con los pequeños círculos. Como se observa una relación lineal, proseguimos con los cálculos para encontrar la recta de mejor ajuste.

Para encontrar los parámetros necesarios recurrimos al cálculo de las sumatorias pertinentes, tal como aparecen en el Cuadro C.2, para luego sustituir en las respectivas ecuaciones. Es recomendable hacer estos cálculos manualmente (con la ayuda de una calculadora simple), por lo menos una vez; sin embargo, si posee una calculadora que contiene estas rutinas de cálculo utilícela.

Cuadro C.2. Cálculo de las sumatorias necesarias para la regresión lineal con el método de los mínimos cuadrados.

	x_i	y_i	$x_i\, y_i$	x_i^2	y_i^2
	1,0	13,2	13,20	1,00	174,24
	1,5	15,1	22,65	2,25	228,01
	2,0	16,7	33,40	4,00	278,89
	2,5	17,7	44,25	6,25	313,29
	3,0	21,1	63,30	9,00	445,21
Σ	10,0	83,8	176,80	22,50	1439,64

De (C.4), Pendiente : $$m = \frac{5\cdot 176{,}80 - 10\cdot 83{,}8}{5\cdot 22{,}50 - (10)^2} = 3{,}68$$

De (C.5), Intercepto : $$c = \frac{83{,}8}{5} - 3{,}68\frac{10}{5} = 9{,}4$$

De (C.6), Coeficiente de correlación : $$r = \frac{5\cdot 176{,}8 - 10\cdot 83{,}8}{\sqrt{\left[5\cdot 22{,}5 - (10)^2\right]\left[5\cdot 1439{,}64 - (83{,}8)^2\right]}} = 0{,}98$$

De (C.8), Error estándar de la estimación : $$s_{y/x} = \sqrt{\frac{1439{,}64 - 9{,}4\cdot 83{,}8 - 3{,}68\cdot 176{,}8}{5-2}} = 0{,}7$$

De (C.9), Error estándar de la pendiente : $$s_m = 0{,}7\sqrt{\frac{5}{5\cdot 22{,}5 - (10)^2}} = 0{,}4$$

De (C.10), Error estándar del intercepto : $$s_c = 0{,}7\sqrt{\frac{22{,}5}{5\cdot 22{,}5 - (10)^2}} = 0{,}9$$

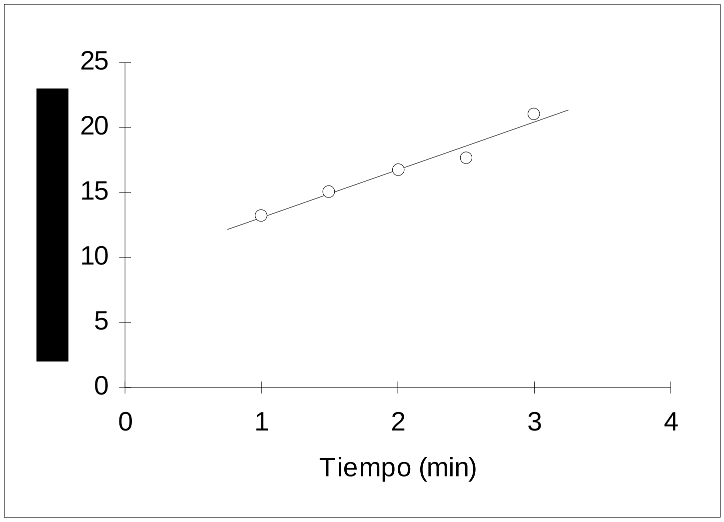


Figura C.3. Relación encontrada entre el grosor de la capa de plata con el tiempo de residencia en el evaporador.

Por lo tanto, si consideramos todos estos resultados, la relación entre las dos variables se puede expresar de la siguiente manera:

$$y = 3{,}7x + 9{,}4$$

donde en cada estimación que se realice con esta ecuación, habrá una incertidumbre de ± 0,7. El gráfico de esta recta se puede observar en la Figura C.3.

Linealización de relaciones no lineales

La regresión lineal proporciona una técnica muy poderosa para ajustar datos a una "mejor" línea. Sin embargo, se ha predicho que la relación entre las variables dependientes e independientes es lineal. Este no es siempre el caso, y el primer paso en cualquier análisis de regresión es el de trazar y visualizar los datos para decidir si es correcto o aceptable el aplicar un modelo lineal. Por ejemplo, en la Figura C.4 se muestran algunos datos que, obviamente son curvilíneos. En algunos casos, técnicas como la regresión polinomial serán apropiadas. En otros, se pueden hacer transformaciones que expresen los datos de manera que sean compatibles con la regresión lineal.

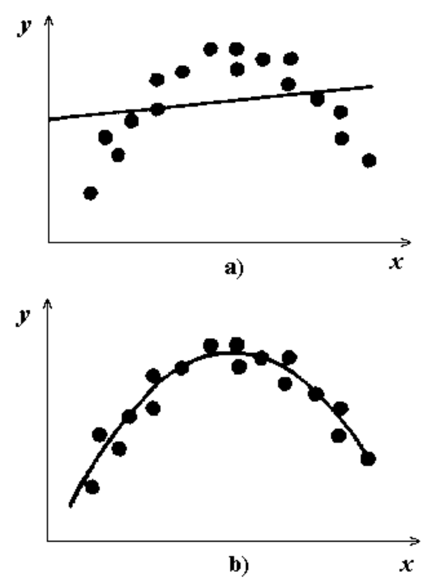


Figura C.4. a) Datos mal ajustados con una regresión lineal
b) Indicación de que una parábola es preferible

Un ejemplo es el *modelo exponencial*:

$$y = a\,e^{b\,x} \qquad \text{(C.11)}$$

en donde a y b son constantes. Este modelo se usa en muchos campos de la ingeniería caracterizando cantidades que crecen (b positiva) o que decrecen (b negativa) en un promedio proporcional a su magnitud. Por ejemplo, el crecimiento poblacional y el decaimiento radiactivo muestran este comportamiento. Como se muestra en la Figura C.5a, la ecuación representa una relación no lineal (para $b \neq 0$) entre y y x.

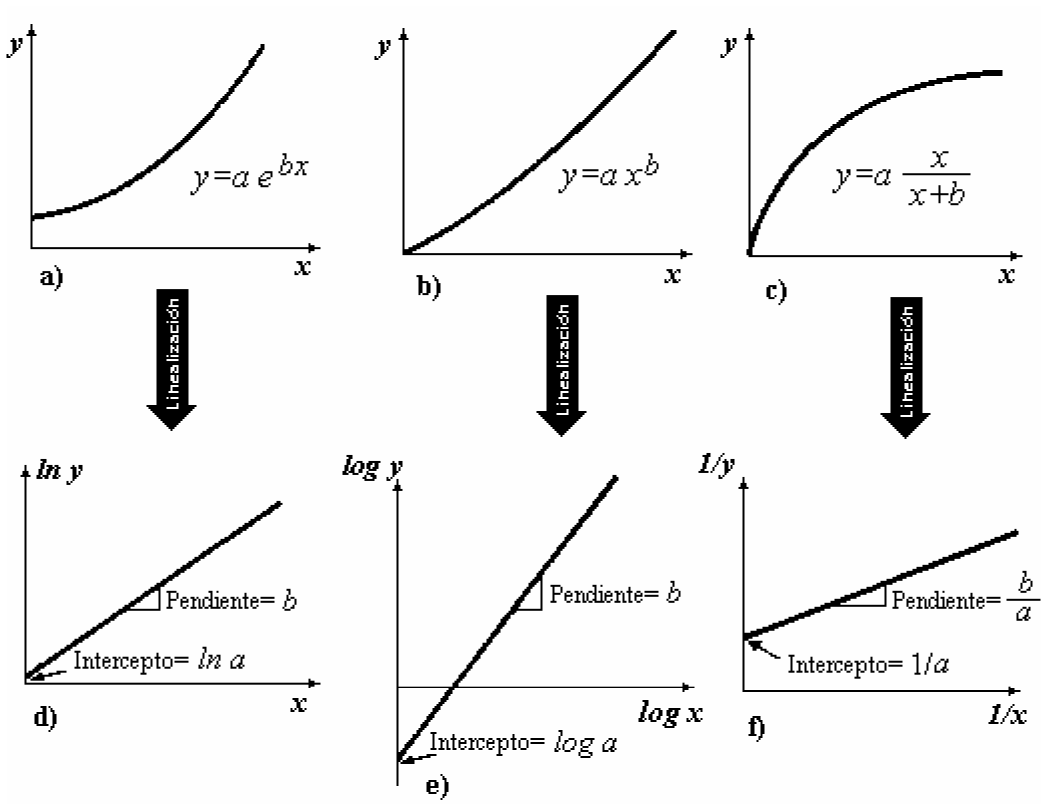


Figura C.5. a) Ecuación exponencial, b) ecuación de potencias, c) ecuación del promedio de crecimiento de saturación. Las parte d), e) y f) son versiones linealizadas de aquellas, las cuales son transformaciones simples.

Otro ejemplo de un modelo no lineal es la *ecuación elevada a una potencia*:

$$y = a\,x^{b} \qquad \text{(C.12)}$$

en donde a y b son nuevamente coeficientes constantes. Este modelo tiene una amplia aplicación en todos los campos de la ingeniería. Como se muestra en la Figura C.5b, la ecuación (para $b \neq 0$ o 1) es no lineal.

Un tercer ejemplo de un modelo no lineal es la *ecuación de promedio de crecimiento de saturación*:

$$y = a \frac{x}{x+b} \tag{C.13}$$

en donde a y b son coeficientes constantes. Este modelo, que es particularmente útil en la caracterización de crecimientos poblacionales bajo condiciones limitantes, también representa una relación no lineal entre x y y (Figura C.5c) que nivela, o "satura" conforme x crece.

Las técnicas de regresión no lineal se usan para ajustar directamente estas ecuaciones a los datos experimentales. Sin embargo, una alternativa más simple es la de usar manipulaciones matemáticas y transformar las ecuaciones a la forma lineal. En seguida se puede aplicar la regresión lineal simple para ajustar las ecuaciones a los datos.

Por ejemplo, la ecuación (C.11) se puede linealizar al aplicar logaritmos naturales a ambos lados de la ecuación para obtener, recordando que ln e = 1:

$$\ln y = bx + \ln a \tag{C.14}$$

Por tanto una gráfica semilogarítmica de ln y contra x genera una línea recta con una pendiente de b y una intersección de ln a (Figura C.5d). De la misma forma, si se emplea logaritmo en base 10 (que es el que se emplea en el papel semilogarítmico), la ecuación quedaría:

$$\log y = (b \log e)\, x + \log a \tag{C.15}$$

Así pues, una gráfica de log y contra x genera una línea recta con pendiente de (b log e) e intersección log a.

La ecuación (C.12) se puede linealizar tomando logaritmos naturales, por ejemplo, y obtener

$$\log y = b \log x + \log a \tag{C.16}$$

De esta forma, una gráfica logarítmica de log y contra log x genera una línea recta con una pendiente de b y una intersección de ln a (Figura C.5e).

La ecuación (C.13) se linealiza invirtiéndola, y se obtiene:

$$\frac{1}{y} = \frac{b}{a}\frac{1}{x} + \frac{1}{a} \tag{C.17}$$

Por lo tanto, una gráfica de $1/y$ contra $1/x$ será lineal, con pendiente b/a y una intersección de $1/a$ (Figura C.5f).

Estos modelos en sus estados transformados, se ajustan usando regresión lineal para evaluar los coeficientes constantes. Es decir, las variables x y y de las fórmulas de mínimos cuadrados se sustituyen por las correspondientes variables transformadas. Después se pueden transformar a su estado original y usarse para propósitos predictivos.

BIBLIOGRAFIA

1. Aguilar, F. Guía de laboratorio física general. ITCR (1989).

2. Brown, T.L. y LeMay, H.E. Química la ciencia central. 3ª Ed., Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., México (1987).

3. Chapra, S.C. y Canale, R.P. Métodos numéricos para ingenieros. McGraw-Hill, México (1988).

4. Esquivel, J.L., Bolivar, J.A. y Vargas, W.E. Laboratorio de física I (Manual de prácticas). UCR (1994).

5. Haug, L.R. Física II: Guía de laboratorio. UCR (1991).

6. Millier, I.R., Freud, J.E. y Johnson, R. Probabilidad y estadística para ingenieros. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., México (1992).

7. Moya, R.J. Laboratorio de fIsica II (Manual de prácticas). UCR (1993).

8. Sears, F.W., Zemansky, M.W. y Young, H.D. Física Universitaria. 6ª Ed., Addison-Wesley Iberoamericana, México (1988).

9. Serway, R.A. Física. 3ª Ed., McGraw-Hill, México (1992).

10. Spiegel, M.R. Teoría y problemas de probabilidad y estadística. McGraw-Hill, México (1986).

11. Villalobos, J.A. Laboratorio de física II: Manual de prácticas. EUCR, San José (1988).

12. Welty, J.R., Wicks, C.E. y Wilson, R.E. Fundamentos de transferencia de momento, calor y masa. Editorial Limusa, México (1991).