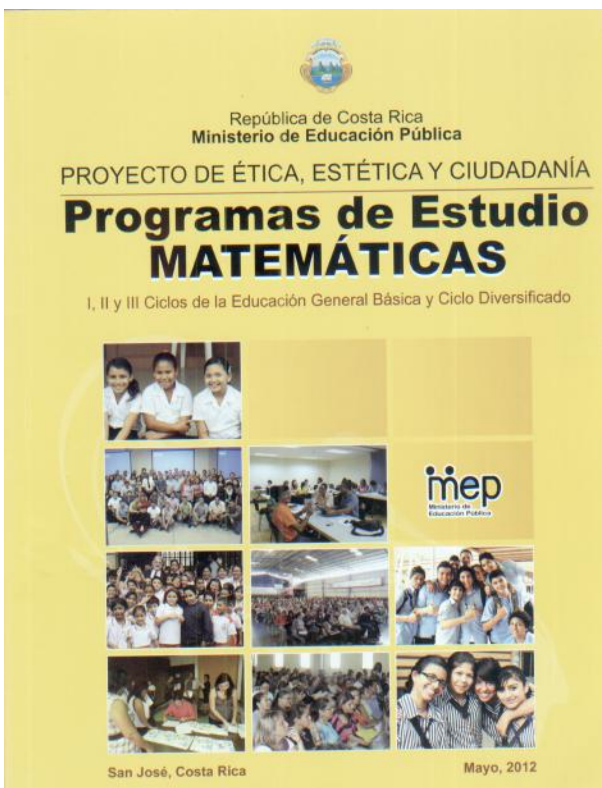
Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

www.reformamatematica.net

Apoyo curricular en Matemáticas

Primer Ciclo
de la Educación General Básica



Costa Rica

2013

Tabla de contenidos

Presentación

La aprobación por parte del Consejo Superior de Educación de nuevos programas de estudio en Matemáticas el 21 de mayo del 2012 constituye un momento decisivo para la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en el país. El proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* es consciente de que el profundo cambio metodológico propuesto debe ir acompañado con procesos de capacitación y con la participación de documentos que faciliten al docente su implementación.

Por esta razón, este documento brinda una serie de problemas que pretenden servir de apoyo al docente en su labor de aula; están organizados por áreas matemáticas, en cada año se presenta un problema interesante, aunque en ocasiones se incluyen dos. En este problema se trata de mostrar el estilo de organización de la lección a la luz de lo que se propone en los nuevos programas.

Se proponen dos tipos de problemas o actividades:

1. *Problemas principales.* Éstos presentan un análisis detallado que muestra:
   - ✓ los conocimientos y habilidades específicas que se quieren promover, así como las habilidades previas necesarias para favorecer el nuevo aprendizaje;
   - ✓ indicaciones sobre cómo desarrollar el problema propuesto en cada una de los cuatro momentos principales de la lección y sobre los procesos matemáticos que esta actividad permite activar;
   - ✓ algunos ejemplos de ítems que pueden contribuir a reforzar los conocimientos adquiridos en los diferentes niveles de complejidad (reproducción, conexión y reflexión);
   - ✓ una especificación de cómo se pueden potenciar los ejes disciplinares durante la actividad;
   - ✓ algunas sugerencias sobre cómo encaminar la evaluación.

Éstos no necesariamente están presentes en todas las áreas ni en todos los años.

2. *Problemas secundarios.* Éstos presentan un análisis menos detallado que en los problemas principales, incluyen:
   - ✓ conocimientos y habilidades específicas que se quieren introducir, así como las habilidades previas que se espera que posea cada estudiante;
   - ✓ la solución del problema.

En algunos casos, los problemas secundarios harán énfasis en ciertos ejes disciplinares. Además en ocasiones un problema secundario y uno principal se incluyen en un año particular.

En Estadística y Probabilidad se propone cada año un problema para Estadística y otro para Probabilidad. Además, los problemas principales propios de esta área tendrán el apoyo de un problema auxiliar que permite reafirmar una serie de conocimientos previos necesarios para su desarrollo.

Es importante destacar que aunque se realice un análisis detallado de algunos problemas, esto no significa que en la planificación de una lección de Matemáticas deban aparecer todos los elementos que incluye ese análisis. Este documento debe usarse como un respaldo para el docente, pero para la acción de aula siempre se requerirá una mediación pedagógica adecuada que solo el docente puede desarrollar.

Introducción al Primer ciclo

Como se establece en los Programas de estudio de Matemáticas, el Primer ciclo es esencial para la enseñanza de las Matemáticas, pues es el primer contacto que tienen los estudiantes con una materia frente a la que existen ciertas creencias no necesariamente positivas. Muchos de los problemas propuestos para este ciclo son en realidad actividades que se valen de lo lúdico, del material concreto y de desafíos para motivar ese deseo por aprender matemáticas en una forma agradable y significativa.

En el área de Números, los problemas propuestos están enfocados a conocimientos relacionados con el conteo, la resolución de problemas utilizando la suma, la resta y la división. En esta área se podrá encontrar un problema secundario y uno principal en el tercer año. Este último hace uso de la historia para trabajar conocimientos relacionados con el sistema de numeración decimal.

En Geometría las situaciones seleccionadas enfatizan la introducción de conocimientos relacionados con las nociones de posición con respecto a una línea cerrada (borde, interior, exterior), el reconocimiento de figuras planas: triángulos y cuadriláteros, y el planteamiento de problemas con cuerpos sólidos.

En Medidas los conocimientos que se trabajarán con los problemas propuestos son longitud (unidad de medida, metro, centímetro) y moneda (estimación, comparación).

En Relaciones y Álgebra se trabajan las sucesiones, el uso de tablas y la noción de valor faltante. Aquí se incluye un problema principal en el segundo año donde se busca potenciar en el estudiante la habilidad de reconocer patrones numéricos.

En Estadística y Probabilidad se proponen situaciones que permiten desarrollar conocimientos –en la parte de Estadística- relacionados con el dato (su uso, variabilidad) y la recolección y presentación de la información. En lo que respecta a Probabilidad se trabaja con situaciones aleatorias y seguras, evento más probable y menos probable y resultados simples de un experimento.

Al final, se incluyen algunos anexos que permiten la elaboración de algunos de los materiales que se utilizan en el desarrollo de algunas de las actividades.

Números

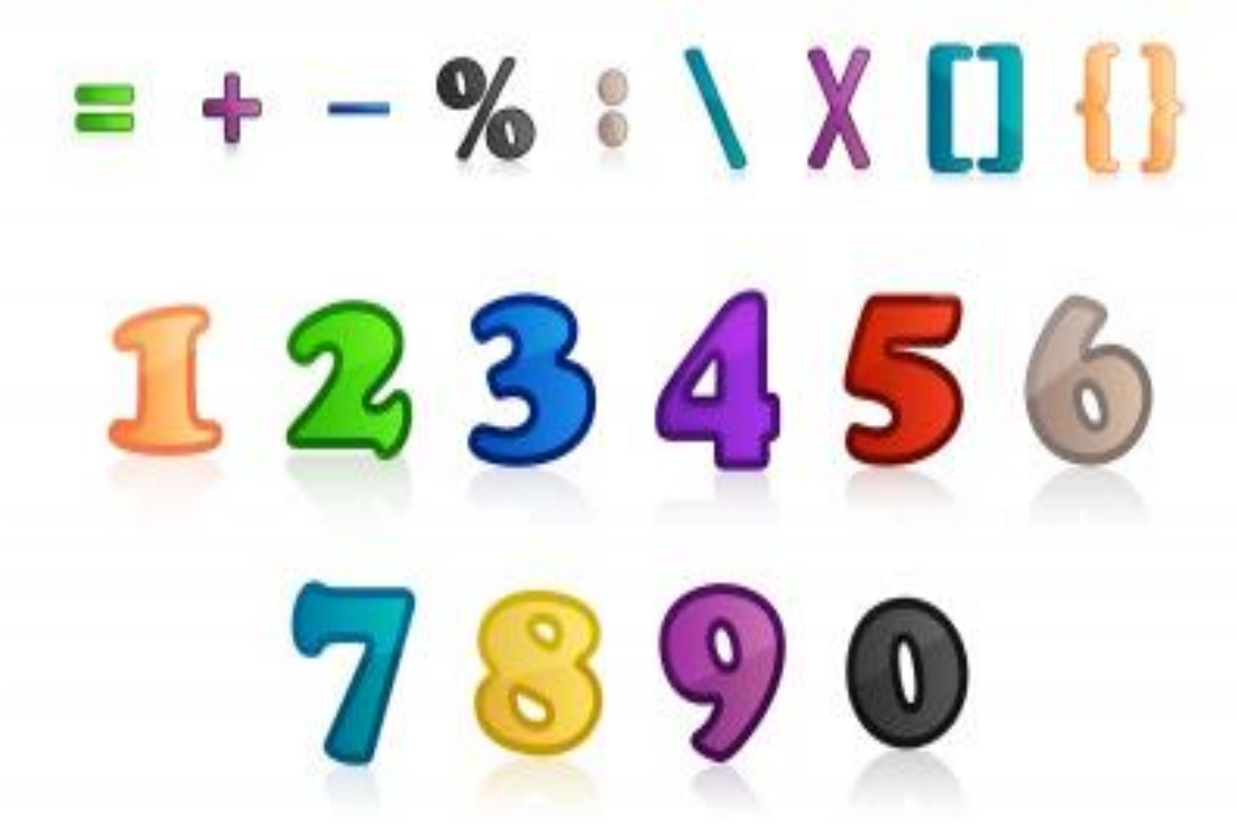


Imagen cortesía de digitalart en FreeDigitalPhotos.net

Primer año

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Conteo	Utilizar el conteo para asociar conjuntos de objetos con su respectiva cardinalidad.	**Conocimientos Básicos** Establecer correspondencias uno a uno entre colecciones de objetos o dibujos.

Propuesta de problema

Organización de la actividad[1]

Una forma muy sencilla de hacer los carritos es utilizando cajitas de fósforos pegando dos y dos simulando los asientos.

También, los pasajeros pueden ser bolitas de estereofón pintadas con una carita feliz.

Imagen: Elaboración propia

- El docente confecciona con anterioridad unos vehículos (carritos, pequeños autobuses, etc.) y unos muñequitos de papel. Se pueden hacer también en la clase con la ayuda de los estudiantes. Para la realización de los vehículos, se pueden emplear cajas de 12 huevos y unir dos o cuatro cajas para simular buses de 24 o 48 pasajeros y fichas en vez de muñecos.

- El docente coloca cuatro mesas junto a la pared del aula y en cada una se disponen los vehículos fabricados, los cuales poseen una determinada cantidad de lugares (entre 12 y 50).

- Se conforman cuatro parejas de estudiantes que se ubican cada una en una de las mesas mientras los restantes prestarán atención a lo que sus compañeros realizarán.

- Del otro lado de la clase se coloca otra mesa con los muñequitos que representan los pasajeros. En la organización de la actividad es elemental que los objetos que representan los pasajeros estén alejados de los que representan los buses. Es ahí donde los observadores podrán visualizar las diferentes estrategias.

[1] Actividad adaptada de la presentación *Actividades de conteo en Nivel inicial* de Carmen Barba Uriach.

Instrucciones orales

El docente indica: "Estos vehículos no podrán partir a sus destinos hasta que se llenen con la cantidad completa de pasajeros, incluyendo el chofer. Por favor, encárguense de llevar los pasajeros a dichos vehículos para que puedan llegar a su destino. Los demás van a fijarse en lo que sus compañeros hacen".

Rol de cada uno:

- Tomar muñequitos para llenar los asientos de tal modo que el bus se llene y pueda irse.
- Observar y anotar lo que hacen los alumnos encargados de llenar los buses.

Otra organización posible: en una clase con muchos alumnos, para evitar que una gran cantidad de ellos sean solamente observadores, se podría dividir la clase en grupos de 4 (2 observadores y 2 que manipulan) e intercambiar después con el fin de que todos los alumnos manipulen en algún momento.

Imagen: Elaboración propia

Solución del problema

Aunque en esta etapa los estudiantes requieren de una actividad más dirigida por parte del docente, conviene comenzar con experiencias donde puedan enfrentarse a la resolución de problemas sencillos de manera independiente y que a estas edades se les dé la oportunidad de expresar sus ideas y estrategias, para que puedan ir adquiriendo confianza en sus habilidades.

Es recomendable que los carritos que aparecen en cada mesa tengan el mismo número de asientos para que el docente pueda analizar de una forma más sencilla el comportamiento de las parejas a la hora de llevar los pasajeros a los carritos.

Entre las posibles estrategias que los estudiantes pueden adoptar están:

a. Ir completando de uno en uno los asientos disponibles, o sea, realizar un viaje por cada muñequito que se necesite para completar el cupo de pasajeros por vehículo. Esta acción no involucra el conteo de las cantidades.

b. Se podría tomar un grupo de muñequitos, sin importar si es la cantidad exacta, y llevarlo al vehículo para luego acomodar cada uno en su lugar. Puede ser que sobren muñequitos o bien que deban realizar otro viaje para traer los restantes. Aquí tampoco se involucra el conteo de cantidades.

c. Se decide contar la cantidad de espacios necesarios para llenar el vehículo y se trae la cantidad precisa de muñequitos. Por ejemplo, uno de los niños viendo el carro cuenta los espacios y le comunica a su pareja, en forma verbal o mediante configuración de dedos, la cantidad de muñecos que debe traer, éste por su parte cuenta los muñecos que necesita llevar. Es la única estrategia que permite un solo viaje para recoger la cantidad exacta de muñequitos y permitir la salida del bus.

Si ninguna de las parejas logró ejecutar la estrategia c, entonces la acción docente debe ir orientada a cuestionarles cómo se haría para completar todos los asientos sin necesidad de hacer varios viajes y de tal modo que no sobren ni falten pasajeros. Esto busca propiciar el conteo y la cardinalización para luego trasladar esa cantidad, igualando dos colecciones que se presentan separadas. Si alguna pareja logró ejecutarla, el docente les pide que la recreen de nuevo, para que el grupo observe y tome conciencia de lo efectuado.

No hay que olvidar que en esta actividad parte del grupo estuvo observando el desenvolvimiento de sus compañeros, por lo que es fundamental que el docente estimule la comunicación de ideas mediante las siguientes preguntas:

- ¿Cuál fue la estrategia que efectuó un equipo determinado?
- ¿Cuál le parece la más eficaz y por qué?
- ¿Qué estrategia hubiera escogido para llevar los pasajeros más rápidamente?

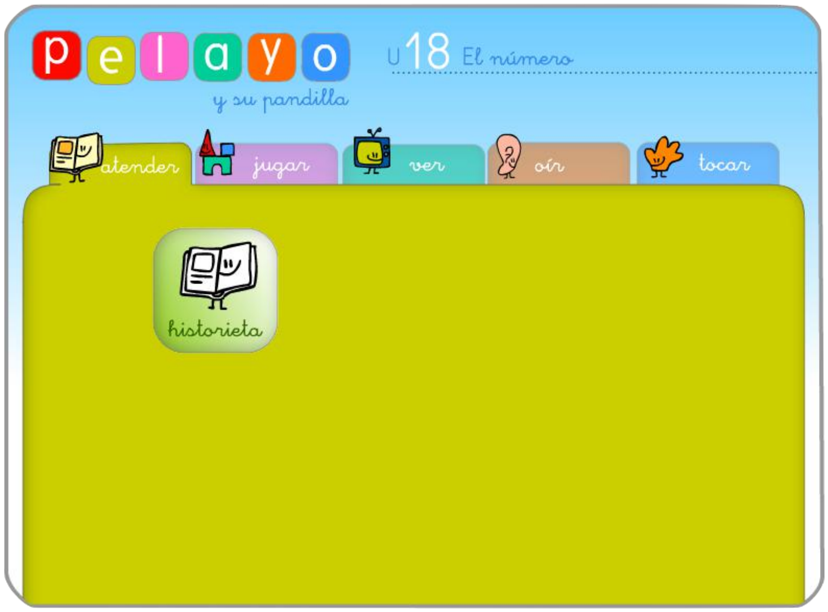
Esto permite activar en los estudiantes el proceso *Comunicar* y el de *Razonar y argumentar.*

El alumno debe manipular, representar y actuar sobre los números para construir el concepto.

En la etapa de clausura, el docente debe recapitular los elementos discutidos durante la actividad para establecer que el conteo es la forma óptima de llevar los pasajeros sin necesidad de hacer varios viajes y sin que falten ni sobren pasajeros.

En el siguiente enlace los estudiantes podrán trabajar de manera interactiva los conocimientos anteriormente descritos en la etapa de *Movilización de conocimientos* para afianzar el concepto de número y el de conteo en la elaboración de agrupaciones:

http://nea.educastur.princast.es/repositorio/RECURSO_ZIP/2_1_ibcmass_u18/index.html



Se recomienda entrar a los íconos de “atender, jugar y oir” para que los estudiantes escuchen canciones referentes al número y realicen los juegos propuestos y aprendan de una forma más divertida.

Segundo año

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Cálculos y Estimaciones: Suma y resta	Resolver problemas y operaciones con sumas y restas de números naturales menores que 1000.	**Números, Primer año** Resolver problemas y operaciones con sumas y restas de números naturales menores que 100. **Estadística y Probabilidad, Primer año** Recolectar datos mediante la observación y la interrogación.

Propuesta de problemas

Problema 1: realización del inventario

El docente propone la siguiente situación:

El director de la escuela recibió en estos días una donación de pupitres y sillas y desea conocer qué nivel los necesita con urgencia. Para ello, encargó al grupo 2-A realizar tal investigación.

Imagen cortesía de Freedigital.net

Problema 2: el sobre

Previamente, el docente prepara unos sobres con fichas. Cada sobre contiene el mismo número de fichas (por ejemplo 26). Los alumnos están distribuidos en grupos de cinco y el maestro entrega un sobre a cada grupo. Por el momento los estudiantes no pueden contar las fichas que están en los sobres.

El docente agrega 13 nuevas fichas en cada sobre.

Instrucciones orales

"Van a tener que encontrar cuántas fichas había en cada sobre antes que haya agregado las últimas 13 fichas. Después tendrán que explicar a sus compañeros cómo han llegado al resultado."

Cada grupo va a presentar la solución encontrada y explicar a la clase su estrategia, es decir, cómo llegó a la solución.

Solución del problema 1

El docente puede comenzar la actividad preguntando a sus estudiantes cómo se podría saber cuál nivel necesita más la donación de sillas y pupitres. Se espera que inicialmente emitan respuestas de forma impulsiva y carentes de fundamentación, a lo cual la acción docente debe ir encaminada a pedir justificación por las respuestas que se comuniquen, replanteándoles la pregunta inicial. Sin embargo, se espera que algún estudiante manifieste que de momento no se sabe con certeza cuántas sillas y pupitres están en mal estado en dichos niveles y que es necesario averiguarlo.

Aquí el docente puede preguntarles de qué forma se podrían establecer estas cantidades, a lo cual se espera que manifiesten la necesidad de ir a recolectar los datos a las diferentes secciones. Estas acciones permiten activar en el estudiantado el proceso *Razonar y argumentar* y el de *Conectar,* porque se vinculan con el área de *Estadística y Probabilidad.*

Una vez que el docente da el aval para ir a las aulas a recopilar la información, es necesario que los mismos estudiantes definan los criterios para establecer si un mobiliario está en buen o en mal estado. Un criterio podría ser su firmeza, la apariencia y si éste se encuentra completo. Luego, el docente conforma 6 grupos y asigna los niveles que deberán visitar. Dependiendo de las características del grupo, se podría dar espacio para que ellos establezcan la forma en que se deben organizar.

Es claro que para la realización de esta actividad se necesita coordinar previamente con los demás docentes de la institución para que brinden el espacio a los estudiantes y que puedan transmitirles confianza y respeto por el trabajo que están desarrollando.

El docente debe estar pendiente de la manera en que los estudiantes deciden organizarse e intervenir apropiadamente; por ejemplo si todos los integrantes deciden ir a un mismo grupo a recoger la información, el docente los puede invitar a que busquen una forma más eficiente de hacerlo. No obstante, ellos podrían argumentar de forma válida su decisión de pasar todos por los seis niveles.

Una vez recopilados los datos, los estudiantes procederán a sistematizar la información recolectada y efectuar los cálculos correspondientes para establecer cuántas sillas y pupitres están en mal estado en el nivel asignado. Nuevamente se impulsan procesos de conexión con el área de *Estadística y Probabilidad*.

Completada la etapa anterior, el docente brinda papel periódico y marcadores a cada grupo de estudiantes para que muestren mediante una exposición los procedimientos e información recopilada del nivel que les correspondió. Cada grupo procede de modo similar, pegando el cartel con la información en la pizarra. Al final, el docente pregunta al grupo qué nivel necesita más tal donación, según la información que se brinda en los carteles.

También se les puede preguntar que dada la información recopilada, de qué otras formas podrían repartir los pupitres y sillas donados.

Es posible que en algunas escuelas pequeñas este problema no corresponda al objetivo buscado: Resolver problemas y operaciones con sumas y restas de números naturales menores que 1000.

En algunos casos, los alumnos pueden recurrir al conteo o al cálculo mental en las escuelas pequeñas o unidocentes sin necesidad de efectuar sumas.

Se recomienda el siguiente problema que además contempla la resta:

Solución del problema 2

- La primera estrategia consiste en contar todas las fichas una por una (39), sacar 13 fichas y contar las fichas que quedan. El docente puede preguntar a los alumnos cómo se puede traducir por medio de una operación "sacar 13".

- La segunda estrategia consiste en sacar las 13 fichas agregadas y contar las fichas que quedan.

- La tercera estrategia consiste en contar todas las fichas una por una (39) y efectuar la resta: 39 – 13 = 26.

Confrontación, discusión y validación de los resultados encontrados:

$$26 + 13 = 39$$

$$39 - 13 = 26$$

Había 26 fichas en cada sobre.

En este problema se permite manipular y se activan los procesos *Razonar y argumentar,* así como *Comunicar* cuando los estudiantes exponen y justifican sus trabajos a los demás compañeros.

La actividad se puede repetir con números de fichas diferentes o mediante otros problemas como los siguientes:

- Hay 26 fichas en cada sobre, se agregan 15 fichas y después se sacan 8 fichas, ¿cuántas fichas quedan en el sobre?

- Hay 456 fichas en cada sobre, se sacan 132 fichas y se agregan 48 fichas, ¿cuántas fichas quedan en el sobre?

Estos últimos ejercicios permiten la movilización y aplicación de conocimientos y también permiten llegar a un proceso de abstracción.

Tercer año

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
División: dividendo, divisor, cociente, residuo	• Identificar la división como reparto equitativo o como agrupamiento. • Resolver y plantear problemas en los que se utilicen las operaciones suma, resta, multiplicación y división.	**Relaciones y Álgebra, Segundo año** • Identificar patrones o regularidades en sucesiones o en tablas de números naturales menores que 1000, con figuras o con representaciones geométricas.

Propuesta de problema

De paseo al cine

Una reconocida cadena de cines regaló 80 tiquetes para distribuir en el grupo 3–B de la Escuela Bello Sitio para observar la película "Mundo de Niños". Se reparten las entradas de tal modo que cada estudiante pueda ir acompañado de uno de los padres de familia y un amigo cercano. Todas las entradas se repartieron en dicho grupo.

- ¿Cuántos estudiantes hay en el grupo?
- ¿Cuántas entradas sobran?

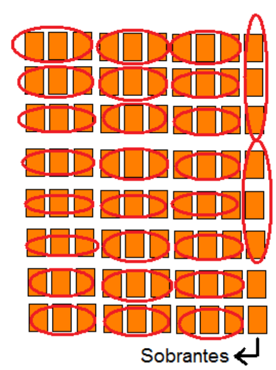
Solución del problema

Esta actividad puede ser desarrollada grupalmente, para que los estudiantes tengan la oportunidad de activar procesos de *Comunicar* y de *Razonar y argumentar* al dar lectura y discutir con sus compañeros la forma en que se podría eventualmente resolver el problema propuesto.

Inicialmente se debe tener noción de la cantidad de personas que podrían asistir al cine por estudiante (o sea 3 entradas por estudiante). Una vez comprendido el problema, los estudiantes podrían desarrollar, entre otras, las siguientes estrategias:

Estrategia 1

Los estudiantes pueden hacer un esquema (como el que se muestra a la derecha) que represente gráficamente las entradas y por medio de óvalos encerrar grupos de tres, que es lo que corresponde para cada alumno.



Al contar los grupos hechos se obtiene que hay 26, lo que corresponde a la cantidad de alumnos solicitada. La representación anterior muestra que sobran dos entradas. Esta estrategia se puede visualizar como una resta sucesiva del mismo sustraendo, de la siguiente forma:

80 – 3 = 77; 77 – 3 = 74; 74 – 3 = 71; … ; 8 – 3 = 5; 5 – 3 = 2.

realizando 26 repartos de 3 entradas y sobrando 2 entradas. Es sustancial que los docentes tengan presente la división y el reparto como una resta sucesiva del mismo sustraendo.

El estudiantado podría recortar papel construcción para elaborar las entradas al cine. Es importante trabajar con material concreto para manipular y aprender con mayor facilidad.

Estrategia 2

El primer alumno saca tres entradas y quedan 77. El segundo saca otras tres y quedan 74, continuando como se refleja en el cuadro siguiente:

Cantidad de estudiantes	**Tiquetes distribuidos**	**Tiquetes restantes**
	0	80
1	3	80 – 3 = 77
2	3	77 – 3 = 74
3	3	74 – 3 = 71
⋮	⋮	⋮

En esta estrategia se recalca la idea de distribución y de residuo. Se distribuye hasta que el residuo sea inferior a 3.

Esta estrategia permite enfatizar uno de los sentidos de la división: ¿Cuántas veces se puede sacar 3 a 80?

Estrategia 3

Los estudiantes construyen una tabla que muestra la cantidad de entradas conforme aumenta el número de estudiantes y busca una manera de establecer la cantidad de estudiantes que hay en ese grupo.

Cantidad de estudiantes	**Cantidad de entradas**
1	3
2	2 × 3 = 6
3	3 × 3 = 9
4	4 × 3 = 12

De lo anterior, los estudiantes podrían deducir que se puede buscar un número que multiplicado por 3 se acerque a 80. Esta búsqueda la desarrollan por medio de cálculos hechos a mano o por estimación mental. Por ejemplo pueden acercarse por

$$10 \times 3 = 30;\ \ 20 \times 3 = 60;\ \ 6 \times 3 = 18$$

de donde se obtendrían 26 estudiantes. O bien 30 × 3 = 90 y debo quitar 4 × 3 = 12, quedando los mismos 26.

Después de varios intentos, concretan que el número buscado es 26, pues si se multiplica dicho valor por 3 es el resultado que más se acerca a la cantidad total de entradas disponibles. Observe:

$$26 \times 3 = 78 \text{ entradas}$$

Así, hay 26 alumnos en dicho grupo y sobrarían dos entradas.

Aquí se pueden notar aspectos interesantes:

- Los estudiantes estarían activando el proceso *Representar* no sólo en la comprensión del problema sino para la elaboración de la estrategia de resolución.

- Las diferentes estrategias corresponden a dos aspectos relevantes que se pueden formalizar al cierre de la actividad: la idea de reparto equitativo (la cual lleva implícita la idea de restas sucesivas de igual sustraendo) y la relación inversa existente entre la división y la multiplicación.

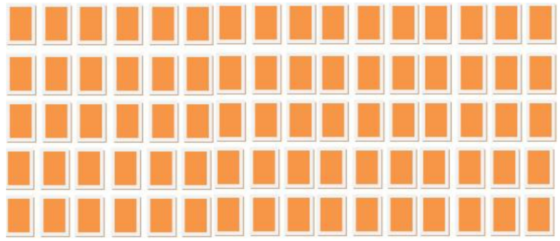
- Existe la posibilidad de que solamente una estrategia haya sido considerada (los alumnos suelen tomar las ideas de ciertos compañeros de la clase), en cuyo caso el docente debe inducir las otras estrategias posibles sin imponerlas, planteando que para llegar a una solución no se toma siempre el mismo camino.

Con el afán de promover procesos de *Razonar y argumentar* en el estudiante, el docente puede formularle preguntas sobre posibles variantes no consideradas en el problema para valorar si domina la estrategia implementada y si ésta sirve para responder a dichas interrogantes. Por ejemplo, el docente podría preguntar que si se decidiera regalar 4 entradas por estudiante (incluido él), ¿cuántos estudiantes hay en el grupo? ¿Sobrarían entradas? Esto permitiría que los estudiantes consideren el caso en que el reparto no deja opción a que sobren entradas.

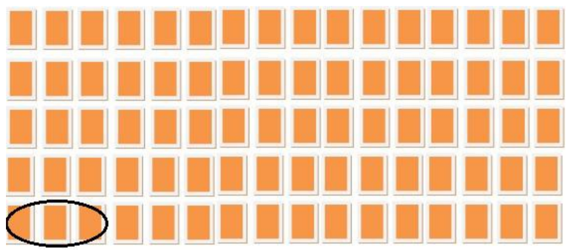
Una vez que el docente valora que la mayoría de grupos han terminado, puede realizar una plenaria donde los estudiantes tengan la oportunidad de exponer las principales ideas de la actividad. Es esencial que el docente intervenga de tal manera que propicie la reflexión en sus estudiantes acerca de que situaciones de reparto equitativo como las trabajadas en este problema llevan a considerar dos posibles casos: cuando sobran elementos y cuando no.

En el cierre de la actividad, el docente debe recapitular los elementos discutidos durante la misma para establecer la división de números naturales como una operación relacionada principalmente a situaciones de reparto equitativo y agrupamiento. Se retoma el problema y se aprovechan los aportes estudiantiles para ir visualizando las partes de la división:

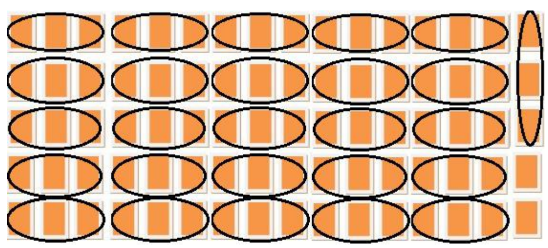
Dividendo: identificarlo como la totalidad del conjunto que se pretende repartir o agrupar.



Divisor: es el que define la forma de repartir o el tamaño de los subgrupos. En nuestro ejemplo, 3 entradas por estudiante.



Cociente: corresponde al resultado de la operación. Asociarlo a la cantidad de grupos que se pueden formar o bien a la cantidad de veces que se puede restar el divisor de la cantidad inicial.



Residuo: cantidad de elementos que sobran al hacer el reparto o agrupación o al hacer todas las restas sucesivas posibles del divisor. En ocasiones hay sobrantes, en otras no.

Tercer año. Problema principal

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Sistema de numeración decimal	• Representar números menores que 100 000 aplicando los conceptos de decena de millar y unidad de millar. • Identificar el valor posicional de los dígitos de un número menor a 100 000.	**Números, Segundo año** • Utilizar el conteo en la elaboración de agrupamientos de 1 en 1, 2 en 2, 3 en 3, 4 en 4, 5 en 5, de 10 en 10, 50 en 50 y de 100 en 100 elementos. • Representar números menores que 1000 aplicando los conceptos de centena, decena, unidades y sus relaciones. • Escribir sucesiones de números de 10 en 10 o de 100 en 100. • Identificar el valor posicional de los dígitos de un número menor que 1000.

Etapas de organización de la lección

I Etapa: El aprendizaje del conocimiento

Propuesta de problema

1. El docente conforma grupos de 3 estudiantes.
2. Se distribuye una hoja a cada grupo para que trabaje en lo que se solicita en ellas. A continuación se muestra su contenido:

Sistema de numeración egipcio

En todas las épocas de la historia, el hombre ha tenido la necesidad de registrar datos y hacer conteos. Para ello ha elaborado sistemas de numeración, con el propósito de representar mediante la escritura grupos de elementos (frutas, personas, ganado, propiedades, etcétera).

Para desarrollar un sistema de numeración es necesario establecer las reglas y los símbolos (o numerales) que se utilizarán. A continuación se muestra cómo se representaban algunos números que conocemos hoy, por medio de la simbología egipcia:

1	10	100	1000
			
Bastón	Herradura invertida	Cuerda enrollada en espiral	Flor de loto

Cabe resaltar que en este sistema no importaba la posición en la que se colocaban las figuras, sin embargo, por razones estéticas se procuraba ubicarlas de izquierda a derecha o de abajo para arriba.

De acuerdo con la información anterior, responda:

a. ¿Cómo se expresarían las siguientes cantidades utilizando los jeroglíficos anteriores?

123	567	935

b. ¿Con qué número representaría estos jeroglíficos? Escriba su nombre.

c. Un estudiante quiso formar dos números dibujando la siguiente secuencia de figuras. ¿Cuál jeroglífico permite expresar más fácilmente dichas cantidades? Escriba el número que lo representa.

d. ¿Con qué número representaría estos jeroglíficos? Escriba su nombre.

Número:	Nombre:

Número:	Nombre:

Número:	Nombre:

Número:	Nombre:

Trabajo estudiantil independiente

Para la pregunta a. el estudiantado podría adoptar una estrategia de conteo. Por ejemplo, se pueden incluir figuras sucesivamente e ir contando mentalmente hasta completar la cantidad requerida, o bien si una figura se pasa del límite establecido completarlo con otras figuras de menor valor. Para el caso de 123, se podría iniciar con un conteo de 10 en 10 y completar con tres unidades:

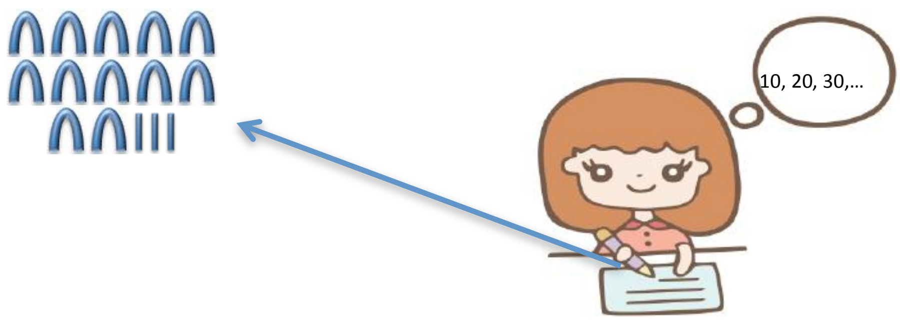


Imagen cortesía de Sicha Pongjivanich en FreeDigitalPhotos.net

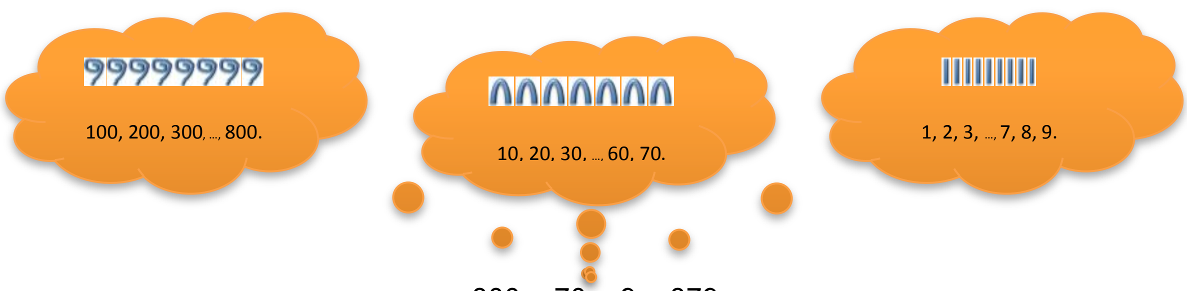
Sin embargo, es posible que algún estudiante intervenga y establezca que eso se puede hacer de una manera más simple, haciendo corresponder cada una de las cifras del número con la cantidad de figuras necesarias en función de su valor para brindar tal representación. Aquí se encuentra implícito el manejo del valor posicional de las cifras de un número natural por parte del estudiante y es la forma que se espera identifiquen los estudiantes como la más óptima. La respuesta esperada sería

Es posible que los estudiantes acaten la recomendación respecto al orden en que pueden aparecer las figuras, aunque no sería raro que las coloquen sin algún orden específico. Las respuestas esperadas (salvo el ordenamiento de las figuras) serían:

567	935
	

Es indispensable que el docente esté indagando sobre el desarrollo del trabajo estudiantil, sobre todo si existieron estrategias donde se utilizó una mayor cantidad de símbolos, proponer interrogantes para que los estudiantes razonen y argumenten el porqué es conveniente o no su respuesta. Esto permite activar el proceso *Razonar y argumentar.*

Respecto a la pregunta b. se espera que los estudiantes utilicen inicialmente una estrategia de conteo de 1 en 1, 10 en 10 y 100 en 100 según las figuras observadas, y finalmente una adición (que puede ser mental o con papel y lápiz) que permite formar el número correspondiente. Éste sería el esquema esperado:



800 + 70 + 9 = 879

“Ochocientos setenta y nueve”

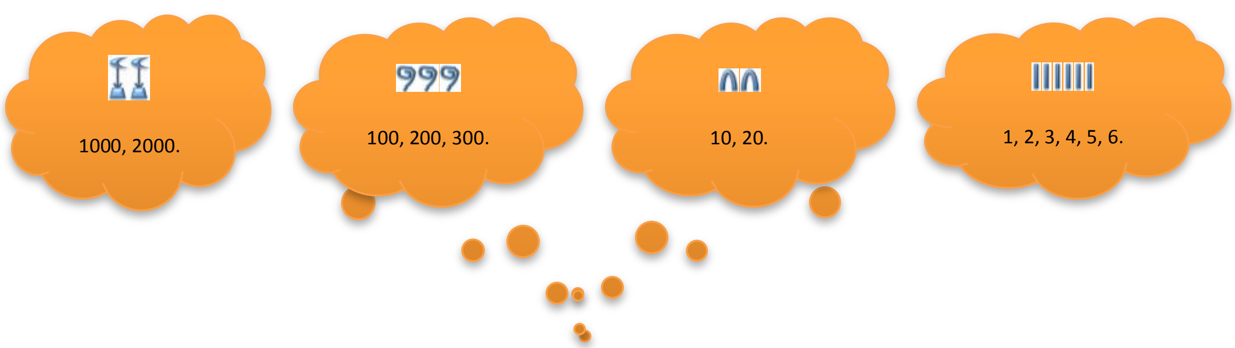
Así la respuesta esperada para los otros números es:

	
109 Ciento nueve	650 Seiscientos cincuenta

Básicamente esta pregunta permitirá que el estudiante se apropie del significado de cada jeroglífico, así como de su utilización en la representación de cantidades que ha tenido la oportunidad de trabajar en años anteriores. Aquí el docente puede aprovechar para establecer una relación entre la posición que ocupa el cero en las respuestas con la ausencia de una determinada figura.

En Tercer año, los estudiantes deben construir el número mil para generalizar la operatoria con números naturales. La pregunta c. pretende que el estudiante pueda realizar dicha construcción a partir de la idea de que equivale a y por conteo de diez en diez puedan deducir que estas diez figuras equivalen a y que finalmente, mediante conteo de cien en cien, puedan valorar la información suministrada en el enunciado que antecede a las preguntas para deducir que diez de estas figuras equivalen a . Generalmente, los estudiantes pueden realizar el conteo de cien en cien sin dificultad y mencionar que el número que sigue después de 900 es 1000, pero si existiese dificultad en ello, se les puede solicitar que cuenten diez monedas de cien. Finalmente, el estudiante debe caer en cuenta de que los dos grupos de figuras representan el mismo número: mil. Este momento debe referenciarse cuando se retome el tema de las sumas de números naturales con agrupamientos.

Para la pregunta d. se espera que los estudiantes puedan generalizar la estrategia de conteo empleada anteriormente para que puedan contar de mil en mil de manera natural y a partir de ahí adoptar la estrategia sumativa. Así, para la primera representación se esperaría que los estudiantes respondan lo siguiente:



2000 + 300 + 20 + 6 = 2326

Dos mil trescientos veintiséis

Es fundamental que el docente supervise con especial atención este desarrollo, pues por lo normal los estudiantes no tienen problemas para determinar el nombre de dicho número, pero sí se presentan inconvenientes a la hora de escribir el número, pues lo escriben como suena, por ejemplo, 2000326. Si esto sucede, el docente puede hacer referencia a lo trabajado en la parte a. para mostrar la correspondencia entre la cantidad de jeroglíficos y la cifra de un número, haciéndole ver que si hay 4 símbolos diferentes entonces deben utilizarse 4 cifras para precisarlo.

Para las siguientes representaciones se procura que el estudiante pueda ver los casos en que el cero ocupa distintas posiciones en un número dado y así asociarlo con la ausencia de una determinada figura. Las respuestas esperadas son las siguientes:

Número:	Nombre:
4023	Cuatro mil veintitrés

Número:	Nombre:
3402	Tres mil cuatrocientos dos

Número:	Nombre:
7000	Siete mil

Discusión interactiva y comunicación

Una vez que cada subgrupo haya terminado con las preguntas solicitadas en la hoja que se suministró, procederá a comparar las respuestas con otro subgrupo. El docente se encargará de hacer la distribución. La idea es que los estudiantes discutan la conveniencia o no de sus respuestas y que con argumentos justifiquen su posición. Algunos puntos que los estudiantes podrían discutir son:

- la utilización de más jeroglíficos de los necesarios: donde es importante que los estudiantes por economía y sencillez establezcan equivalencias entre dichos símbolos para que se utilice la menor cantidad posible.
- la posición de los jeroglíficos en las respuestas suministradas: para lo cual, aunque no importa el orden, es preferible que prevalezca el criterio presente en la reseña histórica.
- La mala escritura de algunos números: como se indicó anteriormente es posible que los estudiantes escriban los números como ellos los perciben a la hora de escucharlos, por lo que se espera que este detalle pueda ser discutido por ellos, o bien ser corregido en la plenaria final.

Una vez que los nuevos subgrupos de trabajo tengan un consenso respecto a las respuestas dadas, las presentarán en la pizarra para ser sometidas a valoración tanto por el docente como por el resto del grupo.

Al presentar las respuestas a la pregunta a. el docente debe preguntar a sus estudiantes los criterios que permitieron realizar dichas representaciones. Otro aspecto a destacar es que el docente puede establecer comparaciones entre las representaciones y mediante algunas preguntas generadoras valorar las ventajas que tiene nuestro sistema de numeración respecto al egipcio y reafirmar en el estudiantado ideas concernientes al valor posicional de las cifras de un número. Por ejemplo, una de las respuestas es que 935 se puede representar

Se podría preguntar: ¿por qué se usaron nueve para representar este número?, ¿cuántos son necesarios para representar esos nueve ?, etc.

En b., aunque pudiera ser que algunos subgrupos hayan escrito la suma que permitió expresar los números, es valioso que el docente proponga por escrito que por ejemplo 800 + 70 + 9 es una forma correcta de expresar el número 879. Esto permitirá que el estudiante fomente el uso de representaciones para un mismo número y active así el proceso *Representar.*

En la pregunta c., el docente podría solicitar a un subgrupo que describa cómo dedujeron a partir de los símbolos que la cantidad buscada correspondía a 1000.

Para d., si se llegaran a dar, proponer respuestas como ésta.

Número:	**Nombre:**
400023	**Cuatro mil veintitrés**

Número:	**Nombre:**
4023	**Cuatro mil veintitrés**

Es necesario que el docente pregunte a sus estudiantes cuál de estas respuestas es la más pertinente y esperar los argumentos que permitan su justificación.

Clausura o cierre

El proceso de resolución de esta actividad debe llevar a la consecución de los siguientes conocimientos:

- Construcción del número 1000.
- La noción de unidad de millar.
- Formas de representar cantidades menores que 10 000: gráfica, por descomposición aditiva, el numeral, verbal, literal y concreta.

Como en este año hay que trabajar con las decenas de millar, se puede elaborar una actividad similar que involucre preguntas semejantes a c. y d., así como la utilización del jeroglífico (dedo) y que representa el número 10 000, esto después de que los estudiantes tengan un manejo razonable con cantidades menores. O bien, todo puede abarcarse dentro de la misma actividad si el docente lo considera meritorio.

II Etapa: Movilización y aplicación de los conocimientos

Esta etapa pretende reforzar los conocimientos. A continuación se ofrecen los siguientes ejercicios de diferente nivel de complejidad:

Ejercicios de reproducción

- Escriba cada cantidad en la tabla de valor posicional y luego en los rectángulos.

UM	C	D	U

- Escriba el nombre de los siguientes números.
  a. 5037: ________________________.
  b. 76 324: ________________________.
  c. 18 001: ________________________.

- Escriba cada número como la suma de las decenas de millar, unidades de millar, centenas, decenas y unidades.

DM	UM	C	D	U
3	6	2	9	1
7	8	0	9	6
6	4	5	0	4

				+				+			+		
				+				+			+		
				+				+			+		

- ¿Cuál de las siguientes representaciones corresponde al número 5037?

a. 5000 + 300 + 7
b. 5000 + 30 + 7
c. 500 + 30 + 7
d. 500 + 3 + 7

Opción correcta: c.

Ejercicios de Conexión-Reflexión

Observe el siguiente encabezado de una noticia publicada en el periódico La Nación, el día 10 de julio del 2013:

COSTA RICA REGISTRA 13.474 CASOS; ZONAS DEL PACÍFICO SON LAS MÁS AFECTADAS

Poco personal y nula penalización traban lucha contra dengue

http://www.nacion.com/nacional/personal-penalizacion-traban-dengue_0_1352864734.html

Si se toma en consideración el número que describe la cantidad de casos de dengue registrados en Costa Rica, conteste:

a. ¿Cuál cifra representa las unidades de millar? _____
b. ¿A cuántas unidades equivale el 7? _____
c. ¿Cuántas decenas de millar tiene el número anterior? _____
d. ¿A cuántas decenas equivale el 4 ubicado en el centro de dicho número? _____

Respuestas

a. 3
b. 70
c. Una.
d. 40.

Nótese que en esta última pregunta hay cierto grado de reflexión para el nivel en que se formula la pregunta.

Contextualización activa

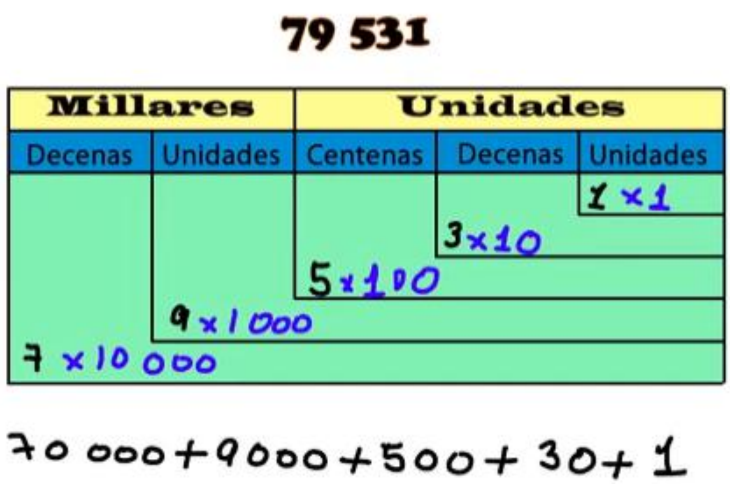
Como se indica en la columna de indicaciones puntuales de los programas de Matemáticas, esta contextualización de los números puede ser promovida en la etapa de *Movilización y aplicación de los conocimientos* mediante el uso de noticias de los medios de comunicación, periódicos y datos numéricos de otras áreas del saber. Por otra parte, el trabajo con monedas y billetes confeccionados por los estudiantes es una buena herramienta para afianzar el trabajo con cantidades menores que 100 000, en especial el valor posicional de las cifras de un número natural. Esto sería análogo a lo trabajado durante la actividad, sólo que adaptado a nuestros billetes y monedas, lo que permite establecer conexiones con el área de *Medidas.*

34 565

				
3 unidades de millar	4 unidades de millar	5 centenas	6 decenas	5 unidades

Uso de tecnología

La tecnología puede contribuir en la clausura o cierre de la lección. Por ejemplo, en la dirección http://www.youtube.com/watch?v=cWsFSUYNKPc es posible encontrar un video que explica en forma esquemática el valor posicional de las cifras para números menores que 100 000. El docente puede brindar dicha dirección a los estudiantes para que en sus hogares puedan accesarlo e así ir inculcando en ellos una cultura donde el Internet también contribuya a reforzar su aprendizaje.



Además, después de una búsqueda consciente, el docente podría recomendar al estudiantado ciertos sitios web que contribuyan a la movilización de estos conocimientos y de ese modo poder estudiar interactivamente con este recurso.

Uso de la historia de las Matemáticas

Este eje está implícito en el desarrollo de la actividad. En esta ocasión se utilizó el elemento histórico como una herramienta que permitió a los estudiantes trabajar directamente con el sistema de numeración egipcio para propiciar no sólo la comprensión de nuestro sistema de numeración (debido a su similitud) sino el trabajo con números mayores que 999 y menores que 100 000.

En este sentido, la descripción del contexto histórico egipcio y el uso de jeroglíficos sirve no sólo para motivar y sensibilizar al estudiante sobre la utilidad de las Matemáticas en otros ámbitos culturales, sino que al ser un sistema de numeración decimal permite al estudiante referenciar algunos procedimientos que contribuirán más adelante en la comprensión de la suma de números naturales con agrupamientos.

Actitudes y creencias

Al usar elementos históricos de la cultura egipcia para el desarrollo de la actividad, se brinda al estudiante la oportunidad de expandir su horizonte respecto a los alcances que han tenido las Matemáticas y cómo han contribuido al desarrollo de diversas culturas a lo largo del tiempo. Es conveniente dar a conocer al estudiantado desde temprana edad el lugar preponderante que ocupa dicha disciplina, para que exista ese *Respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas*.

El trabajo inicial en subgrupos y la posterior confrontación de las respuestas con otros subgrupos en pos de un consenso o acuerdo es una forma directa de propiciar una *Participación activa y colaborativa* en los estudiantes.

Cuando se hace referencia a que en todas las épocas de la historia el hombre ha tenido la necesidad de registrar datos, hacer conteos y por ello ha elaborado sistemas de numeración, con el propósito de representar mediante la escritura grupos de elementos (frutas, personas, ganado, propiedades, etc.), es una manera de comunicar a los estudiantes cómo las Matemáticas han contribuido a facilitar las actividades que desarrollan las personas con el pasar del tiempo. Ésta es una forma de evidenciar la *Confianza en la utilidad de las Matemáticas*.

Sugerencias de evaluación

En esta etapa es pertinente el continuo reforzamiento de las formas de representación de cantidades menores que 100 000. Es por eso que ejercicios similares a los descritos en la sección de *Movilización y aplicación de los conocimientos* son los que pueden complementarse en la realización de las pruebas escritas para afianzar el trabajo con estas cantidades.

Geometría

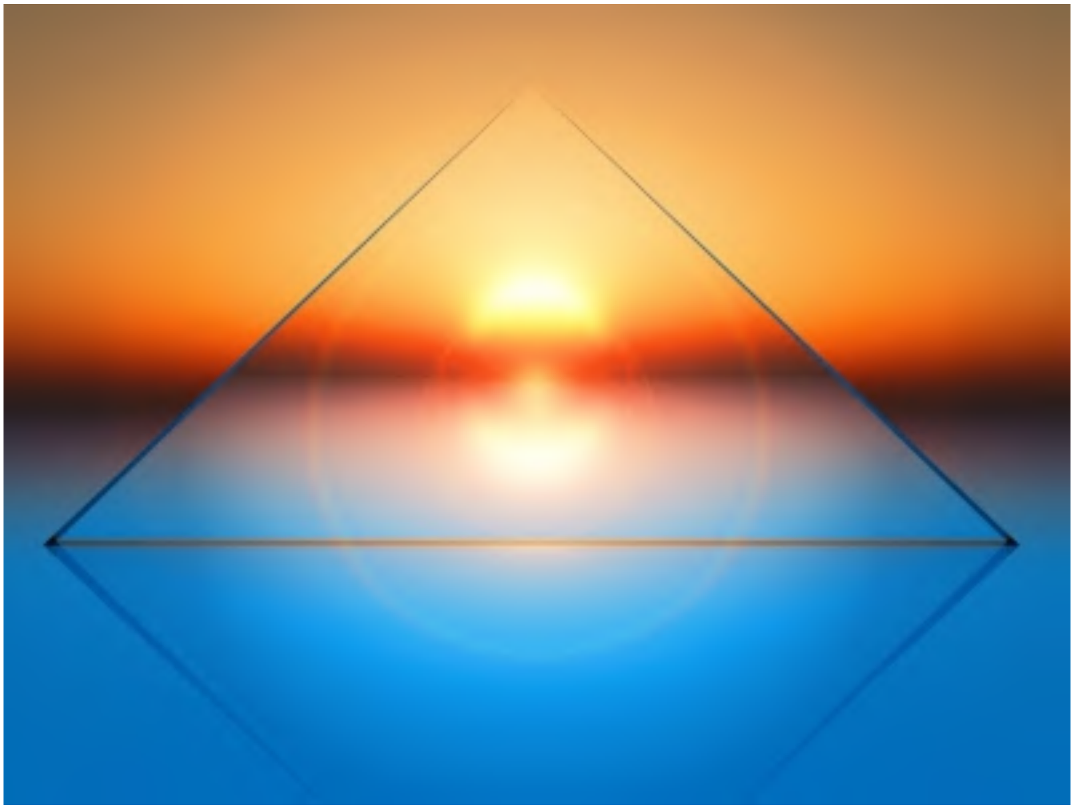


Imagen cortesía de dan en FreeDigitalPhotos.net

Primer año

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Conocimientos básicos Nociones de posición con respecto a una línea cerrada (borde, interior, exterior)	Distinguir el interior, el exterior y el borde referidos a líneas cerradas tanto en el entorno como en dibujos y trazos elaborados por sí mismo y por otros.	**Conocimientos básicos, Primer grado** Determinar la posición relativa entre objetos (adelante, atrás, arriba, debajo, dentro, fuera, derecha, izquierda, junto a, en medio de, al lado).

Propuesta de problema

Se entrega a los estudiantes una lámina con algunos animales (lámina A) y una hoja con uno o varios corrales (lámina B). Luego se le presenta al estudiante el siguiente problema:

Don José tiene una granja y muchos animales. Por motivo de un descuido dejó la puerta abierta del corral y se salieron todos. Ayude a don José a ubicar cada animal donde debería estar, algunos de éstos no deben estar dentro de los corrales. En el corral más grande deben estar el toro, la vaca, la oveja y el cabro, en el otro corral debe estar el cerdo y los demás animales pueden estar fuera del corral.

Imagen con derechos adquiridos por el MEP

Instrucciones orales: De la lámina A, recorte todas las figuras de animales y péguelas de acuerdo a las indicaciones de don Pedro. Luego dibuje el portón del corral de forma que quede cerrado y no se puedan escapar de nuevo los animales.

Lámina A

Imagen con derechos adquiridos por el MEP

Lámina B

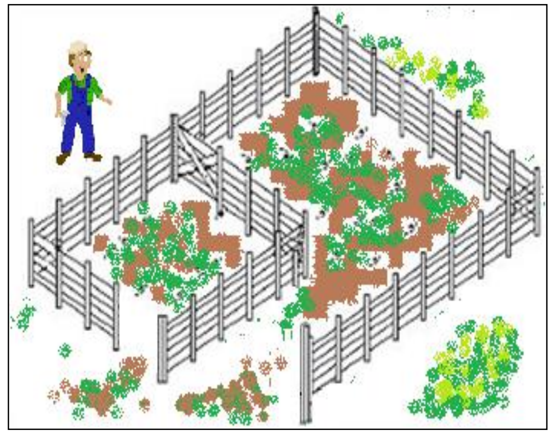


Imagen: Elaboración propia

Solución del problema

Como lo indica la habilidad específica, el propósito de esta actividad es que el estudiante diferencie el interior, el exterior y el borde de una figura cerrada compuesta por líneas, en este caso los corrales. Además, con este problema se pueden potenciar procesos matemáticos como *Comunicar* y *Razonar y argumentar* cuando los estudiantes expongan y justifiquen sus trabajos a los demás compañeros.

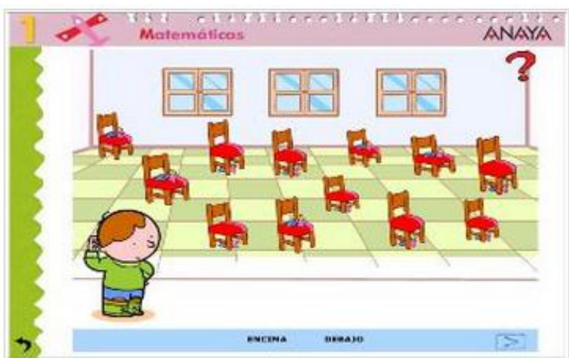
También se favorece el proceso *Conectar* gracias al contexto donde se desarrolla la situación (granja y animales). En este sentido, hace conexión con la asignatura de Ciencias en el eje temático *Los seres humanos somos parte integrante de la naturaleza*, desarrollando en conjunto objetivos como:

- Identificar algunas características de los animales en la comunidad. (MEP, p. 39)
- Reconocer los animales según criterios de utilidad, doméstico y silvestre. (MEP, p. 40)
- Reconocer algunas medidas de seguridad en el manejo y cuidado de plantas y animales, orientadas a la conservación de la salud del ser humano. (MEP, p. 41)

Esta actividad se puede complementar con el uso de tecnología si se cuenta con un laboratorio de computadoras. Por ejemplo, la siguiente imagen es de una actividad en línea que se puede acceder en la dirección

http://duo1.lacoctelera.net/post/2010/10/09/arriba-abajo-encima-debajo en la cual el estudiante identifica y luego da clic a los niños dentro de la casa o fuera de la casa según corresponda. Una voz le da las instrucciones y le indicará si su escogencia fue correcta o no.

En este sitio web podrá encontrar otras actividades referentes a la ubicación relativa de un objeto, por ejemplo: encima-debajo y adelante-atrás



Segundo año

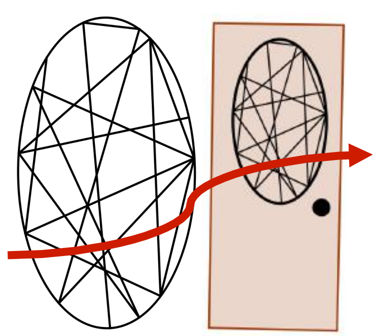
Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Figuras planas: triángulos y cuadriláteros	Reconocer triángulos y cuadriláteros.	**Geometría, Primer año** Clasificar figuras planas de acuerdo con su forma (triángulos, cuadriláteros, polígonos).

Propuesta de problema

Un vitral es una ventana compuesta de vidrios de diferentes formas y colores.

Imágenes cortesía de nuchylee en FreeDigitalPhotos.net

Juan es un artista que trabaja haciendo vitrales. Él ahora está haciendo un vitral con la siguiente forma para instalarlo en una puerta.



Juan tiene que elegir los colores para cada pieza de vidrio. Decide que las figuras formadas por tres líneas rectas sean vidrios de color rojo, las de cuatro líneas rectas vidrios de color azul y las de más de cuatro líneas rectas vidrios de color verde. Las figuras que tengan al menos una línea curva serán de vidrios color amarillo.

Ayude a Juan y coloree el vitral de acuerdo a las indicaciones que él dio para cada pieza.

¿Cuántas piezas de color rojo, azul, verde y amarillo deberá fabricar Juan?

Solución del problema

Al colorear el vitral con las especificaciones dadas, el estudiante deberá identificar en el mosaico de figuras las que están formadas por tres líneas rectas (triángulos), por cuatro líneas rectas (cuadriláteros), de más de cuatro líneas rectas y las figuras formadas con alguna línea curva. Hay que tener presente que estas últimas no se consideran como polígonos.

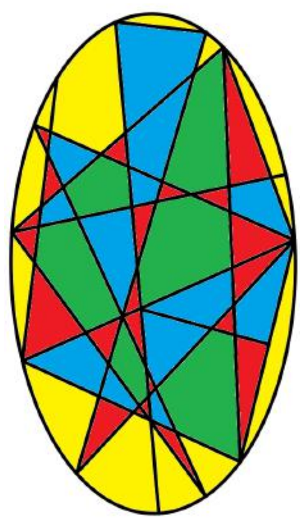
Antes de iniciar con la solución de este problema (con la finalidad que comprendan lo que se les solicita), se puede indicar a los estudiantes que a partir de la región ovalada formen sus propios vitrales utilizando una línea, dos líneas, tres líneas, cuatro líneas y que identifiquen las figuras planas que se forman.

Figuras planas:

- Color rojo: 22
- Color azul: 13
- Color verde: 6

Figuras no planas:

- Color amarillo: 13

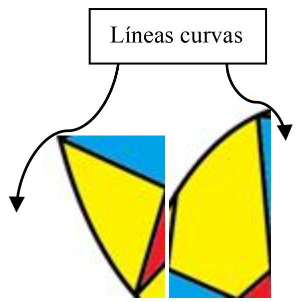


Aunque en Primer grado se clasificaron figuras planas de acuerdo a su forma, es importante dar suficiente tiempo para la identificación de las mismas en esta actividad, ya que al estar todas unidas y dentro de una figura curva puede haber ciertas confusiones. Por ejemplo, al considerar una figura de más de cuatro lados como una de cuatro lados o confundir un triángulo con una figura que no lo es (uno de sus lados es el contorno del vitral). Para esto es necesario que en la fase de *Trabajo independiente* y la de *Discusión y contrastación de resultados* se activen los procesos de *Razonar y argumentar*.

Como puede apreciarse, esta actividad tiene un contexto que no es ajeno a la realidad de la mayoría de estudiantes, ya que muchos lugares como templos, teatros, hoteles, restaurantes y casas de nuestro país poseen vitrales. Incluso en la actualidad se está haciendo cada vez más común confeccionar puertas principales de casas con algún vitral.

Esta actividad potencia actitudes como la *Confianza en la utilidad de las Matemáticas,* al ver cómo la geometría es muy necesaria en el ámbito artístico de formas y colores.

Al realizar la actividad, el docente deberá concretar que las figuras pintadas de color rojo se llaman triángulos y las pintadas de color azul se llaman cuadriláteros. Asimismo, puede profundizar en las características de estos polígonos. También es relevante aclarar que figuras como las siguientes no son polígonos porque no todos sus lados son líneas rectas:



En geometría, un *polígono* es una figura plana compuesta por una secuencia finita de segmentos rectos consecutivos que cierran una región en el espacio. Estos segmentos son llamados lados, y los puntos en que se intersecan se llaman vértices.

Tercer año

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Cuerpos sólidos: Esfera (Radio, Diámetro), Caja, Cubo (Arista, Cara)	Plantear problemas con base en imágenes de cuerpos sólidos.	**Geometría, Tercer año** Reconocer el radio y diámetro de esferas. Reconocer los elementos de cajas y cubos (caras y aristas).

Propuesta de problema

Con base en los siguientes objetos del entorno plantee un problema geométrico:

Imagen cortesía de YaiSirichai en FreeDigitalPhotos.net

Imágenes con derechos adquiridos por el MEP

Imágenes cortesía de posterize en FreeDigitalPhotos.net

Nota: El problema no necesariamente se debe formular de forma escrita y con una lámina con imágenes, como se hizo anteriormente. Es deseable utilizar objetos del entorno y dar las indicaciones de forma oral.

Solución del problema

El objetivo principal de la actividad es que los estudiantes sugieran varios problemas factibles de ser resueltos, utilizando los objetos presentados ya sea en una lámina o de forma física por el docente. Aquí se trata de fomentar la autonomía, la creatividad, el trabajo en equipo y la interacción entre los estudiantes.

Lo deseable es que los mismos estudiantes traigan de sus casas los objetos que se van a utilizar (cajas y objetos esféricos), esto para garantizar que efectivamente sean cercanos a su realidad.

"En grupos de 3 o 4 estudiantes, a partir de los objetos que trajeron (bolas, cajas, envases, cubos) tienen que inventar uno o varios problemas matemáticos que después van a resolver. Luego, el o los problemas elaborados serán expuestos a los demás compañeros".

Mediante una caja y los adornos esféricos navideños, un grupo de estudiantes podría considerar el siguiente problema:

Pasada la navidad, Sofía le dice a su hijo Sebastián que guarde en una caja los 20 adornos esféricos de color dorado que estaban colgando en el árbol. Sebastián consigue una caja que mide 25 cm de largo, 15 cm de ancho y 16 cm de alto para guardar en ella los adornos esféricos que tienen 6 cm de diámetro. ¿En esa caja se podrán guardar todos los adornos esféricos dorados?

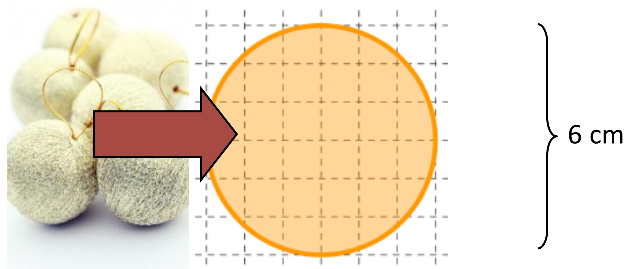
Imagen cortesía de YaiSirichai en FreeDigitalPhotos.net

Imagen cortesía de posterize en FreeDigitalPhotos.net

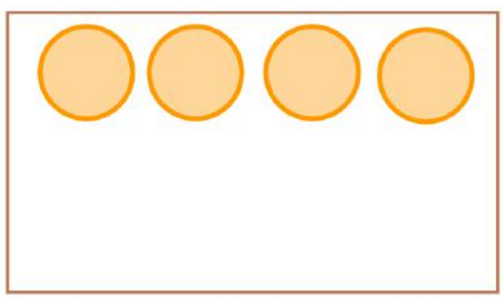
En este caso los estudiantes recurrieron a una lámina de imágenes e improvisaron las dimensiones de los objetos. Sin embargo, lo más recomendable es pedir a los estudiantes que traigan materiales concretos de sus casas como cajas u objetos esféricos para que en lugar de inventar las dimensiones ellos mismos las midan con instrumentos; esto conecta con el área de *Medidas* e incluso se podría trabajar de manera integrada desarrollando la habilidad *"Realizar mediciones utilizando el metro y el centímetro"*, que está también para Segundo año.

Además, es interesante iniciar la actividad con la *observación* y la *manipulación* de los diferentes objetos traídos por los estudiantes o el docente, para que identifiquen: diámetro, caras, vértices… y ver que en el aula y en su entorno existen cuerpos con las mismas características.

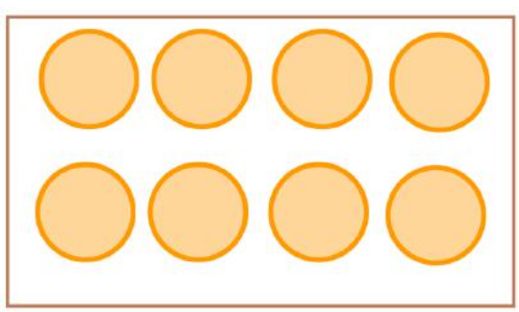
Posteriormente, el grupo de estudiantes debe elaborar una posible solución al problema. Por ejemplo, pueden realizar representaciones planas de los objetos: representar las dimensiones del adorno esférico con un círculo de diámetro 6 cm, como se muestra en la figura:



Y a la vez utilizar rectángulos para representar las diferentes caras de la caja. En este caso es un rectángulo de base 25 cm, por lo que en ella cabe 4 veces el diámetro de 6 cm en una primera fila, o sea 4 adornos.



Ahora el ancho es de 15 cm, por lo tanto caben 2 adornos por columna, ya que 2 × 6 cm = 12 cm. Se puede hacer entonces la representación de uno de los “pisos” del acomodo de los adornos:



Ahora bien, como la altura de la caja es de 16 cm entonces se pueden hacer dos “pisos” con este mismo acomodo (2 × 6 cm = 12 cm), por lo que se obtendrían 8 + 8 = 2 × 8 = 16 adornos. Así el total sería 4 × 2 × 2 = 16 adornos esféricos dorados. Por ende, la respuesta al problema es que no se podrían guardar los 20 adornos dorados en esa caja, habría que buscar una caja más grande. El docente puede lanzar preguntas que generen otro problema relacionado, por ejemplo:

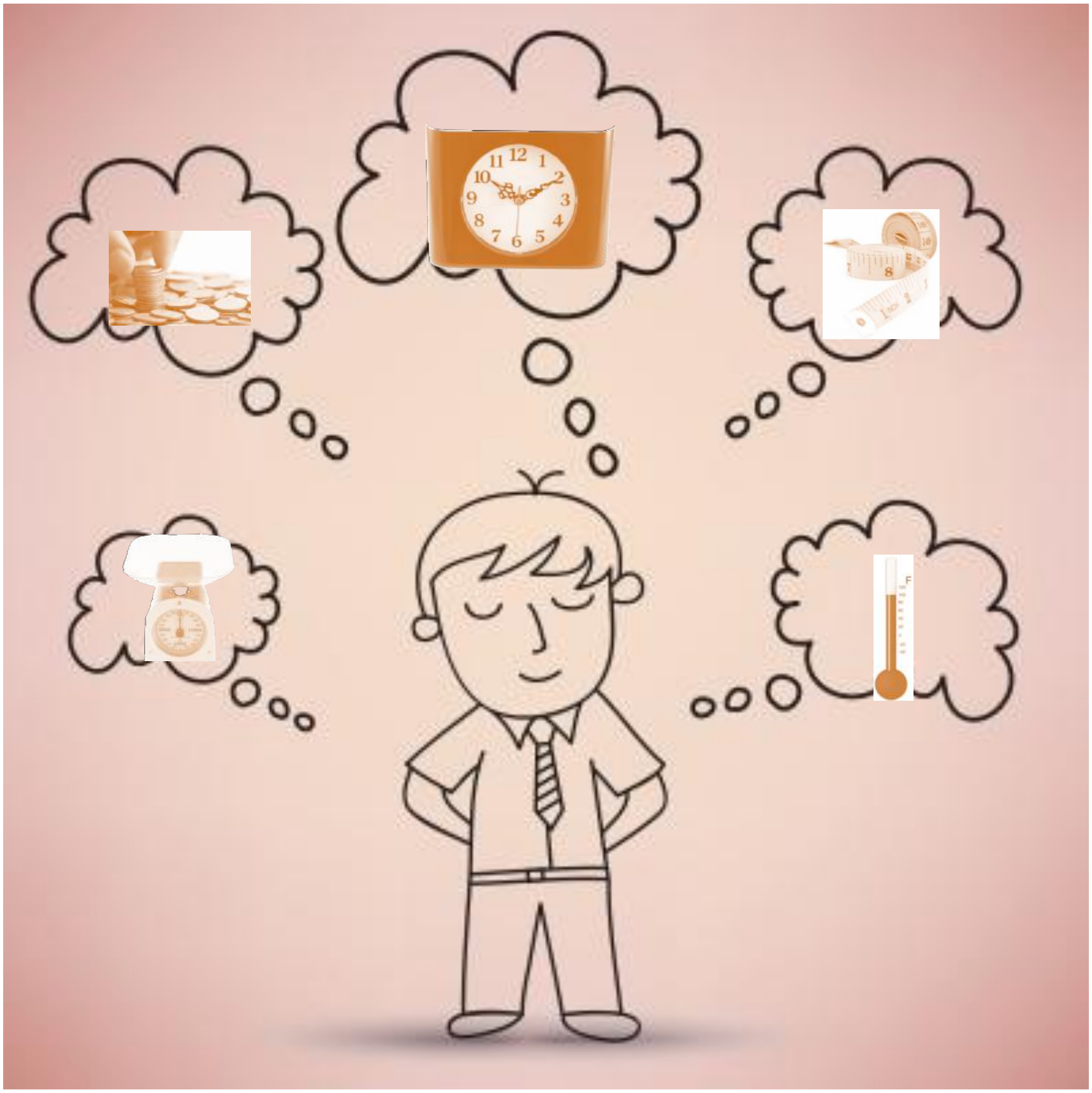
¿La misma caja serviría para guardar 30 cubos de letras, si los cuadrados del cubo tienen de lado 5 cm? ¿Cuántos cubos como máximo se pueden guardar?

Una vez que el grupo de estudiantes ha elaborado el problema y su solución, es indispensable exponerlos a sus compañeros y que además se propongan algunos problemas para su resolución. En esta fase el docente debe identificar por medio de la observación de aula las distintas maneras de aprender de sus estudiantes y así impulsar la búsqueda de múltiples formas de razonamiento y aproximaciones a los problemas.

En esta actividad se impulsan procesos matemáticos como *Plantear y resolver problemas*, *Razonar y argumentar*, *Representar* y *Comunicar*. De este modo, al incentivar al estudiante en la formulación de un problema matemático que nazca de su propia creatividad se incentiva la actitud de *Autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas,* ya que el estudiante se siente parte activa de la lección.

El docente puede aprovechar el mismo problema con otros objetivos. Por ejemplo para introducir la división, buscando cuáles pueden ser las medidas de los cubitos y de la caja para que no hayan espacios vacíos.

Medidas



Imagenes cortesía de Keerati, mrpuen, digitalart, *89studio* y foto 76 en FreeDigitalPhotos.net

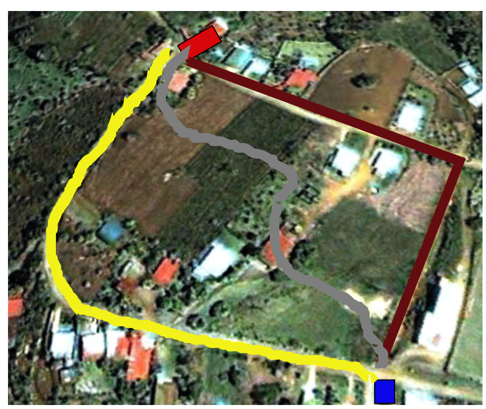
Primer año

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Longitud: unidad de medida, metro, centímetro	• Estimar medidas utilizando unidades de medida arbitrarias como la cuarta o unidades definidas por los estudiantes. • Estimar medidas utilizando el metro o el centímetro como unidades de medida convencionales.	**Conocimientos básicos** • Determinar la posición relativa entre objetos (adelante, atrás, arriba, debajo, dentro, fuera, derecha, izquierda, junto a, en medio de, al lado). **Números, Primer año** • Identificar varias utilidades de los números en diferentes contextos cotidianos. • Utilizar el conteo para asociar conjuntos de objetos con su respectiva cardinalidad.

Propuesta de problema

Se va a trabajar a partir de la siguiente ilustración. El docente prepara con anterioridad el material, que representa las tres casas y los tres caminos de la imagen en hojas grandes de papel periódico (de mínimo un metro).

Se organiza la clase en grupos de tres a cinco según el número de alumnos de la clase. Cada grupo tiene una hoja con el dibujo.



Instrucciones orales: Este es un mapa del pueblo donde viven Ana, Roberto y Luisa. El cuadrito azul es la casa de Ana y el rojo es la casa de Luisa. Los tres amigos salen de la casa de Ana y van para la casa de Luisa. Ana se va por el camino amarillo, Luisa por el camino gris y Roberto por el camino café. ¿Quién caminó más, quien caminó menos?

Solución del problema

El propósito de esta actividad es que los niños midan de alguna manera los tres caminos. En principio pueden emplear alguna unidad de medición. Pueden también, por ejemplo, manipular un cordel y darle la forma de cada camino para después comparar. Con este problema se pueden potenciar procesos matemáticos como *Comunicar* y *Razonar y* *argumentar* cuando los estudiantes expongan y justifiquen sus trabajos a los demás compañeros.

Durante el trabajo independiente, los niños trabajarán en grupos tratando de idear una estrategia que les permita saber cuál es el camino más largo y cuál el más corto.

En la etapa de discusión el docente puede sugerir el uso de un cordel y posteriormente de alguna manera de medir los trayectos por medio de alguna unidad de medida arbitraria.

En la clausura o cierre se medirán los cordeles utilizando una regla graduada para introducir el centímetro y el metro.

Segundo año

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Moneda: estimación, comparación	• Establecer relación entre las monedas de denominaciones hasta ₡ 500. • Estimar cantidades monetarias. • Comparar cantidades monetarias.	**Medidas, Primer año** • Construir el conocimiento de unidad monetaria. • Reconocer el colón como la unidad monetaria de Costa Rica. • Identificar la relación entre las monedas de denominaciones hasta ₡ 100. • Sumar y restar cantidades menores que 1000.

Propuesta de problema

Se recortan papeles de diferentes colores que representarán las monedas costarricenses hasta ₡ 100 (se pueden usar fichas de colores, granos, etc.). El grupo se divide en pequeños grupos y se les entrega varios papeles de cada denominación.

El problema consiste en establecer:

a) Cuál es la mayor cantidad de monedas que puedo utilizar para pagar ₡ 375 de manera que haya al menos una moneda de 5, de 10, de 25, 50 y 100 colones.

b) Cuál es la menor cantidad de monedas que puedo utilizar para pagar ₡ 375 de manera que haya al menos una moneda de 5, de 10, de 25, 50 y 100 colones.

Solución del problema

La idea del problema es que se establezcan las relaciones pertinentes. Al realizar este trabajo se familiarizarán con las diferentes monedas. Por otra parte, el problema requiere que los estudiantes analicen las diferentes opciones para efectuar el pago indicado.

El proceso *Razonar y argumentar* es significativo puesto que deberán establecer una estrategia para determinar de qué manera se realizará el pago utilizando la mayor cantidad (o la menor cantidad) de monedas y usando al menos una de cada tipo. Igualmente, al compartir las soluciones se potencia el proceso *Comunicar*.

Con monedas de 5, de 10, 25, 50 y 100 la solución del problema sería la siguiente.

La principal estrategia consiste en separar una moneda de cada tipo y ver que así suma ₡ 190, o sea 5 monedas.

Queda por ver cómo pagar 375 – 190 = 185 colones con el mayor o menor número de monedas según sea el caso.

El mayor número de monedas se logra si lo que falta por pagar (185 colones) se paga con monedas de ₡ 5; éstas son 37. De modo que la mayor cantidad de monedas es 37 + 5 = 42.

En cuanto al menor, para cubrir los ₡ 185 se toma una de 100, una de 50, una de 25 y una de 10. En total son 4 + 5 = 9 monedas.

Se puede solicitar a los estudiantes que realicen alguna representación con sus monedas y elaboren un problema para que los otros compañeros lo resuelvan y descubran como representó cada uno la cantidad dada.

Se puede también, como reforzamiento del tema, elaborar una pequeña pulpería en un rincón del aula con precios en los productos, se alterna el pulpero y los estudiantes llegan a comprar con cierta cantidad de dinero en diferentes denominaciones o en una sola denominación para que le den vuelto (elaborar en anexos, billetes y monedas para fotocopiar).

El tema de las monedas se puede ilustrar con algunos hechos históricos referentes a las monedas de Costa Rica. Se pueden llevar ilustraciones de algunas monedas o billetes que se han utilizado en el país.

Relaciones y Álgebra

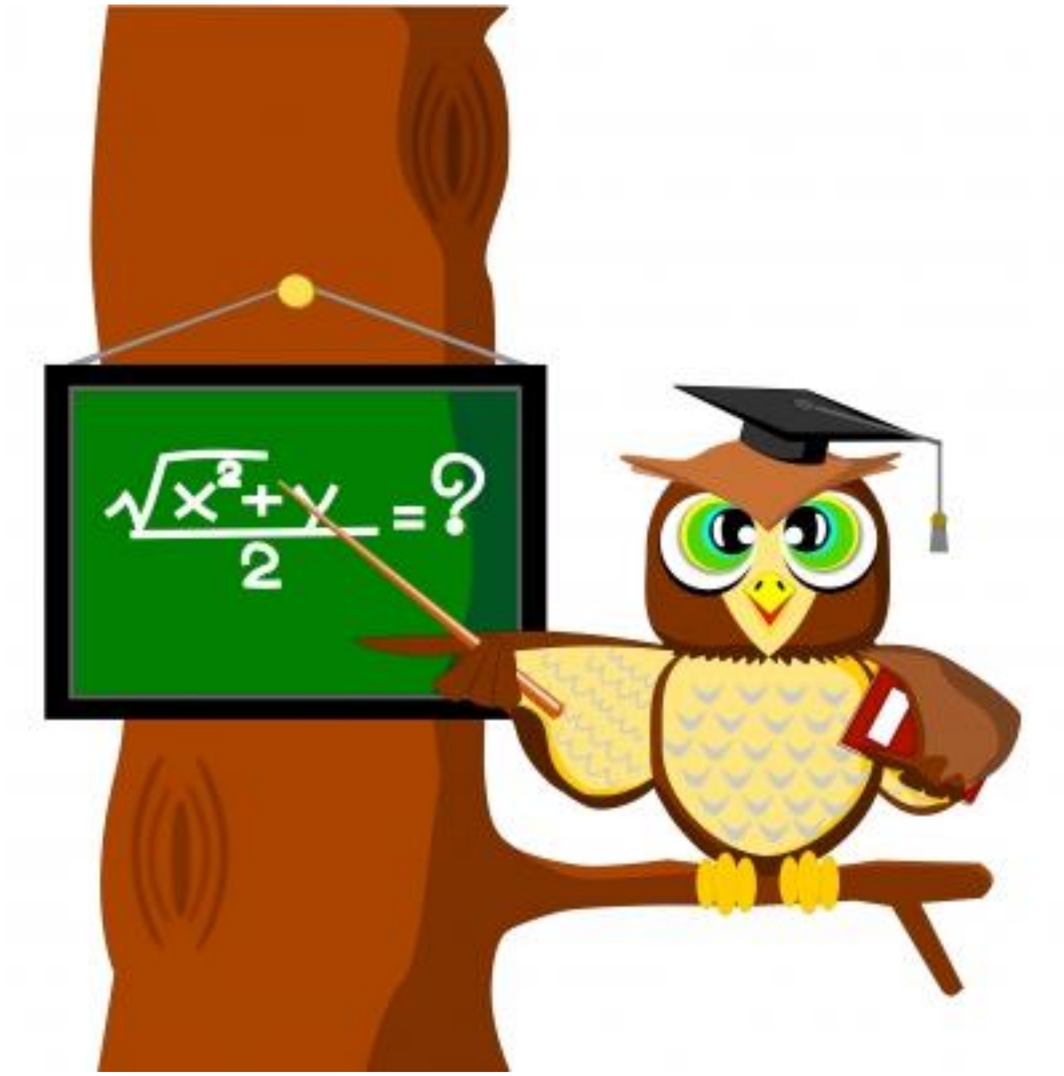


Imagen cortesía de bandrat en FreeDigitalPhotos.net

Primer año

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Sucesiones: Patrones	Construir sucesiones con figuras o con números naturales menores que 100 que obedecen a una ley dada de formación o patrón.	**Relaciones y Álgebra, Primer año** Identificar patrones o regularidades en sucesiones con números menores que 100, con figuras o con representaciones geométricas.

Propuesta de problema

Complete los espacios en blanco con los números naturales que faltan:

7	15	23	31	………	………	………

Solución del problema

Se debe notar que del número 7 al 15 hay una diferencia de 8 al igual que del número 15 al 23 y del número 23 al 31. Entonces cada término se obtiene al sumarle 8 unidades al término anterior, como se indica en la siguiente tabla:

Sucesión	Patrón	Siguiente término
7	7 + **8** =	15
15	15 + **8** =	23
23	23 + **8** =	31
31	31 + **8** =	39
39	39 + **8** =	47
47	47 + **8** =	55

Por lo tanto, los números naturales que faltan son 39, 47 y 55; ya que 39 = 31 + 8, 47 = 39 + 8 y 55 = 47 + 8. Es medular que en el proceso de solución se permita al estudiantado trabajar por algunos minutos de manera individual en el problema y posteriormente mediante el trabajo en grupos.

Se deben destacar dos aspectos en este problema:

- Según su nivel de dificultad es de reproducción y puede favorecer la habilidad de cálculo mental y por supuesto la observación.
- Es evidente que éste no es un problema contextualizado, es un problema abstracto pero potencia la estimación, debido a que pueden obtener los resultados

mediante aproximaciones hasta llegar al valor exacto, concepto incluido en los programas y que se pretende fortalecer.

Al ofrecer problemas como el anterior se pueden promover dos actitudes:

- *Perseverancia*: una de las principales actitudes que se quiere potenciar es aquella que hace del trabajo, la dedicación y la persistencia el medio para abordar las Matemáticas. Lejos de ser un asunto para personas superdotadas, lo cierto es que las destrezas matemáticas se entrenan y desarrollan. Para que los estudiantes encuentren la solución del problema es necesario que persistan en la búsqueda de patrones numéricos. La función del docente es primordial para motivar a los alumnos a que no abandonen la solución del ejercicio.

- *Autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas:* con la presencia de escaleras pedagógicas apropiadas y la existencia de distintos niveles de profundidad se tendrá la posibilidad de dar forma a las exigencias personales para perseguir el desarrollo de esta autoestima. Cuando el estudiante logra la solución de un problema después de trabajar en ella arduamente, la confianza en su trabajo matemático se ve fortalecida, mejorando su autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas.

Segundo año. Problema principal

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Sucesiones: patrones, tablas numéricas, sucesiones ascendentes, sucesiones descendentes	Identificar patrones o regularidades en sucesiones o en tablas de números naturales menores que 1000, con figuras o con representaciones geométricas.	**Relaciones y Álgebra, Primer año** Identificar patrones o regularidades en sucesiones con números menores que 100, con figuras o con representaciones geométricas. Construir sucesiones con figuras o con números naturales menores que 100 que obedecen a una ley dada de formación o patrón. **Relaciones y Álgebra, Segundo año** Construir sucesiones con figuras o con números naturales menores a 1000 que obedecen a un patrón dado de formación.

Etapas de organización de la lección

I Etapa: El aprendizaje del conocimiento

Propuesta de problema

Imagen cortesía de FreeDigitalphotos.net

¿Cuál es el siguiente número? Complete los espacios de las líneas punteadas y suponga que el patrón se repite.

1	3	7	15	31	………	……….

Trabajo estudiantil independiente

Al emprender la solución del problema se espera que los estudiantes aprovechen algunas estrategias para encontrar la respuesta, una de ellas puede ser la siguiente:

El estudiantado puede tratar de hallar la relación entre los números presentados:

1	3	7	15	31	………	……….
	2 + 1	6 + 1	14 + 1	30 + 1		
	1 + 2	5 + 2	13 + 2	29 + 2		
	3 × 1	3 × 2 + 1	3 × 5	3 × 10 + 1		
	3 × 1 + 0	3 × 2 + 1	3 × 5 + 0	3 × 10 + 1		

Este trabajo requiere de tiempo para explorar y perseverar en las diversas formas en que cada uno de los números puede representarse a través de sumas, restas, productos, entre otras, y lograr establecer relaciones correctas entre los números y sus diferentes descomposiciones. Es evidente que este trabajo implica observar y activar el proceso *Razonar y argumentar*, debido a que se debe deducir el comportamiento de los números, estableciendo posibles patrones. Asimismo, al trabajar en subgrupos los estudiantes deben exponer sus ideas mediante argumentos, favoreciendo a su vez el proceso comunicar.

Cuando ellos logran construir la tabla y expresar por ejemplo el número 15, mediante la suma de 14 + 1, 13 + 2 o el producto 3 × 5, también se activa el proceso *Representar* que corresponde a expresar el mismo objeto matemático de diversas maneras.

Continuando con la solución, con el fin de lograr resolver el problema el estudiante debe establecer la relación o patrón que existe entre los dos primeros números de la tabla y comprobar que dicha relación se cumple para el segundo y tercer número, para el tercer y cuarto número y así sucesivamente, de modo que con el último número de la tabla y la relación encontrada pueda calcular los números que faltan. Durante este proceso el papel docente es determinante, debido a que debe supervisar el trabajo de los niños, visualizando siempre sus errores para estimularlos y ofrecer preguntas generadoras que los obliguen a hacerse cuestionamientos como los siguientes:

- ¿Existirá otra forma de descomponer un número que no sea mediante la suma?
- ¿Qué relación hay entre el número 1 y el número 3, entre el número 7 y el número 15?
- ¿Hay alguna relación en la que se utilice sólo una operación o es indispensable emplear más de una operación?

Alguna pregunta de este tipo podría provocar que el estudiantado replantee las descomposiciones realizadas hasta el momento, tal como se muestra en la siguiente tabla:

1	3	7	15	31	………	……….
1	2 + 1 1 × 2 + 1	6 + 1 3 x 2 + 1	14 + 1 7 × 2 + 1	30 + 1 15 × 2 + 1	31 × 2 + 1 = 63	63 × 2 + 1 = 127

Debe destacarse que la observación tiene un papel decisivo en esta actividad, y el docente tiene la responsabilidad de orientar a los estudiantes hacia la observación de patrones o regularidades y no hacia la respuesta del problema.

Finalmente, en este caso una forma de establecer el **patrón** es multiplicar el término anterior por el número dos y sumarle una unidad, esto en relación directa con el área de *Números* donde se evidencia el proceso *Conectar*. Al mismo tiempo, esto permite hacer una conexión con álgebra, debido a que permite observar cantidades que se mantienen fijas, otras que varían y generan un conjunto de valores. Esto favorece la comprensión de conceptos como relación y otros que son fundamentales en Secundaria.

El docente debe propiciar que el estudiantado reconozca el patrón, que lo describa en sus propias palabras y que sea capaz de continuarlo.

En la siguiente tabla se revela la solución del problema. Se debe puntualizar que la participación de los estudiantes en la resolución del problema favorece otro proceso denominado *Plantear y resolver problemas*. A continuación se presenta una tabla con el patrón que siguen los números dados en el problema inicial. En esta tabla se pueden incluir representaciones verbales para favorecer la interpretación.

Patrón			**Sucesión**
Doble del número anterior	**Resultado**	**+1**	**Inicia en 1**
1 × 2	2	+1	3
3 × 2	6	+1	7
7 × 2	14	+1	15
15 × 2	30	+1	31
31 × 2	62	+1	63
63 × 2	126	+1	127

Discusión interactiva y comunicativa

En esta etapa se espera que los niños compartan sus hallazgos con los demás miembros de la clase, por ejemplo que comuniquen las estrategias adoptadas, incluso aquellas que no fueron exitosas, así como las respuestas encontradas. Nuevamente en este espacio se activa el proceso de *Razonar y argumentar*, así como el de *Comunicar*. Se quiere por supuesto que los estudiantes discutan unos con otros sobre la veracidad de las respuestas halladas y las estrategias empleadas.

Se pretende que los estudiantes de los subgrupos comuniquen ideas semejantes a éstas:

- Cada número de la tabla se puede expresar mediante la suma de diferentes números, sin embargo pese a que traté de hacerlo solamente con esa operación no pude encontrar el patrón o relación entre los números.
- Se veía el uno en todos los casos.
- Tuve que hacer muchas operaciones.
- Además de sumar hay que multiplicar.
- Se puede saber el siguiente número de la sucesión si se toma el resultado anterior, se multiplica por 2 y se le suma 1.
- Todos los números resultantes eran impares.

Aunque ningún estudiante logre encontrar el patrón o la respuesta correcta, es muy importante el aprendizaje obtenido de la descomposición de los números y la actitud perseverante que debió demostrarse en el trabajo para conseguir un **patrón**. La perseverancia es una de las actitudes que se intenta promover con los programas de estudio y gracias a problemas como éste.

Una vez que los estudiantes compartan los hallazgos encontrados con los demás compañeros de clase, el docente puede mostrar otros posibles patrones en caso de que se haya presentado sólo uno. A continuación se ofrece otra estrategia de solución:

Patrón (Al descomponer todos los elementos del patrón se favorece la verbalización del mismo)			**Número obtenido utilizando el patrón**
Número anterior	**+ 1**	**Número sucesor**	**Inicia en 1**
1	+ 1	2	3
3	+ 1	4	7
7	+ 1	8	15
15	+ 1	16	31
31	+ 1	32	63
63	+ 1	64	127

En esta etapa de discusión el docente puede proponer preguntas generadoras como:

1. ¿Se podrá expresar el patrón utilizando únicamente la suma?
2. ¿Existe otro patrón para la sucesión presentada?

En caso de que solamente se presente un patrón el docente puede inducir a los estudiantes a observar estos valores y su relación con las sumas:

Patrón	
2	3 = 1 + 2
4	7 = 3 + 4
8	15 = 7 + 8
16	31 = 15 + 16
32	63 = 31 + 32
⋮	⋮

Clausura o cierre

El docente debe establecer el criterio o patrón que relaciona la sucesión de números presentados. Debe indicar el concepto matemático de patrón o modelo y retomar las ideas expuestas por la mayoría de estudiantes para hallar las respuestas al problema. En todo momento debe establecerse una relación entre el trabajo realizado por los estudiantes al resolver el problema y la definición matemática de los nuevos conceptos. El docente puede emplear una tabla como la siguiente para establecer los patrones (puede ser de cualquiera de las dos formas que se proponen) e indicar la importancia de la observación.

1	3	7	15	31	…	…
1	2 + 1 1 × 2 + 1	6 + 1 3 × 2 + 1	14 + 1 7 × 2 + 1	30 + 1 15 × 2 + 1	31 × 2 + 1 = 63	63 × 2 + 1 = 127
	2 x 1 + 1	2 x 3 + 1	2 x 7 + 1	2 x 15 + 1	2 x 31 + 1	2 x 63 + 1

El docente puede incluso solicitar una generalización del proceso efectuado donde se espera que una posible respuesta de algunos estudiantes sea:

a. si se conoce el número anterior en esta sucesión, se debe multiplicar por 2 y sumar 1 para encontrar el siguiente número.
b. si se conoce el número anterior en esta sucesión, al doble de ese número se le suma 1 para encontrar el siguiente número.
c. si se conoce el número anterior en esta sucesión, se le suma su sucesor para encontrar el siguiente número.

En este problema se potencian los siguientes procesos: *Razonar y argumentar*, *Plantear y resolver problemas*, *Conectar*, *Comunicar y representar*.

II Etapa: Movilización y aplicación de los conocimientos

El problema señalado puede catalogarse de acuerdo a su nivel de complejidad como de *conexión*, debido a que relaciona dos operaciones básicas en el proceso de solución de manera integrada.

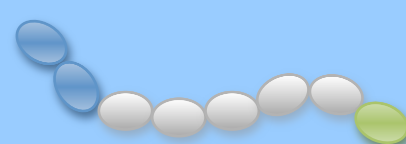
Igualmente, puede realizarse esta segunda etapa mediante ejercicios de *reproducción* y *conexión* que pretenden fortalecer las habilidades aprendidas en la resolución del problema para establecer patrones en otras series de datos.

Por ejemplo:

- Soy un número. Al iniciar el conteo en cero usted no me menciona si cuenta de 5 en 5. Tampoco me menciona si cuenta de 2 en 2. Soy mayor que 13 y menor que 19. ¿Qué número soy?

- Mariana hace un collar con piedras de diferentes formas y colores. Para cada 2 piedras azules, pone 5 piedras blancas y 1 piedra verde. Por la longitud del collar, ella calcula que necesitará 36 piedras azules. ¿Cuántas piedras blancas y verdes utilizará?

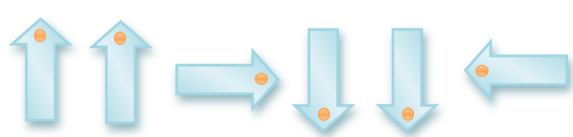
Imagen cortesía de FreeDigitalphotos.net



- Descubra el patrón y escriba los cinco números que continúan la sucesión.

1, 6, 11, 16, _____, _____, _____, _____, _____, 46

- Completar el patrón de las figuras con las siguientes 6 flechas. Debe suponer que el patrón se repite.



Suponga que el patrón se repite. Complete la siguiente tabla:

Cantidad de tarjetas de colección	1	2	3	4	5	6	7
Precio de las tarjetas	75	150	225	?	?	?	525

¿Cuánto cuestan 10 tarjetas?

Notas:

1. En este tipo de problema se debe permitir el uso de calculadora, porque el objetivo es hallar el patrón. Además, la riqueza del ejercicio se encuentra en la socialización de la estrategia para hallar la respuesta.

2. Es esencial que al proponer un problema sobre la determinación de patrones en cualquier nivel educativo el docente previamente aclare si se pretende respuesta única o si se esperan varias respuestas. Por ejemplo:

   Suponga que el patrón se repite y complete la siguiente sucesión:
   4, 6, 10, ____, _____

   Al escribir el problema de esta forma se pueden generar varias respuestas válidas, dos de ellas se exponen a continuación:

			14	**18**	
Valor inicial	4 × 2 – 2	4 × 3 – 2	4 × 4 – 2	4 × 5 – 2	**Posible patrón elaborado por los estudiantes**

			18	**32**	
Valor inicial	4 + 2	6 + 4	10 + 8	18 + 16	**Posible patrón elaborado por los estudiantes**

   Mientras que si se plantea de la siguiente manera solamente existe un patrón que satisfaga el problema, en este caso el primero:

   4, 6, 10, ___, ____, 22, 26, 30

   Además, se puede modificar de la siguiente forma

   4, 6, 10, ____, 18, 22, ____, 30.

3. Respecto al problema del collar, se pueden solicitar perlas de plástico, abalorios o material tangible para que los estudiantes puedan manipular y luego con un dibujo representar el collar.

Contextualización activa

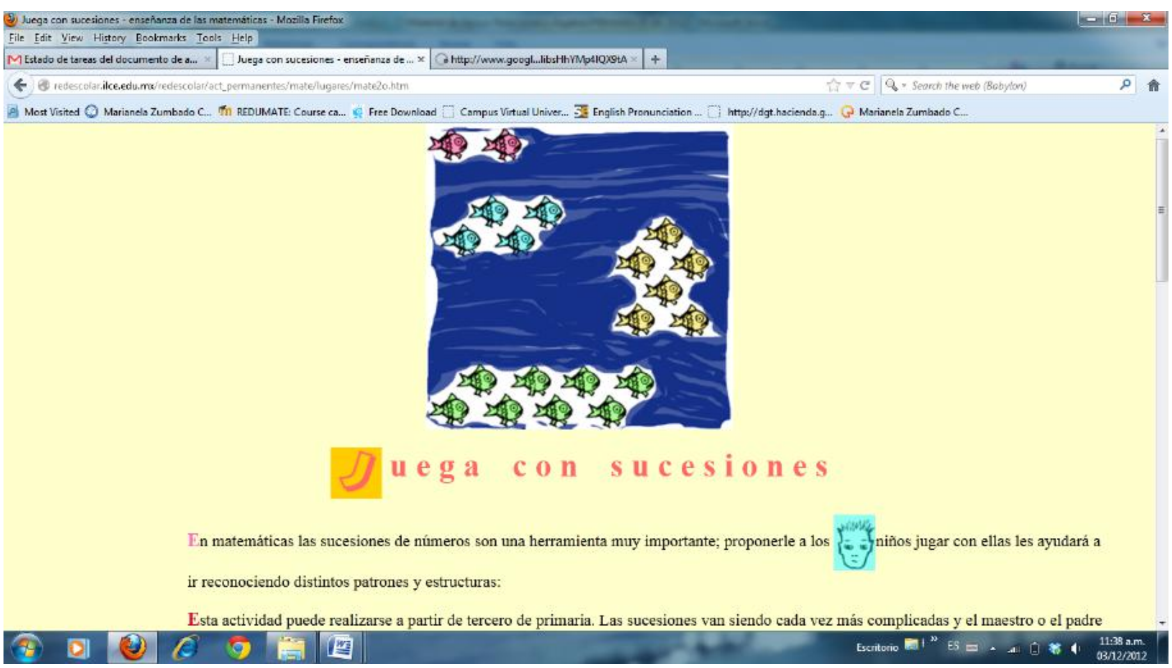
Según el MEP, favorecer problemas en contextos reales no implica dejar de lado problemas abstractos, pues en ellos se promueven habilidades como la justificación y demostración, la generalización, el uso del lenguaje matemático y el razonamiento riguroso abstracto, entre otras. Relaciones y Álgebra posee las características para desarrollar problemas abstractos que pueden convertirse en retos para la mayoría de estudiantes, por ejemplo el problema sobre la búsqueda de patrones o regularidades en una sucesión de datos fomenta el pensamiento abstracto, fortaleciendo los procesos *Razonar y argumentar*, así como el de *Comunicar* (MEP, 2012, p. 34).

Uso de tecnología

En algunos ejercicios se pretende que la calculadora o la hoja electrónica sean herramientas, por lo tanto se privilegia el análisis cognitivo y no la operatoria.

Existen algunas páginas web que ofrecen contenidos que pueden sugerirse para trabajar en los hogares o en conjunto con colegas de informática educativa. También puede aprovecharse este recurso para extraer ideas o problemas. A continuación se presenta una página que contiene múltiples problemas de reproducción de sucesiones que pueden ser adaptados a la clase, y cuyo enlace es el siguiente:

http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/lugares/mate2o.htm



Uso de la historia de las Matemáticas

Con el objetivo de humanizar las Matemáticas se puede proponer a los estudiantes el problema de los conejos estudiado por Fibonacci. En el cierre o clausura, un video o una narración sobre la solución encontrada o sobre la denominada Sucesión de Fibonacci puede ofrecer elementos enriquecedores a la clase. En el siguiente enlace pueden encontrarse algunas ideas al respecto:

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/ac_sucesiones/solin/conejos.htm

Existe un video sobre esta sucesión producido en Costa Rica por estudiantes de Primaria en una escuela de San Ramón, y que puede contener elementos motivadores para los estudiantes al ver a sus iguales haciendo trabajo de investigación. Este video está disponible en el siguiente enlace: http://www.youtube.com/watch?v=bOMcpJRnldY.

Actitudes y creencias

El docente puede aplicar el problema del collar para exponer habilidades matemáticas necesarias en el arte. Cuando el niño descubra que se requiere de un patrón y que este concepto es usado en la elaboración de diseños en las piezas de cerámica, de joyería y de otras técnicas, esto puede favorecer la *Autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas*. Conjuntamente, mediante una actividad como la elaboración manual de un collar que sigue un patrón se abre la posibilidad de fomentar el *Respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas*. Si bien no todas las personas van a relacionarse con las Matemáticas de la misma manera en sus vidas ni todos van a tener las mismas habilidades para su manejo, es fundamental que se desarrolle un respeto del lugar que ocupa en el conocimiento y la cultura de la humanidad (MEP, 2012, p.46).

Sugerencias de evaluación

Al considerar la evaluación de los aprendizajes debe tomarse en cuenta que la resolución de problemas tiene dos enfoques: uno como estrategia pedagógica y otro como estrategia de evaluación. Debe quedar claro que al utilizarse como esta última no se deben incluir ideas matemáticas con las cuales el estudiante no haya tenido contacto previamente, pero el problema debe ser una tarea matemática que exige al sujeto usar reflexivamente la información que posee. Se debe recordar que el objetivo de la evaluación es cuantificar el dominio de una habilidad ya adquirida.

A continuación se presentan dos tipos de ítems. Inicialmente, de selección única y posteriormente de resolución de problemas.

Suponga que el patrón se repite. Complete la siguiente tabla:

Cantidad de tarjetas de colección	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Precio de las tarjetas	**75**	**150**	**225**	**?**	**?**	**?**	**525**

¿Con 450 colones cuántas tarjetas obtiene?

- Mariana hace dos pulseras con piedras de diferentes formas y colores. Por cada 2 piedras con forma de cuadrado, pone 3 piedras en forma de triángulo y 1 piedra redonda. Por la longitud de cada pulsera, ella calcula que necesitará 9 piedras en forma de triángulo.
  - ¿Cuántas piedras necesita en total para confeccionar las 2 pulseras?
  - Dibuje el patrón de un collar manteniendo el mismo tipo de piedras y tome en cuenta que se necesitará tres veces la cantidad de piedras en forma de triángulo que se usaron en la elaboración de las pulseras.

El estudiantado ya ha enfrentado situaciones como la anterior, no obstante, hay una necesidad de emplear el conocimiento de manera novedosa. Una de las diferencias se encuentra en la pregunta final donde se solicita el número total de piedras y la otra al solicitar una propuesta de collar considerando que se requiere dos veces la cantidad de piedras en forma de triángulo.

Tercer año

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Relaciones: tablas y valor faltante	- Plantear y resolver problemas que involucran valores faltantes en una tabla o expresión matemática.	**Relaciones y Álgebra, Primer año** - Identificar dos expresiones matemáticas que son iguales. - Reconocer el significado de “=”. **Números, Tercer año** - Comparar números menores que 100 000 utilizando los símbolos <, > o =.

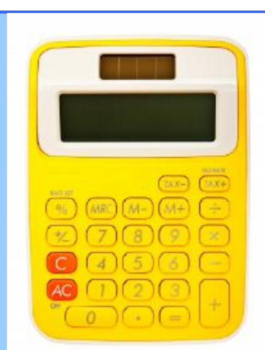
Propuesta de problema

¿Cuál número debe ser para que se cumpla la siguiente igualdad?

92 375 – 25 877 = 32 572 +

Solución del problema

En este problema los estudiantes pueden adoptar varias estrategias. Una de ellas puede ser el “tanteo”. Luego de obtener que 92 375 – 25 877 es igual a 66 498, el estudiante sustituye un número por y realiza la operación del lado derecho de manera que el resultado obtenido sea 66 498. Se espera que por medio del “ensayo y error” o por la descomposición aditiva los estudiantes encuentren el valor que cumpla con la igualdad, que en este caso es 33 926. Por ejemplo, el estudiante podría elaborar la siguiente secuencia de intentos, aunque existen otras posibilidades:



$$32\,572 + 30\,000 = 62572$$
$$32\,572 + 33\,000 = 65572$$
$$32\,572 + 33\,900 = 66472$$
$$32\,572 + 33\,920 = 66492$$
$$32\,572 + 33\,926 = 66498$$ ¡EUREKA!

Imagen cortesía de FreeDigitalphotos.net

Al sustituir el símbolo  por un valor numérico se logra una conexión con el lenguaje algebraico. Para la solución de este problema el uso de la calculadora es primordial, debido a que se debe privilegiar el proceso *Razonar y argumentar* y no el desgaste en el cálculo.

También, es conveniente considerar los posibles errores que los estudiantes pueden cometer con el objetivo de direccionar la estrategia con que el docente debe intervenir. Por ejemplo, un posible error consistiría en hacer la operación del lado izquierdo de la igualdad, pensando que el resultado es incorrecto debido a que 92 375 – 25 877 = **66 498** y no 32 572, haciendo una incorrecta interpretación del problema que en realidad busca el número que debe ser sumado a 32 572 para completar los 66 498. El proceso puede representarse de la siguiente forma:

66 498 = 32 572 + 

32 572 + 33 926 = 32 572 + ,

de donde se deduce que

33 926 = 

Se debe aprovechar este problema para establecer en el cierre algunas conexiones con el lenguaje algebraico, mencionando la noción de variable e incógnita.

Variable:

En este caso es una posición que puede adoptar más de un valor.

Ejemplo:

Las posiciones destacadas en azul y amarillo corresponden a variables. Los resultados varían al efectuar cambios en los operandos. Para este caso el valor amarillo depende de los valores que asuman las cantidades azules:

$$32\,572 + \quad = 62\,572$$
$$32\,572 + \quad = 65\,572$$
$$32\,572 + \quad = 66\,472$$
$$32\,572 + \quad = 66\,492$$
$$32\,572 + \quad = 66\,498$$

Incógnita:

Es el valor representado por  y que se necesita hallar.

Ejemplo:

$$92\,375 - 25\,877 = 32\,572 +$$ 

En los programas se indica que la calculadora ofrece posibilidades de disminuir los cálculos numéricos y concentrar los esfuerzos en los procesos de razonamiento o de aplicación más significativos para el dominio de las Matemáticas. El problema presentado es un ejemplo de cómo puede manipularse la calculadora de forma pertinente para potenciar una actividad cognitiva superior y agilizar los cálculos mediante una herramienta tecnológica.

Puede emplearse una anécdota histórica para fortalecer el aprendizaje; por ejemplo, con una reseña como la siguiente puede incluso formularse un problema:

Diofanto: el padre del álgebra

Poco se sabe de la vida de Diofanto de Alejandría, un matemático griego nacido en Alejandría entre el año 200 y 214 A. C. y considerado el padre del álgebra. Se sabe que estudió y trabajó en la Universidad de Alejandría, Egipto, y que vivió 84 años debido a un epitafio redactado en forma de problema, con datos que faltaban y debían hallarse, como una incógnita. Al resolver el problema se puede comprobar que Diofanto falleció a la edad de 84 años.

Diofanto escribió una obra conocida como Aritmética, que constaba de 13 libros; entre sus trabajos se pueden encontrar problemas interesantes, uno que puede ser resuelto por la mayoría de estudiantes de Tercero es el Problema Número 1 del Libro I, que dice:

Descomponer 100 en dos números cuya diferencia entre ellos sea 40.

A continuación se detalla una manera para resolver el problema, material que puede emplearse después que todos trabajen en la solución. Diofanto utilizó su complicada notación y obtuvo la respuesta: 30 y 70. Posteriormente resolvió el problema general: dividir un número *a* en dos números cuya diferencia es igual a *b*. La solución obtenida, utilizando notación actual, es $\frac{a-b}{2}$ y $\frac{a+b}{2}$.

Puede observarse que el proceso de razonamiento empleado fue el siguiente:

100	
50	50
40	60
30	70

Cantidad total .
No hay diferencia entre las partes.
Hay 20 unidades de diferencia entre las partes. Hay 40 unidades de diferencia entre las partes.

En términos generales corresponde a:

$$\frac{a-b}{2} \text{ y } \frac{a+b}{2}.$$

Si *a* = 100 y *b* = 40, al sustituir se obtiene que

$$\frac{100-40}{2} = 30 \quad y \quad \frac{100+40}{2} = 70$$

Diofanto procuró resolver casos generales para los problemas planteados, además de resolver situaciones particulares como el ejemplo. Por primera vez en la historia de las matemáticas griegas se trataron ecuaciones algebraicas con una profundidad rigurosa.

Estadística y Probabilidad

Imagen cortesía de renjith krishnan y jscreationzs en FreeDigitalPhotos.net

Primer año. Probabilidad

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Probabilidad Situaciones aleatorias y seguras	Identificar diferencias entre situaciones cuyo resultado sea aleatorio de aquellas cuyo resultado es conocido o seguro.	Ninguna

Propuesta de problema

Considere las siguientes situaciones:

a) Escoja dos estudiantes del grupo y póngalos a jugar, mientras el grupo canta la siguiente canción:

De tín marín de do pingüé, cúcara, mácara, títere fue.

Yo no fui; fue Teté. Pégale, pégale que ella fue.

Repita la experiencia cinco veces iniciando siempre con el mismo estudiante (se debe estar atento para que no se descompongan palabras durante el juego).

Pregúnteles: ¿Qué conclusiones se pueden obtener de la experiencia? ¿Cuál de los dos estudiantes gana el juego?

b) Seguidamente se introducen dos bolas de colores distintos (digamos rojo y azul) en una bolsa de papel, otros dos estudiantes juegan a extraer una bola de la bolsa (sin ver dentro de la bolsa). Inicia el juego cualquiera de los dos estudiantes. Gana el juego quien obtenga primero la bola azul. Al igual que antes, repita la experiencia al menos cinco veces (se debe continuar repitiendo el juego hasta que los dos estudiantes hayan ganado al menos una vez), procurando revolver las bolas antes de cada extracción. Nuevamente, pregúnteles por las conclusiones: ¿Cuál de los dos estudiantes gana el juego?

c) Si se decidiera entregar un premio a un estudiante del subgrupo, ¿cuál de las dos estrategias será conveniente utilizar? ¿Por qué?

Solución del problema

a) Con la primera situación se procura identificar que siempre resulta el mismo ganador, por lo que es posible conocer quién va a ganar antes de realizar el juego.
b) Mientras tanto, con la segunda actividad no se sabe cuál de los dos estudiantes va a sacar primero la bola azul, por lo que para saber quién ganará es indispensable llevar a cabo el juego. En este caso se dice que el resultado es incierto y depende del azar.
c) Por último, la estrategia que debe escogerse para asignar el premio es la segunda debido a que todos tienen oportunidad de salir seleccionados y el resultado depende del azar, mientras que con el juego "*de tin marín …*" de antemano se puede establecer quién sería el ganador.

Si en la primera situación el estudiantado no consigue identificar que en el juego siempre ha ganado el mismo estudiante, entonces el educador puede hacer preguntas como las siguientes:

1) Si se repite una vez más el juego, ¿se podría decir quién va a ganar?
2) ¿Por qué será que siempre gana el mismo estudiante?
3) Si se iniciara el juego con el otro estudiante, ¿quién creen que ganaría?
4) El profesor selecciona otros dos estudiantes, un niño y una niña, y antes de jugar pregunta: si inicia jugando la niña ¿quién creen que va a ganar el juego?
5) Si en vez de dos estudiantes ahora cuatro estudiantes desean jugar, ¿será posible definir quién va a ganar? (si la respuesta no es adecuada, repita el juego con cuatro estudiantes y repita la pregunta)

Si en la segunda situación las respuestas no son las esperadas, el profesor puede efectuar las siguientes preguntas:

1) Si se repite una vez más el juego, ¿se podría decir quién va a ganar?
2) ¿Por qué creen que ahora no siempre gana el mismo estudiante?
3) Si se escogen otros dos estudiantes, un niño y una niña, y si el niño extrae la pelota de primero, ¿será posible saber quién va a ser el ganador?
4) Si ahora se introducen cuatro bolas y cuatro estudiantes deben extraer una bola cada uno: ¿podría determinarse cuál estudiante va a ganar?

Finalmente, en el cierre se deben formalizar las diferencias entre los resultados generados por una y otra estrategia. Debe señalarse, por ejemplo, que en el primer caso es posible conocer al estudiante que va a ganar el juego sin necesidad de llevarlo a cabo, mientras que en el segundo caso no es posible discernir quién va a ganar, por lo que para conocer el resultado se debe llevar a cabo el juego. A aquellos casos en los que se puede conocer el resultado de un experimento o juego sin necesidad de llevarlo a cabo se les llama *situación segura*, mientras que a las situaciones en las que el resultado de un experimento o juego no se puede conocer sin antes llevarlo a cabo se las llama *situación aleatoria*.

Para ratificar la adquisición de las habilidades es necesario ofrecer más problemas relacionados con estos términos.

Al realizar esta actividad se podrían promover las siguientes actitudes:

- *Confianza en la utilidad de las Matemáticas:* dado que se pueden visualizar cómo se aplican conceptos matemáticos a situaciones de la vida cotidiana.
- *Participación activa y colaborativa*: esta actitud se fortalece mientras se identifican las diferencias entre las dos situaciones y se determina cuál de las dos estrategias es más factible utilizar.
- *Respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas*: pues se aprenden matemáticas mediante juegos.

Primer año. Estadística

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Estadística • Recolección de información: Observación e interrogación • Presentación de información: frecuencia	• Identificar datos dentro del contexto estudiantil (aula, escuela, hogar, comunidad, etc.). • Recolectar datos mediante la observación y la interrogación. • Emplear la frecuencia de datos repetidos para agruparlos.	Ninguna

Propuesta de problema

Para introducir el problema se puede leer al grupo la siguiente reflexión sobre las ventajas de tener una mascota en casa. Con esta reflexión se pretende motivar al estudiantado y llamar su atención:

“Las mascotas son animales de compañía que están considerados como una medicina preventiva. El cuidado y afecto hacia ellos promueven la salud y prolongan la vida. Numerosos estudios han demostrado, por ejemplo, que cuando los acariciamos la tensión arterial se reduce, además de producir efectos relajantes en nuestro organismo. Y es que, sin duda, las mascotas ayudan a disminuir el estrés y son una fuente inagotable de amor y compañía.

Éstos son algunos de los beneficios que aporta la convivencia con una mascota: disminuyen el sentimiento de soledad, aumentan la autoestima, mejoran el humor, desarrollan valores como el respeto por los animales y la vida, la amistad y el amor, ayudan a estar en una buena condición física, apoyan a las personas con alguna discapacidad física, entre otros".

Seguido de la lectura, se organiza la clase en subgrupos de cuatro estudiantes y cada subgrupo realiza una de las siguientes actividades.

1. Determinar la mascota preferida de cada uno de los estudiantes del aula.
2. Determinar el tipo de mascota (perro, gato, conejo, etc) que tiene en casa cada uno de los estudiantes del aula.
3. Determinar el color de la(s) mascota(s) que tienen en casa.
4. Determinar el tiempo de tener la(s) mascota(s) en casa.

Solución del problema

Es elemental que el niño se inicie en los procesos de identificar y recolectar datos. Este tipo de actividades promueve dicha habilidad. El subgrupo encargado de realizar la actividad debe establecer una estrategia para recolectar la información, el docente puede suministrar una lista de clase donde se incluyen los nombres de los estudiantes, para favorecer el proceso. Dentro de las posibles estrategias que podrían implementar se encuentra la interrogación. Por ejemplo, el subgrupo que debe responder el inciso a) podría preguntar a todos los miembros de la clase por la mascota preferida y anotarla al lado del nombre en dicha lista. Con esto se introduce en la elaboración de bases de datos muy simples. Se espera que dichos datos queden ordenados de modo similar a la siguiente tabla:

Nombre del estudiante	Mascota preferida
Abarca Rojas Mafalda	Perro
Alvarado Pérez Manolito	Conejo
Barrantes Mena Libertad	Gato
⋮	⋮
⋮	⋮

Con la información recabada se deben buscar estrategias para resumirla y presentarla de una manera que permita a los estudiantes responder las preguntas de cada inciso. El docente debe darles la libertad de actuar y motivarlos para que busquen alternativas para enfrentar esta tarea. Una forma es listando los nombres de las mascotas y escribiendo al lado el número de estudiantes que tiene esa preferencia, primeramente haciendo un conteo manual y luego escribiendo el resultado.

Mascota preferida	Número de estudiantes	Número de Estudiantes
Perro	///////	7
Gato	////	4
Conejo	//	2
⋮		⋮
⋮		⋮

Finalmente, se pide que expongan los resultados obtenidos ante el grupo, al igual que deberían hacer los demás subgrupos con los temas que abordó cada uno.

En el cierre de la clase hay que enfocarse en la necesidad que tienen las personas de buscar datos y la manera en que pueden recolectar esos datos. En este caso los estudiantes recurrieron a la interrogación como una forma de recolección de información, pregúnteles: ¿qué otras formas pudieron utilizarse? Así, debe hacer hincapié en la necesidad de recolectar la información con un método sencillo, que permita realizar una clasificación u ordenamiento en función de las interrogantes que quieren contestar. El concepto de frecuencia o número de estudiantes que prefieren una determinada mascota debe ser analizado; es decir, la frecuencia va a ser el número de estudiantes de cada una de las agrupaciones.

Los problemas que se deben estructurar para este año deben enfocarse hacia escenarios concretos que permitan al estudiante ir involucrándose paulatinamente hacia el análisis de la información. El problema propuesto es un ejemplo de cómo se puede poner en juego la información del entorno para introducir conceptos estadísticos. Esto acciona el eje *Contextualización activa.*

Segundo año. Probabilidad

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Probabilidad Evento más probable y menos probable	Identificar resultados o eventos más probables o menos probables en situaciones aleatorias pertenecientes a diferentes contextos.	**Estadística y Probabilidad, Primer año** Identificar diferencias entre situaciones cuyo resultado sea incierto de aquellas cuyo resultado es conocido o seguro.

Propuesta de problema

Mediante el trabajo en subgrupos se resuelve el siguiente problema:

¿Cuál evento es más probable para cada una de las parejas que se incluyen en el cuadro? Justifique las razones por las que escogió cada una de ellas (es conveniente ampliar la lista con más ejemplos vinculados con el contexto escolar o de la comunidad donde se ubica la institución).

Caso	Evento A	Evento B	¿Cuál es más probable?
1	Llueve un día de la estación seca.	Llueve un día de la estación lluviosa.	
2	El sexo del próximo niño que va a nacer en el Hospital de la Mujer es un hombre.	El próximo nacimiento que se produzca en el Hospital de la mujer será de trillizos.	
3	Obtener una enfermedad respiratoria por medio del fumado.	Obtener una enfermedad respiratoria por medio de un resfrío común.	
4	Tener un accidente de tránsito conduciendo a alta velocidad.	Tener un accidente de tránsito conduciendo a una baja velocidad.	

Solución del problema

Se debe analizar cada situación de acuerdo con sus posibilidades de ocurrencia, para ello se pueden generar algunas preguntas que permitan identificar esas posibilidades. En este problema adquieren relevancia las intuiciones que tenga el estudiantado.

Por ejemplo, en el primer caso se debería analizar que generalmente en época de verano casi no llueve, mientras que es común que en estación lluviosa haya muchos días lluviosos, por lo que es más probable que llueva durante el invierno.

Para el segundo, debido a que se está hablando del momento particular en el cual se desarrolla la lección, se espera que el estudiantado pueda argumentar que los nacimientos de trillizos no son tan comunes como los nacimientos masculinos. Debido a ello, el evento de que el próximo nacimiento sea un niño es mucho más probable que el evento que sean trillizos los que nacen, ya sea en el Hospital de la Mujer o en cualquier otro centro hospitalario.

En el tercer caso se debe analizar que el fumado produce enfermedades graves en el sistema respiratorio, pues cuando se fuma el humo del cigarrillo atraviesa los pulmones, mientras que un resfriado común no produce por lo general enfermedades en el sistema respiratorio. Por eso resulta más probable obtener una enfermedad respiratoria por medio del fumado que por medio de un resfrío común.

Por último, en el cuarto caso el estudiantado debe analizar que cuando se conduce a una baja velocidad hay más tiempo para reaccionar ante un imprevisto en la carretera y por lo tanto podría evitarse un posible accidente de tránsito, mientras que el tiempo de reacción disminuye conforme aumenta la velocidad del automóvil. Debido a esto es más probable tener un accidente de tránsito cuando se conduce a alta velocidad que cuando se conduce a una velocidad baja.

En el cierre, el profesor puede hacer referencia de que entre más conocimiento se tenga del fenómeno aleatorio que se está estudiando, hay más posibilidades de comprender en qué casos es más probable un evento que otro, debido a que cuando se indica que un evento es más probable que otro es porque se tiene seguridad que el primero ocurre con mayor frecuencia que el segundo. Se pueden aprovechar las situaciones expuestas en los dos últimos casos para concientizar al estudiantado de los riesgos del fumado y de la responsabilidad de conducir a una velocidad moderada para evitar accidentes de tránsito.

Al resolver el problema anterior se puede promover la *Confianza en la utilidad de las Matemáticas*, esto por cuanto se valora la utilización de conceptos matemáticos en situaciones de la vida cotidiana.

Segundo año. Estadística

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Estadística La variabilidad de los datos	Identificar la variabilidad de los datos como un componente básico dentro de los análisis de la información.	**Estadística y Probabilidad, Primer año** Recolectar datos mediante la observación y la interrogación. Emplear la frecuencia de los datos repetidos para agruparlos.

Propuesta de problema

El siguiente problema puede ser resuelto en subgrupos de tres estudiantes. Cada subgrupo realiza una de las siguientes actividades:

1. ¿Cuál es el color de enagua o pantalón de cada uno de los miembros del grupo y cuál es su fruta preferida?
2. ¿Cuál es el color de camisa o blusa de cada uno de los miembros del grupo y cuál es su programa de televisión favorito?
3. ¿Cuál es el número de abuelitos que viven en la casa de cada uno de los miembros del grupo y cuál es el número de hermanos de cada uno de ellos?
4. ¿Cuál es la edad de cada uno de los miembros de la clase y cuál es su color favorito?
5. ¿Cuál es el color de zapatos de cada uno de los miembros de la clase y cuál es su comida preferida?
6. ¿Cuál es el color de las medias de cada uno de los miembros del grupo y cuál es la estatura en cm de cada uno de ellos?
7. ¿Cuál es el número de primos que viven en la casa de los miembros de la clase y cuál es el peso en kg de cada uno de los estudiantes del aula?

Solución del problema

Cada subgrupo debe idear una estrategia para recolectar los datos que permiten responder cada una de las interrogantes. Para agilizar el proceso de recolección se puede facilitar a cada subgrupo una lista de clase con dos columnas adicionales para que cada estudiante aporte la información personal relacionada con las respuestas. La lista de clase que utilizaría el grupo al que le corresponde la primera actividad puede ser similar a la siguiente:

Nombre del estudiante	Color de la enagua o pantalón	Fruta preferida
Carlos Mora		
Ana Durán		
Joselyn Rojas		
Marcos Ureña		
Eddy Calvo		
María Salas		

Al recolectar la información es muy posible que el color de la enagua o pantalón sea el mismo para cada uno de los estudiantes, ya que por lo general en las escuelas de nuestro país el color de la enagua o pantalón es azul. Respecto a la fruta favorita es muy posible que los estudiantes tengan diferentes preferencias, tantas como frutas diferentes se puedan conseguir.

Debido a lo anterior una posible lista de clase con las respuestas a la primera actividad es la siguiente:

Nombre del estudiante	Color de la enagua o pantalón	Fruta preferida
Carlos Mora	Azul	Mango
Ana Durán	Azul	Papaya
Joselyn Rojas	Azul	Sandía
Marcos Ureña	Azul	Banano
Eddy Calvo	Azul	Manzana
María Salas	Azul	Naranja
Juan Cordero	Azul	Uva
Martha Núñez	Azul	Papaya
Alberto Corrales	Azul	Mango
Marcela Murillo	Azul	Papaya

Se espera que en una plenaria cada subgrupo comparta con los demás miembros de la clase los hallazgos obtenidos. Por ejemplo, el subgrupo al que le correspondió la primera actividad podría indicar que debido a que todos los miembros del grupo tienen enagua o pantalón de color azul es muy sencillo responder la pregunta sobre cuál es el color de enagua o pantalón de los miembros de la clase; sin embargo la pregunta sobre la fruta preferida es más complicada de responder. En este momento es valiosa la intervención docente, se podría preguntar lo siguiente: ¿cuál es la razón que hace que sea más difícil de determinar la fruta preferida? Se espera que los miembros del subgrupo contesten que a diferencia del color de la enagua o pantalón que siempre es el mismo, los tipos de frutas que se pueden presentar son muchos, pues hay gran variedad.

Algo similar ocurre con todas las actividades propuestas, ya que la primera interrogante de cada actividad no presenta variabilidad, pues las respuestas son las mismas o muy similares entre sí. Esto provoca que sean relativamente sencillas de responder, como por ejemplo el color de la camisa o blusa que llevan a la escuela, el número de abuelitos que viven en la casa, la edad de cada estudiante del grupo o el color de zapatos que llevan a la escuela. Mientras que la segunda interrogante de cada actividad es más compleja de analizar debido a la variabilidad de las respuestas que se presentan, como por ejemplo el programa de televisión favorito, el número de hermanos o el color favorito.

En el cierre se debe mencionar la relevancia de la variabilidad de los datos ya que afecta el análisis de la información. El análisis de datos es más complejo en aquellos casos en que se presenta más variabilidad. Cuando los datos no presentan variabilidad no es necesario realizar análisis estadísticos.

El estudiantado debe saber que el principio de variabilidad está presente en todos los ámbitos de la vida; cada criatura o cada objeto inanimado posee características propias que lo distinguen de sus semejantes. Por ejemplo, si se analiza a un grupo de estudiantes se puede observar que entre ellos hay gran variabilidad en características como:

a) Color de la piel, ojos o cabello
b) Estatura o Peso
c) Fecha de su cumpleaños
d) Cantidad de hermanos
e) Domicilio
f) Ocupación del padre, madre o encargado
g) Preferencia alimenticia
h) Materia escolar preferida

De esta manera, si se quiere investigar sobre cualquiera de éstas u otras características, los datos que se obtengan van a tener variabilidad, y se requiere de diversas estrategias para poder resumir e interpretar la información de estos datos. Precisamente la Estadística es la disciplina que ofrece diversas estrategias para el análisis de los datos y que va desde la forma en que se debe recolectar la información, su ordenamiento y sistematización, su presentación o resumen en cuadros, gráficos o medidas, pero ante todo en su análisis, de modo que dichos datos proporcionen una información que sea de interés para la situación que se está analizando.

La historia de la Estadística se remonta a épocas remotas; seguidamente se presenta una breve referencia que se puede aprovechar para introducir el tema. Con este relato histórico se pretende evidenciar que desde hace más de cinco mil años se recolectaba información y se realizaban análisis de datos.

> Desde los comienzos de la civilización han existido formas sencillas de estadísticas, pues ya se utilizaban representaciones gráficas y otros símbolos en pieles, rocas, palos de madera y paredes de cuevas para contar el número de personas, animales y ciertas cosas.
>
> Hacia el año 3000 A.C. los babilonios usaban ya pequeñas tablillas de arcilla para recopilar datos en tablas sobre la producción agrícola y de los géneros vendidos o cambiados mediante trueque. Los egipcios analizaban los datos de la población y la renta del país mucho antes de construir las pirámides en el siglo XXXI A.C. Los libros bíblicos de Números y Crónicas incluyen, en algunas partes, trabajos de estadística. El primero contiene dos censos de la población de Israel y el segundo describe el bienestar material de las diversas tribus judías. En China existían registros numéricos con anterioridad al año 2000 A.C. Los griegos clásicos realizaban censos cuya información se utilizaba hacia el año 594 A.C. para cobrar impuestos.
>
> El imperio romano fue el primer gobierno que recopiló una gran cantidad de datos sobre la población, superficie y renta de todos los territorios bajo su control. Durante la Edad Media sólo se realizaron algunos censos exhaustivos en Europa. Los reyes carolingios Pipino el Breve y Carlomagno ordenaron hacer estudios minuciosos de las propiedades de la Iglesia en los años 758 y 762, respectivamente.

Tomado de la siguiente dirección web: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/competencias/1746/articles-113746_archivo.pdf

Tercer año. Probabilidad

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Probabilidad Resultados simples de un experimento	Identificar todos los posibles resultados al realizar experimentos simples. Representar los posibles resultados de un experimento o situación aleatoria simple por enumeración o mediante diagramas.	**Estadística y Probabilidad, Primer año** Identificar diferencias entre situaciones cuyo resultado sea incierto de aquellas cuyo resultado es conocido o seguro.

Propuesta de problema

Karol y Víctor juegan Piedra-Papel-Tijera. Determine todos los resultados posibles de este juego y busque una forma de representar dichos resultados.

Solución del problema

Debido a que *Piedra-Papel-Tijera* es un juego tradicional que puede ser considerado popular entre el estudiantado, es muy posible que muchos estudiantes conozcan sus reglas, por ejemplo que piedra le gana a la tijera, la tijera vence al papel y el papel le gana a la piedra. Debido a lo anterior, se podría elaborar una tabla similar a la siguiente en la cual se representan todos los posibles resultados del juego.

	Víctor juega	Karol juega	Resultado
1	Piedra	Piedra	Empate
2	Piedra	Papel	Gana Karol
3	Piedra	Tijera	Gana Víctor
4	Papel	Piedra	Gana Víctor
5	Papel	Papel	Empate
6	Papel	Tijera	Gana Karol
7	Tijera	Piedra	Gana Karol
8	Tijera	Papel	Gana Víctor
9	Tijera	Tijera	Empate

En total hay nueve resultados diferentes, que constituyen todos los posibles resultados del experimento; en el mismo orden de la tabla son: (Piedra, Piedra), (Piedra, Papel), (Piedra, Tijera), (Papel, Piedra), (Papel, Papel), (Papel, Tijera), (Tijera, Piedra), (Tijera, Papel) y (Tijera, Tijera).

Para que el estudiantado se entrene en la representación de los resultados de un experimento es necesario que se propongan más problemas similares al anterior.

El problema anterior es un ejemplo de cómo pueden aprovecharse situaciones relacionadas con el contexto en las que se pueden tratar conceptos matemáticos. En este caso se recurrió a un juego tradicional muy popular en estudiantes de este nivel que además de introducir la habilidad de determinar los resultados posibles y su representación, puede aplicarse para incorporar el concepto de situación aleatoria.

Tercer año. Estadística

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Estadística El dato: uso	Interpretar información que ha sido resumida en textos, dibujos, diagramas, cuadros y gráficos.	Ninguna

Propuesta de problema

Para favorecer la lectura de un gráfico en relación con un contexto particular, se puede plantear la siguiente situación a cada estudiante:

La importancia de dormir bien

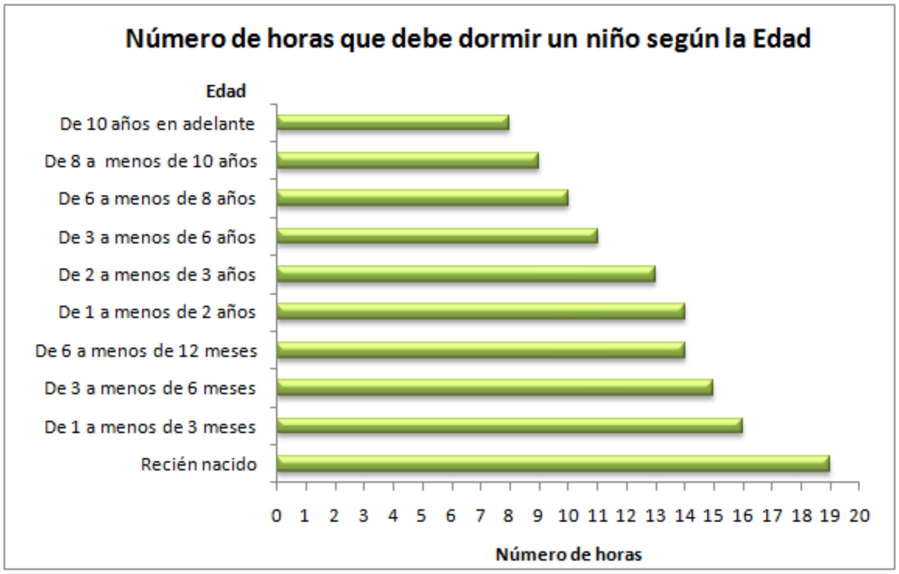
La importancia del sueño no termina cuando el bebé crece y deja la cuna; es vital también para los niños en edad escolar. Una buena noche de descanso los prepara para el día: los ayuda a lidiar con el estrés social y el ajetreo de la escuela, y también a aprender.

Los niños siempre se han rebelado contra los horarios rígidos para dormir, y más aún hoy con tantas distracciones que los mantienen despiertos y fuera de la cama. La televisión, Internet, los teléfonos y los videojuegos compiten por capturar su atención a la hora de acostarse.

Y aunque creas que tus hijos son los únicos que están corriendo por la casa a las 10 de la noche, lo cierto es que a muchos chicos les cuesta tener un buen descanso nocturno. Algunos de los problemas más comunes que los afectan son: dificultad para conciliar el sueño o para permanecer dormidos, despertarse muy temprano o con sensación de fatiga, y cómo no… las pesadillas.

Tomado de la página de Internet: http://www.materna.com.ar

De acuerdo con diversos especialistas, el siguiente gráfico representa el número de horas que debe dormir un niño de acuerdo con su edad:



Fuente: Elaboración propia

a. De acuerdo con la lectura, ¿qué implicaciones puede tener no dormir una cantidad adecuada de horas?

De acuerdo con la información del gráfico:

b. ¿Cuántas horas debe dormir un niño que se encuentra en pre-escolar?
c. ¿Cuántas horas debe dormir un niño cuando está por ingresar a la escuela?
d. ¿A qué edad se debe dormir 19 horas?
e. ¿A qué edad se debe dormir 8 horas?

Solución del problema

Dentro del aprendizaje que deben adquirir los estudiantes se encuentra la lectura eficiente de la información de cuadros, gráficos y diagramas que son publicados en diferentes medios. Los estudiantes deben estar en capacidad de leer los datos y su trasfondo.

a) Según la lectura, algunas de las implicaciones que puede tener no dormir una cantidad adecuada de horas son: dificultad para conciliar el sueño o para permanecer dormidos, despertarse muy temprano o con sensación de fatiga y las pesadillas.
b) Se debe analizar que un niño de preescolar normalmente tiene una edad entre tres y seis años, por lo que según los datos del gráfico debería dormir 11 horas diarias.
c) A su ingreso a la escuela, un niño es mayor de seis años y menor de ocho años, por lo que según el estudio debería dormir 10 horas diarias.
d) Para responder esta pregunta debe identificarse la barra que representa 19 horas y observar a qué grupo de edad pertenece, la cual corresponde a la edad de un recién nacido.

e) Al igual que la pregunta anterior se debe identificar la barra que representa 8 horas y observar a qué grupo de edad pertenece. En este caso los niños de 10 años en adelante deben dormir 8 horas.

En el cierre el docente puede compartir con el estudiantado la importancia de interpretar la información presente en un cuadro o gráfico, pues en los medios de comunicación o revistas es común encontrar este tipo de formas de representar la información. La interpretación de la información es parte de la cultura estadística que se busca promover con el área de Estadística de los nuevos programas de Matemáticas.

Con este problema se puede promover la actitud *Confianza en la utilidad de las Matemáticas,* al valorar el estudiante la pertinencia de interpretar información presentada en cuadros y gráficos, principalmente cuando son extraídos de la prensa.

Anexos

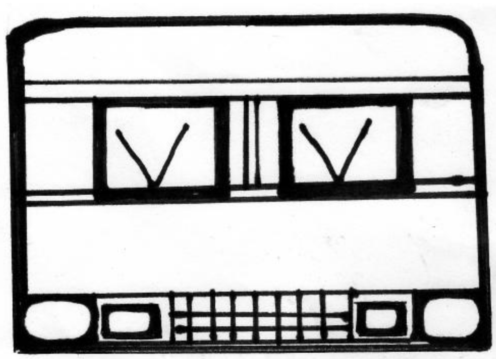
Anexo 1

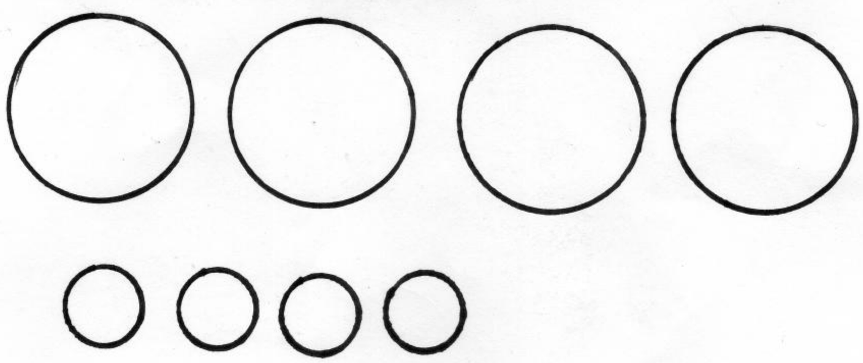
Materiales para trabajar el problema de Números, Primer año

CARRITOS Y PASAJEROS

CARRITO

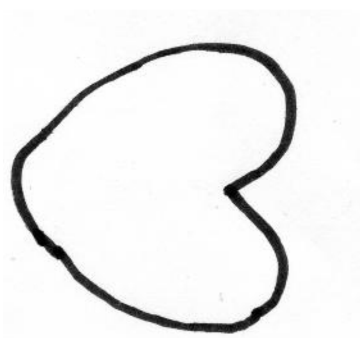
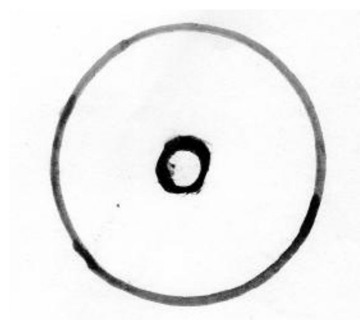
Para elaborar los carritos se pegan las cajitas donde vienen los fósforos (la cantidad depende del tamaño que necesite) y pintarlo y decorarlo con los moldes.





MUÑECOS

Pegar el molde de las patitas (en fom o cartulina negra) a la bola de estereofón, pintar la carita y decorarlas con lana para el pelo de la mujer o con un sombrero para el hombre.

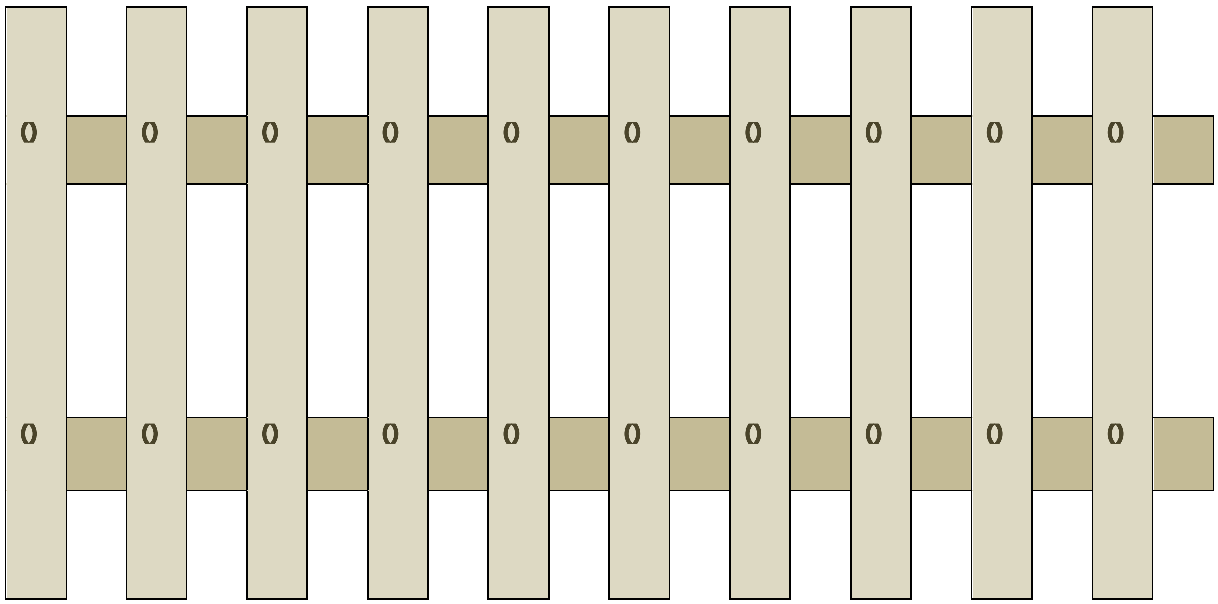
Moldes	
Patitas	Sombrero
	

Anexo 2

Material para trabajar el problema de Geometría, Primer año

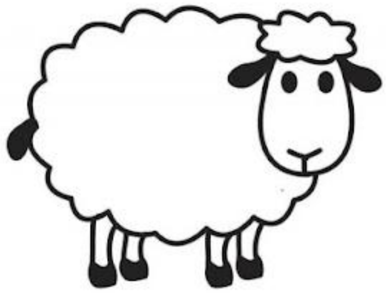
LA GRANJA

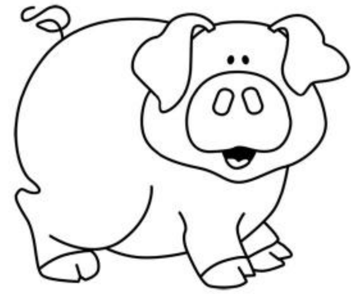
Reproducir en cartulina la cerca de la granja.

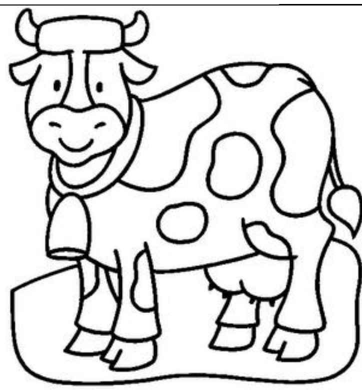


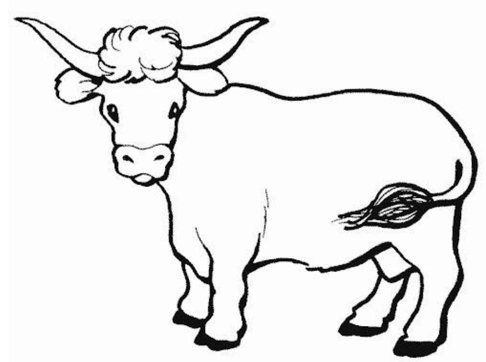
ANIMALES DE LA GRANJA

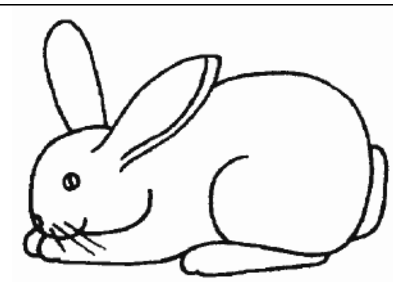
Reproducir la copia en cartulina y doblar.



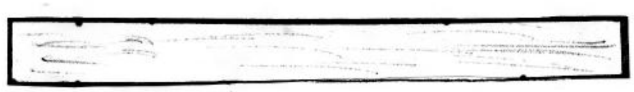








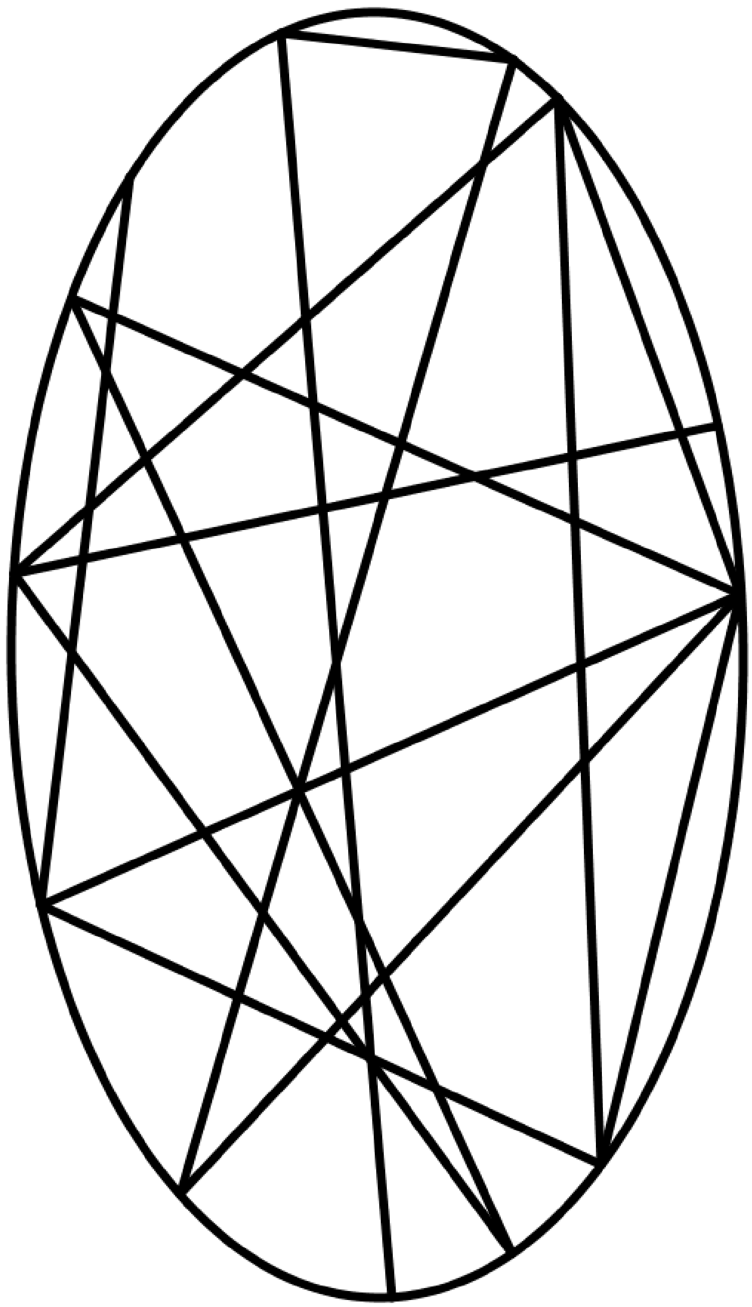
Recortar doblar y pegar en los animalitos como lo indica el dibujo



Anexo 3

Material para trabajar el problema de Geometría, Segundo año

¿Cuántas piezas de color rojo, azul, verde y amarillo deberá fabricar Juan?



Anexo 4

Material para trabajar actividades que requieren el uso de monedas y billetes

MONEDAS DE COSTA RICA

BILLETES DE COSTA RICA

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0f/Nueva_Famlia_de_Billetes_de_Costa_Rica.jpg

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0f/Nueva_Famlia_de_Billetes_de_Costa_Rica.jpg

http://www.colorear-pintar-dibujos.com/2012/03/animales-para-colorear-y-pintar-ovejas.html

http://www.imagui.com/a/cerdos-para-colorear-e-imprimir-TKdAeyE98

http://www.colorear-pintar-dibujos.com/2012/02/imprimir-y-colorear-dibujos-de-animales.html

http://laminasparacolorear.blogspot.com/2012/05/animales-de-granja-para-colorear.html

http://dibujos-de-los-usuarios.dibujos.net/cabra-5.html

http://www.cuentosparacolorear.com/colorear/animales/dibujos-para-colorear-conejos.html

http://www.imagui.com/a/corrida-de-toros-para-colorear-c6ep7B9pz

Bibliografía

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula. (2006). *Cálculo mental con números racionales: Apuntes para la enseñanza*. Argentina: Plan plurianual para el mejoramiento de la enseñanza 2004-2007. Recuperado de

http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pdf/primaria/calculo_racional_web.pdf

Barba, C. *Actividades de conteo en Nivel inicial*. Uruguay Educa. Recuperado de http://phobos.xtec.es/sgfprp/resum.php?codi=908

Katz, V. (2010). *A History of Mathematics.* An introduction. Tercera Edición. Addison-Wesley.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). Programas de estudio de Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado. San José, Costa Rica: autor.

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las Matemáticas*. EUNED, San José, CR.

Smorodinski, Y. (1983) La temperatura. Moscú: Mir.

The National Council of Teachers of Mathematics (2006) Historical topics for the Mathematics classroom. Reston: NCTM, Inc.

Vázquez, A. M. (2006). Grecia, un universo de agua. Disponible en http://www.uned.es/geo-1-historia-antigua-universal/PDF/09_GRECIA_AGUA%20Y%20CULTURA.pdf

Créditos

Este documento de apoyo a la implementación de los nuevos programas de Matemáticas fue elaborado por el proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado financieramente por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación, y es ejecutado administrativamente por la Fundación Omar Dengo.

Autores
Ángel Ruiz
Edison De Faria Campos
Edwin Chaves Esquivel
Hugo Barrantes Campos
Jonathan Espinoza González
Luis Armando Hernández Solís
Marianela Zumbado Castro
Miguel González Ortega
Ricardo Poveda Vásquez

Revisores
Angel Ruiz
Christiane Valdy
Damaris Oviedo Arce
Grace Vargas
Javier Barquero
Susanne Blais

Editor gráfico
Miguel González Ortega

Edición filológica
Julián Ruiz

Director general del proyecto
Ángel Ruiz

Para referenciar este documento:
Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2013). *Apoyo curricular en Matemáticas. Primer Ciclo de la Educación General Básica.* San José, Costa Rica: autor.