



MATEMÁTICAS II

CÁLCULO INTEGRAL

RON LARSON • BRUCE EDWARDS

MATEMÁTICAS II

CÁLCULO INTEGRAL

Ron Larson

The Pennsylvania State University
The Behrend College

Bruce Edwards

University of Florida

Joel Ibarra Escutia

Instituto Tecnológico de Toluca

Traducción

Javier León Cárdenas

Revisión técnica

Ana Elizabeth García Hernández
Instituto Politécnico Nacional

Instituto Tecnológico de Durango
Luis Gustavo Reyes Martínez

Instituto Tecnológico de San Juan del Río
Saulo Servin Guzmán

Instituto Tecnológico de Hermosillo
Hilario Mayboca Araujo
Carlos Alberto Pereyda Pierre

Instituto Tecnológico José Mario Molina Pasquel
y Henríquez, Campus Chapala
María de la Cruz Gómez Torres

Instituto Tecnológico de León
Rubén Trujillo Corona

Instituto Tecnológico Superior de Cajeme
Socorro del Rivero Jiménez
Leonsio Ruiz Moreno

Instituto Tecnológico de Querétaro
Francisco Javier Avilés Urbiola
María Eugenia Quintanar Pérez

Tecnológico de Estudios Superiores de Chimalhuacán
Juan Bucio Esquivel

Tecnológico de Estudios Superiores de Jilotepec
José Guadalupe González Escamilla

Tecnológico de Estudios Superiores de Jocotitlán
Ramón Berber Palafox
Christopher Gutiérrez Luna
Adriana Sotelo Hurtado



Matemáticas II. Cálculo integral.

Primera edición

Ron Larson y Bruce Edwards

Director Higher Education

Latinoamérica:

Ronzo Casapia Valencia

Gerente editorial Latinoamérica:

Jesús Mares Chacón

Editora de desarrollo:

Abril Vega Orozco

Coordinador de manufactura:

Rafael Pérez González

Diseño de portada:

Karla Paola Benítez García

Imagen de portada:

© Svetlana Sokolova07 Shutterstock

Composición tipográfica:

Angelica Toledo Tirado

© D.R. 2018 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc. Carretera México-Toluca núm. 5420, oficina 2301. Col. El Yaque, Del. Cuajimalpa. C.P. 05320.

Ciudad de México.

Cengage Learning® es una marca registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor, podrá ser reproducida, transmitida, almacenada o utilizada en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabación en audio, distribución en internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial.

Esta es una adaptación de los libros:

Larson, Ron y Bruce Edwards. *Cálculo*, Tomo I. Décima edición. ©2016. ISBN: 978-607-522-015-4

Traducido del libro *Calculus*, 10th Edition.

Ron Larson and Bruce Edwards. Publicado en inglés por Brooks/Cole, una compañía

de Cengage Learning ©2014

ISBN: 978-1-285-05709-5

Larson, Ron y Bruce Edwards

Matemáticas II. Cálculo integral. ©2017

ISBN: 978-607-522-900-3

Datos para catalogación bibliográfica:

Larson, Ron y Bruce Edwards.

Matemáticas II. Cálculo integral. Primera edición.

ISBN: 978-607-526-654-1

Visite nuestro sitio web en:

<http://latinoamerica.cengage.com>

UNIDAD 1	▷ La integral definida y el teorema fundamental del cálculo	1
1.1	Área	2
1.2	Sumas de Riemann y la integral definida	14
1.3	La antiderivada o integral indefinida	25
1.4	Teorema fundamental del cálculo	35
	Proyecto de trabajo: Demostración del teorema fundamental	49
1.5	Integración numérica	50
	Ejercicios de repaso	57
	Solución de problemas	60
UNIDAD 2	▷ Métodos de integración	63
2.1	Reglas básicas de integración indefinida	64
2.2	Integración por sustitución (cambio de variable)	71
2.3	Integración por partes	84
2.4	Integración de funciones logarítmicas, trigonométricas y exponenciales	93
2.5	Integrales trigonométricas	107
	Proyecto de trabajo: Líneas eléctricas	115
2.6	Integración por sustitución trigonométrica	116
2.7	Integración por fracciones parciales	125
2.8	Integración de funciones trigonométricas inversas	134
2.9	Integración de funciones hiperbólicas	142
	Proyecto de trabajo: Arco de St. Louis	149
2.10	Integración por tablas y otras técnicas de integración	150
	Ejercicios de repaso	156
	Solución de problemas	159
UNIDAD 3	▷ Aplicaciones de la integral	163
3.1	Área de una región entre dos curvas	164
3.2	Volumen: método de los discos	174
3.3	Volumen: método de las capas	185
	Proyecto de trabajo: Saturno	193
3.4	Longitud de arco y superficies de revolución	194
3.5	Trabajo	205
	Proyecto de trabajo: Energía de las mareas	213
3.6	Momentos, centros de masa y centroides	214
3.7	Presión y fuerza de un fluido	225
3.8	Integrales impropias	231
	Ejercicios de repaso	242
	Solución de problemas	244

UNIDAD 4	▷ Sucesiones y series	247
4.1	Sucesiones	248
4.2	Series y convergencia	259
	Proyecto de trabajo: La mesa que desaparece de Cantor	268
4.3	Criterio de la integral y series p	269
	Proyecto de trabajo: La serie armónica	275
4.4	Comparación de series	276
	Proyecto de trabajo: Método de la solera	282
4.5	Series alternantes	283
4.6	El criterio del cociente y de la raíz	291
4.7	Polinomios de Taylor y aproximaciones	300
4.8	Series de potencias	311
4.9	Representación de funciones por series de potencias	321
4.10	Series de Taylor y Maclaurin	328
	Ejercicios de repaso	340
	Solución de problemas	343

Formularios básicos y tablas de integración	F1
Álgebra	F1
Fórmulas trigonométricas	F2
Trigonometría	F3
Derivadas e integrales	F4
Tablas de integración	T1

Apéndices*

Apéndice A	Demostración de teoremas seleccionados
Apéndice B	Tablas de integración
Apéndice C	Repaso de precálculo
	C.1 Números reales y recta numérica
	C.2 El plano cartesiano
	C.3 Repaso de funciones trigonométricas
Apéndice D	Rotación y la ecuación general de segundo grado
Apéndice E	Números complejos
	Formularios básicos

* Este material se encuentra disponible en línea. Acceda a www.cengage.com e ingrese con el ISBN de la obra.

Prefacio

Bienvenidos a esta nueva versión de **Matemáticas II. Cálculo integral**. Nos enorgullece ofrecerle una nueva versión revisada y mejorada de nuestros clásicos y exitosos libros de texto.

Esta obra forma parte de una serie de cinco libros elaborados para cubrir de manera específica los planes de estudio de los cursos de matemáticas a nivel superior: cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo vectorial, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales.

Al igual que en otras ediciones, hemos incorporado muchas de las útiles y atinadas sugerencias que usted, estimado lector, nos hace al utilizar esta obra en sus cursos.

En esta edición se han introducido algunas características nuevas y revisado otras. Encontrará lo que espera: un libro de texto pedagógico, matemáticamente formal y accesible.

Estamos contentos y emocionados de ofrecerle algo totalmente nuevo en esta edición, un sitio web: **LarsonCalculus.com**. Este sitio ofrece muchos recursos que le ayudarán en su estudio del cálculo. Todos estos recursos están a solo un clic de distancia. Nuestro objetivo en todas las ediciones de este libro de texto es proporcionarle las herramientas necesarias para dominar el cálculo. Esperamos que, junto con **LarsonCalculus.com**, encuentre útiles los cambios de esta edición para lograrlo.

En cada conjunto de ejercicios, asegúrese de anotar la referencia a **CalcChat.com**. En este sitio gratuito puede descargar una solución paso a paso de cualquier ejercicio impar. Además, puede hablar con un tutor, de manera gratuita, dentro del horario publicado en el sitio. Con el paso de los años, miles de estudiantes han visitado el sitio para obtener apoyo. Utilizamos toda esta información como ayuda para guiarlo en cada revisión de los ejercicios y soluciones.

Lo nuevo en esta edición

NUEVO LarsonCalculus.com

Este sitio web ofrece varias herramientas y recursos para complementar su aprendizaje. El acceso a estas herramientas es gratuito. Vídeos de explicaciones de conceptos o demostraciones del libro, ejemplos para explorar, vista de gráficas tridimensionales, descarga de artículos de revistas de matemáticas y mucho más.

NUEVA Apertura de capítulo

En cada apertura de capítulo se resaltan aplicaciones reales utilizadas en los ejemplos y ejercicios.

NUEVOS Ejemplos interactivos

Los ejemplos del libro están acompañados de ejemplos interactivos en **LarsonCalculus.com**. Estos ejemplos interactivos usan el reproductor CDF de Wolfram y permiten explorar el cálculo manejando las funciones o gráficas y observando los resultados.

NUEVOS Vídeos de demostraciones

Vea vídeos del coautor Bruce Edwards, donde explica las demostraciones de los teoremas de *Cálculo*, décima edición, en **LarsonCalculus.com**.

NUEVO ¿Cómo lo ve?

La característica ¿Cómo lo ve? en cada sección presenta un problema de la vida real que podrá resolver mediante inspección visual utilizando los conceptos aprendidos en la lección. Este ejercicio es excelente para el análisis en clase o la preparación de un examen.

Comentario Revisado

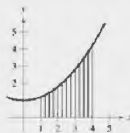
Estos consejos y sugerencias refuerzan o amplían conceptos, le ayudan a aprender cómo estudiar matemáticas, le advierten acerca de errores comunes, lo dirigen en casos especiales o le muestran los pasos alternativos o adicionales en la solución de un ejemplo.

Conjuntos de ejercicios Revisados

Los conjuntos de ejercicios han sido amplia y cuidadosamente examinados para asegurarnos que son rigurosos e importantes y que incluyen todos los temas que nuestros usuarios han sugerido. Se han reorganizado los ejercicios y titulado para que pueda ver mejor las conexiones entre los ejemplos y ejercicios. Los ejercicios de varios pasos son ejercicios de la vida real que refuerzan habilidades para resolver problemas y dominar los conceptos, dando a los estudiantes la oportunidad de aplicarlos en situaciones de la vida real.



¿CÓMO LO VE? La función que se muestra en la gráfica siguiente es creciente en el intervalo $[1, 4]$. El intervalo se divide en 12 subintervalos.



- ¿Cuáles son los puntos terminales izquierdos del primer y último intervalos?
- ¿Cuáles son los puntos terminales derechos de los primeros dos subintervalos?
- ¿Cuándo se usan los puntos terminales derechos, se trazan rectángulos arriba o debajo de las gráficas de la función?
- ¿Qué se puede concluir acerca de las alturas de los rectángulos si una función es constante en el intervalo dado?

Cambios en el contenido

El apéndice A (Demostración de teoremas seleccionados) ahora se presenta en formato de video (en inglés) en LarsonCalculus.com. Las demostraciones también se presentan en forma de texto (en inglés y con costo adicional) en CengageBrain.com.

Características confiables

Aplicaciones

Se han elegido con cuidado ejercicios de aplicación y ejemplos que se incluyen para dirigir el tema: “¿Cuándo usará esto?”. Estas aplicaciones son tomadas de diversas fuentes, tales como acontecimientos actuales, datos del mundo, tendencias de la industria y, además, están relacionadas con una amplia gama de intereses, entendiendo dónde se está utilizando (o se puede utilizar) el cálculo para fomentar una comprensión más completa del material.

Desarrollo de conceptos

Los ejercicios escritos al final de cada sección están diseñados para poner a prueba su comprensión de los conceptos básicos en cada sección, motivándole a verbalizar y escribir las respuestas, y fomentando las habilidades de comunicación técnica que le serán invaluableles en sus futuras carreras.

102 Capítulo 5 Aplicaciones de la integral

70. $1.2x^3 - 0.1x^4$

71. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$

72. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$

73. $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5$

74. $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6$

75. $\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{7}x^7$

76. $\frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8$

77. $\frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{9}x^9$

78. $\frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{10}x^{10}$

79. $\frac{1}{10}x^{10} - \frac{1}{11}x^{11}$

80. $\frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{12}x^{12}$

81. $\frac{1}{12}x^{12} - \frac{1}{13}x^{13}$

82. $\frac{1}{13}x^{13} - \frac{1}{14}x^{14}$

83. $\frac{1}{14}x^{14} - \frac{1}{15}x^{15}$

84. $\frac{1}{15}x^{15} - \frac{1}{16}x^{16}$

85. $\frac{1}{16}x^{16} - \frac{1}{17}x^{17}$

86. $\frac{1}{17}x^{17} - \frac{1}{18}x^{18}$

87. $\frac{1}{18}x^{18} - \frac{1}{19}x^{19}$

88. $\frac{1}{19}x^{19} - \frac{1}{20}x^{20}$

89. $\frac{1}{20}x^{20} - \frac{1}{21}x^{21}$

90. $\frac{1}{21}x^{21} - \frac{1}{22}x^{22}$

91. $\frac{1}{22}x^{22} - \frac{1}{23}x^{23}$

92. $\frac{1}{23}x^{23} - \frac{1}{24}x^{24}$

93. $\frac{1}{24}x^{24} - \frac{1}{25}x^{25}$

94. $\frac{1}{25}x^{25} - \frac{1}{26}x^{26}$

95. $\frac{1}{26}x^{26} - \frac{1}{27}x^{27}$

96. $\frac{1}{27}x^{27} - \frac{1}{28}x^{28}$

97. $\frac{1}{28}x^{28} - \frac{1}{29}x^{29}$

98. $\frac{1}{29}x^{29} - \frac{1}{30}x^{30}$

99. $\frac{1}{30}x^{30} - \frac{1}{31}x^{31}$

100. $\frac{1}{31}x^{31} - \frac{1}{32}x^{32}$

101. $\frac{1}{32}x^{32} - \frac{1}{33}x^{33}$

102. $\frac{1}{33}x^{33} - \frac{1}{34}x^{34}$

103. $\frac{1}{34}x^{34} - \frac{1}{35}x^{35}$

104. $\frac{1}{35}x^{35} - \frac{1}{36}x^{36}$

105. $\frac{1}{36}x^{36} - \frac{1}{37}x^{37}$

106. $\frac{1}{37}x^{37} - \frac{1}{38}x^{38}$

107. $\frac{1}{38}x^{38} - \frac{1}{39}x^{39}$

108. $\frac{1}{39}x^{39} - \frac{1}{40}x^{40}$

109. $\frac{1}{40}x^{40} - \frac{1}{41}x^{41}$

110. $\frac{1}{41}x^{41} - \frac{1}{42}x^{42}$

111. $\frac{1}{42}x^{42} - \frac{1}{43}x^{43}$

112. $\frac{1}{43}x^{43} - \frac{1}{44}x^{44}$

113. $\frac{1}{44}x^{44} - \frac{1}{45}x^{45}$

114. $\frac{1}{45}x^{45} - \frac{1}{46}x^{46}$

115. $\frac{1}{46}x^{46} - \frac{1}{47}x^{47}$

116. $\frac{1}{47}x^{47} - \frac{1}{48}x^{48}$

117. $\frac{1}{48}x^{48} - \frac{1}{49}x^{49}$

118. $\frac{1}{49}x^{49} - \frac{1}{50}x^{50}$

119. $\frac{1}{50}x^{50} - \frac{1}{51}x^{51}$

120. $\frac{1}{51}x^{51} - \frac{1}{52}x^{52}$

121. $\frac{1}{52}x^{52} - \frac{1}{53}x^{53}$

122. $\frac{1}{53}x^{53} - \frac{1}{54}x^{54}$

123. $\frac{1}{54}x^{54} - \frac{1}{55}x^{55}$

124. $\frac{1}{55}x^{55} - \frac{1}{56}x^{56}$

125. $\frac{1}{56}x^{56} - \frac{1}{57}x^{57}$

126. $\frac{1}{57}x^{57} - \frac{1}{58}x^{58}$

127. $\frac{1}{58}x^{58} - \frac{1}{59}x^{59}$

128. $\frac{1}{59}x^{59} - \frac{1}{60}x^{60}$

129. $\frac{1}{60}x^{60} - \frac{1}{61}x^{61}$

130. $\frac{1}{61}x^{61} - \frac{1}{62}x^{62}$

131. $\frac{1}{62}x^{62} - \frac{1}{63}x^{63}$

132. $\frac{1}{63}x^{63} - \frac{1}{64}x^{64}$

133. $\frac{1}{64}x^{64} - \frac{1}{65}x^{65}$

134. $\frac{1}{65}x^{65} - \frac{1}{66}x^{66}$

135. $\frac{1}{66}x^{66} - \frac{1}{67}x^{67}$

136. $\frac{1}{67}x^{67} - \frac{1}{68}x^{68}$

137. $\frac{1}{68}x^{68} - \frac{1}{69}x^{69}$

138. $\frac{1}{69}x^{69} - \frac{1}{70}x^{70}$

139. $\frac{1}{70}x^{70} - \frac{1}{71}x^{71}$

140. $\frac{1}{71}x^{71} - \frac{1}{72}x^{72}$

141. $\frac{1}{72}x^{72} - \frac{1}{73}x^{73}$

142. $\frac{1}{73}x^{73} - \frac{1}{74}x^{74}$

143. $\frac{1}{74}x^{74} - \frac{1}{75}x^{75}$

144. $\frac{1}{75}x^{75} - \frac{1}{76}x^{76}$

145. $\frac{1}{76}x^{76} - \frac{1}{77}x^{77}$

146. $\frac{1}{77}x^{77} - \frac{1}{78}x^{78}$

147. $\frac{1}{78}x^{78} - \frac{1}{79}x^{79}$

148. $\frac{1}{79}x^{79} - \frac{1}{80}x^{80}$

149. $\frac{1}{80}x^{80} - \frac{1}{81}x^{81}$

150. $\frac{1}{81}x^{81} - \frac{1}{82}x^{82}$

151. $\frac{1}{82}x^{82} - \frac{1}{83}x^{83}$

152. $\frac{1}{83}x^{83} - \frac{1}{84}x^{84}$

153. $\frac{1}{84}x^{84} - \frac{1}{85}x^{85}$

154. $\frac{1}{85}x^{85} - \frac{1}{86}x^{86}$

155. $\frac{1}{86}x^{86} - \frac{1}{87}x^{87}$

156. $\frac{1}{87}x^{87} - \frac{1}{88}x^{88}$

157. $\frac{1}{88}x^{88} - \frac{1}{89}x^{89}$

158. $\frac{1}{89}x^{89} - \frac{1}{90}x^{90}$

159. $\frac{1}{90}x^{90} - \frac{1}{91}x^{91}$

160. $\frac{1}{91}x^{91} - \frac{1}{92}x^{92}$

161. $\frac{1}{92}x^{92} - \frac{1}{93}x^{93}$

162. $\frac{1}{93}x^{93} - \frac{1}{94}x^{94}$

163. $\frac{1}{94}x^{94} - \frac{1}{95}x^{95}$

164. $\frac{1}{95}x^{95} - \frac{1}{96}x^{96}$

165. $\frac{1}{96}x^{96} - \frac{1}{97}x^{97}$

166. $\frac{1}{97}x^{97} - \frac{1}{98}x^{98}$

167. $\frac{1}{98}x^{98} - \frac{1}{99}x^{99}$

168. $\frac{1}{99}x^{99} - \frac{1}{100}x^{100}$

169. $\frac{1}{100}x^{100} - \frac{1}{101}x^{101}$

170. $\frac{1}{101}x^{101} - \frac{1}{102}x^{102}$

171. $\frac{1}{102}x^{102} - \frac{1}{103}x^{103}$

172. $\frac{1}{103}x^{103} - \frac{1}{104}x^{104}$

173. $\frac{1}{104}x^{104} - \frac{1}{105}x^{105}$

174. $\frac{1}{105}x^{105} - \frac{1}{106}x^{106}$

175. $\frac{1}{106}x^{106} - \frac{1}{107}x^{107}$

176. $\frac{1}{107}x^{107} - \frac{1}{108}x^{108}$

177. $\frac{1}{108}x^{108} - \frac{1}{109}x^{109}$

178. $\frac{1}{109}x^{109} - \frac{1}{110}x^{110}$

179. $\frac{1}{110}x^{110} - \frac{1}{111}x^{111}$

180. $\frac{1}{111}x^{111} - \frac{1}{112}x^{112}$

181. $\frac{1}{112}x^{112} - \frac{1}{113}x^{113}$

182. $\frac{1}{113}x^{113} - \frac{1}{114}x^{114}$

183. $\frac{1}{114}x^{114} - \frac{1}{115}x^{115}$

184. $\frac{1}{115}x^{115} - \frac{1}{116}x^{116}$

185. $\frac{1}{116}x^{116} - \frac{1}{117}x^{117}$

186. $\frac{1}{117}x^{117} - \frac{1}{118}x^{118}$

187. $\frac{1}{118}x^{118} - \frac{1}{119}x^{119}$

188. $\frac{1}{119}x^{119} - \frac{1}{120}x^{120}$

189. $\frac{1}{120}x^{120} - \frac{1}{121}x^{121}$

190. $\frac{1}{121}x^{121} - \frac{1}{122}x^{122}$

191. $\frac{1}{122}x^{122} - \frac{1}{123}x^{123}$

192. $\frac{1}{123}x^{123} - \frac{1}{124}x^{124}$

193. $\frac{1}{124}x^{124} - \frac{1}{125}x^{125}$

194. $\frac{1}{125}x^{125} - \frac{1}{126}x^{126}$

195. $\frac{1}{126}x^{126} - \frac{1}{127}x^{127}$

196. $\frac{1}{127}x^{127} - \frac{1}{128}x^{128}$

197. $\frac{1}{128}x^{128} - \frac{1}{129}x^{129}$

198. $\frac{1}{129}x^{129} - \frac{1}{130}x^{130}$

199. $\frac{1}{130}x^{130} - \frac{1}{131}x^{131}$

200. $\frac{1}{131}x^{131} - \frac{1}{132}x^{132}$

201. $\frac{1}{132}x^{132} - \frac{1}{133}x^{133}$

202. $\frac{1}{133}x^{133} - \frac{1}{134}x^{134}$

203. $\frac{1}{134}x^{134} - \frac{1}{135}x^{135}$

204. $\frac{1}{135}x^{135} - \frac{1}{136}x^{136}$

205. $\frac{1}{136}x^{136} - \frac{1}{137}x^{137}$

206. $\frac{1}{137}x^{137} - \frac{1}{138}x^{138}$

207. $\frac{1}{138}x^{138} - \frac{1}{139}x^{139}$

208. $\frac{1}{139}x^{139} - \frac{1}{140}x^{140}$

209. $\frac{1}{140}x^{140} - \frac{1}{141}x^{141}$

210. $\frac{1}{141}x^{141} - \frac{1}{142}x^{142}$

211. $\frac{1}{142}x^{142} - \frac{1}{143}x^{143}$

212. $\frac{1}{143}x^{143} - \frac{1}{144}x^{144}$

213. $\frac{1}{144}x^{144} - \frac{1}{145}x^{145}$

214. $\frac{1}{145}x^{145} - \frac{1}{146}x^{146}$

215. $\frac{1}{146}x^{146} - \frac{1}{147}x^{147}$

216. $\frac{1}{147}x^{147} - \frac{1}{148}x^{148}$

217. $\frac{1}{148}x^{148} - \frac{1}{149}x^{149}$

218. $\frac{1}{149}x^{149} - \frac{1}{150}x^{150}$

219. $\frac{1}{150}x^{150} - \frac{1}{151}x^{151}$

220. $\frac{1}{151}x^{151} - \frac{1}{152}x^{152}$

221. $\frac{1}{152}x^{152} - \frac{1}{153}x^{153}$

222. $\frac{1}{153}x^{153} - \frac{1}{154}x^{154}$

223. $\frac{1}{154}x^{154} - \frac{1}{155}x^{155}$

224. $\frac{1}{155}x^{155} - \frac{1}{156}x^{156}$

225. $\frac{1}{156}x^{156} - \frac{1}{157}x^{157}$

226. $\frac{1}{157}x^{157} - \frac{1}{158}x^{158}$

227. $\frac{1}{158}x^{158} - \frac{1}{159}x^{159}$

228. $\frac{1}{159}x^{159} - \frac{1}{160}x^{160}$

229. $\frac{1}{160}x^{160} - \frac{1}{161}x^{161}$

230. $\frac{1}{161}x^{161} - \frac{1}{162}x^{162}$

231. $\frac{1}{162}x^{162} - \frac{1}{163}x^{163}$

232. $\frac{1}{163}x^{163} - \frac{1}{164}x^{164}$

233. $\frac{1}{164}x^{164} - \frac{1}{165}x^{165}$

234. $\frac{1}{165}x^{165} - \frac{1}{166}x^{166}$

235. $\frac{1}{166}x^{166} - \frac{1}{167}x^{167}$

236. $\frac{1}{167}x^{167} - \frac{1}{168}x^{168}$

237. $\frac{1}{168}x^{168} - \frac{1}{169}x^{169}$

238. $\frac{1}{169}x^{169} - \frac{1}{170}x^{170}$

239. $\frac{1}{170}x^{170} - \frac{1}{171}x^{171}$

240. $\frac{1}{171}x^{171} - \frac{1}{172}x^{172}$

241. $\frac{1}{172}x^{172} - \frac{1}{173}x^{173}$

242. $\frac{1}{173}x^{173} - \frac{1}{174}x^{174}$

243. $\frac{1}{174}x^{174} - \frac{1}{175}x^{175}$

244. $\frac{1}{175}x^{175} - \frac{1}{176}x^{176}$

245. $\frac{1}{176}x^{176} - \frac{1}{177}x^{177}$

246. $\frac{1}{177}x^{177} - \frac{1}{178}x^{178}$

247. $\frac{1}{178}x^{178} - \frac{1}{179}x^{179}$

248. $\frac{1}{179}x^{179} - \frac{1}{180}x^{180}$

249. $\frac{1}{180}x^{180} - \frac{1}{181}x^{181}$

250. $\frac{1}{181}x^{181} - \frac{1}{182}x^{182}$

251. $\frac{1}{182}x^{182} - \frac{1}{183}x^{183}$

252. $\frac{1}{183}x^{183} - \frac{1}{184}x^{184}$

253. $\frac{1}{184}x^{184} - \frac{1}{185}x^{185}$

254. $\frac{1}{185}x^{185} - \frac{1}{186}x^{186}$

255. $\frac{1}{186}x^{186} - \frac{1}{187}x^{187}$

256. $\frac{1}{187}x^{187} - \frac{1}{188}x^{188}$

257. $\frac{1}{188}x^{188} - \frac{1}{189}x^{189}$

258. $\frac{1}{189}x^{189} - \frac{1}{190}x^{190}$

259. $\frac{1}{190}x^{190} - \frac{1}{191}x^{191}$

260. $\frac{1}{191}x^{191} - \frac{1}{192}x^{192}$

261. $\frac{1}{192}x^{192} - \frac{1}{193}x^{193}$

262. $\frac{1}{193}x^{193} - \frac{1}{194}x^{194}$

263. $\frac{1}{194}x^{194} - \frac{1}{195}x^{195}$

264. $\frac{1}{195}x^{195} - \frac{1}{196}x^{196}$

265. $\frac{1}{196}x^{196} - \frac{1}{197}x^{197}$

266. $\frac{1}{197}x^{197} - \frac{1}{198}x^{198}$

267. $\frac{1}{198}x^{198} - \frac{1}{199}x^{199}$

268. $\frac{1}{199}x^{199} - \frac{1}{200}x^{200}$

269. $\frac{1}{200}x^{200} - \frac{1}{201}x^{201}$

270. $\frac{1}{201}x^{201} - \frac{1}{202}x^{202}$

271. $\frac{1}{202}x^{202} - \frac{1}{203}x^{203}$

272. $\frac{1}{203}x^{203} - \frac{1}{204}x^{204}$

273. $\frac{1}{204}x^{204} - \frac{1}{205}x^{205}$

274. $\frac{1}{205}x^{205} - \frac{1}{206}x^{206}$

275. $\frac{1}{206}x^{206} - \frac{1}{207}x^{207}$

276. $\frac{1}{207}x^{207} - \frac{1}{208}x^{208}$

277. $\frac{1}{208}x^{208} - \frac{1}{209}x^{209}$

278. $\frac{1}{209}x^{209} - \frac{1}{210}x^{210}$

279. $\frac{1}{210}x^{210} - \frac{1}{211}x^{211}$

280. $\frac{1}{211}x^{211} - \frac{1}{212}x^{212}$

281. $\frac{1}{212}x^{212} - \frac{1}{213}x^{213}$

282. $\frac{1}{213}x^{213} - \frac{1}{214}x^{214}$

283. $\frac{1}{214}x^{214} - \frac{1}{215}x^{215}$

284. $\frac{1}{215}x^{215} - \frac{1}{216}x^{216}$

285. $\frac{1}{216}x^{216} - \frac{1}{217}x^{217}$

286. $\frac{1}{217}x^{217} - \frac{1}{218}x^{218}$

287. $\frac{1}{218}x^{218} - \frac{1}{219}x^{219}$

288. $\frac{1}{219}x^{219} - \frac{1}{220}x^{220}$

289. $\frac{1}{220}x^{220} - \frac{1}{221}x^{221}$

290. $\frac{1}{221}x^{221} - \frac{1}{222}x^{222}$

291. $\frac{1}{222}x^{222} - \frac{1}{223}x^{223}$

292. $\frac{1}{223}x^{223} - \frac{1}{224}x^{224}$

293. $\frac{1}{224}x^{224} - \frac{1}{225}x^{225}$

294. $\frac{1}{225}x^{225} - \frac{1}{226}x^{226}$

295. $\frac{1}{226}x^{226} - \frac{1}{227}x^{227}$

296. $\frac{1}{227}x^{227} - \frac{1}{228}x^{228}$

297. $\frac{1}{228}x^{228} - \frac{1}{229}x^{229}$

298. $\frac{1}{229}x^{229} - \frac{1}{230}x^{230}$

299. $\frac{1}{230}x^{230} - \frac{1}{231}x^{231}$

300. $\frac{1}{231}x^{231} - \frac{1}{232}x^{232}$

301. $\frac{1}{232}x^{232} - \frac{1}{233}x^{233}$

302. $\frac{1}{233}x^{233} - \frac{1}{234}x^{234}$

303. $\frac{1}{234}x^{234} - \frac{1}{235}x^{235}$

304. $\frac{1}{235}x^{235} - \frac{1}{236}x^{236}$

305. $\frac{1}{236}x^{236} - \frac{1}{237}x^{237}$

306. $\frac{1}{237}x^{237} - \frac{1}{238}x^{238}$

307. $\frac{1}{238}x^{238} - \frac{1}{239}x^{239}$

308. $\frac{1}{239}x^{239} - \frac{1}{240}x^{240}$

309. $\frac{1}{240}x^{240} - \frac{1}{241}x^{241}$

310. $\frac{1}{241}x^{241} - \frac{1}{242}x^{242}$

311. $\frac{1}{242}x^{242} - \frac{1}{243}x^{243}$

312. $\frac{1}{243}x^{243} - \frac{1}{244}x^{244}$

313. $\frac{1}{244}x^{244} - \frac{1}{245}x^{245}$

314. $\frac{1}{245}x^{245} - \frac{1}{246}x^{246}$

315. $\frac{1}{246}x^{246} - \frac{1}{247}x^{247}$

316. $\frac{1}{247}x^{247} - \frac{1}{248}x^{248}$

317. $\frac{1}{248}x^{248} - \frac{1}{249}x^{249}$

318. $\frac{1}{249}x^{249} - \frac{1}{250}x^{250}$

319. $\frac{1}{250}x^{250} - \frac{1}{251}x^{251}$

320. $\frac{1}{251}x^{251} - \frac{1}{252}x^{252}$

321. $\frac{1}{252}x^{252} - \frac{1}{253}x^{253}$

322. $\frac{1}{253}x^{253} - \frac{1}{254}x^{254}$

323. $\frac{1}{254}x^{254} - \frac{1}{255}x^{255}$

324. $\frac{1}{255}x^{255} - \frac{1}{256}x^{256}$

325. $\frac{1}{256}x^{256} - \frac{1}{257}x^{257}$

326. $\frac{1}{257}x^{257} - \frac{1}{258}x^{258}$

327. $\frac{1}{258}x^{258} - \frac{1}{259}x^{259}$

328. $\frac{1}{259}x^{259} - \frac{1}{260}x^{260}$

329. $\frac{1}{260}x^{260} - \frac{1}{261}x^{261}$

330. $\frac{1}{261}x^{261} - \frac$

Teoremas

Los teoremas proporcionan el marco conceptual del cálculo. Los teoremas se enuncian claramente y están separados del resto del libro mediante recuadros de referencia visual rápida. Las demostraciones importantes a menudo se ubican enseguida del teorema y se pueden encontrar en LarsonCalculus.com.

Definiciones

Como con los teoremas, las definiciones se enuncian claramente usando terminología precisa, formal y están separadas del texto mediante recuadros para una referencia visual rápida.

Definiciones de dos integrales definidas especiales

1. Si f está definida en $x = a$, entonces $\int_a^a f(x) dx = 0$.
2. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.

Exploraciones

Las exploraciones proporcionan retos únicos para estudiar conceptos que aún no se han cubierto formalmente en el libro. Le permiten aprender mediante el descubrimiento e introducir temas relacionados con los que está estudiando en ese momento. El explorar temas de esta manera le invita a pensar de manera más amplia.

Notas históricas y biografías

Las notas históricas le proporcionan información acerca de los fundamentos de cálculo. Las biografías presentan a las personas que crearon y contribuyeron al cálculo.

Tecnología

A través del libro, los recuadros de tecnología le enseñan a usar tecnología para resolver problemas y explorar conceptos del cálculo. Estas sugerencias también indican algunos obstáculos del uso de la tecnología.

Agradecimientos

Queremos agradecer a todos los profesores que participaron en esta obra, sus aportaciones y sugerencias fueron invaluable para el desarrollo de la misma.

Proyectos de trabajo

Los proyectos de trabajo se presentan en algunas secciones y le invitan a explorar aplicaciones relacionadas con los temas que está estudiando. Proporcionan una forma interesante y atractiva para que usted y otros estudiantes trabajen e investiguen ideas de forma conjunta.

PROYECTO DE TRABAJO

Demostración del teorema fundamental

Utilice una herramienta de graficación para representar la función $y_1 = \sin^2 t$

en el intervalo $0 \leq t \leq \pi$. Sea $F(x)$ la siguiente función de x .

$$F(x) = \int_0^x \sec^2 t dt$$

- (a) Complete la tabla. Explique por qué los valores de F' están creciendo.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$F(x)$							

- (b) Utilice las funciones de integración de una herramienta de graficación para representar F' .
- (c) Use las funciones de derivación de una herramienta de graficación para hacer la gráfica de $F'(x)$. ¿Cómo se relaciona esta gráfica con la gráfica del inciso (b)?
- (d) Compruebe que la derivada de

$$y = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sec 2t$$

es $\sec^2 t$. Grafique y escriba un pequeño párrafo acerca de cómo se relaciona esta gráfica con las de los incisos (b) y (c).

Desafíos del examen Putnam

Las preguntas del examen Putnam se presentan en algunas secciones. Estas preguntas de examen Putnam lo desafían y le amplían los límites de su comprensión sobre el cálculo.

La integral definida y el teorema fundamental del cálculo

- 1.1 Área
- 1.2 Sumas de Riemann y la integral definida
- 1.3 La antiderivada o integral indefinida
- 1.4 Teorema fundamental del cálculo
- 1.5 Integración numérica



Velocidad del sonido



Topografía



Gran Cañón



Varios productos químicos fluyendo en un tanque

1.1 Área

- Emplear la notación sigma para escribir y calcular una suma.
- Entender el concepto de área.
- Aproximar el área de una región plana.
- Determinar el área de una región plana usando límites.

Notación sigma

Esta unidad inicia introduciendo una notación concisa para sumas. Esta recibe el nombre de **notación sigma**, ya que utiliza la letra griega mayúscula sigma, Σ .

Notación sigma

La suma de n términos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ se escribe como

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

donde i es el índice de suma, a_i es el i -ésimo término de la suma y los límites superior e inferior de la suma son n y 1.



COMENTARIO Los límites superior e inferior de la suma han de ser constantes respecto al índice de suma. Sin embargo, el límite inferior no tiene por qué ser 1. Cualquier entero menor o igual al límite superior es legítimo.

EJEMPLO 1

Ejemplos con la notación sigma

- a. $\sum_{i=1}^6 i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$
- b. $\sum_{i=0}^5 (i + 1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$
- c. $\sum_{j=2}^7 j^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$
- d. $\sum_{j=1}^5 \frac{1}{\sqrt{j}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$
- e. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}(k^2 + 1) = \frac{1}{n}(1^2 + 1) + \frac{1}{n}(2^2 + 1) + \cdots + \frac{1}{n}(n^2 + 1)$
- f. $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + \cdots + f(x_n) \Delta x$

■ PARA INFORMACIÓN ADICIONAL

Para una interpretación geométrica de las fórmulas de suma, consulte el artículo "Looking at $\sum_{k=1}^n k$ and $\sum_{k=1}^n k^2$ Geometrically", de Eric Hegblom, en *Mathematics Teacher*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

En los incisos (a) y (b), observe que la misma suma puede representarse de maneras diferentes utilizando la notación sigma. ■

Aunque puede utilizarse cualquier variable como índice de suma, suele preferirse i , j y k . Observe en el ejemplo 1 que el índice de suma no aparece en los términos de la suma desarrollada.

LA SUMA DE LOS PRIMEROS CIENTO ENTEROS

El maestro de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) pidió a sus alumnos que sumaran todos los enteros desde 1 hasta 100. Cuando Gauss regresó con la respuesta correcta muy poco tiempo después, el maestro no pudo evitar mirarle atónito. Lo siguiente fue lo que hizo Gauss:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 \\ 100 + 99 + 98 + \cdots + 1 \\ \hline 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 \\ \hline \frac{100 \times 101}{2} = 5050 \end{array}$$

Esto se generaliza por medio del teorema 1.1, propiedad 2, donde

$$\sum_{i=1}^{100} i = \frac{100(101)}{2} = 5050.$$

Las siguientes propiedades de la sumatoria empleando la notación sigma se deducen de las propiedades asociativa y conmutativa de la suma y de la propiedad distributiva de la adición en la multiplicación. (En la primera propiedad, k es una constante.)

$$1. \sum_{i=1}^n k a_i = k \sum_{i=1}^n a_i \quad 2. \sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i$$

El siguiente teorema lista algunas fórmulas útiles para la suma de potencias.

TEOREMA 1.1 Fórmulas de sumatoria

$$1. \sum_{i=1}^n c = cn, \quad c \text{ es una constante} \quad 2. \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$3. \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad 4. \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Una demostración de este teorema se da en el Apéndice A.

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

EJEMPLO 2

Evaluar una suma

Encuentre $\sum_{i=1}^n \frac{i+1}{n^2}$ para $n = 10, 100, 1000$ y $10,000$

Solución

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{i+1}{n^2} &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i+1) && \text{Factorice la constante } 1/n^2 \text{ fuera de la suma.} \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right) && \text{Escriba como dos sumas.} \\ &= \frac{1}{n^2} \left[\frac{n(n+1)}{2} + n \right] && \text{Aplique el teorema 1.2.} \\ &= \frac{1}{n^2} \left[\frac{n^2 + 3n}{2} \right] && \text{Simplifique.} \\ &= \frac{n+3}{2n} && \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

Después de esto puede encontrar la suma sustituyendo los valores apropiados de n , como se muestra en la tabla.

n	10	100	1000	10,000
$\sum_{i=1}^n \frac{i+1}{n^2} = \frac{n+3}{2n}$	0.65000	0.51500	0.50150	0.50015

En la tabla, las sumas parecen tender a un límite conforme n aumenta. Aunque la discusión de límites es el infinito, si se aplica una variable de x , donde x puede ser cualquier número real, muchos de los resultados siguen siendo válidos cuando una variable n se restringe a valores enteros positivos. Así, para encontrar el límite de $(n+3)/2n$ cuando n tiende a infinito, se puede escribir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2n} + \frac{3}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2n} \right) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

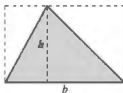
Área

En la geometría euclidiana, el tipo más simple de región plana es un rectángulo. Aunque la gente a menudo afirma que la *fórmula* para el área de un rectángulo es

$$A = bh$$

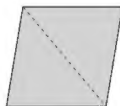
resulta más apropiado decir que esta es la *definición* del **área de un rectángulo**.

A partir de esta definición, puede deducir fórmulas para áreas de muchas otras regiones planas. Por ejemplo, para determinar el área de un triángulo, puede formar un rectángulo cuya área es dos veces la del triángulo, como se indica en la figura 1.1. Una vez que sabe cómo encontrar el área de un triángulo, puede determinar el área de cualquier polígono subdividiéndolo en regiones triangulares, como se ilustra en la figura 1.2.



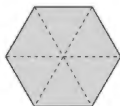
Triángulo: $A = \frac{1}{2}bh$

Figura 1.1

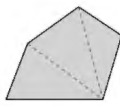


Paralelogramo

Figura 1.2



Hexágono



Polígono



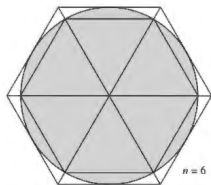
ARQUÍMEDES (287-212 a. C.)

Arquímedes utilizó el método de agotamiento para deducir fórmulas para las áreas de elipses, segmentos parabólicos, y sectores de una espiral. Se le considera como el más grande matemático aplicado de la antigüedad.

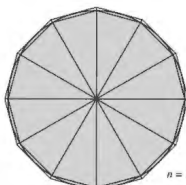
Consulte LarsonCalculus.com para leer más de esta biografía.

Hallar las áreas de regiones diferentes de los polígonos es más difícil. Los antiguos griegos fueron capaces de determinar fórmulas para las áreas de algunas regiones generales (principalmente aquellas delimitadas por las cónicas) mediante el método de *agotamiento*. La descripción más clara de este método la hizo Arquímedes. En esencia, el método es un proceso de límite en el que el área se encierra entre dos polígonos (uno inscrito en la región y uno circunscrito alrededor de la región).

Por ejemplo, en la figura 1.3, el área de una región circular se aproxima mediante un polígono inscrito de n lados y un polígono circunscrito de n lados. Para cada valor de n el área del polígono circunscrito es menor que el área del círculo, y el área del polígono circunscrito es mayor que el área del círculo. Además, a medida que n aumenta, las áreas de ambos polígonos van siendo cada vez mejores aproximaciones del área del círculo.



$n = 6$



$n = 12$

Método de agotamiento para determinar el área de una región circular.

Figura 1.3

Un proceso similar al que usó Arquímedes para determinar el área de una región plana se usa en los ejemplos restantes en esta sección.

■ PARA INFORMACIÓN ADICIONAL

Para un desarrollo alternativo de la fórmula para el área de un círculo, consulte el artículo "Proof without Words: Area of a Disk is πR^2 ", de Russell Jay Hendel, en *Mathematics Magazine*. Para leer este artículo, visite MathArticles.com

El área de una región plana

Recuerde que los orígenes del cálculo están relacionados con dos problemas clásicos: el problema de la recta tangente y el problema del área. En el ejemplo 3 se inicia la investigación del problema del área.

EJEMPLO 3 Aproximar el área de una región plana

Use los cinco rectángulos de la figura 1.4(a) y (b) para determinar *dos* aproximaciones del área de la región que se encuentra entre la gráfica de

$$f(x) = -x^2 + 5$$

y el eje x entre $x = 0$ y $x = 2$.

Solución

- a. Los puntos terminales de la derecha de los cinco intervalos son

$$\frac{2}{5}i \quad \text{Extremos derechos}$$

donde $i = 1, 2, 3, 4, 5$. El ancho de cada rectángulo es $\frac{2}{5}$, y la altura de cada rectángulo se puede obtener al hallar f en el punto terminal derecho de cada intervalo.

$$\left[0, \frac{2}{5}\right], \left[\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right], \left[\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right], \left[\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right], \left[\frac{8}{5}, \frac{10}{5}\right]$$

↑
Evaluee f en los extremos de la derecha de estos intervalos.

La suma de las áreas de los cinco rectángulos es

$$\sum_{i=1}^5 \overbrace{f\left(\frac{2i}{5}\right)}^{\text{Altura}} \overbrace{\left(\frac{2}{5}\right)}^{\text{Ancho}} = \sum_{i=1}^5 \left[-\left(\frac{2i}{5}\right)^2 + 5\right] \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{162}{25} = 6.48.$$

Como cada uno de los cinco rectángulos se encuentra dentro de la región parabólica, puede concluir que el área de la región parabólica es mayor que 6.48.

- b. Los extremos izquierdos de los cinco intervalos son

$$\frac{2}{5}(i-1) \quad \text{Extremos izquierdos}$$

donde $i = 1, 2, 3, 4, 5$. El ancho de cada rectángulo es $\frac{2}{5}$, y la altura de cada uno puede obtenerse evaluando f en el extremo izquierdo de cada intervalo. Por tanto, la suma es

$$\sum_{i=1}^5 \overbrace{f\left(\frac{2i-2}{5}\right)}^{\text{Altura}} \overbrace{\left(\frac{2}{5}\right)}^{\text{Ancho}} = \sum_{i=1}^5 \left[-\left(\frac{2i-2}{5}\right)^2 + 5\right] \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{202}{25} = 8.08.$$

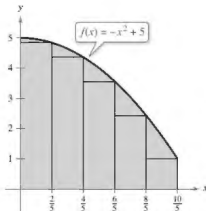
Debido a que la región parabólica se encuentra contenida en la unión de los cinco regiones rectangulares, es posible concluir que el área de la región parabólica es menor que 8.08.

Combinando los resultados de los incisos (a) y (b), puede concluir que

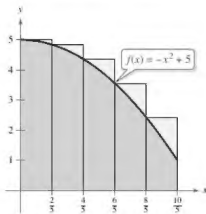
$$6.48 < (\text{Área de la región}) < 8.08.$$

Al incrementar el número de rectángulos utilizados en el ejemplo 3, puede obtener aproximaciones más y más cercanas al área de la región. Por ejemplo, al utilizar 25 rectángulos, cada uno de ancho $\frac{2}{25}$, puede concluir que

$$7.1712 < (\text{Área de la región}) < 7.4912.$$

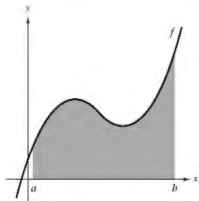


(a) El área de una región parabólica es mayor que el área de los rectángulos.



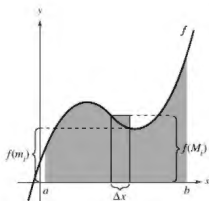
(b) El área de la región parabólica es menor que el área de los rectángulos.

Figura 1.4



Región bajo una curva.

Figura 1.5



El intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos de ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Figura 1.6

Sumas superior e inferior

El procedimiento utilizado en el ejemplo 3 puede generalizarse de la manera siguiente. Considere una región plana limitada en su parte superior por la gráfica de una función continua no negativa

$$y = f(x)$$

como se muestra en la figura 1.5. La región está limitada en su parte inferior por el eje x y las fronteras izquierda y derecha por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

Para aproximar el área de la región, comience subdividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de longitud

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

como se muestra en la figura 1.6. Los extremos de los intervalos son los siguientes.

$$\overbrace{a + 0(\Delta x)}^{x_0} < \overbrace{a + 1(\Delta x)}^{x_1} < \overbrace{a + 2(\Delta x)}^{x_2} < \cdots < \overbrace{a + n(\Delta x)}^{x_n = b}$$

Como f es continua, el teorema del valor extremo garantiza la existencia de un valor mínimo y uno máximo de $f(x)$ en cada subintervalo.

$f(m_i)$ = valor mínimo de $f(x)$ en el i -ésimo subintervalo

$f(M_i)$ = valor máximo de $f(x)$ en el i -ésimo subintervalo

A continuación, defina un **rectángulo inscrito** que se encuentre *dentro* de la i -ésima subregión y un **rectángulo circunscrito** que se extienda *fuera* de la i -ésima subregión. La altura del i -ésimo rectángulo inscrito es $f(m_i)$ y la altura del i -ésimo rectángulo circunscrito es $f(M_i)$. Para cada i , el área del rectángulo inscrito es menor que o igual que el área del rectángulo circunscrito.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Área del rectán-} \\ \text{gulo inscrito} \end{array} \right) = f(m_i) \Delta x \leq f(M_i) \Delta x = \left(\begin{array}{l} \text{Área del rectángulo} \\ \text{circunscrito} \end{array} \right)$$

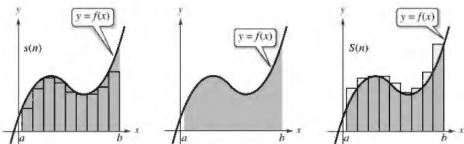
La suma de las áreas de los rectángulos inscritos recibe el nombre de **suma inferior**, y la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos se conoce como **suma superior**.

$$\text{Suma inferior} = s(n) = \sum_{i=1}^n f(m_i) \Delta x \quad \text{Área de rectángulos inscritos.}$$

$$\text{Suma superior} = S(n) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x \quad \text{Área de rectángulos circunscritos.}$$

En la figura 1.7 se puede observar que la suma inferior $s(n)$ es menor o igual que la suma superior $S(n)$. Además, el área real de la región se encuentra entre estas dos sumas.

$$s(n) \leq (\text{Área de la región}) \leq S(n)$$

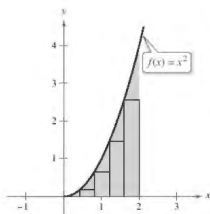


El área de los rectángulos inscritos es menor que el área de la región

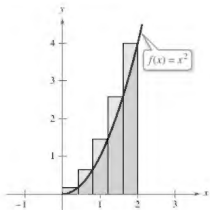
Área de la región

El área de los rectángulos circunscritos es mayor que el área de la región.

Figura 1.7



Rectángulos inscritos.



Rectángulos circunscritos.

Figura 1.8

EJEMPLO 4 Hallar las sumas superior e inferior de una región

Determine la suma superior e inferior de la región delimitada por la gráfica de $f(x) = x^2$ y el eje x entre $x = 0$ y $x = 2$.

Solución Para empezar, divida el intervalo $[0, 2]$ en n subintervalos, cada uno de ancho

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - 0}{n} = \frac{2}{n}.$$

La figura 1.8 muestra los puntos terminales de los subintervalos y varios de los rectángulos inscritos y circunscritos. Como f es creciente en el intervalo $[0, 2]$, el valor mínimo en cada subintervalo ocurre en el extremo izquierdo, y el valor máximo ocurre en el extremo derecho.

Extremos izquierdos

$$m_i = 0 + (i - 1)\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2(i - 1)}{n}$$

Extremos derechos

$$M_i = 0 + i\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2i}{n}$$

Utilizando los puntos terminales izquierdos, la suma inferior es

$$\begin{aligned} s(n) &= \sum_{i=1}^n f(m_i) \Delta x \\ &= \sum_{i=1}^n f\left[\frac{2(i-1)}{n}\right] \left(\frac{2}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{2(i-1)}{n}\right]^2 \left(\frac{2}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{8}{n^3}\right) (i^2 - 2i + 1) \\ &= \frac{8}{n^3} \left(\sum_{i=1}^n i^2 - 2 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right) \\ &= \frac{8}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] + n \right] \\ &= \frac{4}{3n^3} (2n^3 - 3n^2 + n) \\ &= \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}. \quad \text{Suma inferior} \end{aligned}$$

Empleando los puntos terminales derechos, la suma superior es

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x \\ &= \sum_{i=1}^n f\left(\frac{2i}{n}\right) \left(\frac{2}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i}{n}\right)^2 \left(\frac{2}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{8}{n^3}\right) i^2 \\ &= \frac{8}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\ &= \frac{4}{3n^3} (2n^3 + 3n^2 + n) \\ &= \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}. \quad \text{Suma superior} \end{aligned}$$

Exploración

Para la región dada en el ejemplo 4, calcule la suma inferior

$$s(n) = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

y la suma superior

$$S(n) = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

para $n = 10, 100$ y 1000 . Utilice los resultados para determinar el área de la región.

El ejemplo 4 ilustra algunos aspectos importantes acerca de las sumas inferior y superior. Primero, observe que para cualquier valor de n , la suma inferior es menor (o igual) que la suma superior.

$$s(n) = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} < \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} = S(n)$$

Segundo, la diferencia entre estas dos sumas disminuye cuando n aumenta. De hecho, si toma los límites cuando $n \rightarrow \infty$, tanto la suma superior como la suma inferior se aproximan a $\frac{8}{3}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right) = \frac{8}{3} \quad \text{Límite de la suma inferior}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right) = \frac{8}{3} \quad \text{Límite de la suma superior}$$

El siguiente teorema muestra que la equivalencia de los límites (cuando $n \rightarrow \infty$) de las sumas superior e inferior no es una mera coincidencia. Este teorema es válido para toda la función continua no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$. La demostración de este teorema es más adecuada para un curso de cálculo avanzado.

TEOREMA 1.2 Límites de las sumas superior e inferior

Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. Los límites cuando $n \rightarrow \infty$ de las sumas inferior y superior existen y son iguales entre sí. Esto es

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(m_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) \end{aligned}$$

donde $\Delta x = (b-a)/n$ y $f(m_i)$ y $f(M_i)$ son los valores mínimo y máximo de f en el subintervalo.

En el teorema 1.2 se obtiene el mismo límite tanto con el valor mínimo $f(m_i)$ como con el valor máximo $f(M_i)$. Por tanto, a partir del teorema de compresión o del emparejado, se deduce que la elección de x en el i -ésimo intervalo no afecta al límite. Esto significa que está en libertad de elegir cualquier valor de x arbitrario en el i -ésimo subintervalo, como en la siguiente *definición del área de una región en el plano*.

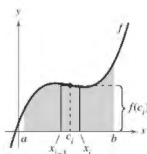
Definición del área de una región en el plano

Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. (Vea la figura 1.9) El área de la región limitada por la gráfica de f , el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{Área} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

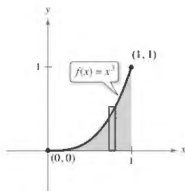
donde $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$ y

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$



El ancho del i -ésimo subintervalo es $\Delta x = x_i - x_{i-1}$.

Figura 1.9



El área de la región acotada por la gráfica de f , el eje x , $x = 0$ y $x = 1$ es $\frac{1}{3}$.

Figura 1.10

EJEMPLO 5

Hallar el área mediante la definición de límite

Encuentre el área de la región limitada por la gráfica $f(x) = x^2$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$, como se muestra en la figura 1.10.

Solución Comience observando que f es continua y no negativa en el intervalo $[0, 1]$. Después, divida el intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = 1/n$. De acuerdo con la definición de área, elija cualquier valor de x en el i -ésimo subintervalo. En este ejemplo, los extremos derechos $c_i = i/n$ resultan adecuados.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right) && \text{Extremos derechos: } c_i = \frac{i}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

El área de la región es $\frac{1}{3}$.

EJEMPLO 6

Hallar el área mediante la definición de límite

Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Determine el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$, el eje x y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 2$, como se muestra en la figura 1.11.

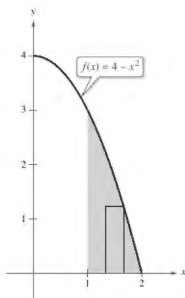
Solución La función f es continua y no negativa en el intervalo $[1, 2]$. Por tanto, comience dividiendo el intervalo en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = 1/n$. Elija el extremo derecho

$$c_i = a + i\Delta x = 1 + \frac{i}{n} \quad \text{Extremos derechos}$$

de cada subintervalo, obtiene

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[4 - \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 \right] \left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(3 - \frac{2i}{n} - \frac{i^2}{n^2} \right) \left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 3 - \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n i - \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) \right] \\ &= 3 - 1 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

El área de la región es $\frac{5}{3}$.



El área de la región acotada por la gráfica de f , el eje x , $x = 1$ y $x = 2$ es $\frac{5}{3}$.

Figura 1.11

El último ejemplo en esta sección considera una región limitada por el eje y (en vez del eje x).

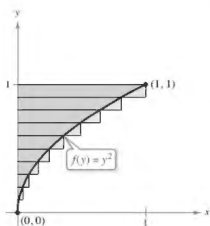
EJEMPLO 7 Una región limitada por el eje y

Encuentre el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = y^2$ y el eje y para $0 \leq y \leq 1$ como se muestra en la figura 1.12.

Solución Cuando f es una función continua y no negativa de y , puede seguir utilizando el mismo procedimiento básico que se ilustró en los ejemplos 5 y 6. Comience dividiendo el intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta y = 1/n$. Después utilice los puntos terminales superiores $c_i = i/n$, para obtener

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta y \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^2 \left(\frac{1}{n} \right) && \text{Puntos terminales superiores: } c_i = \frac{i}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

El área de la región es $\frac{1}{3}$.



El área de la región acotada por la gráfica de f , el eje y y para $0 \leq y \leq 1$ es $\frac{1}{3}$.

Figura 1.12

•• **COMENTARIO** En la sección 1.5 aprenderá acerca de otros métodos de aproximación. Uno de los métodos, la regla del trapecio, es similar a la regla del punto medio.

En los ejemplos 5, 6 y 7, se elige un valor de c_i que sea conveniente para el cálculo del límite. Debido a que cada límite da el área exacta para cualquier c_i no hay necesidad de encontrar valores que den buenas aproximaciones cuando n es pequeña. Sin embargo, para una *aproximación*, debe tratar de encontrar un valor de c_i que le dé una buena aproximación del área de la subregión i . En general, un buen valor para elegir es el punto medio del intervalo, $c_i = (x_i + x_{i-1})/2$, y se aplica la regla del punto medio.

$$\text{Área} = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \Delta x. \quad \text{Regla del punto medio}$$

EJEMPLO 8 Aproximar el área con la regla del punto medio

Utilice la regla del punto medio con $n = 4$ para aproximar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = \sin x$ y el eje x para $0 \leq x \leq \pi$ como se muestra en la figura 1.13.

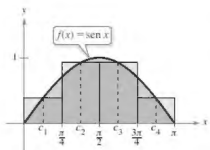
Solución Para $n = 4$, $\Delta x = \pi/4$. A continuación se muestran los puntos medios de las subregiones.

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{0 + (\pi/4)}{2} = \frac{\pi}{8} && c_2 = \frac{(\pi/4) + (\pi/2)}{2} = \frac{3\pi}{8} \\ c_3 &= \frac{(\pi/2) + (3\pi/4)}{2} = \frac{5\pi}{8} && c_4 = \frac{(3\pi/4) + \pi}{2} = \frac{7\pi}{8} \end{aligned}$$

Así, el área se aproxima por

$$\text{Área} = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x = \sum_{i=1}^4 (\sin c_i) \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} \left(\sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{7\pi}{8} \right)$$

que es aproximadamente 2.052.



El área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = \sin x$ y el eje x para $0 \leq x \leq \pi$ es aproximadamente de 2.052.

Figura 1.13

1.1 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Encontrar la suma En los ejercicios 1-6, encuentre la suma. Use la función de suma de la herramienta de graficación para comprobar el resultado.

$$\begin{array}{ll} 1. \sum_{i=1}^6 (3i + 2) & 2. \sum_{k=1}^9 (k^2 + 1) \\ 3. \sum_{k=0}^4 \frac{1}{k^2 + 1} & 4. \sum_{j=4}^9 \frac{3}{j} \\ 5. \sum_{c=1}^4 c & 6. \sum_{i=1}^6 [(i-1)^2 + (i+1)^2] \end{array}$$

Usar la notación sigma En los ejercicios 7-12, use la notación sigma para escribir la suma.

$$\begin{array}{l} 7. \frac{1}{5(1)} + \frac{1}{5(2)} + \frac{1}{5(3)} + \cdots + \frac{1}{5(11)} \\ 8. \frac{9}{1+1} + \frac{9}{1+2} + \frac{9}{1+3} + \cdots + \frac{9}{1+14} \\ 9. \left[7\left(\frac{1}{6}\right) + 5\right] + \left[7\left(\frac{2}{6}\right) + 5\right] + \cdots + \left[7\left(\frac{6}{6}\right) + 5\right] \\ 10. \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] + \left[1 - \left(\frac{2}{4}\right)^2\right] + \cdots + \left[1 - \left(\frac{4}{4}\right)^2\right] \\ 11. \left[\left(\frac{2}{n}\right)^3 - \frac{2}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \left[\frac{(2n)^3}{n} - \frac{2n}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right) \\ 12. \left[2\left(1 + \frac{3}{n}\right)^2\right]\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + \left[2\left(1 + \frac{3n}{n}\right)^2\right]\left(\frac{3}{n}\right) \end{array}$$

Evaluar una suma En los ejercicios 13-20, utilice las propiedades de la notación sigma y el teorema 1.2 para calcular la suma. Utilice la función de suma de la herramienta de graficación para comprobar el resultado.

$$\begin{array}{ll} 13. \sum_{i=1}^{12} 7 & 14. \sum_{i=1}^{30} -18 \\ 15. \sum_{i=1}^{24} 4i & 16. \sum_{i=1}^{16} (5i - 4) \\ 17. \sum_{i=1}^{20} (i - 1)^2 & 18. \sum_{i=1}^{10} (i^2 - 1) \\ 19. \sum_{i=1}^{18} i(i - 1)^2 & 20. \sum_{i=1}^{18} (i^3 - 2i) \end{array}$$

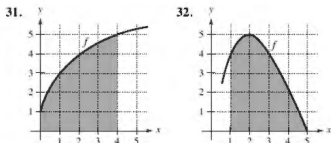
Evaluar una suma En los ejercicios 21-4, utilice las fórmulas de suma para reescribir la expresión sin la notación sigma. Use el resultado para determinar la suma correspondiente a $n = 10, 100, 1000$ y $10,000$.

$$\begin{array}{ll} 21. \sum_{i=1}^n \frac{2i + 1}{n^2} & 22. \sum_{j=1}^n \frac{7j + 4}{n^2} \\ 23. \sum_{k=1}^n \frac{6k(k-1)}{n^3} & 24. \sum_{i=1}^n \frac{2i^3 - 3i}{n^4} \end{array}$$

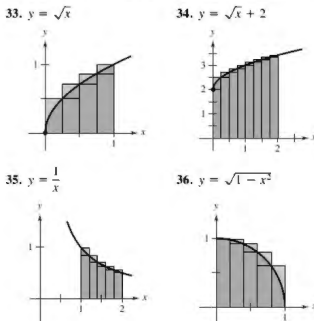
Aproximar el área de una región plana En los ejercicios 25-30, use los puntos terminales izquierdo y derecho y el número de rectángulo dado para encontrar dos aproximaciones del área de la región entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo dado.

$$\begin{array}{l} 25. f(x) = 2x + 5, [0, 2], 4 \text{ rectángulos} \\ 26. f(x) = 9 - x, [2, 4], 6 \text{ rectángulos} \\ 27. g(x) = 2x^2 - x - 1, [2, 5], 6 \text{ rectángulos} \\ 28. g(x) = x^2 + 1, [1, 3], 8 \text{ rectángulos} \\ 29. f(x) = \cos x, \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 4 \text{ rectángulos} \\ 30. g(x) = \sin x, [0, \pi], 6 \text{ rectángulos} \end{array}$$

Usar sumas superior e inferior En los ejercicios 31 y 32, delimite el área de la región sombreada aproximando las sumas superior e inferior. Utilice rectángulos de ancho 1.



Encontrar las sumas superior e inferior para una región En los ejercicios 33-36, utilice sumas superiores e inferiores para aproximar el área de la región empleando el número dado de subintervalos (de igual ancho).



Determinar un límite En los ejercicios 37-42, encuentre la fórmula para la suma de los n términos. Utilice la fórmula para determinar el límite cuando $n \rightarrow \infty$.

37. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{24i}{n^2}$

38. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{3i}{n} \right) \left(\frac{3}{n} \right)$

39. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^3} (i-1)^2$

40. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{2i}{n} \right)^2 \left(\frac{2}{n} \right)$

41. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n} \right) \left(\frac{2}{n} \right)$

42. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(2 + \frac{3i}{n} \right) \left(\frac{3}{n} \right)$

43. Razonamiento numérico Considere un triángulo de área 2 delimitado por las gráficas de $y = x$, $y = 0$ y $x = 2$.

- (a) Dibuje la región.
 (b) Divida el intervalo $[0, 2]$ en n subintervalos de igual ancho y demuestre que los puntos terminales son

$$0 < i \left(\frac{2}{n} \right) < \dots < (n-1) \left(\frac{2}{n} \right) < n \left(\frac{2}{n} \right).$$

(c) Demuestre que $s(n) = \sum_{i=1}^n \left[(i-1) \left(\frac{2}{n} \right) \right] \left(\frac{2}{n} \right)$.

(d) Demuestre que $S(n) = \sum_{i=1}^n \left[i \left(\frac{2}{n} \right) \right] \left(\frac{2}{n} \right)$.

- (e) Complete la tabla.

n	5	10	50	100
$s(n)$				
$S(n)$				

(f) Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = 2$.

44. Razonamiento numérico Considere un trapecio de área 4 delimitado por las gráficas de $y = x$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 3$.

- (a) Dibuje la región.
 (b) Divida el intervalo $[1, 3]$ en n subintervalos de igual ancho y demuestre que los puntos terminales son

$$1 < 1 + i \left(\frac{2}{n} \right) < \dots < 1 + (n-1) \left(\frac{2}{n} \right) < 1 + n \left(\frac{2}{n} \right).$$

(c) Demuestre que $s(n) = \sum_{i=1}^n \left[1 + (i-1) \left(\frac{2}{n} \right) \right] \left(\frac{2}{n} \right)$.

(d) Demuestre que $S(n) = \sum_{i=1}^n \left[1 + i \left(\frac{2}{n} \right) \right] \left(\frac{2}{n} \right)$.

- (e) Complete la tabla.

n	5	10	50	100
$s(n)$				
$S(n)$				

(f) Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = 4$.

Calcular el área por la definición de límite En los ejercicios 45-54, utilice el proceso de límite para encontrar el área de la región entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo indicado. Dibuje la región.

45. $y = -4x + 5$, $[0, 1]$

46. $y = 3x - 2$, $[2, 5]$

47. $y = x^2 + 2$, $[0, 1]$

48. $y = 3x^2 + 1$, $[0, 2]$

49. $y = 25 - x^2$, $[1, 4]$

50. $y = 4 - x^2$, $[-2, 2]$

51. $y = 27 - x^3$, $[1, 3]$

52. $y = 2x - x^3$, $[0, 1]$

53. $y = x^2 - x^3$, $[-1, 1]$

54. $y = 2x^3 - x^2$, $[1, 2]$

Calcular el área por la definición de límite En los ejercicios 55-60, utilice el proceso de límite para determinar el área de la región entre la gráfica de la función y el eje y en el intervalo y indicado. Dibuje la región.

55. $f(y) = 4y$, $0 \leq y \leq 2$

56. $g(y) = \frac{1}{2}y$, $2 \leq y \leq 4$

57. $f(y) = y^2$, $0 \leq y \leq 5$

58. $f(y) = 4y - y^2$, $1 \leq y \leq 2$

59. $g(y) = 4y^2 - y^3$, $1 \leq y \leq 3$

60. $h(y) = y^3 + 1$, $1 \leq y \leq 2$

Aproximar el área con la regla del punto medio En los ejercicios 61-64, utilice la regla del punto medio con $n = 4$ para aproximar el área de la región limitada por la gráfica de la función y el eje x en el intervalo dado.

61. $f(x) = x^2 + 3$, $[0, 2]$

62. $f(x) = x^2 + 4x$, $[0, 4]$

63. $f(x) = \tan x$, $\left[0, \frac{\pi}{4} \right]$

64. $f(x) = \cos x$, $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

Aproximación En los ejercicios 65 y 66, determine cuál es el mejor valor que aproxima el área de la región entre el eje x y la gráfica de la función en el intervalo indicado. (Realice la elección con base en un dibujo de la región y no efectuando cálculos.)

65. $f(x) = 4 - x^2$, $[0, 2]$

- (a) -2 (b) 6 (c) 10 (d) 3 (e) 8

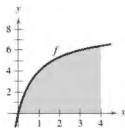
66. $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$, $[0, 4]$

- (a) 3 (b) 1 (c) -2 (d) 8 (e) 6

67. Sumas superiores e inferiores Con sus propias palabras y utilizando las figuras adecuadas, describa los métodos de las sumas superior e inferior en la aproximación del área de una región.

68. Área de una región plana Proporcione la definición del área de una región en el plano.

69. **Razonamiento gráfico** Considere la región delimitada por la gráfica de $f(x) = 8x/(x+1)$, $x=0$, $x=4$ y $y=0$, como se muestra en la figura.



- (a) Redibuje la figura, trace y sombree los rectángulos que representan a la suma inferior cuando $n=4$. Encuentre esta suma inferior.
- (b) Redibuje la figura, trace y sombree los rectángulos que representan la suma superior cuando $n=4$. Determine esta suma superior.
- (c) Redibuje la figura, trace y sombree los rectángulos cuyas alturas se determinan mediante los valores funcionales en el punto medio de cada subintervalo cuando $n=4$. Determine esta suma utilizando la regla del punto medio.
- (d) Compruebe las siguientes fórmulas al aproximar el área de la región utilizando n subintervalos de igual ancho.

$$\text{Suma inferior: } s(n) = \sum_{i=1}^n f\left[\left(i-1\right)\frac{\Delta}{n}\right]\left(\frac{\Delta}{n}\right)$$

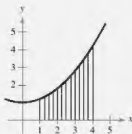
$$\text{Suma superior: } S(n) = \sum_{i=1}^n f\left[\left(i\right)\frac{\Delta}{n}\right]\left(\frac{\Delta}{n}\right)$$

$$\text{Regla del punto medio: } M(n) = \sum_{i=1}^n f\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{\Delta}{n}\right]\left(\frac{\Delta}{n}\right)$$

- HP** (e) Utilice una herramienta de graficación y las fórmulas del inciso (d) para completar la tabla.
- $S(n)$ y $M(n)$ para $n=4, 8, 20, 100$ y 200 .
- (f) Explique por qué $s(n)$ aumenta y $S(n)$ disminuye para valores recientes de n , como se muestra en la tabla en el inciso (e).



70. ¿CÓMO LO VE? La función que se muestra en la gráfica siguiente es creciente en el intervalo $[1, 4]$. El intervalo se divide en 12 subintervalos.



- (a) ¿Cuáles son los puntos terminales izquierdos del primer y último intervalos?
- (b) ¿Cuáles son los puntos terminales derechos de los primeros dos subintervalos?
- (c) ¿Cuándo se usan los puntos terminales derechos, se trazan rectángulos arriba o debajo de las gráficas de la función?
- (d) ¿Qué se puede concluir acerca de las alturas de los rectángulos si una función es constante en el intervalo dado?

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 71 y 72, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o proporcione un ejemplo que lo demuestre.

71. La suma de los primeros n enteros positivos es $n(n+1)/2$.
72. Si f es continua y no negativa sobre $[a, b]$, entonces los límites cuando $n \rightarrow \infty$ de su suma inferior $s(n)$ y de su suma superior $S(n)$ existen ambos y son iguales.
73. **Redacción** Utilice la figura para escribir un pequeño párrafo donde explique por qué la fórmula $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ es válida para todos los enteros positivos n .

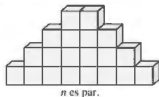


Figura para 73



Figura para 74

74. **Razonamiento gráfico** Considere un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio r . Una los vértices del polígono al centro del círculo, formando n triángulos congruentes (vea la figura).
- (a) Determine el ángulo central θ en términos de n .
- (b) Demuestre que el área de cada triángulo es $\frac{1}{2}r^2 \sin \theta$.
- (c) Sea A_n la suma de las áreas de los n triángulos. Encuentre $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.
75. **Blques de construcción** Un niño coloca n bloques cúbicos en una hilera para formar la base de un diseño triangular (vea la figura). Cada hilera sucesiva contiene dos bloques menos que la hilera precedente. Encuentre una fórmula para el número de bloques utilizados en el diseño. (*Sugerencia:* El número de bloques de construcción en el diseño depende de si n es par o impar.)



76. **Demostración** Demuestre cada fórmula mediante inducción matemática. (Quizá se necesite revisar el método de prueba por inducción en un texto de precálculo.)

$$(a) \sum_{i=1}^n 2i = n(n+1) \quad (b) \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

DESAFÍO DEL EXAMEN PUTNAM

77. Un dardo, lanzado al azar, incide sobre un blanco cuadrado. Suponiendo que cualesquiera de las dos partes del blanco de igual área son igualmente probables de ser golpeadas por el dardo, encuentre la probabilidad de que el punto de incidencia sea más cercano al centro que a cualquier borde. Escriba la respuesta en la forma $(a\sqrt{b} + c)/d$, donde a, b, c y d son enteros positivos.

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.
© The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

1.2 Sumas de Riemann y la integral definida

- Entender la definición de una suma de Riemann
- Hallar una integral definida utilizando límites.
- Calcular una integral definida utilizando las propiedades de las integrales definidas.

Sumas de Riemann

En la definición de área dada en la sección 1.1, las particiones tenían subintervalos de igual ancho. Esto se hizo solo por conveniencia de cálculo. El siguiente ejemplo muestra que no es necesario tener subintervalos de igual ancho.

EJEMPLO 1 Una partición con subintervalos de anchos desiguales

Considere la región acotada por la gráfica de

$$f(x) = \sqrt{x}$$

y el eje x para $0 \leq x \leq 1$, como se muestra en la figura 1.14. Encuentre el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

donde c_i es el punto terminal derecho de la partición dada por $C_i = i^2/n^2$ y Δx_i es el ancho del i -ésimo intervalo.

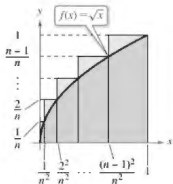
Solución El ancho del i -ésimo intervalo está dado por

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= \frac{i^2}{n^2} - \frac{(i-1)^2}{n^2} \\ &= \frac{i^2 - i^2 + 2i - 1}{n^2} \\ &= \frac{2i - 1}{n^2}. \end{aligned}$$

Por tanto, el límite es

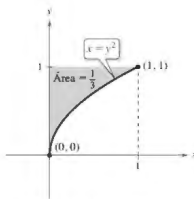
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i^2}{n^2}} \left(\frac{2i-1}{n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (2i^2 - i) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left[2 \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) - \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6n^3} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

De acuerdo con el ejemplo 7 de la sección 1.1, sabe que la región mostrada en la figura 1.15 tiene un área de $\frac{1}{3}$. Debido a que el cuadrado acotado por $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$ tiene un área de 1, puede concluir que el área de la región que se muestra en la figura 1.14 es $\frac{2}{3}$. Esto concuerda con el límite que encontré en el ejemplo 1, aun cuando en ese ejemplo utilizó una partición con subintervalos de anchos desiguales. La razón por la que esta partición particular da el área apropiada es que cuando n crece, el ancho del subintervalo más grande tiende a cero. Esta es la característica clave del desarrollo de las integrales definidas.



Los subintervalos no tienen anchos iguales.

Figura 1.14



El área de la región acotada por la gráfica de $x = y^2$ y el eje y para $0 \leq y \leq 1$ es $\frac{1}{3}$.

Figura 1.15



GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866)

El matemático alemán Riemann, realizó su trabajo más notable en las áreas de la geometría no euclidiana, ecuaciones diferenciales, y la teoría de números. Fueron los resultados de Riemann en física y matemáticas los que conformaron la estructura en la que se basa la teoría de la relatividad general de Einstein.

Consulte LarsonCalculus.com para leer más de esta biografía.

En la sección 1.1 se utilizó el límite de una suma para definir el área de una región en el plano. La determinación del área por este medio es solo una de las *muchas* aplicaciones que implican el límite de una suma. Un enfoque similar puede utilizarse para determinar cantidades diversas como longitudes de arco, valores medios, centroides, volúmenes, trabajo y áreas de superficie. La siguiente definición se nombró en honor a Georg Friedrich Bernhard Riemann. Aunque la integral definida se había utilizado con anterioridad, fue Riemann quien generalizó el concepto para cubrir una categoría más amplia de funciones.

En la siguiente definición de una suma de Riemann, observe que la función f no tiene otra restricción que haber sido definida en el intervalo $[a, b]$. (En la sección 1.1, la función f se supuso continua y no negativa, debido a que se trabajó con un área bajo una curva.)

Definición de suma de Riemann

Sea f definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea Δ una partición de $[a, b]$ dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

donde Δx_i es el ancho del i -ésimo subintervalo

$$[x_{i-1}, x_i] \quad i\text{-ésimo subintervalo}$$

Si c_i es cualquier punto en el i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ entonces la suma

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i, \quad x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

se denomina **suma de Riemann** de f para la partición Δ . (Las sumas de la sección 1.1 son ejemplos de sumas de Riemann, pero hay sumas de Riemann más generales que las cubiertas aquí.)

El ancho del subintervalo más grande de la partición Δ es la **norma** de la partición y se denota por medio de $\|\Delta\|$. Si todos los intervalos tienen el mismo ancho, la partición es **regular** y la norma se denota mediante

$$\|\Delta\| = \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{Partición ordinaria}$$

En una partición general, la norma se relaciona con el número de subintervalos en $[a, b]$ de la siguiente manera.

$$\frac{b-a}{\|\Delta\|} \leq n \quad \text{Partición general}$$

Por tanto, el número de subintervalos en una partición tiende a infinito cuando la norma de la partición tiende a cero. Esto es, $\|\Delta\| \rightarrow 0$ implica que $n \rightarrow \infty$.

La afirmación recíproca de este enunciado no es cierta. Por ejemplo, sea Δ_n la partición del intervalo $[0, 1]$ dado por

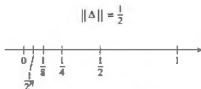
$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}} < \dots < \frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1.$$

Como se muestra en la figura 1.16, para cualquier valor positivo de n , la norma de la partición Δ_n es $\frac{1}{2^n}$. Por tanto, hacer que n tienda a infinito no obliga a que $\|\Delta\|$ se aproxime a 0. En una partición regular, sin embargo, los enunciados

$$\|\Delta\| \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad n \rightarrow \infty$$

son equivalentes.

INTERFOTO/Alamy



$n \rightarrow \infty$ no implica que $\|\Delta\| \rightarrow 0$.

Figura 1.16

■ PARA INFORMACIÓN ADICIONAL

Para obtener más información acerca de la historia de la integral definida, consulte el artículo "The Evolution of Integration", de A. Shenitzer y J. Steprans, en *The American Mathematical Monthly*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

La integral definida

Para definir la integral definida, considere el siguiente límite

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = L.$$

Afirmar que este límite existe, significa que hay un número real L , tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda partición de $\|\Delta\| < \delta$, se deduce que

$$\left| L - \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \right| < \varepsilon$$

a pesar de cualquier elección de c_i en el i -ésimo subintervalo de cada partición de Δ .

Definición de una integral definida

Si f se define en el intervalo cerrado $[a, b]$ y el límite de las sumas de Riemann sobre las particiones Δ

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

existe (como se describió antes), entonces f es **integrable** en $[a, b]$ y el límite se denota por

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

El límite recibe el nombre de **integral definida** de f de a a b . El número a es el **límite inferior** de integración, y en número b es el **límite superior** de integración.

..... ▷
 **COMENTARIO Más adelante en esta unidad, aprenderá métodos convenientes para calcular $\int_a^b f(x) dx$ para funciones continuas. Por ahora, debe usar la definición de límite.

No es una coincidencia que la notación para integrales definidas sea similar a la que se utilizó para las integrales indefinidas. En la siguiente sección verá por qué, cuando se introduzca el teorema fundamental del cálculo. Por ahora, es importante observar que las integrales definidas y las integrales indefinidas son identidades diferentes. Una integral definida es un *número*, en tanto que una integral indefinida es una *familia de funciones*.

A pesar de que las sumas de Riemann estaban definidas por funciones con muy pocas restricciones, una condición suficiente para que una función f sea integrable en $[a, b]$ es que sea continua en $[a, b]$. Una demostración de este teorema está más allá del objetivo de este texto.

TEOREMA 1.3 Continuidad implica integrabilidad

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$. Es decir $\int_a^b f(x) dx$ existe.

Exploración

Inverso del teorema 1.3 ¿Es verdadero el inverso del teorema 1.3? Es decir, si una función es integrable, ¿tiene que ser continua? Explique su razonamiento y proporcione ejemplos.

Describa las relaciones entre continuidad, derivabilidad e integrabilidad. ¿Cuál es la condición más fuerte? ¿Cuál es la más débil? ¿Qué condiciones implican otras condiciones?

EJEMPLO 2

Evaluar una integral definida como límite

Encuentre la integral definida $\int_{-2}^1 2x \, dx$.

Solución La función $f(x) = 2x$ es integrable en el intervalo $[-2, 1]$ porque es continua en $[-2, 1]$. Además, la definición de integrabilidad implica que cualquier partición cuya norma tienda a 0 puede utilizarse para determinar el límite. Por conveniencia de cálculo, defina Δx , subdividiendo $[-2, 1]$ en n subintervalos del mismo ancho.

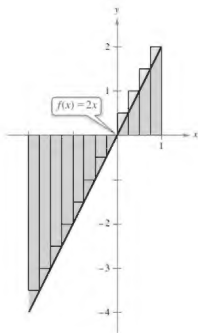
$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}.$$

Eligiendo c_i como el punto terminal derecho de cada subintervalo, obtiene

$$c_i = a + i(\Delta x) = -2 + \frac{3i}{n}.$$

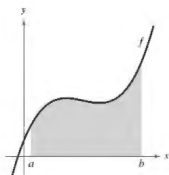
De este modo, la integral definida está dada por

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 2x \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2 \left(-2 + \frac{3i}{n} \right) \left(\frac{3}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n} \sum_{i=1}^n \left(-2 + \frac{3i}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n} \left(-2 \sum_{i=1}^n 1 + \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n i \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n} \left(-2n + \frac{3}{n} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-12 + 9 + \frac{9}{n} \right) \\ &= -3. \end{aligned}$$



Como la integral definida es negativa, no representa el área de la región.

Figura 1.17



Se puede usar una integral definida para determinar el área de la región acotada por la gráfica de f , el eje x , $x = a$ y $x = b$.

Figura 1.18

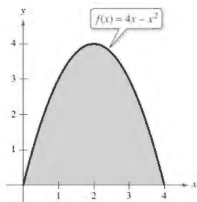
Debido a que la integral definida en el ejemplo 2 es negativa, esta *no* representa el área de la región que se muestra en la figura 1.17. Las integrales definidas pueden ser positivas, negativas o cero. Para que una integral definida sea interpretada como un área (como se definió en la sección 1.1), la función f debe ser continua y no negativa en $[a, b]$, como se establece en el siguiente teorema. La demostración de este teorema es directa: utilizar simplemente la definición de área dada en la sección 1.1, porque es una suma de Riemann.

TEOREMA 1.4 La integral definida como área de una región

Si f es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por la gráfica de f , el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$\hat{\text{Área}} = \int_a^b f(x) \, dx.$$

(Vea la figura 1.18.)



$$\text{Área} = \int_0^4 (4x - x^2) dx$$

Figura 1.19

Como un ejemplo del teorema 1.4, considere la región delimitada por la gráfica de $f(x) = 4x - x^2$

y el eje x , como se muestra en la figura 1.19. Debido a que f es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[0, 4]$, el área de la región es

$$\text{Área} = \int_0^4 (4x - x^2) dx.$$

Una técnica directa para hallar una integral definida como esta se analizará en la sección 1.4. Por ahora, se puede calcular una integral definida de dos maneras: usando la definición en términos de límites o verificando si la integral definida representa el área de una región geométrica común, tal como un rectángulo, triángulo o semicírculo.

EJEMPLO 3 Áreas de figuras geométricas comunes

Dibuje la región correspondiente a cada integral definida. A continuación, evalúe cada integral utilizando una fórmula geométrica.

a. $\int_1^3 4 dx$ b. $\int_0^3 (x + 2) dx$ c. $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$

Solución En la figura 1.20 se muestra un dibujo de cada región.

a. Esta región es un rectángulo de 4 de alto por 2 de ancho.

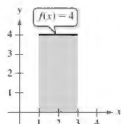
$$\int_1^3 4 dx = (\text{Área del rectángulo}) = 4(2) = 8$$

b. Esta región es un trapecioide con una altura de 3 y bases paralelas de longitudes 2 y 5. La fórmula para el área de un trapecioide es $\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$.

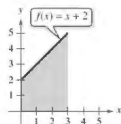
$$\int_0^3 (x + 2) dx = (\text{Área del trapecioide}) = \frac{1}{2}(3)(2 + 5) = \frac{21}{2}$$

c. Esta región es un semicírculo de radio 2. La fórmula para el área de un semicírculo es $\frac{1}{2}\pi r^2$.

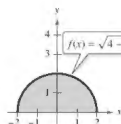
$$\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx = (\text{Área del semicírculo}) = \frac{1}{2}\pi(2^2) = 2\pi$$



(a)



(b)



(c)

Figura 1.20

La variable de integración en una integral definida algunas veces se denomina como *variable muda* porque puede ser sustituida por cualquier otra variable sin cambiar el valor de la integral. Por ejemplo, las integrales definidas

$$\int_0^3 (x + 2) dx \quad \text{y} \quad \int_0^3 (t + 2) dt$$

tienen el mismo valor.

Propiedades de la integral definida

La definición de la integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ especifica que $a < b$. Sin embargo, ahora es conveniente extender la definición para cubrir casos en los cuales $a = b$ o $a > b$. Geométricamente, las siguientes dos definiciones parecen razonables. Por ejemplo, tiene sentido definir el área de una región de ancho cero y altura finita igual a 0.

Definiciones de dos integrales definidas especiales

1. Si f está definida en $x = a$, entonces $\int_a^a f(x) dx = 0$.
2. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.

EJEMPLO 4

Calcular integrales definidas

•••► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Evalúe la integral definida.

a. $\int_{\pi}^{\pi} \sin x dx$ b. $\int_3^0 (x + 2) dx$

Solución

- a. Debido a que la función seno se define en $x = \pi$, los límites superior e inferior de integración son iguales, puede escribir

$$\int_{\pi}^{\pi} \sin x dx = 0.$$

- b. La integral $\int_3^0 (x + 2) dx$ es la misma que la dada en el ejemplo 3(b), excepto por el hecho de que los límites superior e inferior se intercambian. Debido a que la integral en el ejemplo 3(b), tiene un valor de $\frac{21}{2}$, puede escribir

$$\int_3^0 (x + 2) dx = -\int_0^3 (x + 2) dx = -\frac{21}{2}.$$

En la figura 1.21 la región más grande puede dividirse en $x = c$ en dos subregiones cuya intersección es un segmento de recta. Como el segmento de recta tiene área cero, se concluye que el área de la región más grande es igual a la suma de las áreas de las dos regiones más pequeñas.

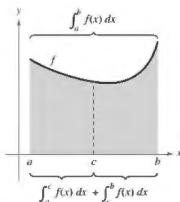


Figura 1.21

TEOREMA 1.5 Propiedad aditiva de intervalos

Si f es integrable en los tres intervalos cerrados determinados por a , b y c , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

EJEMPLO 5

Usar la propiedad aditiva de intervalos

$$\int_{-1}^1 |x| dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx \quad \text{Teorema 1.5}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 1$$

Área del triángulo

Debido a que la integral definida se describe como el límite de una suma, hereda las propiedades de la sumatoria dadas antes del teorema 1.

TEOREMA 1.6 Propiedades de la integral definida

Si f y g son integrables en $[a, b]$ y k es una constante, entonces las funciones kf y $f \pm g$ son integrables en $[a, b]$, y

- $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$

..... ▷
 *COMENTARIO Observe que la propiedad 2 del teorema 1.6 puede extenderse a cualquier número finito de funciones (vea el ejemplo 6).

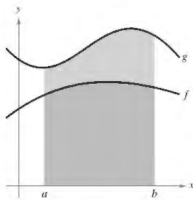
EJEMPLO 6 Evaluar una integral definida

Evalúe $\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx$ utilizando los siguientes valores

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}, \quad \int_1^3 x dx = 4, \quad \int_1^3 dx = 2$$

Solución

$$\begin{aligned} \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx &= \int_1^3 (-x^2) dx + \int_1^3 4x dx + \int_1^3 (-3) dx \\ &= -\int_1^3 x^2 dx + 4 \int_1^3 x dx - 3 \int_1^3 dx \\ &= -\left(\frac{26}{3}\right) + 4(4) - 3(2) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$



$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Figura 1.22

Si f y g son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, las siguientes propiedades son ciertas. Primero, el área de la región acotada por la gráfica de f y el eje x (entre a y b) debe ser no negativa. Segundo, esta área debe ser menor o igual que el área de la región delimitada por la gráfica de g y el eje x (entre a y b), como se muestra en la figura 1.22. Estos dos resultados se generalizan en el teorema 1.7.

TEOREMA 1.7 Conservación de desigualdades

- Si f es integrable y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $0 \leq \int_a^b f(x) dx.$
- Si f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$

En el apéndice A se da una demostración de este teorema.

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

$$27. \int_0^2 (3x + 4) dx \quad 28. \int_0^3 (8 - 2x) dx$$

$$29. \int_{-1}^1 (1 - |x|) dx \quad 30. \int_{-2}^0 (a - |x|) dx$$

$$31. \int_{-7}^7 \sqrt{49 - x^2} dx \quad 32. \int_{-2}^2 \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Usar las propiedades de las integrales definidas. En los ejercicios 33-40, evalúe la integral utilizando los siguientes valores.

$$\int_2^4 x^3 dx = 60, \quad \int_2^4 x dx = 6, \quad \int_2^4 dx = 2$$

$$33. \int_4^2 x dx \quad 34. \int_2^2 x^3 dx$$

$$35. \int_2^4 8x dx \quad 36. \int_2^4 25 dx$$

$$37. \int_2^4 (x - 9) dx \quad 38. \int_2^4 (x^3 + 4) dx$$

$$39. \int_2^4 (\frac{1}{2}x^3 - 3x + 2) dx \quad 40. \int_2^4 (10 + 4x - 3x^3) dx$$

41. Usar las propiedades de las integrales definidas. Dadas

$$\int_0^5 f(x) dx = 10 \quad \text{y} \quad \int_5^7 f(x) dx = 3$$

evalúe

$$(a) \int_0^7 f(x) dx. \quad (b) \int_5^0 f(x) dx.$$

$$(c) \int_5^7 f(x) dx. \quad (d) \int_0^5 3f(x) dx.$$

42. Usar las propiedades de las integrales definidas. Dadas

$$\int_0^3 f(x) dx = 4 \quad \text{y} \quad \int_3^6 f(x) dx = -1$$

evalúe

$$(a) \int_0^6 f(x) dx. \quad (b) \int_0^3 f(x) dx.$$

$$(c) \int_3^6 f(x) dx. \quad (d) \int_1^6 -5f(x) dx.$$

43. Usar las propiedades de integrales definidas. Dadas

$$\int_2^6 f(x) dx = 10 \quad \text{y} \quad \int_2^6 g(x) dx = -2$$

evalúe

$$(a) \int_2^6 [f(x) + g(x)] dx. \quad (b) \int_2^6 [g(x) - f(x)] dx.$$

$$(c) \int_2^6 2g(x) dx. \quad (d) \int_2^6 3f(x) dx.$$

44. Usar las propiedades de integrales definidas. Dadas

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^1 f(x) dx = 5$$

evalúe

$$(a) \int_0^1 f(x) dx. \quad (b) \int_0^1 f(x) dx - \int_{-1}^0 f(x) dx.$$

$$(c) \int_{-1}^1 3f(x) dx. \quad (d) \int_0^1 3f(x) dx.$$

45. Estimar una integral definida. Utilice la tabla de valores para determinar las estimaciones inferiores y superiores de

$$\int_0^{10} f(x) dx.$$

Suponga que f es una función decreciente.

x	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	32	24	12	-4	-20	-36

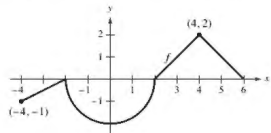
46. Estimar una integral definida. Utilice la tabla de valores para calcular

$$\int_0^6 f(x) dx.$$

Utilice tres subintervalos iguales y (a) los extremos izquierdos (b) los extremos derechos y (c) los puntos medios. Si f es una función creciente, ¿cómo se compara cada estimación con el valor real? Explique su razonamiento.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-6	0	8	18	30	50	80

47. Piénselo. La gráfica de f está compuesta por segmentos de recta y un semicírculo como se muestra en la figura. Evalúe cada integral definida utilizando fórmulas geométricas.

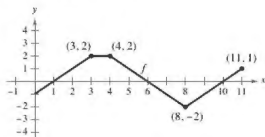


$$(a) \int_0^2 f(x) dx \quad (b) \int_2^6 f(x) dx$$

$$(c) \int_{-4}^2 f(x) dx \quad (d) \int_{-4}^6 f(x) dx$$

$$(e) \int_{-4}^6 |f(x)| dx \quad (f) \int_{-4}^6 [f(x) + 2] dx$$

48. Piénselo La gráfica de f consta de segmentos de recta, como se muestra en la figura. Evalúe cada integral definida utilizando fórmulas geométricas.



(a) $\int_0^1 -f(x) dx$ (b) $\int_3^4 3f(x) dx$
 (c) $\int_0^7 f(x) dx$ (d) $\int_5^{11} f(x) dx$
 (e) $\int_0^{11} f(x) dx$ (f) $\int_4^{10} f(x) dx$

49. Piénselo Considere la función f que es continua en el intervalo $[-5, 5]$ y para la cual

$$\int_0^5 f(x) dx = 4.$$

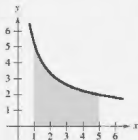
Evalúe cada integral.

(a) $\int_0^5 [f(x) + 2] dx$ (b) $\int_{-2}^3 f(x + 2) dx$
 (c) $\int_{-5}^5 f(x) dx$ (f es par.) (d) $\int_{-5}^5 f(x) dx$ (f es impar.)



50.

¿CÓMO LO VE? Utilice la figura para llenar los espacios con el símbolo $<$, $>$ o $=$. Explique su razonamiento.



- (a) El intervalo $[1, 5]$ se divide en n subintervalos de igual ancho. Δx y x_i es el punto terminal izquierdo del i -ésimo subintervalo.

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad \square \quad \int_1^5 f(x) dx$$

- (b) El intervalo $[1, 5]$ se divide en n subintervalos de igual ancho Δx y x_i es el punto terminal derecho del i -ésimo subintervalo.

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad \square \quad \int_1^5 f(x) dx$$

51. Piénselo Una función f se define a continuación. Utilice fórmulas geométricas para encontrar $\int_0^6 f(x) dx$.

$$f(x) = \begin{cases} 4, & x < 4 \\ x, & x \geq 4 \end{cases}$$

52. Piénselo Una función f se define a continuación. Utilice fórmulas geométricas para encontrar $\int_0^{12} f(x) dx$.

$$f(x) = \begin{cases} 6, & x > 6 \\ -\frac{1}{2}x + 9, & x \leq 6 \end{cases}$$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

Aproximación En los ejercicios 53-56, determine cuáles valores se aproximan mejor a la integral definida. Realice la selección con base en un dibujo.

53. $\int_0^4 \sqrt{x} dx$

- (a) 5 (b) -3 (c) 10 (d) 2 (e) 8

54. $\int_0^1 4 \cos \pi x dx$

- (a) 4 (b) $\frac{4}{3}$ (c) 16 (d) 2π (e) -6

55. $\int_0^1 2 \sin \pi x dx$

- (a) 6 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 4 (d) $\frac{5}{4}$

56. $\int_0^9 (1 + \sqrt{x}) dx$

- (a) -3 (b) 9 (c) 27 (d) 3

57. Determinar la integrabilidad Determine si la función

$$f(x) = \frac{1}{x-4}$$

es integrable en el intervalo $[3, 5]$. Explique

58. Encontrar una función Proporcione una función que sea integrable en el intervalo $[-1, 1]$, pero no continua en $[-1, 1]$.

Encontrar valores En los ejercicios 59-62, encuentre posibles valores de a y b que hagan el enunciado correcto. Si es posible, use una gráfica para sustentar su respuesta. (Aquí puede haber más de una respuesta correcta.)

59. $\int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

60. $\int_{-3}^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^6 f(x) dx$

61. $\int_a^b \sin x dx < 0$

62. $\int_a^b \cos x dx = 0$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 63-68, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, dé un ejemplo que demuestre que es falso.

63. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

64. $\int_a^b f(x)g(x) dx = \left[\int_a^b f(x) dx \right] \left[\int_a^b g(x) dx \right]$

65. Si la norma de una partición tiende a cero, entonces el número de subintervalos tiende a infinito.

66. Si f es creciente en $[a, b]$, entonces el valor mínimo de $f(x)$ en $[a, b]$ es $f(a)$.

67. El valor de

$$\int_a^b f(x) dx$$

debe ser positivo.

68. El valor de

$$\int_2^2 \sin(x^2) dx$$

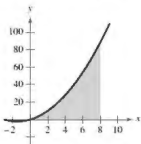
es 0.

69. Encontrar la suma de Riemann Encuentre la suma de Riemann para $f(x) = x^2 + 3x$ en el intervalo $[0, 8]$, donde

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 7 \quad \text{y} \quad x_4 = 8$$

y donde

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 5 \quad \text{y} \quad c_4 = 8.$$

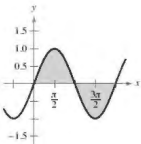


70. Encontrar la suma de Riemann Encuentre la suma de Riemann para $f(x) = \sin x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, donde

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{\pi}{3}, \quad x_3 = \pi \quad \text{y} \quad x_4 = 2\pi,$$

y donde

$$c_1 = \frac{\pi}{6}, \quad c_2 = \frac{\pi}{3}, \quad c_3 = \frac{2\pi}{3} \quad \text{y} \quad c_4 = \frac{3\pi}{2}.$$



71. Demostración Demuestre que $\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

72. Demostración Demuestre que $\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$.

73. Para pensar Determine si la función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ es racional} \\ 0, & x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es integrable en el intervalo $[0, 1]$. Explique.

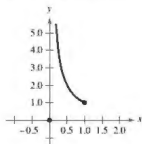
74. Encontrar la integral definida La función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

está definida en $[0, 1]$, como se muestra en la figura. Demuestre que

$$\int_0^1 f(x) dx$$

no existe. ¿Por qué lo anterior no contradice al teorema 1.4?



75. Determinar valores Encuentre las constantes a y b que maximizan el valor de

$$\int_a^b (1 - x^2) dx.$$

Explique su razonamiento.

76. Función de paso Evalúe, si es posible, la integral

$$\int_0^2 \lfloor x \rfloor dx.$$

77. Usar las sumas de Riemann Determine

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2]$$

utilizando una suma de Riemann apropiada.

DESAFÍO DEL EXAMEN PUTNAM

78. Para cada función continua $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, sean

$$I(f) = \int_0^1 x^2 f(x) dx \quad \text{y} \quad J(f) = \int_0^1 x(f(x))^2 dx.$$

Encuentre el valor máximo de $I(f) - J(f)$ en todas las funciones f .

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

1.3 La antiderivada o integral indefinida

- Escribir la solución general de una ecuación diferencial y usar la notación de integral indefinida para antiderivadas.
- Utilizar las reglas de la integración básicas para encontrar antiderivadas.
- Encontrar una solución particular de una ecuación diferencial.

Antiderivadas o primitivas

Para encontrar una función F cuya derivada es $f(x) = 3x^2$, podría usar lo que sabe de derivadas, para concluir que

$$F(x) = x^3 \text{ ya que } \frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2.$$

La función F es una *antiderivada* de f .

Definición de una antiderivada (primitiva)

Se dice que una función F es una **antiderivada** de f , en un intervalo I , si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I .

Note que F se llama *una* antiderivada de f , en vez de *la* antiderivada de f . Para entender por qué, observe que

$$F_1(x) = x^3, \quad F_2(x) = x^3 - 5 \quad \text{y} \quad F_3(x) = x^3 + 97$$

son todas antiderivadas de $f(x) = 3x^2$. De hecho, para cualquier constante C , la función dada por $F(x) = x^3 + C$ es una antiderivada de f .

TEOREMA 1.8 Representación de antiderivadas

Si F es una antiderivada de f en un intervalo I , entonces G es una antiderivada de f en el intervalo I si y solo si G es de la forma $G(x) = F(x) + C$, para todo x en I , donde C es una constante.

Demostración La demostración del teorema 1.1 en un sentido es directa. Esto es, si $G(x) = F(x) + C$, $F'(x) = f(x)$ y C es constante, entonces

$$G'(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C] = F'(x) + 0 = f(x).$$

Para demostrar este teorema en otro sentido, suponga que G es una antiderivada de f . Defina una función H tal que

$$H(x) = G(x) - F(x).$$

Para cualesquiera dos puntos a y b ($a < b$) en el intervalo, H es continua sobre $[a, b]$ y derivable dentro de (a, b) . Por el teorema del valor medio,

$$H'(c) = \frac{H(b) - H(a)}{b - a}$$

para algún c en (a, b) . Sin embargo, $H'(c) = 0$, por consiguiente $H(a) = H(b)$. Dado que a y b son puntos arbitrarios en el intervalo, usted sabe que H es una función constante C . Así, $G(x) - F(x) = C$ y por esto $G(x) = F(x) + C$.

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

Exploración

Determinación de antiderivadas Para cada derivada describa la función original F .

a. $F'(x) = 2x$

b. $F'(x) = x$

c. $F'(x) = x^2$

d. $F'(x) = \frac{1}{x^2}$

e. $F'(x) = \frac{1}{x^3}$

f. $F'(x) = \cos x$

¿Qué estrategia usó para determinar F ?

.....▶
 * * * **COMENTARIO** La antiderivada también se conoce como primitiva de una función.

Si utiliza el teorema 1.8, puede representar la familia completa de antiderivadas de una función agregando una constante a una antiderivada *conocida*. Por ejemplo, sabiendo que

$$D_x[x^2] = 2x$$

puede representar la familia de *todas* las antiderivadas de $f(x) = 2x$ por

$$G(x) = x^2 + C. \quad \text{Familia de todas las antiderivadas de } f(x) = 2x$$

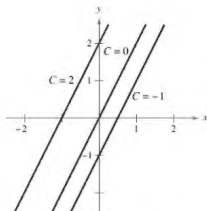
donde C es constante. La constante C recibe el nombre de **constante de integración**. La familia de funciones representadas por G es la **antiderivada general** de f , y $G(x) = x^2 + C$ es la **solución general** de la *ecuación diferencial*.

$$G'(x) = 2x \quad \text{Ecuación diferencial}$$

Una **ecuación diferencial** en x y y es una ecuación que incluye a x , y y a las derivadas de y . Por ejemplo,

$$y' = 3x \text{ y } y' = x^2 + 1$$

son ejemplos de ecuaciones diferenciales.



Funciones de la forma $y = 2x + C$.
Figura 1.23

EJEMPLO 1 Solución de una ecuación diferencial

Determine la solución general de la ecuación diferencial $y' = 2$.

Solución Para empezar, determine una función cuya derivada es 2. Una función con esta característica es

$$y = 2x. \quad 2x \text{ es una antiderivada de } 2.$$

Ahora bien, utilice el teorema 1.8 para concluir que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = 2x + C. \quad \text{Solución general}$$

En la figura 1.23 se muestran las gráficas de varias funciones de la forma $y = 2x + C$. ■

Cuando resuelva una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

es conveniente escribirla en la forma diferencial equivalente

$$dy = f(x) dx.$$

La operación para determinar todas las soluciones de esta ecuación se denomina **antidiferenciación** (o **integración indefinida**) y se denota mediante un signo integral \int . La solución se denota mediante

$$y = \int f(x) dx = F(x) + C.$$

Variable de integración Constante de integración
Integrando Antiderivada de $f(x)$

La expresión $\int f(x) dx$ se lee como la *antiderivada de f respecto a x* . De tal manera, la diferencial de dx sirve para identificar a x como la variable de integración. El término **integral indefinida** es sinónimo de antiderivada.

..... ▷
 ••• **COMENTARIO** Un sinónimo de antiderivada es integral indefinida.

..... ▷
 ••• **COMENTARIO** En este texto, la notación $\int f(x) dx = F(x) + C$ significa que F es una antiderivada de f en un intervalo.

Reglas básicas de integración indefinida

La naturaleza inversa de la integración y la derivación puede comprobarse sustituyendo $F'(x)$ por $f(x)$ en la definición de integración indefinida para obtener

$$\int F'(x) dx = F(x) + C.$$

La integración es la "inversa" de la derivación.

Además, si $\int f(x) dx = F(x) + C$, entonces

$$\frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = f(x).$$

La derivación es la "inversa" de la integración.

Estas dos ecuaciones le permiten obtener directamente fórmulas de integración a partir de fórmulas de derivación, como se muestra en el siguiente resumen.

Reglas básicas de integración

Fórmula de derivación

$$\frac{d}{dx} [C] = 0$$

$$\frac{d}{dx} [kx] = k$$

$$\frac{d}{dx} [kf(x)] = k f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} [f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} [x^n] = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} [\sin x] = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} [\cos x] = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} [\tan x] = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} [\sec x] = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx} [\cot x] = -\operatorname{csc}^2 x$$

$$\frac{d}{dx} [\csc x] = -\csc x \cot x$$

Fórmula de integración indefinida

$$\int 0 dx = C$$

$$\int k dx = kx + C$$

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \quad \text{Regla de la potencia}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$\int \operatorname{csc}^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

Observe que la regla de la potencia para la integración tiene la restricción $n \neq -1$. La evaluación de

$$\int \frac{1}{x} dx$$

.....▶
 •••COMENTARIO En el ejemplo 2, advierta que el patrón general de integración es similar al de la derivación.

Integral original



Reescribir



Integrar



Simplificar

EJEMPLO 2 Describir antiderivas

$$\begin{aligned} \int 3x \, dx &= 3 \int x \, dx && \text{Regla del múltiplo constante} \\ &= 3 \int x^1 \, dx && \text{Reescriba } x \text{ como } x^1. \\ &= 3 \left(\frac{x^2}{2} \right) + C && \text{Regla de potencia } (n = 1) \\ &= \frac{3}{2} x^2 + C && \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

Las antiderivas de $3x$ son la forma $\frac{3}{2}x^2 + C$, donde C es cualquier constante. ■

Cuando se evalúan integrales indefinidas, una aplicación estricta de las reglas básicas de integración tiende a producir complicadas constantes de integración. En el caso del ejemplo 2, la solución se podría haber escrito

$$\int 3x \, dx = 3 \int x \, dx = 3 \left(\frac{x^2}{2} + C \right) = \frac{3}{2} x^2 + 3C.$$

Sin embargo, como C representa *cualquier* constante, es problemático e innecesario escribir $3C$ como la constante de integración. Por tanto, $\frac{3}{2}x^2 + 3C$ se escribe en la forma más simple, $\frac{3}{2}x^2 + C$.

▶ TECNOLOGÍA Algunos programas de software, como Maple y Mathematica, son capaces de efectuar simbólicamente la integración. Si tiene acceso a estas herramientas de integración simbólica, utilícelas para calcular las integrales indefinidas del ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Reescribir antes de integrar

.....▶ Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Integral original	Reescriba	Integre	Simplifique
a. $\int \frac{1}{x^3} \, dx$	$\int x^{-3} \, dx$	$\frac{x^{-2}}{-2} + C$	$-\frac{1}{2x^2} + C$
b. $\int \sqrt{x} \, dx$	$\int x^{1/2} \, dx$	$\frac{x^{3/2}}{3/2} + C$	$\frac{2}{3} x^{3/2} + C$
c. $\int 2 \sin x \, dx$	$2 \int \sin x \, dx$	$2(-\cos x) + C$	$-2 \cos x + C$

EJEMPLO 4 Integrar funciones polinomiales

.....▶
 •••COMENTARIO Las reglas de integración básicas le permiten integrar cualquier función polinomial.

$$\begin{aligned} \text{a. } \int dx &= \int 1 \, dx && \text{Se entiende que el integrando es uno.} \\ &= x + C && \text{Integre.} \\ \text{b. } \int (x + 2) \, dx &= \int x \, dx + \int 2 \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} + C_1 + 2x + C_2 && \text{Integre.} \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + C && C = C_1 + C_2 \end{aligned}$$

La segunda línea en la solución suele omitirse.

$$\begin{aligned} \text{c. } \int (3x^4 - 5x^2 + x) \, dx &= 3 \left(\frac{x^5}{5} \right) - 5 \left(\frac{x^3}{3} \right) + \frac{x^2}{2} + C \\ &= \frac{3}{5} x^5 - \frac{5}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + C \end{aligned}$$

.....▶
 •••COMENTARIO Antes de comenzar la serie de ejercicios, asegúrese de realizar uno de los pasos más importantes en la integración que es *reescribir el integrando* en una forma que se ajuste a una de las reglas básicas de integración.

EJEMPLO 5 Reescribir antes de integrar

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx &= \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= \int (x^{1/2} + x^{-1/2}) dx \\ &= \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x}(x+3) + C \end{aligned}$$

Reescriba como dos fracciones.

Reescriba con exponentes fraccionarios.

Integre.

Simplifique.

Cuando integre cocientes, no debe integrar numerador y denominador por separado. Esto es incorrecto tanto en la integración como en la derivación. Al respecto, observe el ejemplo 5, cerciórese de entender que

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3}\sqrt{x}(x+3) + C$$

no es lo mismo que

$$\frac{\int (x+1) dx}{\int \sqrt{x} dx} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x + C_1}{\frac{2}{3}\sqrt{x} + C_2}$$

EJEMPLO 6 Reescribir antes de integrar

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx &= \int \left(\frac{1}{\cos x} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right) dx \\ &= \int \sec x \tan x dx \\ &= \sec x + C \end{aligned}$$

Reescriba como un producto.

Reescriba utilizando identidades trigonométricas.

Integre.

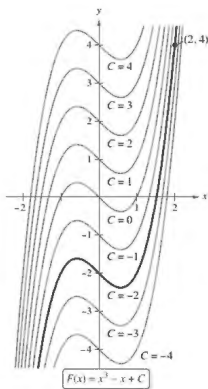
EJEMPLO 7 Reescribir antes de integrar

Integral original	Reescriba	Integre	Simplifique
a. $\int \frac{2}{\sqrt{x}} dx$	$2 \int x^{-1/2} dx$	$2 \left(\frac{x^{1/2}}{1/2} \right) + C$	$4x^{1/2} + C$
b. $\int (t^2 + 1)^2 dt$	$\int (t^4 + 2t^2 + 1) dt$	$\frac{t^5}{5} + 2 \left(\frac{t^3}{3} \right) + t + C$	$\frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + t + C$
c. $\int \frac{x^3 + 3}{x^2} dx$	$\int (x + 3x^{-2}) dx$	$\frac{x^2}{2} + 3 \left(\frac{x^{-1}}{-1} \right) + C$	$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x} + C$
d. $\int \sqrt[3]{x}(x-4) dx$	$\int (x^{4/3} - 4x^{1/3}) dx$	$\frac{x^{7/3}}{7/3} - 4 \left(\frac{x^{4/3}}{4/3} \right) + C$	$\frac{3}{7}x^{7/3} - 3x^{4/3} + C$

Al hacer los ejercicios, tenga en cuenta que puede comprobar su respuesta a un problema de antiderivación, derivando. Por ejemplo, en el ejemplo 7(a), puede comprobar que $4x^{1/2} + C$ es la antiderivada correcta derivando la respuesta para obtener

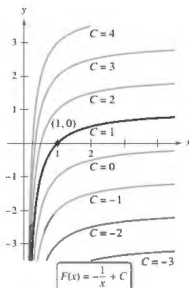
$$D_x[4x^{1/2} + C] = 4 \left(\frac{1}{2} \right) x^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Utilice la derivación para comprobar la antiderivada.



La solución particular que satisface la condición inicial $F(2) = 4$ es $F(x) = x^3 - x - 2$.

Figura 1.24



La solución particular que satisface la condición inicial $F(1) = 0$ es $F(x) = -(1/x) + 1, x > 0$.

Figura 1.25

Condiciones iniciales y soluciones particulares

Ha visto que la ecuación $y = \int f(x) dx$ tiene muchas soluciones (cada una difiere de las otras en una constante). Eso significa que las gráficas de cualesquiera dos antiderivadas de f son traslaciones verticales una de otra. Por ejemplo, la figura 1.24 muestra las gráficas de varias de las antiderivadas de la forma

$$y = \int (3x^2 - 1) dx = x^3 - x + C \quad \text{Solución general}$$

para diversos valores enteros de C . Cada una de estas antiderivadas es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1.$$

En muchas aplicaciones de la integración, se le da suficiente información para determinar una **solución particular**. Para hacer esto, solo necesita conocer el valor de $y = F(x)$ para un valor de x . Esta información recibe el nombre de **condición inicial**. Por ejemplo, en la figura 1.24, solo una de las curvas pasa por el punto $(2, 4)$. Para encontrar esta curva, utilice la solución general

$$F(x) = x^3 - x + C \quad \text{Solución general}$$

y la condición inicial

$$F(2) = 4. \quad \text{Condición inicial}$$

Utilizando la condición inicial en la solución general, puede determinar que

$$F(2) = 8 - 2 + C = 4$$

lo que implica que $C = -2$. Por tanto obtiene

$$F(x) = x^3 - x - 2. \quad \text{Solución particular}$$

EJEMPLO 8 Determinar una solución particular

Encuentre la solución general de

$$F'(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$$

y determine la solución particular que satisface la condición inicial $F(1) = 0$.

Solución Para encontrar la solución general, integre para obtener

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{x^2} dx && F(x) = \int F'(x) dx \\ &= \int x^{-2} dx && \text{Reescriba como una potencia.} \\ &= \frac{x^{-1}}{-1} + C && \text{Integre.} \\ &= -\frac{1}{x} + C, \quad x > 0. && \text{Solución general} \end{aligned}$$

Utilizando la condición inicial $F(1) = 0$, resuelva para C de la manera siguiente.

$$F(1) = -\frac{1}{1} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

Por tanto, la solución particular, como se muestra en la figura 1.25, es

$$F(x) = -\frac{1}{x} + 1, \quad x > 0. \quad \text{Solución particular}$$

Hasta ahora, en esta sección ha utilizado x como variable de integración. En las aplicaciones, a menudo es conveniente utilizar una variable distinta. Así, en el siguiente ejemplo, la variable de integración es el tiempo t .

EJEMPLO 9 Solucionar un problema de movimiento vertical

Una pelota se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 64 pies por segundo a partir de una altura inicial de 80 pies.

- Encuentre la función posición que expresa la altura s en una función del tiempo t .
- ¿Cuándo llegará la pelota al suelo?

Solución

- Considere que $t = 0$ representa el tiempo inicial. Las dos condiciones iniciales indicadas pueden escribirse de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} s(0) &= 80 && \text{La altura inicial es 80 pies.} \\ s'(0) &= 64 && \text{La velocidad inicial es de 64 pies por segundo.} \end{aligned}$$

Utilizando -32 pies/ s^2 como la aceleración de la gravedad, puede escribir

$$\begin{aligned} s''(t) &= -32 \\ s'(t) &= \int s''(t) dt = \int -32 dt = -32t + C_1. \end{aligned}$$

Empleando la velocidad inicial obtiene $s'(0) = 64 = -32(0) + C_1$, lo cual implica que $C_1 = 64$. Después, integrando $s'(t)$, obtiene

$$s(t) = \int s'(t) dt = \int (-32t + 64) dt = -16t^2 + 64t + C_2.$$

Al utilizar la altura inicial, encuentra que

$$s(0) = 80 = -16(0^2) + 64(0) + C_2$$

lo que implica que $C_2 = 80$. De ese modo, la función posición es

$$s(t) = -16t^2 + 64t + 80. \quad \text{Vea la figura 1.26.}$$

- Utilizando la función posición que encontró en el inciso (a), es posible determinar el tiempo en que la pelota golpea el suelo al resolver la ecuación $s(t) = 0$.

$$\begin{aligned} -16t^2 + 64t + 80 &= 0 \\ -16(t+1)(t-5) &= 0 \\ t &= -1, 5 \end{aligned}$$

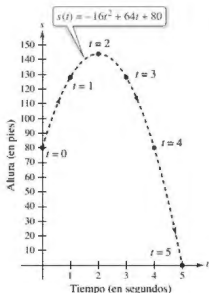
Como t debe ser positivo, puede concluir que la pelota golpea el suelo 5 segundos después de haber sido lanzada.

En el ejemplo 9, observe que la función posición tiene la forma

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$

donde $g = -32$, v_0 es la velocidad inicial y s_0 es la altura inicial.

El ejemplo 9 muestra cómo utilizar el cálculo para analizar problemas de movimiento vertical en los que la aceleración es determinada por una fuerza de gravedad. Puede utilizar una estrategia similar para analizar otros problemas de movimiento rectilíneo (vertical u horizontal) en los que la aceleración (o desaceleración) es el resultado de alguna otra fuerza, como verá en los ejercicios 61-68.



Altura de una pelota en el tiempo t .
Figura 1.26

1.3 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impiar.

Integrar y derivar En los ejercicios 1 y 2, compruebe la expresión demostrando que la derivada del lado derecho es igual al integrando del lado izquierdo.

1. $\int \left(-\frac{6}{x^4} \right) dx = \frac{2}{x^3} + C$

2. $\int \left(8x^3 + \frac{1}{2x^2} \right) dx = 2x^4 - \frac{1}{2x} + C$

Resolver una ecuación diferencial En los ejercicios 3-6, encuentre la solución general de la ecuación diferencial y compruebe el resultado mediante derivación.

3. $\frac{dy}{dt} = 9t^2$

4. $\frac{dy}{dt} = 5$

5. $\frac{dy}{dx} = x^{3/2}$

6. $\frac{dy}{dx} = 2x^{-3}$

Reescribir antes de integrar En los ejercicios 7-10, complete la tabla para encontrar la integral indefinida.

Integral original	Reescribir	Integrar	Simplificar
7. $\int \sqrt{x} dx$			
8. $\int \frac{1}{4x^2} dx$			
9. $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$			
10. $\int \frac{1}{(3x)^2} dx$			

Encontrar una integral indefinida En los ejercicios 11-32, encuentre la integral indefinida y compruebe el resultado mediante derivación.

11. $\int (x + 7) dx$

12. $\int (13 - x) dx$

13. $\int (x^5 + 1) dx$

14. $\int (8x^3 - 9x^2 + 4) dx$

15. $\int (x^{3/2} + 2x + 1) dx$

16. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$

17. $\int \sqrt[3]{x^2} dx$

18. $\int (\sqrt[3]{x} + 1) dx$

19. $\int \frac{1}{x^3} dx$

20. $\int \frac{3}{x^2} dx$

21. $\int \frac{x + 6}{\sqrt{x}} dx$

22. $\int \frac{x^4 - 3x^2 + 5}{x^4} dx$

23. $\int (x + 1)(3x - 2) dx$

24. $\int (4t^2 + 3)^2 dt$

25. $\int (5 \cos x + 4 \sec x) dx$

26. $\int (t^2 - \cos t) dt$

27. $\int (1 - \csc t \cot t) dt$

28. $\int (\theta^2 + \sec^2 \theta) d\theta$

29. $\int (\sec^2 \theta - \sec \theta) d\theta$

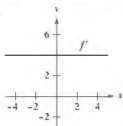
30. $\int \sec y (\tan y - \sec y) dy$

31. $\int (\tan^2 y + 1) dy$

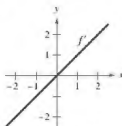
32. $\int (4x - \csc^2 x) dx$

Dibujar una gráfica En los ejercicios 33 y 34 se presenta la gráfica de la derivada de una función. Dibuje las gráficas de dos funciones que tengan la derivada señalada. (Hay más de una respuesta correcta.) Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite MathGraphs.com.

33.



34.



Encontrar una solución particular En los ejercicios 35-42, encuentre la solución particular que satisfice la ecuación diferencial y las condiciones iniciales.

35. $f'(x) = 6x, f(0) = 8$

36. $g'(x) = 4x^2, g(-1) = 3$

37. $h'(t) = 8t^3 + 5, h(1) = -4$

38. $f'(s) = 10s - 12s^2, f(3) = 2$

39. $f''(x) = 2, f'(2) = 5, f(2) = 10$

40. $f''(x) = x^2, f'(0) = 8, f(0) = 4$

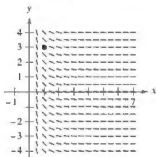
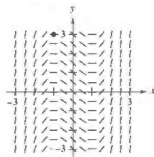
41. $f''(x) = x^{-3/2}, f'(4) = 2, f(0) = 0$

42. $f''(x) = \sec x, f'(0) = 1, f(0) = 6$

Campos direccionales En los ejercicios 43 y 44 se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo direccional. Un campo de pendientes (o campo de direcciones) está compuesto por segmentos de recta con pendientes dadas por la ecuación diferencial. Estos segmentos de recta proporcionan una perspectiva visual de las pendientes de las soluciones de la ecuación diferencial. (a) Dibuje dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pasa por el punto indicado. (Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite MathGraphs.com.) (b) Utilice la integración para determinar la solución particular de la ecuación diferencial y use una herramienta de graficación para representar la solución. Compare el resultado con los dibujos del inciso (a).

43. $\frac{dy}{dx} = x^2 - 1, (-1, 3)$

44. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}, x > 0, (1, 3)$



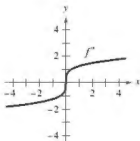
47. Campos direccionales En los ejercicios 45 y 46, (a) utilice una herramienta de graficación para representar un campo direccional para la ecuación diferencial, (b) utilice la integración y el punto indicado para determinar la solución particular de ecuación diferencial y (c) trace la gráfica de la solución y el campo direccional.

45. $\frac{dy}{dx} = 2x, (-2, -2)$

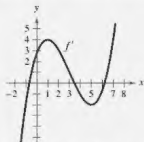
46. $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{x}, (4, 12)$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

- 47.** Antiderivadas e integrales indefinidas ¿Cuál es la diferencia, si existe, entre encontrar la antiderivada de $f(x)$ y evaluar la integral $\int f(x) dx$?
- 48.** Comparar funciones Considere $f(x) = \tan^2 x$ y $g(x) = \sec^2 x$. ¿Qué nota acerca de las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$? ¿Qué puede concluir acerca de la relación entre $f(x)$ y $g(x)$?
- 49.** Dibujar una gráfica Las gráficas de f y f' pasan a través del origen. Use la gráfica de f' mostrada en la figura para bosquejar la gráfica de f y f'' . Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite MathGraphs.com



50. ¿CÓMO LO VE? Use la gráfica de f' que se muestra en la figura para responder lo siguiente.



- (a) Aproxime la pendiente de f en $x = 4$. Explique.
 (b) ¿Es posible que $f(2) = -1$? Explique.
 (c) ¿Es $f(5) - f(4) > 0$? Explique.
 (d) Aproxime el valor de x donde f es máxima. Explique.
 (e) Aproxime cualquier intervalo en el que la gráfica de f es cóncava hacia arriba y cualquier intervalo abierto en el cual es cóncava hacia abajo. Aproxime la coordenada x a cualquier punto de inflexión.

- 51.** Crecimiento de árboles Un vivero de plantas verdes suele vender cierto arbusto después de 6 años de crecimiento y cuidado. La velocidad de crecimiento durante esos 6 años es, aproximadamente, $dh/dt = 1.5t + 5$, donde t es el tiempo en años y h es la altura en centímetros. Las plantas de semillero miden 12 centímetros de altura cuando se plantan ($t = 0$).

(a) Determine la altura después de t años.

(b) ¿Qué altura tienen los arbustos cuando se venden?

- 52.** Crecimiento poblacional La tasa de crecimiento dP/dt de una población de bacterias es proporcional a la raíz cuadrada de t , donde P es el tamaño de la población y t es el tiempo en días ($0 \leq t \leq 10$). Esto es,

$$\frac{dP}{dt} = k\sqrt{t}.$$

El tamaño inicial de la población es igual a 500. Después de un día la población ha crecido hasta 600. Calcule el tamaño de la población después de 7 días.

- Movimiento vertical** En los ejercicios 53-55, utilice $a(t) = -32$ pies por segundo por segundo igual a la aceleración debida a la gravedad. (Ignore la resistencia del aire.)

- 53.** Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde una altura de 6 pies con una velocidad inicial de 60 pies por segundo ¿Qué altura alcanzará la pelota?
- 54.** ¿Con qué velocidad inicial debe lanzarse un objeto hacia arriba (desde el nivel del suelo) para alcanzar la parte superior del monumento a Washington (aproximadamente 550 pies)?
- 55.** Un globo aerostático, que asciende verticalmente con una velocidad de 16 pies por segundo, deja caer una bolsa de arena en el instante en el que está a 64 pies sobre el suelo.
- (a) ¿En cuántos segundos llegará la bolsa al suelo?
- (b) ¿A qué velocidad hará contacto con el suelo?

- Movimiento vertical** En los ejercicios 56-58, utilice $a(t) = -9.8$ metros por segundo por segundo igual a la aceleración debida a la gravedad. (Ignore la resistencia del aire.)

- 56.** Una pelota de béisbol es lanzada hacia arriba desde una altura de 2 metros con una velocidad inicial de 10 metros por segundo. Determine su altura máxima.
- 57.** ¿A qué velocidad inicial debe lanzarse un objeto hacia arriba (desde una altura de 2 metros) para que alcance una altura máxima de 200 metros?

- • **58. Gran Cañón** • • • • •
- El Gran Cañón tiene una
- profundidad de 1800
- metros en su punto más
- profundo. Se deja caer
- una roca desde el borde
- sobre ese punto. Escriba
- la altura de la roca como
- una función del tiempo t
- la altura de la roca como
- una función del tiempo t
- en segundos. ¿Cuánto
- tardará la roca en llegar
- al suelo del cañón?



59. **Gravedad lunar** Sobre la Luna, la aceleración de la gravedad es de -1.6 m/s^2 . En la Luna se deja caer una piedra desde un peñasco y golpea la superficie de esta misma 20 segundos después. ¿Desde qué altura cayó? ¿Cuál era su velocidad en el momento del impacto?

60. **Velocidad de escape** La velocidad de escape mínima que se requiere para que un objeto escape de la atracción gravitatoria de la Tierra se obtiene a partir de la solución de la ecuación

$$\int v \, dv = -GM \int \frac{1}{y^2} \, dy$$

donde v es la velocidad del objeto lanzado desde la Tierra, y es la distancia desde el centro terrestre, G es la constante de la gravitación y M es la masa de la Tierra. Demuestre que v y y están relacionadas por la ecuación

$$v^2 = v_0^2 + 2GM \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R} \right)$$

donde v_0 es la velocidad inicial del objeto y R es el radio terrestre.

- Movimiento rectilíneo** En los ejercicios 61-64, considere una partícula que se mueve a lo largo del eje x , donde $x(t)$ es la posición de la partícula en el tiempo t , $x'(t)$ su velocidad y $x''(t)$ su aceleración.

61. $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 2$, $0 \leq t \leq 5$
- Determine la velocidad y la aceleración de la partícula.
 - Encuentre los intervalos abiertos de t en los cuales la partícula se mueve hacia la derecha.
 - Encuentre la velocidad de la partícula cuando la aceleración es 0.

62. Repita el ejercicio 61 para la función posición.

$$x(t) = (t-1)(t-3)^2, \quad 0 \leq t \leq 5.$$

63. Una partícula se mueve a lo largo del eje x a una velocidad de $v(t) = 1/\sqrt{t}$, $t > 0$. En el tiempo $t = 1$, su posición es $x = 4$. Encuentre las funciones posición y la aceleración de la partícula.

64. Una partícula, inicialmente en reposo, se mueve a lo largo del eje x de manera que su aceleración en el tiempo $t > 0$ está dada por $a(t) = \cos t$. En el tiempo $t = 0$, su posición es $x = 3$.

- Determine las funciones velocidad y la posición de la partícula.
 - Encuentre los valores de t para los cuales la partícula está en reposo.
65. **Aceleración** El fabricante de un automóvil indica en su publicidad que el vehículo tarda 13 segundos en acelerar desde 25 kilómetros por hora hasta 80 kilómetros por hora. Suponiendo aceleración constante.

- Determine la aceleración en m/s^2 .
 - Halle la distancia que recorre el automóvil durante los 13 segundos.
66. **Desaceleración** Un automóvil que viaja a 45 millas por hora recorre 132 pies, a desaceleración constante, luego de que se aplican los frenos para detenerlo.

- ¿Qué distancia recorre el automóvil cuando su velocidad se reduce a 30 millas por hora?
- ¿Qué distancia recorre el automóvil cuando su velocidad se reduce a 15 millas por hora?
- Dibuje la recta de números reales desde 0 hasta 132 y trace la gráfica de los puntos que se encontraron en los incisos (a) y (b). ¿Qué puede concluir?

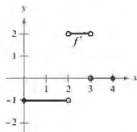
67. **Aceleración** En el instante en que la luz de un semáforo se pone en verde, un automóvil que ha estado esperando en un cruce empieza a moverse con una aceleración constante de 6 pies/s^2 . En el mismo instante, un camión que viaja a una velocidad constante de 30 pies por segundo rebasa al automóvil.

- ¿A qué distancia del punto de inicio el automóvil rebasará al camión?
- ¿A qué velocidad circulará el automóvil cuando rebasa al camión?

68. **Aceleración** Suponga que un avión totalmente cargado parte desde el reposo tiene una aceleración constante mientras se mueve por una pista. El avión requiere 0.7 millas de pista y una velocidad de 160 millas por hora para despegar. ¿Cuál es la aceleración del avión?

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 69-74, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o proporcione un ejemplo que demuestre que es falso.

69. La antiderivada de $f(x)$ es única.
70. Toda derivada de una función polinomial de grado n es una función polinomial de grado $(n+1)$.
71. Si $p(x)$ es una función polinomial, entonces p tiene exactamente una antiderivada o primitiva cuya gráfica contiene al origen.
72. Si $F(x)$ y $G(x)$ son antiderivadas de $f(x)$, entonces $F(x) = G(x) + C$.
73. $F(x) = G(x) + C$, entonces $\int g(x) \, dx = f(x) + C$.
74. $\int f(x)g(x) \, dx = \int f(x) \, dx \int g(x) \, dx$
75. **Tangente horizontal** Encuentre una función f tal que la gráfica de esta tenga una tangente horizontal en $(0, 2)$ y $f''(x) = 2x$.
76. **Determinar una función** Se muestra la gráfica de f' . Dibuje la gráfica de f dado que f es continua y $f(0) = 1$.



77. **Demostración** Sean $s(x)$ y $c(x)$ dos funciones que satisficieran $s'(x) = c(x)$ y $c'(x) = -s(x)$ para todo x . Si $s(0) = 0$ y $c(0) = 1$, demuestre que $[s(x)]^2 + [c(x)]^2 = 1$.

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

78. Suponga que f y g son funciones no constantes, derivables y de valores reales definida en $(-\infty, \infty)$. Además, suponga que para cada par de números reales x y y ,

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y) \quad y$$

$$g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y).$$

- Si $f'(0) = 0$, demuestre que $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$ para todo x .

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.
© The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

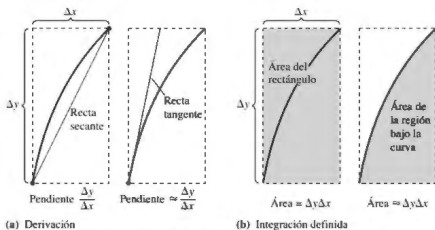
1.4 Teorema fundamental del cálculo

- Evaluar una integral definida utilizando el teorema fundamental del cálculo.
- Entender y utilizar el teorema del valor medio para integrales.
- Encontrar el valor medio de una función sobre un intervalo cerrado.
- Entender y utilizar el segundo teorema fundamental del cálculo.
- Entender y utilizar el teorema del cambio neto.

El teorema fundamental del cálculo

Ha visto ya dos de las principales ramas del cálculo: el cálculo diferencial (presentado con el problema de la recta tangente) y el cálculo integral (presentado con el problema del área). Hasta aquí, podría parecer que estos dos problemas no se relacionan, aunque tienen una conexión muy estrecha. La conexión fue descubierta de forma independiente por Isaac Newton y Gottfried Leibniz y está enunciada en un teorema que recibe el nombre de teorema fundamental del cálculo.

De manera informal, el teorema establece que la derivación y la integración (definida) son operaciones inversas, en el mismo sentido que lo son la división y la multiplicación. Para saber cómo Newton y Leibniz habrían pronosticado esta relación, considere las aproximaciones que se muestran en la figura 1.27. La pendiente de la recta tangente se definió utilizando el *cociente* $\Delta y/\Delta x$ (la pendiente de la recta secante). De manera similar el área de la región bajo una curva se definió utilizando el *producto* $\Delta y\Delta x$ (el área de un rectángulo). Por tanto, al menos en una etapa de aproximación primitiva, las operaciones de derivación y de integración definida parecen tener una relación inversa en el mismo sentido en el que son operaciones inversas la división y la multiplicación. El teorema fundamental del cálculo establece que los procesos del límite (utilizados para definir la derivada y la integral definida) preservan esta relación inversa.



(a) Derivación

(b) Integración definida

La derivación y la integración definida tienen una relación "inversa".

Figura 1.27

ANTIDERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DEFINIDA

A lo largo de esta unidad, ha estado utilizando el signo de integral para denotar una antiderivada (una familia de funciones) y una integral definida (un número).

$$\text{Antiderivación: } \int f(x) \, dx \qquad \text{Integración definida: } \int_a^b f(x) \, dx$$

El uso de este mismo símbolo para ambas operaciones hace parecer que están relacionadas. Sin embargo, en los primeros trabajos con cálculo, no se sabía que las dos operaciones estaban relacionadas. Leibniz aplicó primero el símbolo \int a la integral definida y se deriva de la letra S. (Leibniz calculó el área como una suma infinita, por tanto, eligió la letra S.)

TEOREMA 1.9 El teorema fundamental del cálculo

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Demostración La clave para la demostración consiste en escribir la diferencia $F(b) - F(a)$ en una forma conveniente. Sea Δ cualquier partición de $[a, b]$.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Mediante la resta y suma de términos semejantes, se obtiene

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \cdots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})]. \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema del valor medio, se sabe que existe un número c_i en el i -ésimo subintervalo tal que

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Como $F'(c_i) = f(c_i)$, se puede hacer que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y obtener

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Esta importante ecuación dice que al aplicar repetidamente el teorema del valor medio, siempre se puede encontrar una colección de c_i tal que la constante $F(b) - F(a)$ es una suma de Riemann de f en $[a, b]$ para cualquier partición. El teorema 1.3 garantiza que el límite de sumas de Riemann sobre las particiones con $\|\Delta\| \rightarrow 0$ existe. Así, el tomar el límite (cuando $\|\Delta\| \rightarrow 0$) produce

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. 

ESTRATEGIA PARA UTILIZAR EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

1. Suponiendo que conozca una antiderivada o primitiva f , dispone de una forma de calcular una integral definida sin tener que utilizar el límite de la suma.
2. Cuando se aplica el teorema fundamental del cálculo, la siguiente notación resulta conveniente.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Por ejemplo, para calcular $\int_1^3 x^3 dx$, se puede escribir

$$\int_1^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

3. No es necesario incluir una constante de integración C en la antiderivada o primitiva, ya que

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) + C \right]_a^b = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

EJEMPLO 1 Calcular una integral definida

... ▶ Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Evalúe cada integral definida.

a. $\int_1^2 (x^2 - 3) dx$ b. $\int_1^4 3\sqrt{x} dx$ c. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x dx$

Solución

a. $\int_1^2 (x^2 - 3) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x \right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 6 \right) - \left(\frac{1}{3} - 3 \right) = -\frac{2}{3}$
 b. $\int_1^4 3\sqrt{x} dx = 3 \int_1^4 x^{1/2} dx = 3 \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_1^4 = 2(4)^{3/2} - 2(1)^{3/2} = 14$
 c. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x dx = \tan x \Big|_0^{\pi/4} = 1 - 0 = 1$

EJEMPLO 2 Integral definida de un valor absoluto

Calcule $\int_0^2 |2x - 1| dx$.

Solución Utilizando la figura 1.28 y la definición de valor absoluto, puede reescribir el integrando como se indica.

$$|2x - 1| = \begin{cases} -(2x - 1), & x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

A partir de esto, puede reescribir la integral en dos partes.

$$\begin{aligned} \int_0^2 |2x - 1| dx &= \int_0^{1/2} -(2x - 1) dx + \int_{1/2}^2 (2x - 1) dx \\ &= \left[-x^2 + x \right]_0^{1/2} + \left[x^2 - x \right]_{1/2}^2 \\ &= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) - (0 + 0) + (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Usar el teorema fundamental para encontrar un área

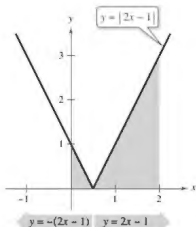
Encuentre el área de la región delimitada por la gráfica de

$$y = 2x^2 - 3x + 2,$$

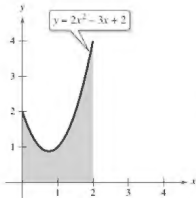
el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, como se muestra en la figura 1.29.

Solución Observe que $y > 0$ en el intervalo $[0, 2]$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2) dx && \text{Integre entre } x = 0 \text{ y } x = 2. \\ &= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_0^2 && \text{Encuentre la antiderivada.} \\ &= \left(\frac{16}{3} - 6 + 4 \right) - (0 - 0 + 0) && \text{Aplice el teorema fundamental.} \\ &= \frac{10}{3} && \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

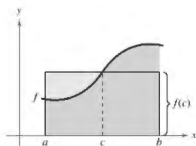


La integral definida de y en $[0, 2]$ es $\frac{5}{2}$.
Figura 1.28



El área de la región acotada por la gráfica de y , el eje x , $x = 0$ y $x = 2$ es $\frac{10}{3}$.

Figura 1.29



Rectángulo de valor medio:

$$f(c)(b - a) = \int_a^b f(x) dx$$

Figura 1.30

El teorema del valor medio para integrales

En la sección 1.1 vio que el área de una región bajo una curva es mayor que el área de un rectángulo inscrito y menor que el área de un rectángulo circunscrito. El teorema del valor medio para integrales establece que en alguna parte "entre" los rectángulos inscrito y circunscrito hay un rectángulo cuya área es precisamente igual al área de la región bajo la curva, como se ilustra en la figura 1.30.

TEOREMA 1.10 Teorema del valor medio para integrales

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un número c en el intervalo cerrado $[a, b]$, tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Demostración

Caso 1: Si f es constante en el intervalo $[a, b]$, el teorema es claramente válido debido a que c puede ser cualquier punto en $[a, b]$.

Caso 2: Si f no es constante en $[a, b]$, entonces, por el teorema del valor extremo, pueden elegirse $f(m)$ y $f(M)$ como valores mínimo y máximo de f en $[a, b]$. Como

$$f(m) \leq f(x) \leq f(M)$$

para todo x en $[a, b]$, se puede aplicar el teorema 1.7 para escribir

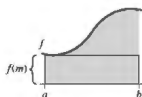
$$\int_a^b f(m) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(M) dx \quad \text{Vea la figura 1.31.}$$

$$f(m)(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq f(M)(b - a) \quad \text{Aplique el teorema fundamental.}$$

$$f(m) \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq f(M) \quad \text{Divida entre } b - a.$$

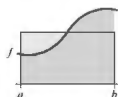
De acuerdo con la tercera desigualdad, se puede aplicar el teorema del valor medio para concluir que existe alguna c en $[a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \quad \text{o} \quad f(c)(b - a) = \int_a^b f(x) dx.$$



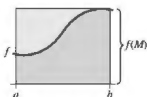
Rectángulo inscrito
(menor que el área real)

$$\int_a^b f(m) dx = f(m)(b - a)$$



Rectángulo del valor
medio (igual al área real)

$$\int_a^b f(x) dx$$



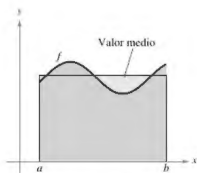
Rectángulo circunscrito
(mayor que el área real)

$$\int_a^b f(M) dx = f(M)(b - a)$$

Figura 1.31

Consulta LarsonCalculus.com para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

Observe que el teorema 1.10 no especifica cómo determinar c , solo garantiza la existencia de al menos un número c en el intervalo.



$$\text{Valor medio} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Figura 1.32

Valor medio de una función

El valor de $f(c)$ dado en el teorema del valor medio para integrales recibe el nombre de **valor medio** de f en el intervalo $[a, b]$.

Definición del valor medio de una función en un intervalo

Si f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el **valor medio** de f en el intervalo es

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Vea la figura 1.32.

Para saber por qué el promedio de f se define de esta manera, divida $[a, b]$ en n subintervalos de igual anchura

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Si c_i es cualquier punto en el i -ésimo subintervalo, la media aritmética de los valores de la función en los c_i está dada por

$$a_n = \frac{1}{n} [f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)]. \quad \text{Valor medio } f(c_1), \dots, f(c_n)$$

Al multiplicar y dividir por $(b-a)$, puede escribir la media como

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(c_i) \left(\frac{b-a}{b-a} \right) \\ &= \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(c_i) \left(\frac{b-a}{n} \right) \\ &= \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x. \end{aligned}$$

Por último, al tomar el límite cuando $n \rightarrow \infty$ se obtiene el valor medio de f en el intervalo $[a, b]$, como se indicó en la definición anterior. Observe en la figura 1.32, que el área de la región bajo la gráfica de f es igual al área del rectángulo cuya altura es el valor medio.

Este desarrollo del valor medio de una función en un intervalo es solo uno de los muchos usos prácticos de las integrales definidas para representar procesos de suma. En la unidad 3 estudiará otras aplicaciones, tales como volumen, longitud de arco, centros de masa y trabajo.

EJEMPLO 4

Determinar el valor medio de una función

Determine el valor medio de $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo $[1, 4]$.

Solución El valor medio está dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &= \frac{1}{4-1} \int_1^4 (3x^2 - 2x) dx \\ &= \frac{1}{3} \left[x^3 - x^2 \right]_1^4 \\ &= \frac{1}{3} [64 - 16 - (1 - 1)] \\ &= \frac{48}{3} \\ &= 16. \end{aligned}$$

Vea la figura 1.33.

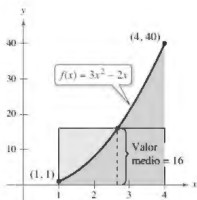


Figura 1.33



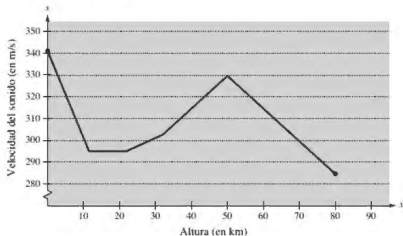
La primera persona en volar a una velocidad mayor que la del sonido fue Charles Yeager. El 14 de octubre de 1947, a una altura de 12.2 kilómetros, Yeager alcanzó 295.9 metros por segundo. Si Yeager hubiera volado a una altura menor que 11.275 kilómetros, su velocidad de 295.9 metros por segundo no hubiera "roto la barrera del sonido". La fotografía muestra un F/A-18F, Super Hornet, un bimotor de combate supersónico. Un "green hornet" utilizando una mezcla 50/50 de biocombustible, hecho a partir de aceite de camelina, se convirtió en el primer avión táctico estadounidense naval en superar Mach 1.

EJEMPLO 5 La velocidad del sonido

A diferentes alturas en la atmósfera de la Tierra, el sonido viaja a distintas velocidades. La velocidad del sonido $s(x)$ (en metros por segundo) puede modelarse mediante

$$s(x) = \begin{cases} -4x + 341, & 0 \leq x < 11.5 \\ 295, & 11.5 \leq x < 22 \\ \frac{3}{4}x + 278.5, & 22 \leq x < 32 \\ \frac{3}{2}x + 254.5, & 32 \leq x < 50 \\ -\frac{3}{2}x + 404.5, & 50 \leq x \leq 80 \end{cases}$$

donde x es la altura en kilómetros (vea la figura 1.34). ¿Cuál es la velocidad media del sonido en el intervalo $[0, 80]$?



La velocidad del sonido depende de la altura.

Figura 1.34

Solución Comience con la integración $s(x)$ en el intervalo $[0, 80]$. Para hacer esto, puede dividir la integral en cinco partes.

$$\begin{aligned} \int_0^{11.5} s(x) dx &= \int_0^{11.5} (-4x + 341) dx = \left[-2x^2 + 341x \right]_0^{11.5} = 3657 \\ \int_{11.5}^{22} s(x) dx &= \int_{11.5}^{22} 295 dx = \left[295x \right]_{11.5}^{22} = 3097.5 \\ \int_{22}^{32} s(x) dx &= \int_{22}^{32} \left(\frac{3}{4}x + 278.5\right) dx = \left[\frac{3}{8}x^2 + 278.5x\right]_{22}^{32} = 2987.5 \\ \int_{32}^{50} s(x) dx &= \int_{32}^{50} \left(\frac{3}{2}x + 254.5\right) dx = \left[\frac{3}{4}x^2 + 254.5x\right]_{32}^{50} = 5688 \\ \int_{50}^{80} s(x) dx &= \int_{50}^{80} \left(-\frac{3}{2}x + 404.5\right) dx = \left[-\frac{3}{4}x^2 + 404.5x\right]_{50}^{80} = 9210 \end{aligned}$$

Al sumar los valores de las cinco integrales, se obtiene

$$\int_0^{80} s(x) dx = 24,640.$$

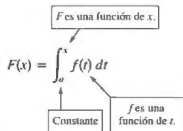
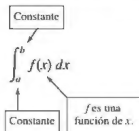
Por tanto, la velocidad media del sonido entre los 0 y los 80 km de altitud es

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{1}{80} \int_0^{80} s(x) dx = \frac{24,640}{80} = 308 \text{ metros por segundo.} \blacksquare$$

El segundo teorema fundamental del cálculo

Al introducir la integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ se ha tomado como fijo el límite superior de integración b y x como la variable de integración. Sin embargo, es posible que surja una situación un poco diferente en la que la variable x se use como el límite superior de integración. Para evitar la confusión de utilizar x de dos maneras diferentes, se usa temporalmente t como la variable de integración. (Recuerde que la integral definida *no* es una función de su variable de integración.)

La integral definida como un número **La integral definida como una función de x**



Exploración

Utilice una herramienta de graficación par representar la función

$$F(x) = \int_0^x \cos t \, dt$$

Para $0 \leq x \leq \pi$. ¿Reconoce esta gráfica? Explique.

EJEMPLO 6

La integral definida como función

Calcule la función

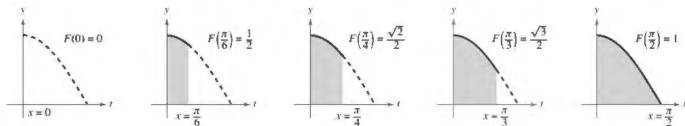
$$F(x) = \int_0^x \cos t \, dt$$

en $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$.

Solución Podría calcular cinco integrales definidas diferentes, una para cada uno de los límites superiores dados. Sin embargo, es mucho más simple fijar x (como una constante) por el momento para obtener

$$\begin{aligned} \int_0^x \cos t \, dt &= \left[\sin t \right]_0^x \\ &= \sin x - \sin 0 \\ &= \sin x. \end{aligned}$$

Después de esto, utilizando $F(x) = \sin x$, puede obtener los resultados que se muestran en la figura 1.35.



$F(x) = \int_0^x \cos t \, dt$ es el área bajo la curva $f(t) = \cos t$ desde 0 hasta x .

Figura 1.35

Podría considerar la función $F(x)$ como la *acumulación* del área bajo la curva $f(t) = \cos t$ desde $t = 0$ hasta $t = x$. Para $x = 0$, el área es 0 y $F(0) = 0$. Para $x = \pi/2$, $F(\pi/2) = 1$ se obtiene el área acumulada bajo la curva coseno del intervalo completo $[0, \pi/2]$. Esta interpretación de una integral como una función de acumulación se usa a menudo en aplicaciones de la integración.

En el ejemplo 6, observe que la derivada de F es el integrando original (solo que con la variable cambiada). Esto es

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = \frac{d}{dx}[\sin x] = \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \cos t \, dt\right] = \cos x.$$

Este resultado se generaliza en el siguiente teorema, denominado el segundo teorema fundamental del cálculo.

TEOREMA 1.11 El segundo teorema fundamental del cálculo

Si f es continua en un intervalo abierto I que contiene a , entonces, para todo x en el intervalo,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t) \, dt\right] = f(x).$$

Demostración Comience definiendo F como

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt.$$

Luego, de acuerdo con la definición de la derivada, puede escribir

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_a^{x+\Delta x} f(t) \, dt - \int_a^x f(t) \, dt \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_x^{x+\Delta x} f(t) \, dt + \int_a^x f(t) \, dt \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_x^{x+\Delta x} f(t) \, dt \right]. \end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio (suponiendo que $\Delta x > 0$), sabe que existe un número c en el intervalo $[x, x + \Delta x]$ tal que la integral en la expresión anterior es igual a $f(c) \Delta x$. Además, como $x \leq c \leq x + \Delta x$ se deduce que $c \rightarrow x$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$. Por tanto, obtiene

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta x} f(c) \Delta x \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x).$$

Se puede plantear un argumento similar para $\Delta x < 0$.

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

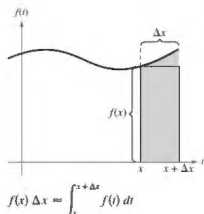
Utilizando el modelo del área para integrales definidas, considere la aproximación

$$f(x) \Delta x \approx \int_x^{x+\Delta x} f(t) \, dt$$

se dice que el área del rectángulo de altura $f(x)$ y anchura Δx es aproximadamente igual al área de la región que se encuentra entre la gráfica de f y el eje x en el intervalo

$$[x, x + \Delta x]$$

como se muestra en la figura de la derecha



Observe que el segundo teorema del cálculo indica que toda f continua admite una antiderivada. Sin embargo, esta no necesita ser una función elemental.

EJEMPLO 7**Usar el segundo teorema fundamental del cálculo**

$$\text{Calcule } \frac{d}{dx} \left[\int_0^x \sqrt{t^2 + 1} dt \right].$$

Solución Observe que $f(t) = \sqrt{t^2 + 1}$ es continua en toda la recta real. Por tanto, empleando el segundo teorema fundamental del cálculo, puede escribir

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^x \sqrt{t^2 + 1} dt \right] = \sqrt{x^2 + 1}.$$

La derivación que se muestra en el ejemplo 7 es una aplicación directa del segundo teorema fundamental del cálculo. El siguiente ejemplo muestra cómo puede combinarse este teorema con la regla de la cadena para encontrar la derivada de una función.

EJEMPLO 8**Usar el segundo teorema fundamental del cálculo**

$$\text{Encuentre la derivada de } F(x) = \int_{\pi/2}^{x^3} \cos t dt.$$

Solución Haciendo $u = x^3$, puede aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo junto con la regla de la cadena como se ilustra.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{dF}{du} \frac{du}{dx} && \text{Regla de la cadena} \\ &= \frac{d}{du} [F(x)] \frac{du}{dx} && \text{Definición de } \frac{dF}{du} \\ &= \frac{d}{du} \left[\int_{\pi/2}^{x^3} \cos t dt \right] \frac{du}{dx} && \text{Sustituya } \int_{\pi/2}^{x^3} \cos t dt \text{ para } F(x). \\ &= \frac{d}{du} \left[\int_{\pi/2}^u \cos t dt \right] \frac{du}{dx} && \text{Sustituya } u \text{ por } x^3. \\ &= (\cos u)(3x^2) && \text{Aplique el segundo teorema fundamental del cálculo.} \\ &= (\cos x^3)(3x^2) && \text{Reescriba como una función de } x. \end{aligned}$$

Debido a que la integral del ejemplo 8 se integra con facilidad, puede comprobar la derivada del modo siguiente.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\pi/2}^{x^3} \cos t dt \\ &= \left[\operatorname{sen} t \right]_{\pi/2}^{x^3} \\ &= \operatorname{sen} x^3 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \\ &= \operatorname{sen} x^3 - 1 \end{aligned}$$

En esta forma, puede aplicar la regla de las potencias para comprobar que la derivada es la misma que la que se obtuvo en el ejemplo 8.

$$\frac{d}{dx} [\operatorname{sen} x^3 - 1] = (\cos x^3)(3x^2) \quad \text{Derivada de } F$$

Teorema del cambio neto

El teorema fundamental del cálculo (teorema 1.9) establece que si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Pero dado $F'(x) = f(x)$, este enunciado se puede reescribir como

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

donde la cantidad $F(b) - F(a)$ representa el *cambio neto de F* en el intervalo $[a, b]$.

TEOREMA 1.12 El teorema del cambio neto

La integral definida de la razón de cambio de una cantidad $F'(x)$ proporciona el cambio total, o **cambio neto**, en esa cantidad en el intervalo $[a, b]$.

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{Cambio neto de } F$$

EJEMPLO 9 Usar el teorema del cambio neto

Una sustancia química fluye en un tanque de almacenamiento a una razón de $180 + 3t$ litros por minuto, donde t es el tiempo en minutos y $0 \leq t \leq 60$. Encuentre la cantidad de sustancia química que fluye en el tanque durante los primeros 20 minutos.

Solución Sea $c(t)$ la cantidad de sustancia química en el tanque en el tiempo t . Entonces $c'(t)$ representa la razón a la cual la sustancia química fluye dentro del tanque en el tiempo t . Durante los primeros 20 minutos, la cantidad que fluye dentro del tanque es

$$\begin{aligned} \int_0^{20} c'(t) dt &= \int_0^{20} (180 + 3t) dt \\ &= \left[180t + \frac{3}{2}t^2 \right]_0^{20} \\ &= 3600 + 600 \\ &= 4200. \end{aligned}$$

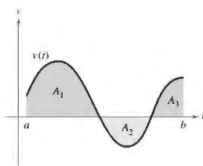
Así, la cantidad que fluye dentro del tanque durante los primeros 20 minutos es 4200 litros. ■

Otra forma de ilustrar el teorema del cambio neto es examinar la velocidad de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta, donde $s(t)$ es la posición en el tiempo t . Entonces, su velocidad es $v(t) = s'(t)$ y

$$\int_a^b v(t) dt = s(b) - s(a).$$

Esta integral definida representa el cambio neto en posición, o **desplazamiento**, de la partícula.





A_1 , A_2 y A_3 son las áreas de las regiones sombreadas.

Figura 1.36

Cuando calcula la distancia *total* recorrida por la partícula, debe considerar los intervalos donde $v(t) \leq 0$ y los intervalos donde $v(t) \geq 0$. Cuando $v(t) \leq 0$, la partícula se mueve hacia la derecha. Para calcular la distancia total recorrida, se integra el valor absoluto de la velocidad $|v(t)|$. Así, el **desplazamiento** de una partícula y la distancia total recorrida por una partícula en $[a, b]$, se puede escribir como

$$\text{Desplazamiento en } [a, b] = \int_a^b v(t) dt = A_1 - A_2 + A_3$$

y la **distancia total recorrida** por la partícula en $[a, b]$ es

$$\text{Distancia total recorrida sobre } [a, b] = \int_a^b |v(t)| dt = A_1 + A_2 + A_3.$$

(Vea la figura 1.36.)

EJEMPLO 10

Solución de un problema de movimiento de una partícula

La velocidad (en pies por segundo) de una partícula moviéndose a lo largo de una recta es

$$v(t) = t^3 - 10t^2 + 29t - 20$$

donde t es el tiempo en segundos.

- ¿Cuál es el desplazamiento de la partícula en el intervalo $1 \leq t \leq 5$?
- ¿Cuál es la distancia total recorrida por la partícula en el intervalo $1 \leq t \leq 5$?

Solución

a. Por definición, se sabe que el desplazamiento es

$$\begin{aligned} \int_1^5 v(t) dt &= \int_1^5 (t^3 - 10t^2 + 29t - 20) dt \\ &= \left[\frac{t^4}{4} - \frac{10}{3}t^3 + \frac{29}{2}t^2 - 20t \right]_1^5 \\ &= \frac{25}{12} - \left(-\frac{103}{12} \right) \\ &= \frac{128}{12} \\ &= \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Por tanto, la partícula se mueve $\frac{32}{3}$ pies hacia la derecha.

- Para encontrar la distancia total recorrida, calcule $\int_1^5 |v(t)| dt$. Usando la figura 1.37 y el hecho de que $v(t)$ puede factorizarse como $(t-1)(t-4)(t-5)$, puede determinar que $v(t) \geq 0$ en $[1, 4]$ y $v(t) \leq 0$ en $[4, 5]$. Por tanto, la distancia total recorrida es

$$\begin{aligned} \int_1^5 |v(t)| dt &= \int_1^4 v(t) dt - \int_4^5 v(t) dt \\ &= \int_1^4 (t^3 - 10t^2 + 29t - 20) dt - \int_4^5 (t^3 - 10t^2 + 29t - 20) dt \\ &= \left[\frac{t^4}{4} - \frac{10}{3}t^3 + \frac{29}{2}t^2 - 20t \right]_1^4 - \left[\frac{t^4}{4} - \frac{10}{3}t^3 + \frac{29}{2}t^2 - 20t \right]_4^5 \\ &= \frac{45}{4} - \left(-\frac{7}{12} \right) \\ &= \frac{71}{6} \text{ pies.} \end{aligned}$$

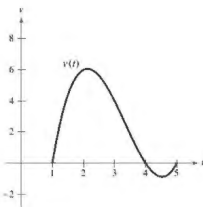


Figura 1.37

1.4 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Razonamiento gráfico En los ejercicios 1-4, utilice una herramienta de graficación para representar el integrando. Use la gráfica para determinar si la integral definida es positiva, negativa o cero.

1. $\int_0^{\pi} \frac{4}{x^2+1} dx$

2. $\int_0^{\pi} \cos x dx$

3. $\int_{-2}^2 x\sqrt{x^2+1} dx$

4. $\int_{-2}^2 x\sqrt{2-x} dx$

Evaluar una integral definida En los ejercicios 5-34, encuentre la integral definida de la función algebraica. Utilice una herramienta de graficación para comprobar el resultado.

5. $\int_0^2 6x dx$

6. $\int_{-1}^1 8 dt$

7. $\int_{-1}^0 (2x-1) dx$

8. $\int_{-1}^2 (7-3t) dt$

9. $\int_1^2 (t^2-2) dt$

10. $\int_1^2 (6x^2-3x) dx$

11. $\int_0^1 (2t-1)^2 dt$

12. $\int_1^3 (4x^3-3x^2) dx$

13. $\int_2^3 \left(\frac{3}{x^2}-1\right) dx$

14. $\int_{-2}^{-1} \left(u-\frac{1}{u^2}\right) du$

15. $\int_1^4 \frac{u-2}{\sqrt{u}} du$

16. $\int_{-8}^8 x^{1/3} dx$

17. $\int_{-1}^1 (\sqrt[3]{t}-2) dt$

18. $\int_1^8 \sqrt{\frac{2}{x}} dx$

19. $\int_0^1 \frac{x-\sqrt{x}}{3} dx$

20. $\int_0^2 (2-t)\sqrt{t} dt$

21. $\int_{-1}^0 (t^{1/3}-t^{2/3}) dt$

22. $\int_{-x}^{-1} \frac{x-x^2}{2\sqrt{x}} dx$

23. $\int_0^5 |2x-5| dx$

24. $\int_1^3 (3-|x-3|) dx$

25. $\int_0^4 |x^2-9| dx$

26. $\int_0^4 |x^2-4x+3| dx$

27. $\int_0^{\pi} (1+\sin x) dx$

28. $\int_0^{\pi} (2+\cos x) dx$

29. $\int_0^{\pi/4} \frac{1-\sec^2 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta$

30. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} d\theta$

31. $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sec^2 x dx$

32. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (2-\csc^2 x) dx$

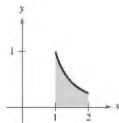
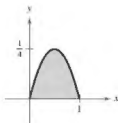
33. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4 \sec \theta \tan \theta d\theta$

34. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2t+\cos t) dt$

Encontrar el área de una región En los ejercicios 35-38, determine el área de la región dada.

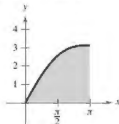
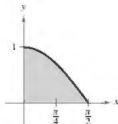
35. $y = x - x^2$

36. $y = \frac{1}{x^2}$



37. $y = \cos x$

38. $y = x + \sin x$



Encontrar el área de una región En los ejercicios 39-44, encuentre el área de la región delimitada por las gráficas de las ecuaciones.

39. $y = 5x^2 + 2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$

40. $y = x^3 + x$, $x = 2$, $y = 0$

41. $y = 1 + \sqrt[3]{x}$, $x = 0$, $x = 8$, $y = 0$

42. $y = 2\sqrt{x} - x$, $y = 0$

43. $y = -x^2 + 4x$, $y = 0$

44. $y = 1 - x^4$, $y = 0$

Utilizar el teorema del valor medio para integrales En los ejercicios 45-50, determine el (los) valor(es) de c cuya existencia es garantizada por el teorema del valor medio para integrales de la función en el intervalo dado.

45. $f(x) = x^3$, $[0, 3]$

46. $f(x) = \sqrt{x}$, $[4, 9]$

47. $y = \frac{x^2}{4}$, $[0, 6]$

48. $f(x) = \frac{9}{x^3}$, $[1, 3]$

49. $f(x) = 2 \sec^2 x$, $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

50. $f(x) = \cos x$, $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

Encontrar el valor medio de una función En los ejercicios 51-56, encuentre el valor medio de la función en el intervalo dado y todos los valores de x en el intervalo para los cuales la función es igual a su valor promedio.

51. $f(x) = 9 - x^2$, $[-3, 3]$

52. $f(x) = \frac{4(x^2+1)}{x^2}$, $[1, 3]$

53. $f(x) = x^3$, $[0, 1]$

54. $f(x) = 4x^3 - 3x^2$, $[0, 1]$

55. $f(x) = \sin x$, $[0, \pi]$

56. $f(x) = \cos x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

57. **Velocidad** La gráfica muestra la velocidad, en pies por segundo, de un automóvil que acelera desde el reposo. Utilice la gráfica para calcular la distancia que el automóvil recorre en 8 segundos.

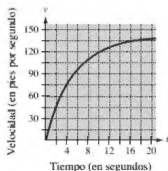


Figura para 57

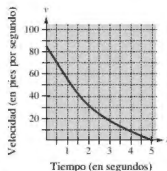
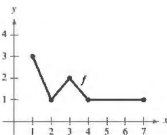


Figura para 58

58. **Velocidad** La gráfica muestra la velocidad, en pies por segundo, de la desaceleración de un automóvil después de que el conductor aplica los frenos. Utilice la gráfica para calcular qué distancia recorre el auto antes de detenerse.

DESARROLLO DE CONCEPTOS

59. Usar una gráfica La gráfica de f se muestra en la figura



- (a) Evalúe $\int_2^6 r'(t) dt$
 (b) Determine el valor medio de f en el intervalo $[1, 7]$.
 (c) Determine las respuestas a los incisos (a) y (b) si la gráfica se desplaza dos unidades hacia arriba.
60. **Tasa de crecimiento** Si $r'(t)$ representa la razón de crecimiento de un perro en libras por año, ¿qué representa $r(t)$? ¿Qué representa $\int_2^6 r'(t) dt$ en el perro?
61. **Fuerza** La fuerza F (en newtons) de un cilindro hidráulico en una prensa es proporcional al cuadrado de $\sec x$, donde x es la distancia (en metros) que el cilindro se desplaza en su ciclo. El dominio de F es $[0, \pi/3]$ y $F(0) = 500$.
 (a) Encuentre F como una función de x .
 (b) Determine la fuerza media ejercida por la prensa en el intervalo $[0, \pi/3]$
62. **Flujo sanguíneo** La velocidad v del flujo de sangre a una distancia r del eje central de cualquier arteria de radio R es $v = k(R^2 - r^2)$ donde k es la constante de proporcionalidad. Determine el flujo medio de sangre a lo largo de un radio de la arteria. (Use 0 y R como los límites de integración.)

63. **Ciclo respiratorio** El volumen v en litros de aire en los pulmones durante un ciclo respiratorio de cinco segundos se aproxima mediante el modelo $V = 0.1729t + 0.1522t^2 - 0.0374t^3$, donde t es el tiempo en segundos. Aproxime el volumen medio de aire en los pulmones durante un ciclo.



64. **Promedio de ventas** Una compañía ajusta un modelo a los datos de ventas mensuales de un producto de temporada. El modelo es

$$S(t) = \frac{t}{4} + 1.8 + 0.5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right), \quad 0 \leq t \leq 24$$

donde S son las ventas (en miles) y t es el tiempo en meses.

- (a) Utilice una herramienta de graficación para representar $f(t) = 0.5 \operatorname{sen}(\pi t/6)$ para $0 \leq t \leq 24$. Use la gráfica para explicar por qué el valor medio de $f(t)$ es cero en el intervalo.
 (b) Utilice una herramienta de graficación para representar $S(t)$ y la recta $g(t) = t/4 + 1.8$ en la misma ventana de observación. Use la gráfica y el resultado del inciso (a) para explicar por qué g recibe el nombre *recta de tendencia*.



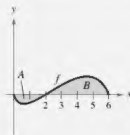
65. **Modelado de datos** Se prueba un vehículo experimental en una pista recta. Parte del reposo y su velocidad v (en metros por segundo) se registra en la tabla cada 10 segundos durante un minuto.

t	0	10	20	30	40	50	60
v	0	5	21	40	62	78	83

- (a) Use una herramienta de graficación para determinar un modelo de la forma $v = at^3 + bt^2 + ct + d$ para los datos.
 (b) Utilice una herramienta de graficación para dibujar los datos y hacer la gráfica del modelo.
 (c) Utilice el teorema fundamental del cálculo para aproximar la distancia recorrida por el vehículo durante la prueba.



66. **¿CÓMO LO VE?** En la figura se muestra la gráfica de f . La región sombreada A tiene un área de 1.5, y $\int_0^6 f(t) dx = 3.5$. Use esta información para completar los espacios en blanco.



- (a) $\int_0^2 f(x) dx = \square$ (b) $\int_2^6 f(x) dx = \square$
 (c) $\int_0^6 |f(x)| dx = \square$ (d) $\int_0^2 -2f(x) dx = \square$
 (e) $\int_0^6 [2 + f(x)] dx = \square$
 (f) El valor promedio de f en el intervalo $[0, 6]$ es \square .

Evaluar una integral definida En los ejercicios 67-72, determine F como una función de x y evalúe en $x = 2$, $x = 5$ y $x = 8$.

67. $F(x) = \int_0^x (4t - 7) dt$

68. $F(x) = \int_2^x (t^3 + 2t - 2) dt$

69. $F(x) = \int_1^x \frac{20}{\sqrt{t}} dt$

70. $F(x) = \int_2^x -\frac{2}{t^5} dt$

71. $F(x) = \int_1^x \cos \theta d\theta$

72. $F(x) = \int_0^x \sin \theta d\theta$

73. Analizar una función

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

donde f es la función cuya gráfica se muestra en la figura.

- Calcule $g(0)$, $g(2)$, $g(4)$, $g(6)$ y $g(8)$.
- Determine el intervalo abierto más grande sobre el cual g está creciendo. Encuentre el intervalo abierto más grande en el que g decrezca.
- Identifique cualquier extremo de g .
- Dibuje una gráfica sencilla de g .

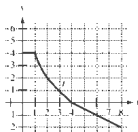


Figura para 73

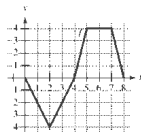


Figura para 74

74. Analizar una función

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

donde f es una función cuya gráfica se muestra en la figura.

- Calcule $g(0)$, $g(2)$, $g(4)$, $g(6)$ y $g(8)$.
- Encuentre el intervalo abierto más grande en el cual g está creciendo. Determine el intervalo abierto más grande en el que g decrezca.
- Identifique cualquier extremo de g .
- Dibuje una gráfica sencilla de g .

Comprobar y determinar una integral En los ejercicios 75-80, (a) integre para determinar F como una función de x y (b) demuestre el segundo teorema fundamental del cálculo derivando el resultado del inciso (a).

75. $F(x) = \int_0^x (t + 2) dt$

76. $F(x) = \int_0^x t(t^2 + 1) dt$

77. $F(x) = \int_x^1 \sqrt[3]{t} dt$

78. $F(x) = \int_1^x \sqrt[3]{t} dt$

79. $F(x) = \int_{\pi/4}^x \sec^2 t dt$

80. $F(x) = \int_{\pi/4}^x \sec t \tan t dt$

Usar el segundo teorema fundamental del cálculo En los ejercicios 81-86, utilice el segundo teorema fundamental del cálculo para encontrar $F'(x)$.

81. $F(x) = \int_{-2}^x (t^2 - 2t) dt$

82. $F(x) = \int_1^x \frac{t^2}{t^2 + 1} dt$

83. $F(x) = \int_{-1}^x \sqrt{t^2 + 1} dt$

84. $F(x) = \int_1^x \sqrt[3]{t} dt$

85. $F(x) = \int_0^x t \cos t dt$

86. $F(x) = \int_0^x \sec^3 t dt$

Encontrar una derivada En los ejercicios 87-92, encuentre $F'(x)$.

87. $F(x) = \int_1^{x+2} (4t + 1) dt$

88. $F(x) = \int_{-1}^x t^3 dt$

89. $F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{t} dt$

90. $F(x) = \int_2^x \frac{1}{t^2} dt$

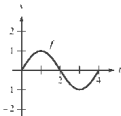
91. $F(x) = \int_0^x \sec t^2 dt$

92. $F(x) = \int_0^x \sec \theta^2 d\theta$

93. Análisis gráfico Aproxime la gráfica de g en el intervalo $0 \leq x \leq 4$, donde

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Identifique la coordenada x de un extremo de g . Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite MathGraphs.com



94. Área El área A entre la gráfica de la función

$$g(t) = 4 - \frac{3}{t^2}$$

y el eje t en el intervalo $[1, x]$ es

$$A(x) = \int_1^x \left(4 - \frac{3}{t^2}\right) dt.$$

- Determine la asíntota horizontal de la gráfica de g .
- Integre para encontrar A como una función de x . ¿La gráfica de A tiene una asíntota horizontal? Explique.

Movimiento de partículas En los ejercicios 95-100, la función de la velocidad, en pies por segundo, está dada para una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta. Encuentre (a) el desplazamiento y (b) la distancia total que la partícula recorre en el intervalo dado.

95. $v(t) = 5t - 7$, $0 \leq t \leq 3$

96. $v(t) = t^2 - t - 12$, $1 \leq t \leq 5$

97. $v(t) = t^3 - 10t^2 + 27t - 18$, $1 \leq t \leq 7$

98. $v(t) = t^3 - 8t^2 + 15t$, $0 \leq t \leq 5$

99. $v(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad 1 \leq t \leq 4$

100. $v(t) = \cos t, \quad 0 \leq t \leq 3\pi$

101. **Movimiento de partículas** Una partícula se mueve a lo largo del eje x . La posición de la partícula en el tiempo t está dada por

$$x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 2, \quad 0 \leq t \leq 5.$$

Encuentre el desplazamiento total que la partícula recorre en 5 unidades de tiempo.

102. **Movimiento de partículas** Repita el ejercicio 101 para la función posición dada por

$$x(t) = (t-1)(t-3)^2, \quad 0 \leq t \leq 5.$$

103. **Flujo de agua** El agua fluye de un tanque de almacenamiento a razón de $(500 - 5t)$ litros por minuto. Encuentre la cantidad de agua que fluye hacia afuera del tanque durante los primeros 18 minutos.

104. **Filtración de aceite** A la 1:00 p.m., empieza a filtrarse aceite desde un tanque a razón de $(4 + 0.75t)$ galones por hora.

- ¿Cuánto aceite se pierde desde la 1:00 p.m., hasta las 4:00 p.m.?
- ¿Cuánto aceite se pierde desde las 4:00 p.m. hasta las 7:00 p.m.?
- Compare los resultados de los incisos (a) y (b). ¿Qué observa?

Error de análisis En los ejercicios 105-108, describa por qué la expresión es incorrecta.

105. $\int_{-1}^1 x^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = (-1) - 1 = -2$

106. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \left[\frac{1}{x^2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

107. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 x dx = \left[\tan x \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1 - (-1) = 2$

108. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \csc x \cot x dx = \left[-\csc x \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2$

109. **Experimento de la aguja de Buffon** Sobre un plano horizontal se trazan rectas paralelas separadas por una distancia de 2 pulgadas. Una aguja de 2 pulgadas se lanza aleatoriamente sobre el plano. La probabilidad de que la aguja toque una recta es

$$P = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta$$

donde θ es el ángulo entre la aguja y cualquiera de las rectas paralelas. Determine esta probabilidad.

110. **Demostración** Demuestre que

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{h(x)}^{r(x)} f(t) dt \right] = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 111 y 112, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o proporcione un ejemplo que lo demuestre.

111. Si $F'(x) = G'(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

112. Si f es una continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

113. **Análisis una función** Demuestre que la función

$$f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2 + 1} dt + \int_0^x \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

es constante para $x > 0$.

114. **Encontrar la función** Encuentre la función $f(x)$ y todos los valores de c tal que

$$\int_c^x f(t) dt = x^2 + x - 2.$$

115. **Determinar valores** Sea

$$G(x) = \int_0^x \left[s \int_0^s f(t) dt \right] ds$$

donde f es continua para todo t real. Determine (a) $G(0)$, (b) $G'(0)$, (c) $G''(x)$ y (d) $G''(0)$.

PROYECTO DE TRABAJO

Demostración del teorema fundamental

Utilice una herramienta de graficación para representar la función

$$y_1 = \sin^2 t$$

en el intervalo $0 \leq t \leq \pi$. Sea $F(x)$ la siguiente función de x .

$$F(x) = \int_0^x \sin^2 t dt$$

(a) Complete la tabla. Explique por qué los valores de F están creciendo.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$F(x)$							

(b) Utilice las funciones de integración de una herramienta de graficación para representar F .

(c) Use las funciones de derivación de una herramienta de graficación para hacer la gráfica de $F'(x)$. ¿Cómo se relaciona esta gráfica con la gráfica del inciso (b)?

(d) Compruebe que la derivada de

$$y = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t$$

es $\sin^2 t$. Grafique y y escriba un pequeño párrafo acerca de cómo se relaciona esta gráfica con las de los incisos (b) y (c).

1.5 Integración numérica

- Aproximar una integral definida utilizando la regla del trapecio.
- Aproximar una integral definida utilizando la regla de Simpson.
- Analizar los errores de aproximación en la regla del trapecio y en la regla de Simpson.

La regla del trapecio

Algunas funciones elementales simplemente no tienen antiderivadas que sean funciones elementales. Por ejemplo, no hay función elemental que tenga alguna de las siguientes funciones como su derivada.

$$\sqrt{x}\sqrt{1-x}, \quad \sqrt{x} \cos x, \quad \frac{\cos x}{x}, \quad \sqrt{1-x^3}, \quad \text{sen } x^2$$

Si necesita evaluar una integral definida que implica una función cuya antiderivada no puede ser determinada, el teorema fundamental del cálculo sigue siendo válido pero no puede aplicarse fácilmente. En este caso, es más sencillo recurrir a una técnica de aproximación. En esta sección se describen dos de estas técnicas.

Una forma de aproximar una integral definida es utilizar n trapecios, como se muestra en la figura 1.38. En la formulación de este método, suponga que f es continua y positiva en el intervalo $[a, b]$. Por tanto, la integral definida

$$\int_a^b f(x) dx$$

representa el área de la región delimitada por la gráfica de f y el eje x , desde $x = a$ hasta $x = b$. Primero, divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = (b - a)/n$, tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Luego se forma un trapecio para cada subintervalo (vea la figura 1.39). El área del i -ésimo trapecio es

$$\text{Área del } i\text{-ésimo trapecio} = \left[\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right] \left(\frac{b-a}{n} \right).$$

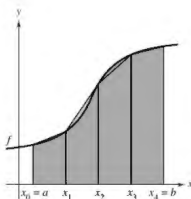
Esto implica que la suma de las áreas de los n trapecios es

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left(\frac{b-a}{n} \right) \left[\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \cdots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right] \\ &= \left(\frac{b-a}{2n} \right) [f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\ &= \left(\frac{b-a}{2n} \right) [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned}$$

Haciendo $\Delta x = (b - a)/n$, se puede tomar el límite cuando $n \rightarrow \infty$ para obtener

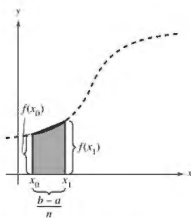
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{2n} \right) [f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{[f(a) - f(b)] \Delta x}{2} + \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[f(a) - f(b)](b-a)}{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\ &= 0 + \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

El resultado se resume en el siguiente teorema.



El área de la región puede aproximarse utilizando cuatro trapecios.

Figura 1.38



El área del primer trapecio es

$$\left[\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \right] \left(\frac{b-a}{n} \right).$$

Figura 1.39

TEOREMA 1.13 La regla del trapecio

Sea f continua en $[a, b]$. La regla del trapecio para aproximar $\int_a^b f(x) dx$ está dada por

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Además, como $n \rightarrow \infty$, el lado derecho se aproxima a $\int_a^b f(x) dx$.



COMENTARIO Observe que los coeficientes en la regla del trapecio siguen el siguiente patrón.

1 2 2 2 . . . 2 2 1

EJEMPLO 1 Aproximar con la regla del trapecio

Utilice la regla del trapecio para aproximar

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx.$$

Compare los resultados para $n = 4$ y $n = 8$, como se muestra en la figura 1.40.

Solución Cuando $n = 4$, $\Delta x = \pi/4$, y obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx &\approx \frac{\pi}{8} \left(\operatorname{sen} 0 + 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen} \pi \right) \\ &= \frac{\pi}{8} (0 + \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + 0) \\ &= \frac{\pi(1 + \sqrt{2})}{4} \\ &\approx 1.896. \end{aligned}$$

Cuando $n = 8$, $\Delta x = \pi/8$, y obtiene

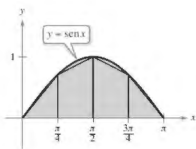
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx &\approx \frac{\pi}{16} \left(\operatorname{sen} 0 + 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{8} + 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + 2 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{8} + 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right. \\ &\quad \left. + 2 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{8} + 2 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} + 2 \operatorname{sen} \frac{7\pi}{8} + \operatorname{sen} \pi \right) \\ &= \frac{\pi}{16} \left(2 + 2\sqrt{2} + 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{8} + 4 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{8} \right) \\ &\approx 1.974. \end{aligned}$$

Para esta integral particular, podría haber encontrado una antiderivada y determinado que el área exacta de la región es 2.

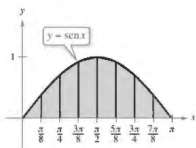
TECNOLOGÍA La mayoría de las herramientas de graficación y sistemas algebraicos computarizados cuenta con programas incorporados que se pueden utilizar para aproximar el valor de una integral definida. Utilice un programa de este tipo para aproximar la integral en el ejemplo 1. ¿Qué tan precisa es su aproximación? Cuando utiliza uno de estos programas, debe tener cuidado con sus limitaciones. Muchas veces, se le da una indicación del grado de exactitud de la aproximación. Otras, se le puede dar una aproximación por completo equivocada. Por ejemplo, utilice un programa de integración numérica incorporada para calcular

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x} dx.$$

La herramienta de graficación producirá un mensaje de error, ¿no es así?



Cuatro intervalos



Ocho subintervalos

Aproximaciones trapezoidales.

Figura 1.40

Es interesante comparar la regla del trapecio con la regla del punto medio que se dio en la sección 1.1. En la regla del trapecio, se promedian los valores de la función en los puntos terminales de los subintervalos, pero la regla del punto medio toma los valores de la función de los puntos medios de los subintervalos.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \Delta x \quad \text{Regla del punto medio}$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i-1}))}{2}\right) \Delta x \quad \text{Regla del trapecio}$$

Hay dos puntos importantes que deben señalarse respecto a la regla del trapecio (o a la regla del punto medio). Primero, la aproximación tiende a volverse más exacta a medida que n aumenta. Así, en el ejemplo 1, si $n = 16$, la regla del trapecio produce una aproximación de 1.994. Segundo, aunque se podría utilizar el teorema fundamental para calcular la integral en el ejemplo 1, este teorema no puede utilizarse para calcular una integral tan simple como $\int_0^{\pi} \sin x^2 dx$, debido a que $\sin x^2$ no tiene una antiderivada elemental. Sin embargo, es posible aplicar la regla del trapecio para evaluar esta integral.

Regla de Simpson

Una manera de ver la aproximación que permite la regla del trapecio de una integral definida consiste en decir que en cada subintervalo se aproxima f por medio de un polinomio de *primer* grado. En la regla de Simpson, que recibe ese nombre en honor del matemático inglés Thomas Simpson (1710-1761), se lleva este procedimiento un paso adelante y f se aproxima mediante polinomios de *segundo* grado.

Antes de presentar la regla de Simpson, considere el siguiente teorema sobre las integrales de polinomios de grado 2 (o menor).

TEOREMA 1.14 Integral de $p(x) = Ax^2 + Bx + C$

Si $p(x) = Ax^2 + Bx + C$, entonces

$$\int_a^b p(x) dx = \left(\frac{b-a}{6}\right) \left[p(a) + 4p\left(\frac{a+b}{2}\right) + p(b) \right].$$

Demostración

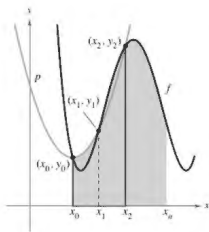
$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) dx &= \int_a^b (Ax^2 + Bx + C) dx \\ &= \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx \right]_a^b \\ &= \frac{A(b^3 - a^3)}{3} + \frac{B(b^2 - a^2)}{2} + C(b - a) \\ &= \left(\frac{b-a}{6}\right) [2A(a^2 + ab + b^2) + 3B(b+a) + 6C] \end{aligned}$$

Mediante la expansión y la agrupación de términos, la expresión dentro de los corchetes se convierte en

$$\underbrace{(Aa^2 + Ba + C)}_{p(a)} + 4 \underbrace{\left[A\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 + B\left(\frac{b+a}{2}\right) + C \right]}_{4p\left(\frac{a+b}{2}\right)} + \underbrace{(Ab^2 + Bb + C)}_{p(b)}$$

y se puede escribir

$$\int_a^b p(x) dx = \left(\frac{b-a}{6}\right) \left[p(a) + 4p\left(\frac{a+b}{2}\right) + p(b) \right].$$



$$\int_{x_0}^{x_2} p(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx$$

Figura 1.41

Para formular la regla de Simpson con el fin de aproximar una integral definida, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Sin embargo, esta vez se requiere que n sea par, y los subintervalos se agrupan en pares tales que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b.$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{[x_0, x_2]} \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{[x_2, x_4]} \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{[x_{n-2}, x_n]}$

En cada subintervalo (doble) $[x_{i-2}, x_i]$, f se puede aproximar por medio de un polinomio p de grado menor que o igual a 2. (Vea el ejercicio 47.) Por ejemplo, en el subintervalo $[x_0, x_2]$, elija el polinomio de menor grado que pasa a través de los puntos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , como se muestra en la figura 1.41. Ahora, utilizando p como una aproximación de f en este subintervalo, por el teorema 1.14 se tiene que,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &\approx \int_{x_0}^{x_2} p(x) dx \\ &= \frac{x_2 - x_0}{6} \left[p(x_0) + 4p\left(\frac{x_0 + x_2}{2}\right) + p(x_2) \right] \\ &= \frac{2[(b-a)/n]}{6} [p(x_0) + 4p(x_1) + p(x_2)] \\ &= \frac{b-a}{3n} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]. \end{aligned}$$

Repetiendo este procedimiento en el intervalo completo $[a, b]$ se produce el siguiente teorema.

TEOREMA 1.15 La regla de Simpson

Sea f continua en $[a, b]$ y sea n un entero par. La regla de Simpson para aproximar $\int_a^b f(x) dx$ es

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Además, cuando $n \rightarrow \infty$, el lado derecho tiende a $\int_a^b f(x) dx$.

En el ejemplo 1, la regla del trapecio se utilizó para calcular $\int_0^{\pi} \sin x dx$. En el siguiente ejemplo, se aplica la regla de Simpson a la misma integral.

EJEMPLO 2 Aproximar con la regla Simpson

Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Utilice la regla de Simpson para aproximar

$$\int_0^{\pi} \sin x dx.$$

Compare los resultados para $n = 4$ y $n = 8$.

Solución Cuando $n = 4$, se tiene

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \approx \frac{\pi}{12} \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{4} + 2 \sin \frac{\pi}{2} + 4 \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \pi \right) \approx 2.005.$$

Cuando $n = 8$, tiene $\int_0^{\pi} \sin x dx \approx 2.0003$.

.....▶
 ••• **COMENTARIO** Observe que los coeficientes en la regla de Simpson tienen el siguiente patrón.

1 4 2 4 2 4 . . . 4 2 4 1

••• **COMENTARIO** En la sección 1.1, ejemplo 8, la regla del punto medio con $n = 4$, aproximó $\int_0^{\pi} \sin x dx$ a 2.052. En el ejemplo 1, la regla del trapecio con $n = 4$ da una aproximación de 1.896. En el ejemplo 2, la regla de Simpson con $n = 4$ produjo una aproximación de 2.005. La antiderivada produciría el valor verdadero de 2.

.....▶

■ PARA INFORMACIÓN ADICIONAL

Para las demostraciones de las fórmulas utilizadas para calcular los errores implicados en el uso de la regla del punto medio y la regla de Simpson, consulte el artículo "Elementary Proofs of Error Estimates for the Midpoint and Simpson's Rules", por Edward C. Fozekas, Jr. y Peter R. Mercer, en *Mathematics Magazine*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

Análisis de errores

Al usar una técnica de aproximación, es importante que conozca la precisión del resultado. El siguiente teorema, que se enuncia sin demostración, proporciona las fórmulas para calcular los errores que implican el uso de la regla de Simpson y de la regla del trapecio. En general, cuando se realiza una aproximación piense en el error E como la diferencia entre $\int_a^b f(x) dx$ y la aproximación.

TEOREMA 1.16 Errores en la regla del trapecio y en la de Simpson

Si f tiene una segunda derivada continua en $[a, b]$, entonces el error E al aproximar $\int_a^b f(x) dx$ por medio de la regla del trapecio es

$$|E| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} [\text{máx } |f''(x)|], \quad a \leq x \leq b. \quad \text{Regla del trapecio}$$

Además, si tiene una cuarta derivada continua en $[a, b]$, entonces el error E al aproximar $\int_a^b f(x) dx$ mediante la regla de Simpson es

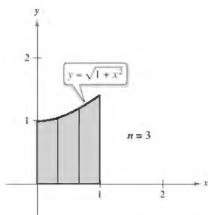
$$|E| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} [\text{máx } |f^{(4)}(x)|], \quad a \leq x \leq b. \quad \text{Regla de Simpson}$$

▷ TECNOLOGÍA Si tiene

- acceso a un sistema algebraico
- por computadora, utilícelo para
- calcular la integral definida del
- ejemplo 3. Podría obtener un
- valor de

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})] \\ &\approx 1.14779. \end{aligned}$$

- (El símbolo "ln" representa la
- función logaritmo natural.



$$1.144 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx \leq 1.164$$

Figura 1.42

El teorema 1.16 establece que los errores generados por la regla del trapecio y la regla de Simpson tienen cotas superiores dependientes de los valores extremos de $f''(x)$ y $f^{(4)}(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Además, estos errores pueden hacerse arbitrariamente pequeños *incrementando* n , siempre que f'' y $f^{(4)}$ sean continuas y, en consecuencia, acotadas en $[a, b]$.

EJEMPLO 3 Error aproximado en la regla del trapecio

Determine un valor de n tal que la regla del trapecio se aproxime al valor de

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$$

con un error menor o igual que 0.01.

Solución Comience haciendo $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ y encontrando la segunda derivada de f .

$$f(x) = x(1+x^2)^{-1/2} \quad \text{y} \quad f''(x) = (1+x^2)^{-3/2}$$

El valor máximo de $|f''(x)|$ en el intervalo $[0, 1]$ es $|f''(0)| = 1$. Por tanto, por el teorema 1.20, puede escribir

$$|E| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} |f''(0)| = \frac{1}{12n^2} (1) = \frac{1}{12n^2}.$$

Para obtener un error E menor que 0.01, debe elegir n tal que $1/(12n^2) \leq 1/100$.

$$100 \leq 12n^2 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \sqrt{\frac{100}{12}} \approx 2.89$$

Así, puede elegir $n = 3$ (debido a que n debe ser mayor o igual a 2.89) y aplicar la regla del trapecio, como se ilustra en la figura 1.42, para obtener

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx &\approx \frac{1}{6} [\sqrt{1+0^2} + 2\sqrt{1+(\frac{1}{3})^2} + 2\sqrt{1+(\frac{2}{3})^2} + \sqrt{1+1^2}] \\ &\approx 1.154. \end{aligned}$$

Por tanto, al sumar y restar el error de esta estimación, sabe que

$$1.144 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx \leq 1.164.$$

1.5 Ejercicios

Consulte CalcChat.COM para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Usar la regla del trapecio y la regla de Simpson En los ejercicios 1-10, use la regla del trapecio y la regla de Simpson para aproximar el valor de la integral definida para un valor dado de n . Redondee la respuesta hasta cuatro decimales y compare los resultados con el valor exacto de la integral definida.

1. $\int_0^2 x^2 dx, n = 4$

2. $\int_2^4 \left(\frac{x^2}{4} + 1\right) dx, n = 4$

3. $\int_0^3 x^3 dx, n = 4$

4. $\int_2^3 \frac{2}{x^2} dx, n = 4$

5. $\int_1^3 x^3 dx, n = 6$

6. $\int_0^8 \sqrt{x} dx, n = 8$

7. $\int_4^9 \sqrt{x} dx, n = 8$

8. $\int_1^4 (4 - x^2) dx, n = 6$

9. $\int_0^1 \frac{2}{(x+2)^2} dx, n = 4$

10. $\int_0^2 x\sqrt{x^2+1} dx, n = 4$

Estimar errores En los ejercicios 23-26, utilice las fórmulas de error del teorema 1.20 para calcular el error en la aproximación de la integral, con $n = 4$, utilizando (a) la regla del trapecio y (b) la regla de Simpson.

23. $\int_1^3 2x^4 dx$

24. $\int_3^5 (5x + 2) dx$

25. $\int_2^4 \frac{1}{(x-1)^2} dx$

26. $\int_0^{\pi} \cos x dx$

Estimar errores En los ejercicios 27-30, utilice las fórmulas de error en el teorema 1.20 con el fin de encontrar n tal que el error en la aproximación de la integral definida sea menor que 0.00001, utilizando (a) la regla del trapecio y (b) la regla de Simpson.

27. $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$

28. $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$

29. $\int_0^2 \sqrt{x+2} dx$

30. $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$

⚡ Usar la regla del trapecio y la regla de Simpson En los ejercicios 11-20, aproxime la integral definida utilizando la regla del trapecio y la regla de Simpson con $n = 4$. Compare estos resultados con la aproximación de la integral utilizando una herramienta de graficación.

11. $\int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx$

12. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$

13. $\int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1-x} dx$

14. $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{x} \sin x dx$

15. $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \sin x^2 dx$

16. $\int_0^{\sqrt{\pi/4}} \tan x^2 dx$

17. $\int_3^{3.1} \cos x^2 dx$

18. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin^2 x} dx$

19. $\int_0^{\pi/4} x \tan x dx$

20. $\int_0^{\pi} f(x) dx, f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

⚡ Estimar errores utilizando tecnología En los ejercicios 31-34, utilice un sistema algebraico por computadora y las fórmulas del error para determinar n de manera que el error en la aproximación de la integral definida sea menor que 0.00001, utilizando (a) la regla del trapecio y (b) la regla de Simpson.

31. $\int_0^2 \sqrt{1+x} dx$

32. $\int_0^2 (x+1)^{2/3} dx$

33. $\int_0^1 \tan x^2 dx$

34. $\int_0^1 \sin x^2 dx$

35. Encontrar el área de una región Aproxime el área de la región sombreada utilizando

- (a) la regla del trapecio con $n = 4$,
(b) la regla de Simpson con $n = 4$.

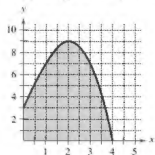


Figura para 35

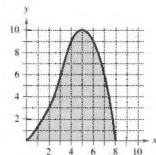


Figura para 36

DESARROLLO DE CONCEPTOS

- Aproximaciones polinomiales** La regla del trapecio y la regla de Simpson producen aproximaciones de una integral definida $\int_a^b f(x) dx$ basadas en aproximaciones polinomiales de f . ¿Qué grado de polinomio se usa para cada una?
- Describir un error** Describa la dimensión del error cuando la regla del trapecio se utiliza para aproximar $\int_a^b f(x) dx$ cuando $f(x)$ es una función lineal. Explique su resultado con una gráfica.

36. Encontrar el área de una región Aproxime el área de la región sombreada utilizando

- (a) la regla del trapecio con $n = 8$,
(b) la regla de Simpson con $n = 8$.

37. Área Utilice la regla de Simpson con $n = 14$ para aproximar el área de la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x} \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi/2$.

38. Circunferencia La integral elíptica

$$8\sqrt{3} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{2}{3} \sin^2 \theta} d\theta$$

proporciona la circunferencia de una elipse. Utilice la regla de Simpson con $n = 8$ para aproximar la circunferencia.

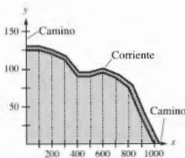
39. Topografía

Utilice la regla del trapecio para calcular el número de metros cuadrados de tierra en un lote donde x y y se miden en metros, como se muestra en la figura. La tierra es acotada por un río y dos caminos rectos que se juntan en ángulos rectos.

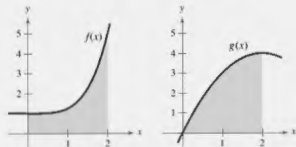


x	0	100	200	300	400	500
y	125	125	120	112	90	90

x	600	700	800	900	1000
y	95	88	75	35	0



40. ¿CÓMO LO VE? La función $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $[0, 2]$ y la función $g(x)$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $[0, 2]$.



- (a) Utilizando la regla del trapecio con $n = 4$, ¿qué integral se sobrestimó? ¿Qué integral se subestimó? Explique su razonamiento.
- (b) ¿Qué regla usaría para aproximaciones más exactas de $\int_0^2 f(x) dx$ y $\int_0^2 g(x) dx$? ¿La regla del trapecio o la regla de Simpson? Explique su razonamiento.

41. Trabajo Para determinar el tamaño del motor requerido en la operación de una prensa, una compañía debe conocer el cantidad de trabajo realizado cuando la prensa mueve un objeto linealmente 5 pies. La fuerza variable para desplazar el objeto es

$$F(x) = 100x\sqrt{125 - x^2}$$

donde F está dada en libras y x produce la posición de la unidad en pies. Utilice la regla de Simpson con $n = 12$ para aproximar el trabajo W (en pies-libras) realizado a través de un ciclo si

$$W = \int_0^5 F(x) dx.$$

42. Aproximar una función La tabla presenta varias mediciones recopiladas en un experimento para aproximar una función continua desconocida $y = f(x)$.

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
y	4.32	4.36	4.58	5.79	6.14

x	1.25	1.50	1.75	2.00
y	7.25	7.64	8.08	8.14

- (a) Aproxime la integral

$$\int_0^2 f(x) dx$$

utilizando la regla del trapecio y la regla de Simpson.

- (b) Utilice una herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para los datos. Integre el polinomio resultante en $[0, 2]$ y compare el resultado con el inciso (a).

Aproximar π En los ejercicios 43 y 44, utilice la regla de Simpson con $n = 6$ para aproximar π utilizando la ecuación dada.

$$43. \pi = \int_0^{1/2} \frac{6}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad 44. \pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$$

45. Usar la regla de Simpson Use la regla de Simpson con $n = 10$ y un sistema algebraico por computadora para aproximar t en la ecuación integral

$$\int_0^t \sec \sqrt{x} dx = 2.$$

46. Demostración Demuestre que la regla de Simpson es exacta al aproximar la integral de una función polinomial cúbica, y demuestre el resultado con $n = 4$ para

$$\int_0^1 x^3 dx.$$

47. Demostración Demuestre que puede encontrar un polinomio

$$p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

que pasa por cualesquiera de los tres puntos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) , donde las x_i son distintas.

Ejercicios de repaso

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Encontrar una integral indefinida En los ejercicios 1-8, encuentre la integral indefinida.

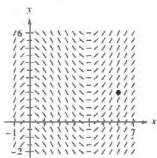
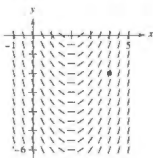
- $\int (x - 6) dx$
- $\int (x^4 + 3) dx$
- $\int (4x^2 + x + 3) dx$
- $\int \frac{6}{\sqrt[3]{x}} dx$
- $\int \frac{x^4 + 8}{x^3} dx$
- $\int \frac{x^2 + 2x - 6}{x^4} dx$
- $\int (2x - 9 \operatorname{sen} x) dx$
- $\int (5 \cos x - 2 \sec^2 x) dx$

Determinar una solución especial En los ejercicios 9-12, encuentre la solución particular que satisfaga la ecuación diferencial y las condiciones iniciales.

- $f'(x) = -6x, f(1) = -2$
- $f'(x) = 9x^2 + 1, f(0) = 7$
- $f''(x) = 24x, f'(-1) = 7, f(1) = -4$
- $f''(x) = 2 \cos x, f'(0) = 4, f(0) = -5$

Campos direccionales En los ejercicios 13 y 14, se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo direccional. (a) Dibuje dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo direccional, una de las cuales pasa a través del punto indicado. (Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite MathArticles.com.) (b) Utilice la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y utilice una herramienta de graficación para representar la solución.

- $\frac{dy}{dx} = 2x - 4, (4, -2)$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2 - 2x, (6, 2)$



15. Velocidad y aceleración Se lanza una pelota hacia arriba verticalmente desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 96 pies por segundo. Utilice $a(t) = -32$ pies por segundo cuadrado como la aceleración debida a la gravedad. (Ignore la resistencia del aire.)

- ¿Cuánto tardará la pelota en alcanzar su altura máxima?
- ¿Cuándo la velocidad de la pelota es la mitad de la velocidad inicial?
- ¿A qué altura está la pelota cuando su velocidad es la mitad de la velocidad inicial?

16. Velocidad y aceleración La velocidad de un automóvil que viaja en línea recta se reduce de 45 a 30 millas por hora en una distancia de 264 pies. Encuentre la distancia en la cual el automóvil puede llegar al reposo a partir de una velocidad de 30 millas por hora, suponiendo la misma desaceleración constante.

17. Velocidad y aceleración Un avión que está despegando de una pista recorre 3600 pies antes de elevarse. El avión parte desde el reposo, se desplaza con aceleración constante y efectúa el recorrido en 30 segundos. ¿A qué velocidad despegó?

18. Modelado de datos La tabla muestra las velocidades (en millas por hora) de dos carros sobre una rampa de acceso a una carretera interestatal. El tiempo t está en segundos.

t	v_1	v_2
0	0	0
5	2.5	21
10	7	38
15	16	51
20	29	60
25	45	64
30	65	65

- Reescriba las velocidades en pies por segundo.
- Use las capacidades de regresión de una herramienta de graficación para encontrar los modelos cuadráticos para los datos en el inciso (a).
- Aproxime la distancia recorrida por cada carro durante los 30 segundos. Explique la diferencia en las distancias.

Encontrar una sumatoria En los ejercicios 19 y 20, encuentre la sumatoria. Utilice la capacidad de sumatoria de una herramienta de graficación para comprobar su resultado.

- $\sum_{k=1}^5 (5i - 3)$
- $\sum_{k=0}^3 (k^2 + 1)$

Usar la notación sigma En los ejercicios 21 y 22, utilice la notación sigma para escribir la suma.

- $\frac{1}{3(1)} + \frac{1}{3(2)} + \frac{1}{3(3)} + \cdots + \frac{1}{3(10)}$
- $\left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{1+n}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{2+n}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$

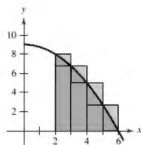
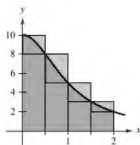
Evaluar una suma En los ejercicios 23-28, utilice las propiedades de la sumatoria y el teorema 1.2 para evaluar la suma.

- $\sum_{i=1}^{24} 8$
- $\sum_{i=1}^{75} 5i$
- $\sum_{i=1}^{20} 2i$
- $\sum_{i=1}^{20} (3i - 4)$
- $\sum_{i=1}^{20} (i + 1)^2$
- $\sum_{i=1}^{12} (i^2 - 1)$

Encontrar sumas superiores e inferiores para una región En los ejercicios 29 y 30, utilice sumas superiores e inferiores para aproximar el área de la región en el número indicado de subintervalos (de igual ancho).

29. $y = \frac{10}{x^2 + 1}$

30. $y = 9 - \frac{1}{4}x^2$



Calcular el área por la definición de límite En los ejercicios 31-34, utilice el proceso de límite para determinar el área de la región entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo dado. Dibuje la región.

31. $y = 8 - 2x$, $[0, 3]$

32. $y = x^2 + 3$, $[0, 2]$

33. $y = 5 - x^2$, $[-2, 1]$

34. $y = \frac{1}{3}x^3$, $[2, 4]$

35. Encontrar el área por la definición de límite Utilice el proceso de límite para encontrar el área de la región limitada por $x = 5y - y^2$, $x = 0$, $y = 2$ y $y = 5$.

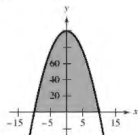
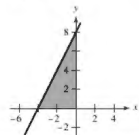
36. Sumas superiores e inferiores Considere la región acotada por $y = mx$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = b$.

- Determine la suma superior e inferior para aproximar el área de la región cuando $\Delta x = b/n$.
- Determine la suma superior e inferior para aproximar el área de la región cuando $\Delta x = b/n$.
- Encuentre el área de la región dejando que n tiende a infinito en ambas sumas en el inciso (b). Demuestre que en cada caso se obtiene la fórmula para el área de un triángulo.

Escribir una integral definida En los ejercicios 37 y 38, formule una integral definida que produzca el área de la región. (No evalúe la integral.)

37. $f(x) = 2x + 8$

38. $f(x) = 100 - x^2$



Evaluar una integral definida por medio de una fórmula geométrica En los ejercicios 39 y 40, dibuje la región cuya área está dada por la integral definida. Luego, utilice una fórmula geométrica para evaluar la integral.

39. $\int_0^5 (5 - |x - 5|) dx$

40. $\int_{-6}^6 \sqrt{36 - x^2} dx$

41. Usar las propiedades de las integrales definidas

Dadas

$$\int_4^8 f(x) dx = 12 \quad \text{y} \quad \int_4^8 g(x) dx = 5$$

evalúe

(a) $\int_4^8 [f(x) + g(x)] dx$.

(b) $\int_4^8 [f(x) - g(x)] dx$.

(c) $\int_4^8 [2f(x) - 3g(x)] dx$.

(d) $\int_4^8 7f(x) dx$.

42. Usar las propiedades de las integrales definidas

Dadas

$$\int_0^3 f(x) dx = 4 \quad \text{y} \quad \int_3^6 f(x) dx = -1$$

evalúe

(a) $\int_0^6 f(x) dx$.

(b) $\int_6^3 f(x) dx$.

(c) $\int_4^4 f(x) dx$.

(d) $\int_0^6 -10f(x) dx$.

Evaluar una integral definida En los ejercicios 43-50, utilice el teorema fundamental del cálculo para evaluar la integral definida.

43. $\int_0^6 (3 + x) dx$

44. $\int_2^3 (t^2 - 1) dt$

45. $\int_{-1}^1 (4t^3 - 2t) dt$

46. $\int_2^1 (x^4 + 4x - 6) dx$

47. $\int_4^9 x\sqrt{x} dx$

48. $\int_1^4 \left(\frac{1}{x^2} + x\right) dx$

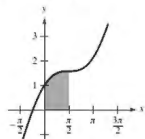
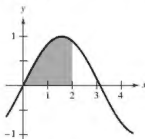
49. $\int_0^{\pi/4} \sin \theta d\theta$

50. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 t dt$

Determinar el área de una región En los ejercicios 51 y 52, determine el área de la región dada.

51. $y = \sin x$

52. $y = x + \cos x$



Encontrar el área de una región En los ejercicios 53-56, encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones.

53. $y = 8 - x$, $x = 0$, $x = 6$, $y = 0$

54. $y = -x^2 + x + 6$, $y = 0$

55. $y = x - x^3$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

56. $y = \sqrt{x}(1 - x)$, $y = 0$

Encontrar el valor promedio de una función En los ejercicios 57 y 58, encuentre el valor medio de la función en el intervalo indicado. Determine los valores de x en los cuales la función toma su valor medio y grafique la función.

$$57. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, [4, 9] \quad 58. f(x) = x^3, [0, 2]$$

Usar el segundo teorema fundamental del cálculo En los ejercicios 59-62, utilice el segundo teorema fundamental del cálculo para encontrar $F'(x)$.

$$59. F(x) = \int_0^x t^2 \sqrt{1+t^2} dt \quad 60. F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$$

$$61. F(x) = \int_{-1}^x (t^2 + 3t + 2) dt$$

$$62. F(x) = \int_0^x \csc^2 t dt$$

Encontrar la integral indefinida En los ejercicios 63-72, encuentre la integral indefinida.

$$63. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+3}} dx$$

$$64. \int 6x^2 \sqrt{3x^3+2} dx$$

$$65. \int x(1-3x^2)^4 dx$$

$$66. \int \frac{x+4}{(x^2+8x-7)^2} dx$$

$$67. \int \sec^3 x \cos x dx$$


$$68. \int x \sin 3x^2 dx$$

$$69. \int \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-\sin \theta}} d\theta$$

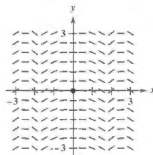
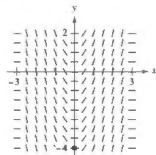
$$70. \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx$$

$$71. \int (1 + \sec \pi x)^2 \sec \pi x \tan \pi x dx$$

$$72. \int \sec 2x \tan 2x dx$$

 Campos direccionales En los ejercicios 73 y 74, se dan una ecuación diferencial y un campo direccional. (a) Dibuje dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo direccional, una de las cuales pasa por el punto indicado. (Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite MathArticles.com.) (b) Utilice la integración para determinar la solución particular de la ecuación diferencial y use una herramienta de graficación para representar la solución.

$$73. \frac{dy}{dx} = x\sqrt{9-x^2}, (0, -4) \quad 74. \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x \sin(x^2), (0, 0)$$



Calcular la integral definida En los ejercicios 75-82, calcule la integral definida. Utilice una herramienta de graficación para comprobar el resultado.

$$75. \int_0^1 (3x+1)^3 dx$$

$$76. \int_0^1 x^2(x^3-2)^3 dx$$

$$77. \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx$$

$$78. \int_3^8 \frac{x}{3\sqrt{x^2-8}} dx$$

$$79. 2\pi \int_0^1 (y+1)\sqrt{1-y} dy$$

$$80. 2\pi \int_{-1}^0 x^2 \sqrt{x+1} dx$$

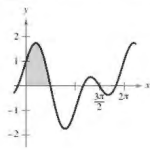
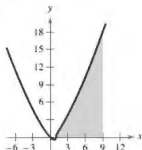
$$81. \int_0^{\pi/4} \cos \frac{x}{2} dx$$

$$82. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin 2x dx$$

Encontrar el área de la región En los ejercicios 83 y 84, encuentre el área de la región. Utilice una herramienta de graficación para comprobar el resultado.

$$83. \int_0^9 x \sqrt{x-1} dx$$

$$84. \int_0^{\pi/2} [\cos x + \sin(2x)] dx$$



85. Usar la función par Utilice $\int_0^2 x^4 dx = \frac{32}{5}$ para evaluar cada integral definida utilizando el teorema fundamental de cálculo.

$$(a) \int_{-2}^2 x^4 dx$$

$$(b) \int_{-2}^0 x^4 dx$$


$$(c) \int_0^2 3x^4 dx$$

$$(d) \int_{-2}^0 -5x^4 dx$$

86. Ciclo respiratorio Después de ejercitarse durante unos minutos, una persona tiene un ciclo respiratorio para el cual la tasa de admisión de aire es

$$v = 1.75 \sin \frac{\pi t}{2}.$$

Encuentre el volumen, en litros, de aire inhalado durante un ciclo mediante la integración de la función en el intervalo $[0, 2]$.

 Usar la regla del trapecio y la regla de Simpson En los ejercicios 87-90, utilice la regla del trapecio y la regla de Simpson con $n=4$, y use las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximar la integral definida. Compare los resultados.

$$87. \int_2^3 \frac{2}{1+x^2} dx$$

$$88. \int_0^1 \frac{x^{3/2}}{3-x^2} dx$$

$$89. \int_0^{\pi/2} \sqrt{x} \cos x dx$$

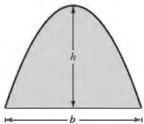
$$90. \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sec^2 x} dx$$

Solución de problemas

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

1. Usar una función Sea $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$, $x > 0$.
- Encuentre $L(1)$.
 - Encuentre $L'(x)$ y $L'(1)$.
- ✎** (c) Utilice una herramienta de graficación para aproximar el valor de x (hasta tres lugares decimales) para el cual $L(x) = 1$.
- (d) Demuestre que $L(x_1, x_2) = L(x_1) + L(x_2)$ para todos los valores positivos de x_1 y x_2 .

2. Arco parabólico Arquímedes demostró que el área de un arco parabólico es igual a $\frac{2}{3}$ del producto de la base y la altura (vea la figura).



- Grafique el arco parabólico delimitado por $y = 9 - x^2$ y el eje x . Utilice una integral apropiada para encontrar el área A .
- Encuentre la base y la altura del arco y compruebe la fórmula de Arquímedes.
- Demuestre la fórmula de Arquímedes para una parábola general.

Calcular una suma y un límite En los ejercicios 3 y 4, (a) escriba el área bajo la gráfica de la función dada definida en el intervalo indicado como límite. Luego, (b) calcule la suma del inciso (a), y (c) calcule el límite utilizando el resultado del inciso (b).

3. $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$, $[0, 2]$

$$\left(\text{Sugerencia: } \sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \right)$$

4. $y = \frac{1}{2}x^5 + 2x^3$, $[0, 2]$

$$\left(\text{Sugerencia: } \sum_{i=1}^n i^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} \right)$$

5. Función de Fresnel La función de Fresnel S se define mediante la integral

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt.$$

- Trace la gráfica de la función $y = \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$ en el intervalo $[0, 3]$.
- Utilice la gráfica del inciso (a) para dibujar la gráfica de S en el intervalo $[0, 3]$.
- Ubique todos los extremos relativos de S en el intervalo $(0, 3)$.
- Localice todos los puntos de inflexión de S en el intervalo $(0, 3)$.

6. Aproximación La aproximación de la cuadratura gaussiana de dos puntos para f es

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

- (a) Utilice esta fórmula para aproximar

$$\int_{-1}^1 \cos x dx.$$

Encuentre el error de la aproximación.

- (b) Utilice esta fórmula para aproximar

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

- (c) Demuestre que la aproximación de la cuadratura gaussiana de dos puntos es exacta para todos los polinomios de grado 3 o menor.

7. Extremos y puntos de inflexión La gráfica de una función f consta de tres segmentos de recta que unen a los puntos $(0, 0)$, $(2, -2)$, $(6, 2)$ y $(8, 3)$. La función F se define por medio de la integral.

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- Dibuje la gráfica de f .
- Complete la tabla.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(x)$									

- Encuentre los extremos de F en el intervalo $[0, 8]$.
- Determine todos los puntos de inflexión de F en el intervalo $(0, 8)$.

8. Caída libre Galileo Galilei (1564-1642) enunció la siguiente proposición relativa a los objetos de caída libre:

El tiempo en el que cualquier espacio que se recorre por un cuerpo acelerado uniformemente es igual al tiempo en el cual ese mismo espacio se recorrería por el mismo cuerpo moviéndose a una velocidad uniforme cuyo valor es la media de la velocidad más alta del cuerpo acelerado y la velocidad justo antes de que empiece la aceleración.

Utilice las técnicas de esta unidad para comprobar esta proposición.

9. Demostración Demuestre

$$\int_0^t f(t)(x-t) dt = \int_0^t \left(\int_0^t f(v) dv \right) dt.$$

10. Demostración Demuestre

$$\int_a^b f(x)f'(x) dx = \frac{1}{2}([f(b)]^2 - [f(a)]^2).$$

11. Suma de Riemann Utilice una suma de Riemann para evaluar el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{3/2}}.$$

12. **Suma de Riemann** Utilice una suma de Riemann para evaluar el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5}{n^6}.$$

13. **Demostración** Suponga que f es integrable en $[a, b]$ y $0 < m \leq f(x) \leq M$ para todo x en el intervalo $[a, b]$. Demuestre que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Utilice este resultado para calcular $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$.

14. **Uso de una función continua** Sea f continua en el intervalo $[0, b]$, donde $f(x) + f(b-x) \neq 0$ en $[0, b]$.

(a) Demuestre que $\int_0^b \frac{f(x)}{f(x) + f(b-x)} dx = \frac{b}{2}$.

- (b) Utilice el resultado del inciso (a) para calcular

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sin(1-x) + \sin x} dx.$$

- (c) Utilice el resultado del inciso (a) para calcular

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{3-x}} dx.$$

15. **Velocidad y aceleración** Un automóvil se desplaza en línea recta durante una hora. Su velocidad v en millas por hora en intervalos de seis minutos se muestra en la tabla.

t (horas)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
v (mi/h)	0	10	20	40	60	50

t (horas)	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
v (mi/h)	40	35	40	50	65

- (a) Elabore una gráfica razonable de la función de velocidad v graficando estos puntos y conectándolos con una curva uniforme.
 (b) Encuentre los intervalos abiertos sobre los cuales la aceleración a es positiva.
 (c) Encuentre la aceleración media del automóvil (en millas por hora cuadrada) en el intervalo $[0, 0.4]$
 (d) ¿Qué significa la integral

$$\int_0^1 v(t) dt$$

Aproxime esta integral utilizando la regla del trapecio con cinco subintervalos.

- (e) Aproxime la aceleración en $t = 0.8$.

16. **Demostración** Demuestre que si f es una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

17. **Comprobar una suma** Compruebe que

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

demostrando lo siguiente.

(a) $(1+i)^2 - i^2 = 3i^2 + 3i + 1$

(b) $(n+1)^3 = \sum_{i=1}^n (3i^2 + 3i + 1) + 1$

(c) $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

18. **Función integral del seno** La función integral del seno

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

se utiliza a menudo en ingeniería. La función

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}$$

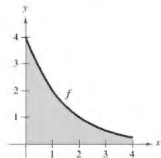
no está definida en $t=0$, pero su límite es 1 cuando $t \rightarrow 0$. Por tanto, define $f(0) = 1$. En ese caso f es continua en todos lados.

- (a) Utilice una herramienta de graficación para representar $Si(x)$.
 (b) ¿En qué valores de x , $Si(x)$ tiene máximos relativos?
 (c) Encuentre las coordenadas del primer punto de inflexión donde $x > 0$.
 (d) Decida si $Si(x)$ tiene alguna asíntota horizontal. Si es así, identifique cada una.

19. **Comparación de métodos** Sea

$$I = \int_0^4 f(x) dx$$

donde f se muestra en la figura. Sea que $L(n)$ y $R(n)$ representan las sumas de Riemann utilizando los extremos del lado izquierdo y los extremos del lado derecho de n intervalos de igual ancho. (Suponga que n es par.) Sean $T(n)$ y $S(n)$ los valores correspondientes de la regla del trapecio y de la regla de Simpson.



- (a) Para cualquier n , ordene $L(n)$, $R(n)$, $T(n)$ e I en orden creciente.
 (b) Aproxime $S(4)$.
20. **Minimizar una integral** Determine los límites de integración donde $a \leq b$, tal que

$$\int_a^b (x^2 - 16) dx$$

tenga valor mínimo.

Métodos de integración

- 2.1 Reglas básicas de integración indefinida
- 2.2 Integración por sustitución (cambio de variable)
- 2.3 Integración por partes
- 2.4 Integración de funciones logarítmicas, trigonométricas y exponenciales
- 2.5 Integrales trigonométricas
- 2.6 Integración por sustitución trigonométrica
- 2.7 Integración por fracciones parciales
- 2.8 Integración de funciones trigonométricas inversas
- 2.9 Integración de funciones hiperbólicas
- 2.10 Integración por tablas y otras técnicas de integración



Fuerza de fluido



Reacción química



Modelo de memoria



Líneas de alta tensión



Electricidad

2.1 Reglas básicas de integración indefinida

- Revisar los procedimientos para ajustar un integrando a una de las reglas básicas de integración.

REPASO DE LAS REGLAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN ($a > 0$)

- $\int k f(u) du = k \int f(u) du$
- $\int [f(u) \pm g(u)] du = \int f(u) du \pm \int g(u) du$
- $\int du = u + C$
- $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
- $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
- $\int e^u du = e^u + C$
- $\int a^u du = \left(\frac{1}{\ln a}\right) a^u + C$
- $\int \sin u du = -\cos u + C$
- $\int \cos u du = \sin u + C$
- $\int \tan u du = -\ln|\cos u| + C$
- $\int \cot u du = \ln|\sin u| + C$
- $\int \sec u du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
- $\int \csc u du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$
- $\int \sec^2 u du = \tan u + C$
- $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$
- $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$
- $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$
- $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsen \frac{u}{a} + C$
- $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$
- $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C$

Ajuste de integrandos a las reglas básicas de integración

En esta unidad se estudiarán varias técnicas de integración que amplían en gran medida el conjunto de integrales para las que se pueden aplicar las reglas básicas de integración. Estas reglas se repasan a la izquierda. Un paso importante en la solución de cualquier problema de integración es el reconocimiento de cuál regla de integración básica usar.

EJEMPLO 1 Comparar entre tres integrales similares

•••► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Determine cada una de las integrales.

$$\text{a. } \int \frac{4}{x^2 + 9} dx \quad \text{b. } \int \frac{4x}{x^2 + 9} dx \quad \text{c. } \int \frac{4x^2}{x^2 + 9} dx$$

Solución

- a. Utilice la regla del arcotangente y sean $u = x$ y $a = 3$.

$$\begin{aligned} \int \frac{4}{x^2 + 9} dx &= 4 \int \frac{1}{x^2 + 3^2} dx && \text{Regla del múltiplo constante} \\ &= 4 \left(\frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} \right) + C && \text{Regla del arcotangente} \\ &= \frac{4}{3} \arctan \frac{x}{3} + C && \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

- b. La regla del arcotangente no aplica porque el numerador contiene un factor de x . Considere la regla del logaritmo y sea $u = x^2 + 9$. Entonces $du = 2x dx$, y se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{4x}{x^2 + 9} dx &= 2 \int \frac{2x dx}{x^2 + 9} && \text{Regla del múltiplo constante} \\ &= 2 \int \frac{du}{u} && \text{Sustituya: } u = x^2 + 9 \\ &= 2 \ln|u| + C && \text{Regla del logaritmo} \\ &= 2 \ln(x^2 + 9) + C. && \text{Reescriba como una función de } x. \end{aligned}$$

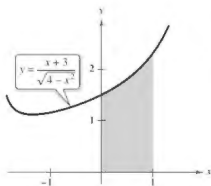
- c. Debido a que el grado del numerador es igual al grado del denominador, se debe utilizar la primera división para reescribir la función racional impropia como la suma de un polinomio y una función racional propia.

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2}{x^2 + 9} dx &= \int \left(4 + \frac{-36}{x^2 + 9} \right) dx && \text{Reescriba usando división larga.} \\ &= \int 4 dx - 36 \int \frac{1}{x^2 + 9} dx && \text{Escriba como dos integrales.} \\ &= 4x - 36 \left(\frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} \right) + C && \text{Integre.} \\ &= 4x - 12 \arctan \frac{x}{3} + C && \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

Observe que en el ejemplo 1(c) se requiere algo de álgebra antes de aplicar cualquier regla de integración, y se necesita más de una regla para evaluar la integral resultante.

EJEMPLO 2

Usar dos reglas de integración para resolver una integral simple



El área de la región es de aproximadamente 1.839.

Figura 2.1

$$\text{Evalúe } \int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

Solución Comience por escribir la integral como la suma de dos integrales. Luego aplique la regla de la potencia y la regla del arco seno.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx + \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 (4-x^2)^{-1/2} (-2x) dx + 3 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}} dx \\ &= \left[-(4-x^2)^{1/2} + 3 \arcsen \frac{x}{2} \right]_0^1 \\ &= \left(-\sqrt{3} + \frac{\pi}{2} \right) - (-2 + 0) \\ &\approx 1.839 \end{aligned}$$

Vea la figura 2.1.

► **TECNOLOGÍA** La regla de Simpson puede ser usada para dar una buena aproximación del valor de la integral en el ejemplo 2 (para la aproximación es 1.839). Cuando se utiliza la integración numérica, sin embargo, debe ser consciente de que la regla de Simpson no siempre da buenas aproximaciones cuando uno o ambos de los límites de integración están cerca de una asíntota vertical. Por ejemplo, usando el teorema fundamental del cálculo, se puede obtener

$$\int_0^{1.99} \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}} dx \approx 6.213.$$

Para $n = 10$, la regla de Simpson da una aproximación de 6.889.

Las reglas 18, 19 y 20 de las reglas básicas de integración de la página anterior tienen expresiones que implican la suma o diferencia de dos cuadrados:

$$a^2 - u^2, \quad a^2 + u^2 \quad \text{y} \quad u^2 - a^2.$$

Estas expresiones son a menudo evidentes después de una sustitución de u , como se muestra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3

Sustitución que implica $a^2 - u^2$

$$\text{Encuentre } \int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}} dx.$$

Solución Debido a que el radical en el denominador se puede escribir en la forma $\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{4^2 - (x^3)^2}$ se puede intentar la sustitución $u = x^3$. Entonces $du = 3x^2 dx$ y se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 dx}{\sqrt{16-(x^3)^2}} && \text{Reescriba la integral.} \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{4^2-u^2}} && \text{Sustituya: } u = x^3 \\ &= \frac{1}{3} \arcsen \frac{u}{4} + C && \text{Regla del arco seno} \\ &= \frac{1}{3} \arcsen \frac{x^3}{4} + C. && \text{Reescriba como una función de } x. \end{aligned}$$

Exploración

Comparación de tres integrales similares ¿Cuáles, en su caso, de las integrales indicadas a continuación pueden ser evaluadas utilizando las 20 reglas básicas de integración? Para cualquiera que se pueda evaluar, hágalo. Para las que no se pueda, explique por qué no.

a. $\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

b. $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

c. $\int \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Dos de las reglas de integración que más se pasan por alto son la regla del logaritmo y la regla de la potencia. Advierta en los dos ejemplos siguientes cómo se pueden disfrazar estas dos reglas de integración.

EJEMPLO 4 Forma disfrazada de la regla del logaritmo

Encuentre $\int \frac{1}{1+e^x} dx$.

Solución La integral no parece adaptarse a alguna de las reglas básicas. Sin embargo, la forma del cociente, sugiere la regla del logaritmo. Si se hace $u = 1 + e^x$, entonces $du = e^x dx$. Se puede obtener la du requerida sumando y restando e^x en el numerador.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+e^x} dx &= \int \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} dx && \text{Sume y reste } e^x \text{ en el numerador.} \\ &= \int \left(\frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx && \text{Reescriba como dos fracciones.} \\ &= \int dx - \int \frac{e^x dx}{1+e^x} && \text{Reescriba como dos integrales.} \\ &= x - \ln(1+e^x) + C && \text{Integre.} \end{aligned}$$

.....►
 *COMENTARIO Recuerde que se pueden separar numeradores pero no denominadores. Cuidado con este error común en el ajuste de integrandos a las reglas básicas. Por ejemplo, no se puede separar denominadores en el ejemplo 4.

$$\frac{1}{1+e^x} \neq \frac{1}{1} + \frac{1}{e^x}$$

Por lo general hay más de una manera de resolver un problema de integración. Por ejemplo, en el ejemplo 4 trate de integrar multiplicando el numerador y el denominador por e^{-x} para obtener una integral de la forma $-f du/u$. Vea si se puede obtener la misma respuesta por este procedimiento. (Tenga cuidado: la respuesta aparecerá en una forma diferente.)

EJEMPLO 5 Forma disfrazada de la regla de la potencia

Encuentre $\int (\cot x)[\ln(\sen x)] dx$.

Solución Una vez más, la integral no parece adaptarse a alguna de las reglas básicas. Sin embargo, teniendo en cuenta las dos opciones principales para u

$$u = \cot x \quad \text{o} \quad u = \ln(\sen x)$$

Puede observar que la segunda opción es la apropiada, ya que

$$u = \ln(\sen x) \quad \text{y} \quad du = \frac{\cos x}{\sen x} dx = \cot x dx.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int (\cot x)[\ln(\sen x)] dx &= \int u du && \text{Sustituya: } u = \ln(\sen x) \\ &= \frac{u^2}{2} + C && \text{Integre.} \\ &= \frac{1}{2}[\ln(\sen x)]^2 + C. && \text{Reescriba como una función de } x. \end{aligned}$$

En el ejemplo 5, intente *comprobar* que la derivada de

$$\frac{1}{2}[\ln(\sen x)]^2 + C$$

es el integrando de la integral original.

Con frecuencia se utilizan identidades trigonométricas para ajustar integrales a una de las reglas básicas de integración.

EJEMPLO 6 Usar identidades trigonométricas

Encuentre $\int \tan^2 2x \, dx$.

Solución Observe que $\tan^2 u$ no está en la lista de reglas básicas de integración. Sin embargo, $\sec^2 u$ está en la lista. Esto sugiere la identidad trigonométrica $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$. Si hace que $u = 2x$ entonces $du = 2 \, dx$, y

$$\begin{aligned} \int \tan^2 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int \tan^2 u \, du && \text{Sustituya: } u = 2x. \\ &= \frac{1}{2} \int (\sec^2 u - 1) \, du && \text{Identidad trigonométrica} \\ &= \frac{1}{2} \int \sec^2 u \, du - \frac{1}{2} \int du && \text{Reescriba como dos integrales.} \\ &= \frac{1}{2} \tan u - \frac{u}{2} + C && \text{Integre.} \\ &= \frac{1}{2} \tan 2x - x + C. && \text{Reescriba como función de } x. \end{aligned}$$

Esta sección concluye con un resumen de los procedimientos comunes para el ajuste de integrandos a las reglas básicas de integración.

- ▷ **TECNOLOGÍA** Si usted tiene acceso a un sistema de álgebra computacional, trate de usarlo para evaluar las integrales en esta sección. Compare las formas de las antiderivadas proporcionadas por el software con las formas obtenidas a mano. Algunas veces las formas serán las mismas, pero a menudo serán diferentes. Por ejemplo, ¿por qué la antiderivada $\ln 2x + C$ es equivalente a la antiderivada $\ln x + C$?

PROCEDIMIENTOS PARA AJUSTAR INTEGRANDOS A LAS REGLAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN

Técnica

Desarrollar (numerador).

Separar numerador.

Completar el cuadrado.

Dividir la función racional impropia.

Sumar y restar términos en el numerador.

Usar identidades trigonométricas.

Multiplicar y dividir por el conjugado de Pitágoras.

Ejemplo

$$(1 + e^x)^2 = 1 + 2e^x + e^{2x}$$

$$\frac{1+x}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$$\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{2x}{x^2+2x+1} = \frac{2x+2-2}{x^2+2x+1}$$

$$= \frac{2x+2}{x^2+2x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

$$\frac{1}{1+\sin x} = \left(\frac{1}{1+\sin x} \right) \left(\frac{1-\sin x}{1-\sin x} \right)$$

$$= \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$$

$$= \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

2.1 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Elegir una antiderivada En los ejercicios 1-4, seleccione la antiderivada correcta.

$$1. \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$(a) 2\sqrt{x^2+1} + C$$

$$(b) \sqrt{x^2+1} + C$$

$$(c) \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + C$$

$$(d) \ln(x^2+1) + C$$

$$2. \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2+1}$$

$$(a) \ln\sqrt{x^2+1} + C$$

$$(b) \frac{2x}{(x^2+1)^2} + C$$

$$(c) \arctan x + C$$

$$(d) \ln(x^2+1) + C$$

$$3. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$(a) \ln\sqrt{x^2+1} + C$$

$$(b) \frac{2x}{(x^2+1)^2} + C$$

$$(c) \arctan x + C$$

$$(d) \ln(x^2+1) + C$$

$$4. \frac{dy}{dx} = x \cos(x^2+1)$$

$$(a) 2x \sin(x^2+1) + C$$

$$(b) -\frac{1}{2} \sin(x^2+1) + C$$

$$(c) \frac{1}{2} \sin(x^2+1) + C$$

$$(d) -2x \sin(x^2+1) + C$$

Elegir una fórmula En los ejercicios 5-14, seleccione la fórmula de integración básica que puede utilizar para encontrar la integral, e identifique u y a , cuando sea apropiado.

$$5. \int (5x-3)^4 dx$$

$$6. \int \frac{2t+1}{t^2+t-4} dt$$

$$7. \int \frac{1}{\sqrt{x}(1-2\sqrt{x})} dx$$

$$8. \int \frac{2}{(2t-1)^2+4} dt$$

$$9. \int \frac{3}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$10. \int \frac{-2x}{\sqrt{x^2-4}} dx$$

$$11. \int t \sin t^2 dt$$

$$12. \int \sec 5x \tan 5x dx$$

$$13. \int (\cos x)e^{\sin x} dx$$

$$14. \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx$$

Encontrar una integral indefinida En los ejercicios 15-46, calcule la integral indefinida.

$$15. \int 14(x-5)^6 dx$$

$$16. \int \frac{5}{(t+6)^4} dt$$

$$17. \int \frac{7}{(z-10)^2} dz$$

$$18. \int t^3 \sqrt{t^2+1} dt$$

$$19. \int \left[v + \frac{1}{(3v-1)^3} \right] dv$$

$$20. \int \left[4x - \frac{2}{(2x+3)^2} \right] dx$$

$$21. \int \frac{t^2-3}{-t^3+9t+1} dt$$

$$22. \int \frac{x+1}{\sqrt{3x^2+6x}} dx$$

$$23. \int \frac{x^2}{x-1} dx$$

$$25. \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$27. \int (5+4x^2)^2 dx$$

$$29. \int x \cos 2\pi x^2 dx$$

$$31. \int \frac{\sec x}{\sqrt{\cos x}} dx$$

$$33. \int \frac{2}{e^{-x}+1} dx$$

$$35. \int \frac{\ln x^2}{x} dx$$

$$37. \int \frac{1+\cos \alpha}{\sec \alpha} d\alpha$$

$$39. \int \frac{-1}{\sqrt{1-(4t+1)^2}} dt$$

$$41. \int \frac{\tan(2/t)}{t^2} dt$$

$$43. \int \frac{6}{\sqrt{10x-x^2}} dx$$

$$45. \int \frac{4}{4x^2+4x+65} dx$$

$$24. \int \frac{3x}{x+4} dx$$

$$26. \int \left(\frac{1}{2x+5} - \frac{1}{2x-5} \right) dx$$

$$28. \int x \left(3 + \frac{2}{x} \right)^2 dx$$

$$30. \int \csc \pi x \cot \pi x dx$$

$$32. \int \csc^2 x e^{\cos x} dx$$

$$34. \int \frac{2}{7e^x+4} dx$$

$$36. \int (\tan x)[\ln(\cos x)] dx$$

$$38. \int \frac{1}{\cos \theta - 1} d\theta$$

$$40. \int \frac{1}{25+4x^2} dx$$

$$42. \int \frac{e^{3/t}}{t^2} dt$$

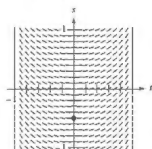
$$44. \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{4x^2-8x+3}} dx$$

$$46. \int \frac{1}{x^2-4x+9} dx$$

Campos direccionales En los ejercicios 47 y 48, se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo direccional. (a) Trace dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo direccional, una de las cuales pasa a través del punto dado. (b) Utilice la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y use una utilidad gráfica para representar gráficamente la solución. Compare el resultado con los dibujos del inciso (a). Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite MathGraphs.com.

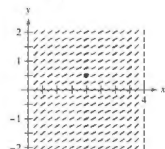
$$47. \frac{dx}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\left(0, -\frac{1}{2} \right)$$



$$48. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$$

$$\left(2, \frac{1}{2} \right)$$



Campo direccional En los ejercicios 49 y 50, utilice un sistema de álgebra computacional para graficar el campo direccional de la ecuación diferencial y representar gráficamente la solución a través de la condición inicial especificada.

$$49. \frac{dy}{dx} = 0.8y, \quad y(0) = 4$$

$$50. \frac{dy}{dx} = 5 - y, \quad y(0) = 1$$

Ecuaciones diferenciales En los ejercicios 51-56, resuelva la ecuación diferencial.

$$51. \frac{dy}{dx} = (e^x + 5)^2$$

$$52. \frac{dy}{dx} = (4 - e^{2x})^2$$

$$53. \frac{dr}{dt} = \frac{10e^t}{\sqrt{1 - e^{2t}}}$$

$$54. \frac{dr}{dt} = \frac{(1 + e^t)^2}{e^{3t}}$$

$$55. (4 + \tan^2 x)y' = \sec^2 x$$

$$56. y' = \frac{1}{x\sqrt{4x^2 - 9}}$$

Evaluar una integral definida En los ejercicios 57-64, evalúe la integral definida. Utilice las capacidades de integración de una herramienta de graficación para verificar su resultado.

$$57. \int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx$$

$$58. \int_0^{\pi} \sin^2 t \cos t \, dt$$

$$59. \int_0^1 xe^{-x^2} \, dx$$

$$60. \int_1^e \frac{1 - \ln x}{x} \, dx$$

$$61. \int_0^k \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 36}} \, dx$$

$$62. \int_1^3 \frac{2x^2 + 3x - 2}{x} \, dx$$

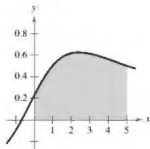
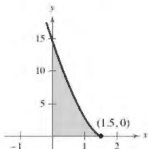
$$63. \int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{4 + 9x^2} \, dx$$

$$64. \int_0^7 \frac{1}{\sqrt{100 - x^2}} \, dx$$

Área En los ejercicios 65-68, calcule el área de la región.

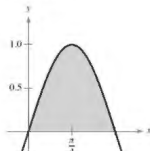
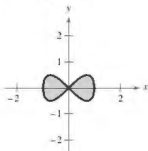
$$65. y = (-4x + 6)^{3/2}$$

$$66. y = \frac{3x + 2}{x^2 + 9}$$



$$67. y^2 = x^2(1 - x^2)$$

$$68. y = \sin 2x$$



Encontrar una integral usando tecnología En los ejercicios 69-72, utilice un sistema de álgebra computacional para encontrar la integral. Utilice el sistema de álgebra computacional para graficar dos antiderivadas. Describa la relación entre las gráficas de las dos antiderivadas.

$$69. \int \frac{1}{x^2 + 4x + 13} \, dx$$

$$70. \int \frac{x - 2}{x^2 + 4x + 13} \, dx$$

$$71. \int \frac{1}{1 + \sin \theta} \, d\theta$$

$$72. \int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^3 \, dx$$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

Elegir una fórmula En los ejercicios 73-76, indique la fórmula de integración que se utiliza para realizar la integración. Explique por qué eligió esa fórmula. No integre.

$$73. \int x(x^2 + 1)^3 \, dx$$

$$74. \int x \sec(x^2 + 1) \tan(x^2 + 1) \, dx$$

$$75. \int \frac{x}{x^2 + 1} \, dx$$

$$76. \int \frac{1}{x^2 + 1} \, dx$$

77. Encontrar constantes Determine las constantes a y b de forma que

$$\sin x + \cos x = a \sin(x + b).$$

Utilice este resultado para integrar

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$$

78. Derivada de una regla Demuestre que

$$\sec x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

Luego utilice esta identidad para derivar la regla de integración básica

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

79. Área Las gráficas de $f(x) = x$ y $g(x) = ax^2$ intersectan en los puntos $(0, 0)$ y $(1/a, 1/a)$. Encuentre a ($a > 0$) tal que el área de la región acotada por las gráficas de estas dos funciones es $\frac{1}{3}$.

80. Piénselo Cuando evalúa

$$\int_{-1}^1 x^2 \, dx$$

es apropiado sustituir

$$u = x^2, \quad x = \sqrt{u} \quad \text{y} \quad dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

para obtener

$$\frac{1}{2} \int_1^1 \sqrt{u} \, du = 0?$$

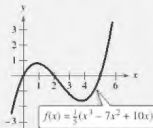
Explique.

81. Comparar antiderivadas

- (a) Explique por qué la antiderivada $y_1 = e^{x+C_1}$ es equivalente a la antiderivada $y_2 = Ce^x$.
- (b) Explique por qué la antiderivada $y_1 = \sec^2 x + C_1$ es equivalente a la antiderivada $y_2 = \tan^2 x + C$.

82.

¿CÓMO LO VE? Usando el gráfico, $\int_0^5 f(x) dx$ es positiva o negativa? Explique.



Aproximar En los ejercicios 83 y 84, determine qué valores se aproximan mejor a la zona de la región comprendida entre el eje x y la función en el intervalo dado. (Haga su selección sobre la base de un esbozo de la región y no mediante la integración.)

83. $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$, $[0, 2]$

- (a) 3 (b) 1 (c) -8 (d) 8 (e) 10

84. $f(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$, $[0, 2]$

- (a) 3 (b) 1 (c) -4 (d) 4 (e) 10

Interpretar integrales En los ejercicios 85 y 86, (a) dibuje la región cuya área está dada por la integral, (b) dibuje el sólido cuyo volumen está dado por la integral cuando se utiliza el método de los discos, y (c) dibuje el sólido cuyo volumen está dado por la integral cuando se utiliza el método de las capas. (Hay más de una respuesta correcta para cada inciso.)

85. $\int_0^2 2\pi x^3 dx$

86. $\int_0^4 \pi y dy$

87. **Volumen** La región acotada por $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = b$ ($b > 0$) se gira respecto al eje y .

- (a) Halle el volumen del sólido generado cuando $b = 1$.
- (b) Encuentre b tal que el volumen del sólido generado sea de $\frac{3}{2}$ unidades cúbicas.

88. **Volumen** Considere la región acotada por las gráficas de $x = 0$, $y = \cos x^2$, $y = \sin x^2$ y $x = \sqrt{\pi}/2$. Encuentre el volumen del sólido generado al girar la región respecto al eje y .

89. **Longitud de arco** Encuentre la longitud de arco de la gráfica de $y = \ln(\sec x)$ de $x = \pi/4$ a $x = \pi/2$.

90. **Longitud de arco** Encuentre la longitud de arco de la gráfica de $y = \ln(\cos x)$ de $x = 0$ a $x = \pi/3$.

91. **Superficie** Encuentre el área de la superficie formada al girar la gráfica de $y = 2\sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 9]$ respecto al eje x .

92. **Centroide** Encuentre la coordenada x del centroide de la región acotada por las gráficas de

$$y = \frac{5}{\sqrt{25-x^2}}, \quad y = 0, \quad x = 0 \quad y \quad x = 4.$$

Valor promedio de una función En los ejercicios 93 y 94, encuentre el valor promedio de la función sobre el intervalo dado.

93. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $-3 \leq x \leq 3$

94. $f(x) = \sin nx$, $0 \leq x \leq \pi/n$, n es un entero positivo.

Longitud de arco En los ejercicios 95 y 96, utilice las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud de arco de la curva en el intervalo dado.

95. $y = \tan \pi x$, $[0, \frac{1}{4}]$

96. $y = x^{2/3}$, $[1, 8]$

97. Encontrar un patrón

(a) Encuentre $\int \cos^3 x dx$.

(b) Encuentre $\int \cos^5 x dx$.

(c) Encuentre $\int \cos^7 x dx$.

(d) Explique cómo encontrar $\int \cos^{15} x dx$ sin integrar realmente.

98. Encontrar un patrón

(a) Escriba $\int \tan^3 x dx$ en términos de $\int \tan x dx$. Luego encuentre $\int \tan^3 x dx$.

(b) Escriba $\int \tan^5 x dx$ en términos de $\int \tan^3 x dx$.

(c) Escriba $\int \tan^{2k+1} x dx$, donde k es un entero positivo, en términos de $\int \tan^{2k-1} x dx$.

(d) Explique cómo encontrar $\int \tan^{15} x dx$ sin llegar a la integración.

99. **Métodos de Integración** Demuestre que los siguientes resultados son equivalentes.

Integración usando tablas:

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + 1} + \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|) + C$$

Integración usando un sistema de álgebra por computadora:

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2 + 1} + \operatorname{arcsinh}(x)] + C$$

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

100. Evalúe $\int_2^9 \frac{\sqrt{\ln(9-x)} dx}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}}$

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.
© The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

2.2 Integración por sustitución (cambio de variable)

- Utilizar el reconocimiento de patrones para encontrar una integral indefinida.
- Emplear un cambio de variable para determinar una integral indefinida.
- Utilizar la regla general de las potencias para la integración con el fin de determinar una integral indefinida.
- Utilizar un cambio de variable para calcular una integral definida.
- Calcular una integral definida que incluya una función par o impar.

Reconocimiento de patrones

En esta sección estudiará técnicas para integrar funciones compuestas. El análisis se divide en dos partes: *reconocimiento de patrones* y *cambio de variables*. Ambas técnicas implican una **sustitución por u** . Con el reconocimiento de patrones se efectúa la sustitución mentalmente, y con el cambio de variable se escriben los pasos de la sustitución. El papel de la sustitución en la integración es comparable al de la regla de la cadena en la derivación. Recuerde que para funciones derivables dadas por

$$y = F(u) \quad \text{y} \quad u = g(x)$$

la regla de la cadena establece que

$$\frac{d}{dx} [F(g(x))] = F'(g(x))g'(x).$$

De acuerdo con la definición de una antiderivada, se deduce que

$$\int F'(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

Estos resultados se resumen en el siguiente teorema.

TEOREMA 2.1 Antiderivación de una función compuesta

Sea g una función cuyo rango es un intervalo I , y sea f una función continua en I . Si g es derivable en su dominio y F es una antiderivada de f sobre I , entonces

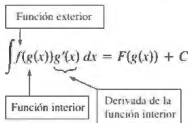
$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

Si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x) dx$ y

$$\int f(u) du = F(u) + C.$$

.....▶
 •••COMENTARIO El enunciado del teorema 2.1 no dice cómo distinguir entre $f(g(x))$ y $g'(x)$ en el integrando. A medida que tenga más experiencia en la integración, su habilidad para efectuar esta operación aumentará. Desde luego, parte de la clave es su familiaridad con las derivadas.

Los ejemplos 1 y 2 muestran cómo aplicar *directamente* el teorema 2.1, reconociendo la presencia de $f(g(x))$ y $g'(x)$. Observe que la función compuesta en el integrando tiene una *función exterior* f y una *función interior* g . Además, la derivada $g'(x)$ está presente como un factor del integrando.



EJEMPLO 1 Reconocer el patrón de $f(g(x))g'(x)$

Determine $\int (x^2 + 1)^2(2x) dx$.

Solución Tomando $g(x) = x^2 + 1$, obtiene

$$g'(x) = 2x$$

y

$$f(g(x)) = f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2.$$

A partir de esto, puede reconocer que el integrando sigue el patrón $f(g(x))g'(x)$. Utilizando la regla de la potencia para la integración y el teorema 2.1, puede escribir

$$\int \overbrace{(x^2 + 1)^2(2x)}^{f(g(x)) g'(x)} dx = \frac{1}{3} (x^2 + 1)^3 + C.$$

Trate de utilizar la regla de la cadena para comprobar que la derivada $\frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + C$ es, el integrando de la integral original.

EJEMPLO 2 Reconocer el patrón $f(g(x))g'(x)$

Determine $\int 5 \cos 5x dx$.

Solución Tomando $g(x) = 5x$, se obtiene

$$g'(x) = 5x$$

y

$$f(g(x)) = f(5x) = \cos 5x.$$

A partir de esto, puede reconocer que el integrando sigue el patrón $f(g(x))g'(x)$. Utilizando la regla del coseno para la integración y el teorema 2.1, puede escribir

$$\int \overbrace{(\cos 5x)(5)}^{f(g(x)) g'(x)} dx = \sin 5x + C.$$

Puede comprobar esto derivando $\sin 5x + C$ para obtener el integrando original. ■

- **TECNOLOGIA** Usar un sistema algebraico computarizado, tal como *Maple*, *Mathematica* o *TI-Nspire*, para resolver las integrales dadas en los ejemplos 1 y 2. ¿Se obtienen las mismas antiderivadas que las que se obtienen en los ejemplos?

Exploración

Reconocimiento de patrones El integrando en cada una de las siguientes integrales corresponde al patrón $f(g(x))g'(x)$. Identifique el patrón y utilice el resultado para calcular la integral.

$$\text{a. } \int 2x(x^2 + 1)^4 dx \quad \text{b. } \int 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx \quad \text{c. } \int \sec^2 x (\tan x + 3) dx$$

Las integrales de la (d) a la (f) son similares a las de la (a) a la (c). Demuestre cómo puede multiplicar y dividir por una constante para calcular estas integrales.

$$\text{d. } \int x(x^2 + 1)^4 dx \quad \text{e. } \int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx \quad \text{f. } \int 2 \sec^2 x (\tan x + 3) dx$$

Los integrandos en los ejemplos 1 y 2 corresponden exactamente al patrón $f(g(x))g'(x)$ (solo tiene que reconocer el patrón). Puede extender esta técnica de manera considerable utilizando la regla del múltiplo constante.

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$$

Muchos integrandos contienen la parte esencial (la parte variable) de $g'(x)$, aunque está faltando un múltiplo constante. En tales casos, puede multiplicar y dividir por el múltiplo constante necesario, como se muestra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Multiplicar y dividir por una constante

Encuentre la integral indefinida.

$$\int x(x^2 + 1)^2 dx$$

Solución Esto es similar a la integral dada en el ejemplo 1, salvo porque al integrando le falta un factor 2. Al reconocer que $2x$ es la derivada de $x^2 + 1$, tome

$$g(x) = x^2 + 1$$

e incluya el término $2x$ de la manera siguiente.

$$\begin{aligned} \int x(x^2 + 1)^2 dx &= \int (x^2 + 1)^2 \left(\frac{1}{2}\right)(2x) dx && \text{Multiplique y divida por 2.} \\ &= \frac{1}{2} \int \overbrace{(x^2 + 1)^2}^{f(g(x))} \overbrace{(2x)}^{g'(x)} dx && \text{Regla del múltiplo constante.} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)^3}{3} \right] + C && \text{Integre.} \\ &= \frac{1}{6} (x^2 + 1)^3 + C && \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

En la práctica, la mayoría de la gente no escribiría tantos pasos como los que se muestran en el ejemplo 3. Por ejemplo, podría calcular la integral escribiendo simplemente

$$\begin{aligned} \int x(x^2 + 1)^2 dx &= \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)^2 (2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)^3}{3} \right] + C \\ &= \frac{1}{6} (x^2 + 1)^3 + C. \end{aligned}$$

Asegúrese de que la regla del múltiplo *constante* se aplica solo a *constantes*. No puede multiplicar y dividir por una variable y después, mover la variable fuera del signo de la integral. Por ejemplo,

$$\int (x^2 + 1)^3 dx \neq \frac{1}{2x} \int (x^2 + 1)^2 (2x) dx.$$

Después de todo, si fuera legítimo mover cantidades variables fuera del signo de la integral, podría sacar el integrando completo y simplificar el proceso completo. Sin embargo, el resultado sería incorrecto.

Cambio de variables

Con un **cambio de variables** formal puede reescribir por completo la integral en términos de u y du (o de cualquier otra variable conveniente). Aunque este procedimiento puede implicar más pasos escritos que el reconocimiento de patrones ilustrado en los ejemplos 1-3, resulta útil para integrandos complicados. La técnica del cambio de variable utiliza la notación de Leibniz para la diferencial. Esto es, si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x) dx$, y la integral en el teorema 2.1 toma la forma

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C.$$

EJEMPLO 4 Cambiar variable

Encuentre $\int \sqrt{2x-1} dx$.

Solución Primero, sea u la función interior, $u = 2x - 1$. Calcule después la diferencial du de manera que $du = 2 dx$. Ahora, utilizando $\sqrt{2x-1} = \sqrt{u}$ y $dx = du/2$, sustituya para obtener

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2x-1} dx &= \int \sqrt{u} \left(\frac{du}{2} \right) && \text{Integre en términos de } u. \\ &= \frac{1}{2} \int u^{1/2} du && \text{Regla del múltiplo constante} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{u^{3/2}}{3/2} \right) + C && \text{Antiderivada en términos de } u \\ &= \frac{1}{3} u^{3/2} + C && \text{Simplifique.} \\ &= \frac{1}{3} (2x-1)^{3/2} + C. && \text{Antiderivada en términos de } x \end{aligned}$$

... **COMENTARIO** Como la integración suele ser más difícil que la derivación, compruebe su respuesta en un problema de integración mediante la derivación. Así, en el ejemplo 4 debe derivarse $\frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C$ para comprobar que se obtiene el integrando original.



EJEMPLO 5 Cambio de variables

... ▷ Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre $\int x\sqrt{2x-1} dx$.

Solución Como en el ejemplo previo, sea $u = 2x - 1$ para obtener $dx = du/2$. Como el integrando contiene un factor de x , tiene que despejar x en términos de u , como se muestra.

$$u = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{u+1}{2} \quad \text{Despeje } x \text{ en términos de } u.$$

Después de esto, utilizando la sustitución, obtiene

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{2x-1} dx &= \int \left(\frac{u+1}{2} \right) u^{1/2} \left(\frac{du}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \int (u^{3/2} + u^{1/2}) du \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2} \right) + C \\ &= \frac{1}{10} (2x-1)^{5/2} + \frac{1}{6} (2x-1)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

Para completar el cambio variable en el ejemplo 5, debe resolver para x en términos de u . Algunas veces esto es muy difícil. Por fortuna no siempre es necesario, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Cambiar variables

Determine $\int \sec^2 3x \cos 3x \, dx$.

Solución Debido a que $\sec^2 3x = (\sec 3x)^2$, puede tomar $u = \sec 3x$. Entonces

$$du = (\cos 3x)(3) \, dx.$$

Ahora, debido a que $\cos 3x \, dx$ es parte de la integral original, puede escribir

$$\frac{du}{3} = \cos 3x \, dx.$$

Sustituyendo u y $du/3$ en la integral original, obtiene

$$\begin{aligned} \int \sec^2 3x \cos 3x \, dx &= \int u^2 \frac{du}{3} \\ &= \frac{1}{3} \int u^2 \, du \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{u^3}{3} \right) + C \\ &= \frac{1}{9} \sec^3 3x + C. \end{aligned}$$

Puede comprobar lo anterior derivando.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{9} \sec^3 3x + C \right] &= \left(\frac{1}{9} \right) (3) (\sec 3x)^2 (\cos 3x) (3) \\ &= \sec^2 3x \cos 3x \end{aligned}$$

Como la derivación produce el integrando original, ha obtenido la antiderivada correcta. ■

Los pasos que se utilizan para la integración por sustitución se resumen en la siguiente guía.

ESTRATEGIA PARA REALIZAR UN CAMBIO DE VARIABLE

1. Elija una sustitución $u = g(x)$. Usualmente, es mejor elegir la parte *interna* de una función compuesta, tal como una cantidad elevada a una potencia.
2. Calcule $du = g'(x) \, dx$.
3. Reescriba la integral en términos de la variable u .
4. Encuentre la integral resultante en términos de u .
5. Reemplace u por $g(x)$ para obtener una antiderivada en términos de x .
6. Compruebe su respuesta por derivación.

Hasta ahora, ha visto dos técnicas para la aplicación de la sustitución, y verá más técnicas en el resto de esta sección. Cada técnica es ligeramente diferente de las demás. Sin embargo, debe recordar que el objetivo es el mismo con cada técnica, *está tratando de encontrar una antiderivada del integrando*.

.....▶
 ••• **COMENTARIO** Cuando realice un cambio de variable, cerciórese de que su respuesta esté escrita utilizando las mismas variables que en el integrando original. Así, en el ejemplo 6, no debe dejar la respuesta como

$$\frac{1}{9}u^3 + C$$

sino más bien, reemplazar u por $\sec 3x$.

Regla general de la potencia para integrales

Una de las sustituciones de u más comunes incluye cantidades en el integrando que se elevan a una potencia. Debido a la importancia de este tipo de sustitución, se le da un nombre especial: **Regla general de la potencia para integrales**. Una demostración de esta regla se deduce directamente de la regla (simple) de la potencia para la integración, junto con el teorema 2.1.

TEOREMA 2.2 Regla general de la potencia para integrales

Si g es una función derivable de x , entonces

$$\int [g(x)]^n g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$$

De manera equivalente, si $u = g(x)$, entonces

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$$

EJEMPLO 7 Sustitución y regla general de la potencia

$$\text{a. } \int 3(3x-1)^4 dx = \int \overbrace{(3x-1)^4}^{u^4} \overbrace{(3)}^{du} dx = \frac{u^5/5}{3} + C$$

$$\text{b. } \int (2x+1)(x^2+x) dx = \int \overbrace{(x^2+x)^2}^{u^2} \overbrace{(2x+1)}^{du} dx = \frac{u^3/2}{2} + C$$

$$\text{c. } \int 3x^2 \sqrt{x^3-2} dx = \int \overbrace{(x^3-2)^{1/2}}^{u^{1/2}} \overbrace{(3x^2)}^{du} dx = \frac{u^{3/2}/(3/2)}{3/2} + C = \frac{2}{3}(x^3-2)^{3/2} + C$$

$$\text{d. } \int \frac{-4x}{(1-2x^2)^2} dx = \int \overbrace{(1-2x^2)^{-2}}^{u^{-2}} \overbrace{(-4x)}^{du} dx = \frac{u^{-1}/(-1)}{-1} + C = -\frac{1}{1-2x^2} + C$$

$$\text{e. } \int \cos^2 x \sin x dx = -\int \overbrace{(\cos x)^2}^{u^2} \overbrace{(-\sin x)}^{du} dx = -\frac{u^3/3}{3} + C$$

Algunas integrales cuyos integrandos incluyen cantidades elevadas a potencias no pueden determinarse mediante la regla general de la potencia. Considere las dos integrales

$$\int x(x^2+1)^2 dx \quad \text{y} \quad \int (x^2+1)^2 dx.$$

La sustitución

$$u = x^2 + 1$$

funciona en la primera integral pero no en la segunda. En la segunda, la sustitución falla porque al integrando le falta el factor x necesario para formar du . Por fortuna, *esta integral particular*, se puede hacer desarrollando el integrando como

$$(x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$$

y utilizando la regla (simple) de la potencia para integrar cada término.

Cambio de variable para integrales definidas

Cuando se usa la sustitución de u en una integral definida, muchas veces es conveniente determinar los límites de integración para la variable u en vez de convertir la antiderivada de nuevo a la variable x y calcularla en los límites originales. Este cambio de variable se establece explícitamente en el siguiente teorema. La demostración es consecuencia del teorema 2.1 en combinación con el teorema fundamental del cálculo.

TEOREMA 2.3 Cambio de variable para integrales definidas

Si la función $u = g(x)$ tiene una derivada continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y f es continua sobre el rango de g , entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

EJEMPLO 8

Cambiar variables

Calcule $\int_0^1 x(x^2 + 1)^3 dx$.

Solución Para calcular esta integral, sea $u = x^2 + 1$. Entonces, obtiene

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx.$$

Antes de sustituir, determine los nuevos límites superior e inferior de integración

Límite inferior

$$\text{Cuando } x = 0, u = 0^2 + 1 = 1.$$

Límite superior

$$\text{Cuando } x = 1, u = 1^2 + 1 = 2.$$

Ahora, puede sustituir para obtener

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(x^2 + 1)^3 dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 1)^3 (2x) dx && \text{Límites de integración para } x. \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 u^3 du && \text{Límites de integración para } u. \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^4}{4} \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(4 - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

Observe que obtiene el mismo resultado cuando reescribe la antiderivada $\frac{1}{2}(u^4/4)$ en términos de la variable x y calcula la integral definida en los límites originales de la integración, como se muestra.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\frac{u^4}{4} \right]_1^2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(4 - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{15}{8} \end{aligned}$$

EJEMPLO 9 Cambiar variables

Evalúe la integral definida

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx$$

Solución Para calcular esta integral, sea $u = \sqrt{2x-1}$. Entonces, obtiene

$$u^2 = 2x - 1$$

$$u^2 + 1 = 2x$$

$$\frac{u^2 + 1}{2} = x$$

$$u du = dx. \quad \text{Derive cada lado.}$$

Antes de sustituir, determine los nuevos límites superior e inferior de integración.

Límite inferior

$$\text{Cuando } x = 1, u = \sqrt{2-1} = 1.$$

Límite superior

$$\text{Cuando } x = 5, u = \sqrt{10-1} = 3.$$

Ahora, sustituya para obtener

$$\begin{aligned} \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx &= \int_1^3 \frac{1}{u} \left(\frac{u^2 + 1}{2} \right) u du \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 (u^2 + 1) du \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^3}{3} + u \right]_1^3 \\ &= \frac{1}{2} \left(9 + 3 - \frac{1}{3} - 1 \right) \\ &= \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Geoméricamente, puede interpretar la ecuación

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx = \int_1^3 \frac{u^2 + 1}{2} du$$

en el sentido de que las dos regiones *diferentes* que se ilustran en las figuras 2.2 y 2.3 tienen la *misma* área.

Al calcular integrales definidas por cambio de variable (sustitución), es posible que el límite superior de la integración correspondiente a la nueva variable u sea más pequeña que el límite inferior. Si esto ocurre no reordene los límites. Simplemente calcule la integral de la manera usual. Por ejemplo, después de sustituir $u = \sqrt{1-x}$ en la integral

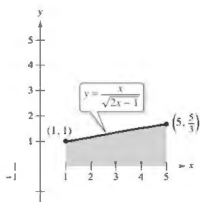
$$\int_0^1 x^2(1-x)^{1/2} dx$$

se obtiene $u = \sqrt{1-1} = 0$ cuando $x = 1$, y $u = \sqrt{1-0} = 1$ cuando $x = 0$. Por tanto, la forma correcta de esta integral en la variable u es

$$-2 \int_1^0 (1-u^2)^2 u^2 du.$$

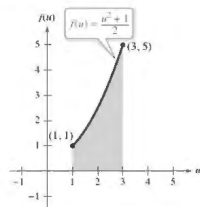
Desarrollando el integrando, se puede evaluar esta integral como se muestra

$$-2 \int_1^0 (u^2 - 2u^4 + u^6) du = -2 \left[\frac{u^3}{3} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^7}{7} \right]_1^0 = -2 \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{16}{105}$$



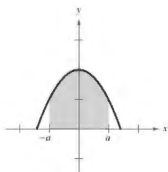
La región antes de la sustitución tiene un área de $\frac{16}{3}$.

Figura 2.2

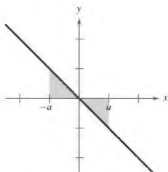


La región después de la sustitución tiene un área de $\frac{16}{3}$.

Figura 2.3



Función par.



Función impar.

Figura 2.4

Integración de funciones pares e impares

Incluso con un cambio de variable, la integración puede ser difícil. En ocasiones se puede simplificar el cálculo de una integral definida (en un intervalo que es simétrico respecto al eje y o respecto al origen) reconociendo que el integrando es una función par o impar (vea la figura 2.4).

TEOREMA 2.4 Integración de funciones pares e impares

Sea f integrable en el intervalo cerrado $[-a, a]$.

1. Si f es una función *par*, entonces $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.
2. Si f es una función *impar*, entonces $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Demostración Esta es la demostración de la primera propiedad. (La demostración de la segunda propiedad se le deja a usted como ejercicio.) Como f es par, sabe que $f(x) = f(-x)$. Utilizando el teorema 2.1 con la sustitución $u = -x$, se obtiene

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-u)(du) = - \int_a^0 f(u) du = \int_0^a f(u) du = \int_0^a f(x) dx.$$

Por último, utilizando el teorema 4.6, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= 2 \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

Consulte LarsonCalculus.com para el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

EJEMPLO 10 Integrar una función impar

Evalúe la integral definida

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sec^3 x \cos x + \sen x \cos x) dx$$

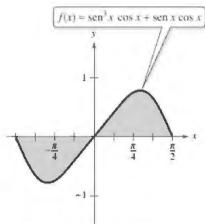
Solución Haciendo $f(x) = \sec^3 x \cos x + \sen x \cos x$ se obtiene

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sec^3(-x) \cos(-x) + \sen(-x) \cos(-x) \\ &= -\sec^3 x \cos x - \sen x \cos x \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Por tanto, f es una función impar, y debido a que f es simétrica respecto al origen en $[-\pi/2, \pi/2]$, se puede aplicar el teorema 2.4 para concluir que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sec^3 x \cos x + \sen x \cos x) dx = 0.$$

De acuerdo con la figura 2.5 observe que las dos regiones a cualquier lado del eje tienen la misma área. Sin embargo, como una se encuentra por debajo del eje x y otra está por encima del mismo, la integración produce un efecto de cancelación. (Se verá más de áreas en la sección 3.1.) ■

Como f es una función impar,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx = 0.$$

Figura 2.5

2.2 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Calcular u y du En los ejercicios 1-4, complete la tabla identificando u y du para la integral.

	$u = g(x)$	$du = g'(x) dx$
1. $\int (8x^2 + 1)^2 (16x) dx$		
2. $\int x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx$		
3. $\int \tan^2 x \sec^2 x dx$		
4. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$		

Encontrar una integral indefinida En los ejercicios 5-26, encuentre la integral indefinida y compruebe el resultado por derivación.

- | | |
|---|---|
| 5. $\int (1 + 6x)^4 (6) dx$ | 6. $\int (x^2 - 9)^2 (2x) dx$ |
| 7. $\int \sqrt{25 - x^2} (-2x) dx$ | 8. $\int \sqrt[3]{3 - 4x^2} (-8x) dx$ |
| 9. $\int x^2 (x^4 + 3)^2 dx$ | 10. $\int x^2 (6 - x)^3 dx$ |
| 11. $\int x^2 (x^3 - 1)^4 dx$ | 12. $\int x (5x^2 + 4)^3 dx$ |
| 13. $\int t \sqrt{t^2 + 2} dt$ | 14. $\int t^3 \sqrt{2t^3 + 3} dt$ |
| 15. $\int 5x \sqrt[3]{1 - x^2} dx$ | 16. $\int u^2 \sqrt{u^3 + 2} du$ |
| 17. $\int \frac{x}{(1 - x^2)^3} dx$ | 18. $\int \frac{x^3}{(1 + x^4)^2} dx$ |
| 19. $\int \frac{x^2}{(1 + x^3)^3} dx$ | 20. $\int \frac{6x^2}{(4x^3 - 9)^3} dx$ |
| 21. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ | 22. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}} dx$ |
| 23. $\int \left(1 + \frac{1}{t}\right)^3 \left(\frac{1}{t^2}\right) dt$ | 24. $\int \left[x^2 + \frac{1}{(3x)^2}\right] dx$ |
| 25. $\int \frac{1}{\sqrt{2x}} dx$ | 26. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{5x}} dx$ |

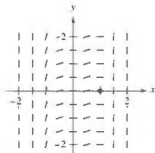
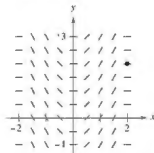
Ecuación diferencial En los ejercicios 27-30, resuelva la ecuación diferencial.

- | | |
|---|---|
| 27. $\frac{dy}{dx} = 4x + \frac{4x}{\sqrt{16 - x^2}}$ | 28. $\frac{dy}{dx} = \frac{10x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$ |
| 29. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 1}{(x^2 + 2x - 3)^2}$ | 30. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 1}}$ |

Campos direccionales En los ejercicios 31 y 32, se indican una ecuación diferencial, un punto y un campo direccional. Un campo direccional consiste en segmentos de recta con pendientes dadas por la ecuación diferencial. Estos segmentos de recta proporcionan una perspectiva visual de las direcciones de las soluciones de una ecuación diferencial. (a) Dibuje dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo direccional, una de las cuales pasa por el punto dado. (Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite MathGraphs.com.) (b) Utilice la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y use una herramienta de graficación para representar la solución. Compare el resultado con los dibujos del inciso (a).

31. $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{4 - x^2}$
(2, 2)

32. $\frac{dy}{dx} = x^2(x^3 - 1)^2$
(1, 0)



Encontrar la integral indefinida En los ejercicios 33-42, encuentre la integral definida.

- | | |
|---|--|
| 33. $\int \pi \sin \pi x dx$ | 34. $\int \sin 4x dx$ |
| 35. $\int \cos 8x dx$ | 36. $\int \csc^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$ |
| 37. $\int \frac{1}{\theta^2} \cos \frac{1}{\theta} d\theta$ | 38. $\int x \sin x^2 dx$ |
| 39. $\int \sin 2x \cos 2x dx$ | 40. $\int \sqrt{\tan x} \sec^2 x dx$ |
| 41. $\int \frac{\csc^2 x}{\cot^3 x} dx$ | 42. $\int \frac{\sec x}{\cos^3 x} dx$ |

Encontrar una ecuación En los ejercicios 43-46, encuentre una ecuación para la función f que tiene la derivada dada y cuya gráfica pasa por el punto indicado.

- | Derivada | Punto |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 43. $f'(x) = -\sin \frac{x}{2}$ | (0, 6) |
| 44. $f'(x) = \sec^2(2x)$ | $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ |
| 45. $f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2$ | (2, 10) |
| 46. $f'(x) = -2x\sqrt{8 - x^2}$ | (2, 7) |

Cambio de variables En los ejercicios 47-54, encuentre la integral indefinida mediante el método que se muestra en el ejemplo 5.

47. $\int x\sqrt{x+6} \, dx$

48. $\int x\sqrt{3x-4} \, dx$

49. $\int x^2\sqrt{1-x} \, dx$

50. $\int (x+1)\sqrt{2-x} \, dx$

51. $\int \frac{x^2-1}{\sqrt{2x-1}} \, dx$

52. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x+4}} \, dx$

53. $\int \frac{-x}{(x+1) - \sqrt{x+1}} \, dx$

54. $\int t \sqrt[3]{t+10} \, dt$

Evaluar una integral definida En los ejercicios 55-62, calcule la integral definida. Use una herramienta de graficación para comprobar su resultado.

55. $\int_{-1}^1 x(x^2+1)^3 \, dx$

56. $\int_0^1 x^3(2x^4+1)^2 \, dx$

57. $\int_1^2 2x^2\sqrt{x^3+1} \, dx$

58. $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx$

59. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \, dx$

60. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} \, dx$

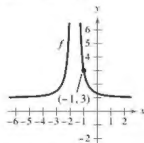
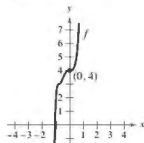
61. $\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \, dx$

62. $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}} \, dx$

Ecuación diferencial En los ejercicios 63 y 64 se muestra la gráfica de una función f . Utilice la ecuación diferencial y el punto dado para determinar una ecuación de la función.

63. $\frac{dy}{dx} = 18x^2(2x^3+1)^2$

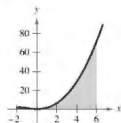
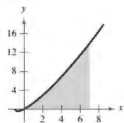
64. $\frac{dy}{dx} = \frac{-48}{(3x+5)^3}$



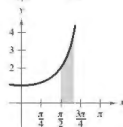
Encontrar el área de una región En los ejercicios 65-68, encuentre el área de la región. Use una herramienta de graficación para comprobar su resultado

65. $\int_0^7 x \sqrt[3]{x+1} \, dx$

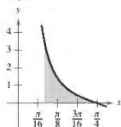
66. $\int_{-2}^6 x^2 \sqrt[3]{x+2} \, dx$



67. $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) \, dx$



68. $\int_{\pi/12}^{\pi/4} \csc 2x \cot 2x \, dx$



Funciones par e impar En los ejercicios 69-72, evalúe la integral utilizando las propiedades de los pares y funciones impares como una ayuda

69. $\int_{-2}^2 x^2(x^2+1) \, dx$

70. $\int_{-2}^2 x(x^2+1)^3 \, dx$

71. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^2 x \cos x \, dx$

72. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx$

73. Usar una función par Use $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{64}{3}$ para evaluar cada integral indefinida sin usar el teorema fundamental del cálculo.

(a) $\int_{-4}^4 x^2 \, dx$

(b) $\int_{-4}^4 x^3 \, dx$

(c) $\int_0^6 -x^2 \, dx$

(d) $\int_0^6 3x^2 \, dx$

74. Usar la simetría Utilice la simetría de las gráficas de las funciones seno y coseno como ayuda para el cálculo de cada integral definida.

(a) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin x \, dx$

(b) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x \, dx$

(c) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx$

(d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx$

Funciones par e impar En los ejercicios 75 y 76, escriba la integral como la suma de la integral de una función impar y la integral de una función par. Utilice esta simplificación para calcular la integral.

75. $\int_{-3}^3 (x^3 + 4x^2 - 3x - 6) \, dx$

76. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin 4x + \cos 4x) \, dx$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

77. Usar la sustitución Describa por qué

$$\int x(5-x^2)^3 \, dx \neq \int u^3 \, du$$

donde $u = 5 - x^2$.

78. Analizar la integral Sin integrar, explique por qué

$$\int_{-2}^2 x(x^2+1)^2 \, dx = 0.$$

DESARROLLO DE CONCEPTOS (continuación)

79. Elección de una integral Se le pide que encuentre una de las integrales. ¿Cuál elegiría? Explique.

$$(a) \int \sqrt{x^2 + 1} \, dx \quad \text{o} \quad \int x^2 \sqrt{x^2 + 1} \, dx$$

$$(b) \int \tan(3x) \sec^2(3x) \, dx \quad \text{o} \quad \int \tan(3x) \, dx$$

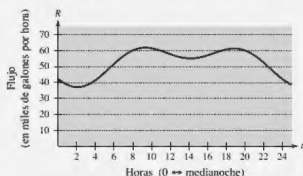
80. Métodos comparativos Encuentre la integral indefinida en dos formas. Explique alguna diferencia en las formas de la respuesta

$$(a) \int (2x - 1)^2 \, dx \quad (b) \int \tan x \sec^2 x \, dx$$

81. Depreciación La tasa de depreciación dV/dt de una máquina es inversamente proporcional al cuadrado de $t + 1$, donde V es el valor de la máquina t años después de que se compró. El valor inicial de la máquina fue de 500,000 dólares, y su valor decreció 100,000 dólares en el primer año. Calcule su valor después de 4 años.



82. ¿CÓMO LO VE? La gráfica muestra la velocidad de flujo de agua a una estación de bombeo por un día.



- (a) Aproxime la velocidad de flujo máxima a la estación de bombeo. ¿En qué momento ocurre esto?
- (b) Explique cómo se puede encontrar la cantidad de agua utilizada durante el día.
- (c) Aproxime el periodo de dos horas cuando se usa la menor cantidad de agua. Explique su razonamiento.
83. Ventas Las ventas S (en miles de unidades) de un producto de temporada están dadas por el modelo

$$S = 74.50 + 43.75 \sin \frac{\pi t}{6}$$

donde t es el tiempo en meses, con $t = 1$ correspondiente a enero. Determine las ventas promedio para cada periodo.

- (a) El primer trimestre ($0 \leq t \leq 3$)
- (b) El segundo trimestre ($3 \leq t \leq 6$)
- (c) El año completo ($0 \leq t \leq 12$)

84. Electricidad
- La intensidad de corriente alterna en un circuito eléctrico es
- $$I = 2 \sin(60\pi t) + \cos(120\pi t)$$
- donde I se mide en amperes y t se mide en segundos. Determine la intensidad media para cada intervalo de tiempo.
- (a) $0 \leq t \leq \frac{1}{60}$
- (b) $0 \leq t \leq \frac{1}{240}$
- (c) $0 \leq t \leq \frac{1}{30}$



Probabilidad En los ejercicios 85 y 86, la función

$$f(x) = kx^m(1-x)^n, \quad 0 \leq x \leq 1$$

donde $n > 0$, $m > 0$ y k es una constante, puede utilizarse para representar diversas distribuciones de probabilidad. Si k se elige de manera que

$$\int_0^1 f(x) \, dx = 1$$

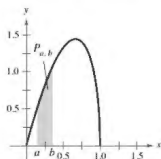
la probabilidad de que x caerá entre a y b ($0 \leq a \leq b \leq 1$) es

$$P_{a,b} = \int_a^b f(x) \, dx.$$

85. La probabilidad de que una persona recuerde entre $100a\%$ y $100b\%$ del material aprendido en un experimento es

$$P_{a,b} = \int_a^b \frac{15}{4} x \sqrt{1-x} \, dx$$

donde x representa el porcentaje recordado. (Vea la figura.)

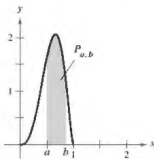


- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo elegido al azar recuerde entre 50 y 75% del material?
- (b) ¿Cuál es el porcentaje medio de lo que se recuerda? Esto es, ¿para qué valor de b es cierto que la probabilidad de recordar de 0 a b es 0.5?

86. La probabilidad de que se tomen muestras de un mineral de una región que contiene entre 100a% y 100b% de hierro es

$$P_{a,b} = \int_a^b \frac{1155}{32} x^3(1-x)^{3/2} dx$$

donde x representa el porcentaje de hierro. (Vea la figura.)
 ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra contenga entre
 (a) 0 y 25% de hierro? (b) 50 y 100% de hierro?



87. Análisis gráfico Considere las funciones f y g , donde

$$f(x) = 6 \sin x \cos^2 x \quad y \quad g(t) = \int_0^t f(x) dx.$$

- (a) Utilice una herramienta de graficación para representar f y g en la misma ventana de observación.
 (b) Explique por qué g es no negativa.
 (c) Identifique los puntos sobre la gráfica de g que corresponden a los extremos de f .
 (d) ¿Cada uno de los ceros de f corresponden a un extremo de g ? Explique.
 (e) Considere la función

$$h(t) = \int_{\pi/2}^t f(x) dx.$$

Utilice una herramienta de graficación para representar h .
 ¿Cuál es la relación entre g y h ? Compruebe su conjetura.

88. Obtener un límite utilizando una integral definida
 Determine

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin(i\pi/n)}{n}$$

evaluando una integral definida apropiada en el intervalo $[0, 1]$.

89. Reescribir integrales

(a) Demuestre que $\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx = \int_0^1 x^3(1-x)^2 dx$.

(b) Demuestre que $\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a dx$.

90. Reescribir integrales

(a) Demuestre que $\int_0^{\pi/2} \sec^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$.

(b) Demuestre que $\int_0^{\pi/2} \sec^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$, donde n es un entero positivo.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 91-96, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o proporcione un ejemplo que lo demuestre.

91. $\int (2x+1)^2 dx = \frac{1}{3}(2x+1)^3 + C$

92. $\int x(x^2+1) dx = \frac{1}{2}x^2(\frac{1}{3}x^3+x) + C$

93. $\int_{-10}^{10} (ax^3 + bx^2 + cx + d) dx = 2 \int_0^{10} (bx^2 + d) dx$

94. $\int_a^b \sin x dx = \int_a^{b+2\pi} \sin x dx$

95. $4 \int \sin x \cos x dx = -\cos 2x + C$

96. $\int \sec^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sec^3 2x + C$

97. Reescribir integrales Suponga que f es continua en todos lados y que c es una constante. Demuestre que

$$\int_{c-a}^c f(x) dx = c \int_a^b f(cx) dx.$$

98. Integrar y derivar

(a) Compruebe que $\sin u - u \cos u + C = \int u \sin u du$.

(b) Utilice el inciso (a) para demostrar que $\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx = 2\pi$.

99. Demostración Complete la demostración del teorema 1.16.

100. Reescribir integrales Demuestre que si f es continua en la recta numérica real completa, entonces

$$\int_a^b f(x+h) dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x) dx.$$

DESAFÍO DEL EXAMEN PUTNAM

101. Si a_0, a_1, \dots, a_n son números reales que satisfacen

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0,$$

demuestre que la ecuación

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0$$

tiene al menos un cero real.

102. Encuentre todas las funciones continuas positivas $f(x)$ para $0 \leq x \leq 1$, tales que

$$\int_0^1 f(x) dx = 1$$

$$\int_0^1 f(x)x dx = \alpha$$

$$\int_0^1 f(x)x^2 dx = \alpha^2$$

donde α es un número real.

Estos problemas fueron presentados por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

2.3 Integración por partes

■ Encontrar una antiderivada utilizando integración por partes.

Integración por partes

En esta sección estudiará una técnica de integración importante que recibe el nombre de **integración por partes**. Esta técnica se puede aplicar a una amplia variedad de funciones y es particularmente útil para integrandos que implican **productos** de funciones algebraicas y trascendentes. Por ejemplo, la integración por partes funciona bien con integrales como

$$\int x \ln x \, dx, \quad \int x^2 e^x \, dx \quad \text{y} \quad \int e^x \sin x \, dx.$$

La integración por partes se basa en la fórmula para la derivada de un producto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[uv] &= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \\ &= uv' + vu' \end{aligned}$$

donde u y v son funciones derivables de x . Cuando u' y v' son continuas, se pueden integrar ambos lados de esta ecuación para obtener

$$\begin{aligned} uv &= \int uv' \, dx + \int vu' \, dx \\ &= \int u \, dv + \int v \, du. \end{aligned}$$

Al reescribir esta ecuación, obtiene el siguiente teorema.

TEOREMA 2.5 Integración por partes

Si u y v son funciones de x que tienen derivadas continuas, entonces,

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Esta fórmula expresa la integral original en términos de otro integrando. Dependiendo de las opciones de u y dv , puede ser más fácil para evaluar la segunda integral que la original. Debido a que las opciones de u y dv son fundamentales en la integración de proceso de partes, se proporcionan las siguientes pautas.

REGLAS PARA LA INTEGRACIÓN POR PARTES

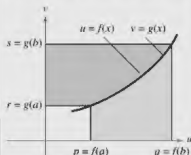
1. Trate de que dv sea la parte más complicada del integrando que se ajuste a una regla básica de integración. Entonces u será(n) el (los) factor(es) restante(s) del integrando.
2. Trate de que u sea la parte del integrando cuya derivada es una función más simple que u . Entonces dv será(n) el (los) factor(es) restante(s) del integrando. Observe que dv siempre incluye el dx del integrando original.

Cuando se utiliza la integración por partes, considere que primero puede elegir dv o elegir u . Sin embargo, después de elegir, la elección del otro factor está determinada, debe ser la porción restante del integrando. También tenga en cuenta que dv debe contener el diferencial dx de la integral original.

Exploración

Demostración sin palabras

Este es un enfoque diferente para demostrar la fórmula de integración por partes. Este planteamiento se tomó de "Proof Without Words: Integration by Parts", por Roger B. Nelsen, *Mathematics Magazine*, 64, No. 2, abril 1991, p. 130, con el permiso del autor.



Área \square + Área \square = $qs - pr$

$$\int_r^s u \, dv + \int_a^p v \, du = [uv]_{(p,r)}^{(q,s)}$$

$$\int_r^s u \, dv = [uv]_{(p,r)}^{(q,s)} - \int_a^p v \, du$$

Explique cómo esta gráfica demuestra el teorema. ¿Qué notación en esta demostración no le resulta conocida? ¿Qué cree que significa?

EJEMPLO 1

Integrar por partes

Encuentre $\int xe^x dx$.

Solución Para aplicar la integración por partes, tiene que escribir la integral en forma $\int u dv$. Hay varias maneras de hacer esto.

$$\int \underbrace{(x)}_u \underbrace{(e^x dx)}_{dv}, \quad \int \underbrace{(e^x)}_u \underbrace{(x dx)}_{dv}, \quad \int \underbrace{(1)}_u \underbrace{(xe^x dx)}_{dv}, \quad \int \underbrace{(xe^x)}_u \underbrace{(dx)}_{dv}$$

Las directrices de la página anterior sugieren la primera opción debido a que la derivada de $u = x$ es más simple que x y $dv = e^x dx$ es la parte más complicada del integrando que se ajusta a una fórmula de integración básica.

$$\begin{aligned} dv = e^x dx &\Rightarrow v = \int dv = \int e^x dx = e^x \\ u = x &\Rightarrow du = dx \end{aligned}$$

Ahora, la integración por partes produce

$$\begin{aligned} \int u dv &= uv - \int v du && \text{Fórmula de integración por partes} \\ \int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx && \text{Sustituya.} \\ &= xe^x - e^x + C. && \text{Integre.} \end{aligned}$$

Para comprobar esto, derive $xe^x - e^x + C$ para ver que se obtiene el integrando original.

EJEMPLO 2

Integrar por partes

Encuentre $\int x^2 \ln x dx$.

Solución En este caso, x^2 es más fácil de integrar que $\ln x$. Además, la derivada de $\ln x$ es más simple que $\ln x$. Por lo tanto, debe hacer $dv = x^2 dx$.

$$\begin{aligned} dv = x^2 dx &\Rightarrow v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \\ u = \ln x &\Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

La integración por partes produce

$$\begin{aligned} \int u dv &= uv - \int v du && \text{Fórmula de integración por partes} \\ \int x^2 \ln x dx &= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \left(\frac{x^3}{3}\right) \left(\frac{1}{x}\right) dx && \text{Sustituya.} \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx && \text{Simplifique.} \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C. && \text{Integre.} \end{aligned}$$

Puede comprobar este resultado mediante la derivación.

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C \right] = \frac{x^3}{3} \left(\frac{1}{x} \right) + (\ln x)(x^2) - \frac{x^2}{3} = x^2 \ln x$$

.....▷
COMENTARIO En el ejemplo 1, considere que no es necesario incluir una constante de integración en la resolución de

$$v = \int e^x dx = e^x + C_1.$$

Para ilustrar esto, reemplace $v = e^x$ por $v = e^x + C_1$ y aplique la integración por partes para ver que obtiene el mismo resultado.

▷ **TECNOLOGÍA** Intente graficar

$$\int x^2 \ln x dx \text{ y } \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$$

.....
 en su utilidad gráfica. ¿Obtiene la misma gráfica? (Esto puede tomar un tiempo, así que tenga paciencia.)

Una sorprendente aplicación de la integración por partes implica integrandos consistentes en términos individuales, como

$$\int \ln x \, dx \quad \text{o} \quad \int \arcsen x \, dx.$$

En estos casos, trate de hacer $dv = dx$ como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Integrar con un solo término

Evalúe $\int_0^1 \arcsen x \, dx$.

Solución Sea $dv = dx$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dx = x$$

$$u = \arcsen x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

La integración por partes produce

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int \arcsen x \, dx = x \arcsen x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x \arcsen x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} (-2x) dx$$

$$= x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Usando esta antiderivada, puede calcular la integral definida como se muestra.

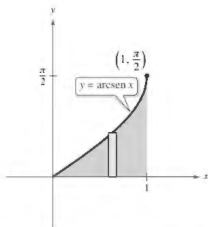
$$\begin{aligned} \int_0^1 \arcsen x \, dx &= \left[x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \\ &\approx 0.571 \end{aligned}$$

Fórmula de integración por partes

Sustituya.

Reescriba.

Integre.



El área de la región es aproximadamente 0.571.

Figura 2.6

El área representada por esta integral definida se muestra en la figura 2.6. ■

▶ **TECNOLOGÍA** Recuerde que hay dos formas de utilizar la tecnología para evaluar una integral definida: (1) se puede utilizar una aproximación numérica, como la regla del trapecio o la regla de Simpson, o (2) se puede utilizar un sistema de álgebra computacional para encontrar la antiderivada y a continuación aplicar el teorema fundamental del cálculo. Ambos métodos tienen inconvenientes. Para encontrar el posible error cuando se usa un método numérico, el integrando debe tener una segunda derivada (Regla del trapecio) o cuarta derivada (Regla de Simpson) en el intervalo de integración; el integrando en el ejemplo 3 no cumple ninguno de estos requisitos. Para aplicar el teorema fundamental del cálculo, la utilidad de la integración simbólica debe poder encontrar la antiderivada.

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL.** Para ver cómo se utiliza la integración por partes en la demostración de la aproximación de Stirling

$$\ln(n!) = n \ln n - n$$

consulte el artículo "The Validity of Stirling's Approximation: A Physical Chemistry Project", por A. S. Wallner y K. A. Brandt, en el *Journal of Chemical Education*.

Algunas integrales requieren el uso repetido de la fórmula de la integración por partes.

EJEMPLO 4**Uso repetido de la integración por partes**

Encuentre $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$.

Solución Los factores x^2 y $\operatorname{sen} x$ son igualmente fáciles de integrar. Sin embargo, la derivada de x^2 se hace más simple, mientras que la derivada de $\operatorname{sen} x$ no. Por lo tanto, debe hacer que $u = x^2$.

$$\begin{aligned} dv &= \operatorname{sen} x \, dx &\Rightarrow & v = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \\ u &= x^2 &\Rightarrow & du = 2x \, dx \end{aligned}$$

Ahora, la integración por partes produce

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx. \quad \text{Primer uso de la integración por partes}$$

Este primer uso de la integración por partes ha logrado simplificar la integral original, pero la integral de la derecha sigue sin ajustarse a una regla de integración básica. Para evaluar esa integral, se puede aplicar la integración por partes otra vez. Ahora, sea $u = 2x$.

$$\begin{aligned} dv &= \cos x \, dx &\Rightarrow & v = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x \\ u &= 2x &\Rightarrow & du = 2 \, dx \end{aligned}$$

Ahora, integrando por partes obtiene

$$\begin{aligned} \int 2x \cos x \, dx &= 2x \operatorname{sen} x - \int 2 \operatorname{sen} x \, dx && \text{Segundo uso de la integración por partes} \\ &= 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C. \end{aligned}$$

Combinando estos dos resultados, puede escribir

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C. \quad \blacksquare$$

Al hacer aplicaciones repetidas de la integración por partes, es necesario tener cuidado de no intercambiar las sustituciones en aplicaciones sucesivas. Por ejemplo, en el ejemplo 4, la primera sustitución fue $u = x^2$ y $dv = \operatorname{sen} x \, dx$. Si en la segunda aplicación hubiera hecho la sustitución de $u = \cos x$ y $dv = 2x$, habría obtenido

$$\begin{aligned} \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx \\ &= -x^2 \cos x + x^2 \cos x + \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx \end{aligned}$$

deshaciendo así la integración anterior y volviendo a la integral original. Al aplicar repetidamente la integración por partes, también debe vigilar la aparición de un múltiplo constante de la integral original. Por ejemplo, esto ocurre cuando se utiliza la integración por partes para evaluar $\int e^x \cos 2x \, dx$, y también ocurre en el ejemplo 5 de la página siguiente.

La integral en el ejemplo 5 es importante. En la sección 2.6 (ejemplo 5), verá que se utiliza para encontrar la longitud de arco de un segmento parabólico.

EJEMPLO 5 Integrar por partes

Encuentre $\int \sec^3 x \, dx$.

Solución La parte más complicada del integrando que puede integrarse fácilmente es $\sec^2 x$, entonces podría hacer que $dv = \sec^2 x \, dx$ y $u = \sec x$.

$$dv = \sec^2 x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \sec^2 x \, dx = \tan x$$

$$u = \sec x \quad \Rightarrow \quad du = \sec x \tan x \, dx$$

La integración por partes produce

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \quad \text{Fórmula de integración por partes}$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx \quad \text{Sustituya.}$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx \quad \text{Identidad trigonométrica}$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx \quad \text{Reescriba.}$$

$$2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x + \int \sec x \, dx \quad \text{Agrupe las integrales semejantes}$$

$$2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C \quad \text{Integre.}$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + C. \quad \text{Divida entre 2.}$$

EJEMPLO 6 Encontrar un centroide

Un elemento de una máquina es modelado por la región acotada por la gráfica de $y = \sin x$ y el eje x , $0 \leq x \leq \pi/2$, como se muestra en la figura 2.7. Encuentre el centroide de esta región.

Solución Comience por encontrar el área de la región.

$$A = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi/2} = 1$$

Ahora puede encontrar las coordenadas del centroide. Para evaluar la integral para \bar{y} , primero reescriba el integrando usando la identidad trigonométrica $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$.

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{2} (\sin x) \, dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{4} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$$

Puede evaluar la integral para \bar{x} , $(1/A) \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$, con la integración por partes. Para ello, sea $dv = \sin x \, dx$ y $u = x$. Esto produce $v = -\cos x$ y $du = dx$ y puede escribir

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Por último, puede determinar que \bar{x} es

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx = \left[-x \cos x + \sin x \right]_0^{\pi/2} = 1.$$

Por lo tanto, el centroide de la región es $(1, \pi/8)$.

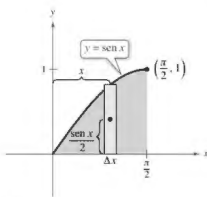


Figura 2.7

A medida que adquiera experiencia en el uso de la integración por partes, aumentará su habilidad en la determinación de u y dv . El siguiente resumen muestra varias integrales comunes con sugerencias para la elección de u y dv .



••• **COMENTARIO** Se puede utilizar el acrónimo LIATE como una guía para la elección de u en la integración por partes. Con este objetivo, revise el integrando, haciéndose las siguientes preguntas.

¿Hay una parte logarítmica?

¿Hay una parte trigonométrica inversa?

¿Hay una parte algebraica?

¿Hay una parte trigonométrica?

¿Hay una parte exponencial?

RESUMEN: INTEGRALES COMUNES UTILIZANDO INTEGRACIÓN POR PARTES

1. Para integrales de la forma

$$\int x^n e^{ax} dx, \int x^n \sin ax dx \quad \text{o} \quad \int x^n \cos ax dx$$

sea $u = x^n$ y $dv = e^{ax} dx$, $\sin ax dx$ o $\cos ax dx$.

2. Para integrales de la forma

$$\int x^n \ln x dx, \int x^n \arcsen ax dx \quad \text{o} \quad \int x^n \arctan ax dx$$

sea $u = \ln x$, $\arcsen ax$, o $\arctan ax$ y $dv = x^n dx$.

3. Para integrales de la forma

$$\int e^{ax} \sin bx dx \quad \text{o} \quad \int e^{ax} \cos bx dx$$

sea $u = \sin bx$ o $\cos bx$ y sea $dv = e^{ax} dx$.

En problemas que implican la aplicación repetida de la integración por partes, un método tabular, ilustrado en el ejemplo 7, puede ayudar a organizar el trabajo. Este método funciona bien para integrales de la forma

$$\int x^n \sin ax dx, \int x^n \cos ax dx \quad \text{y} \quad \int x^n e^{ax} dx.$$

EJEMPLO 7

Usar el método tabular

•••▶ Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre $\int x^2 \sin 4x dx$.

Solución Comience como es costumbre haciendo $u = x^2$ y $dv = v' dx = \sin 4x dx$. A continuación, genere una tabla con tres columnas, como se muestra.

Signos alternados	u y sus derivadas	v' y sus antiderivadas
+	→ x^2	→ $\sin 4x$
-	→ $2x$	→ $-\frac{1}{4} \cos 4x$
+	→ 2	→ $-\frac{1}{16} \sin 4x$
-	→ 0	→ $\frac{1}{64} \cos 4x$
	↑ Derive hasta que obtenga 0 como una derivada.	

La solución se obtiene mediante la adición de los productos con el signo de los elementos diagonales:

$$\int x^2 \sin 4x dx = -\frac{1}{4} x^2 \cos 4x + \frac{1}{8} x \sin 4x + \frac{1}{32} \cos 4x + C.$$

■ PARA INFORMACIÓN ADICIONAL

Para obtener más información sobre el método de tabla, consulte el artículo "Tabular Integration by Parts", de David Horowitz, en *The College Mathematics Journal*, y el artículo "Más sobre Integración tabular por piezas", de Leonard Gillman, en *The College Mathematics Journal*. Para ver estos artículos, visite MathArticles.com.

2.3 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Configurar la integración por partes En los ejercicios 1-6, identifique u y dv para encontrar la integral mediante la integración por partes. (No evalúe la integral.)

- $\int x e^{2x} dx$
- $\int x^2 e^{2x} dx$
- $\int (\ln x)^2 dx$
- $\int \ln 5x dx$
- $\int x \sec^2 x dx$
- $\int x^2 \cos x dx$

Usar la integración por partes En los ejercicios 7-10, calcule la integral mediante la integración por partes con las opciones dadas de u y dv .

- $\int x^3 \ln x dx$; $u = \ln x$, $dv = x^3 dx$
- $\int (4x + 7)e^x dx$; $u = 4x + 7$, $dv = e^x dx$
- $\int x \sin 3x dx$; $u = x$, $dv = \sin 3x dx$
- $\int x \cos 4x dx$; $u = x$, $dv = \cos 4x dx$

Encontrar una integral indefinida En los ejercicios 11-30, calcule la integral indefinida. (Nota: Resuelva por el método más simple, no todos requieren integración por partes.)


- $\int x e^{-4x} dx$
- $\int \frac{5x}{e^{2x}} dx$
- $\int x^3 e^x dx$
- $\int \frac{e^{1/t}}{t^2} dt$
- $\int t \ln(t+1) dt$
- $\int x^5 \ln 3x dx$
- $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$
- $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$
- $\int \frac{x e^{2x}}{(2x+1)^2} dx$
- $\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} dx$
- $\int x \sqrt{x-5} dx$
- $\int \frac{x}{\sqrt{6x+1}} dx$
- $\int x \cos x dx$
- $\int t \csc t \cot t dt$
- $\int x^3 \sin x dx$
- $\int x^2 \cos x dx$
- $\int \arctan x dx$
- $\int 4 \arccos x dx$
- $\int e^{-3x} \sin 5x dx$
- $\int e^{4x} \cos 2x dx$

Ecuaciones diferenciales En los ejercicios 31-34, resuelva la ecuación diferencial.

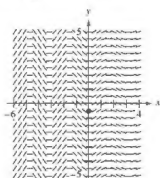
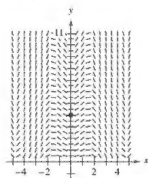
- $y' = \ln x$
- $y' = \arctan \frac{x}{2}$


$$33. \frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{\sqrt{3+5t}}$$

$$34. \frac{dy}{dx} = x^2 \sqrt{x-3}$$

 Campo direccional En los ejercicios 35 y 36 se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo direccional. (a) Trace dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo direccional, una de las cuales pasa a través del punto dado. (b) Utilice la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y use una utilidad gráfica para representar gráficamente la solución. Compare el resultado con los dibujos del inciso (a). Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite MathGraphs.com.

$$35. \frac{dy}{dx} = x \sqrt{y} \cos x, (0, 4) \quad 36. \frac{dy}{dx} = e^{-y/3} \sin 2x, (0, -\frac{18}{37})$$



 Campo direccional En los ejercicios 37 y 38, utilice un sistema de álgebra computacional para graficar el campo direccional de la ecuación diferencial y representar gráficamente la solución a través de la condición inicial especificada.

$$37. \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} e^{y/8}, y(0) = 2 \quad 38. \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \sin x, y(0) = 4$$

Evaluar una integral definida En los ejercicios 39-48, calcule la integral definida. Use un programa de graficación para confirmar el primer resultado.

- $\int_0^3 x e^{x/2} dx$
- $\int_0^2 x^2 e^{-2x} dx$
- $\int_0^{\pi/4} x \cos 2x dx$
- $\int_0^{\pi} x \sin 2x dx$
- $\int_0^{1/2} \arccos x dx$
- $\int_0^1 x \arcsen x^2 dx$
- $\int_0^1 e^{-x} \sin x dx$
- $\int_0^1 \ln(4+x^2) dx$
- $\int_2^4 x \arccsc x dx$
- $\int_0^{\pi/8} x \sec^2 2x dx$

Usar el método tabular En los ejercicios 49-54, utilice el método tabular para encontrar la integral.

- $\int x^2 e^{2x} dx$
- $\int x^3 e^{-2x} dx$
- $\int x^3 \sin x dx$
- $\int x^3 \cos 2x dx$

53. $\int x \sec^2 x \, dx$

54. $\int x^2(x-2)^{3/2} \, dx$

Utilizar dos métodos En los ejercicios 55-58, calcule la integral indefinida mediante sustitución, seguida por la integración por partes.

55. $\int \sin \sqrt{x} \, dx$

56. $\int 2x^3 \cos x^2 \, dx$

57. $\int x^6 e^{x^3} \, dx$

58. $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

59. Integración por partes

- (a) ¿En qué regla de diferenciación se basa la integración por partes? Explique.
 (b) En sus propias palabras, explique cómo se determina qué partes del integrando deben ser u y dv .

60. Integración por partes Al evaluar $\int x \sin x \, dx$, explique por qué el hacer que $u = \sin x$ y $dv = dx$ se dificulta más encontrar la solución.

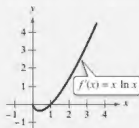
61. Integrar por partes Indique si usaría la integración por partes para evaluar cada integral. Si es así, identifique cuál utilizaría para u y dv . Explique su razonamiento.

(a) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$ (b) $\int x \ln x \, dx$ (c) $\int x^2 e^{-3x} \, dx$

(d) $\int 2xe^{x^2} \, dx$ (e) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} \, dx$ (f) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$



62. ¿CÓMO LO VE? Utilice la gráfica de f mostrada en la figura para responder lo siguiente.



- (a) Calcule la pendiente de f en $x = 2$. Explique.
 (b) Aproxime los intervalos abiertos en los que la gráfica de f es creciente y los intervalos abiertos en los que es decreciente. Explique.

63. Usar dos métodos Integre $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}} \, dx$

- (a) por partes, haciendo $dv = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} \, dx$.
 (b) por sustitución, haciendo $u = 4 + x^2$.

64. Usar dos métodos Integre $\int x\sqrt{4-x} \, dx$

- (a) por partes, haciendo $dv = \sqrt{4-x} \, dx$.
 (b) por sustitución, haciendo $u = 4 - x$.

65. Encontrar una regla general En los ejercicios 65 y 66, utilice un sistema de álgebra computacional para encontrar las integrales para $n = 0, 1, 2$ y 3. Utilice el resultado para obtener una regla general para las integrales para cualquier entero positivo n y ponga a prueba sus resultados para $n = 4$.

65. $\int x^n \ln x \, dx$

66. $\int x^n e^x \, dx$

Demostración En los ejercicios 67-72, utilice la integración por partes para demostrar la fórmula. (Para los ejercicios 67-70, suponga que n es un entero positivo.)

67. $\int x^n \sin x \, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx$

68. $\int x^n \cos x \, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx$

69. $\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} [-1 + (n+1) \ln x] + C$

70. $\int x^n e^{ax} \, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx$

71. $\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C$

72. $\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C$

Usar fórmulas En los ejercicios 73-78, calcule la integral mediante el uso de la fórmula apropiada de los ejercicios 67-72.

73. $\int x^2 \sin x \, dx$

74. $\int x^2 \cos x \, dx$

75. $\int x^5 \ln x \, dx$

76. $\int x^3 e^{2x} \, dx$

77. $\int e^{-3x} \sin 4x \, dx$

78. $\int e^{2x} \cos 3x \, dx$

69. Área En los ejercicios 79-82, use una herramienta de graficación para trazar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones. Luego determine analíticamente el área de la región.

79. $y = 2xe^{-x}$, $y = 0$, $x = 3$

80. $y = \frac{1}{10}te^{3t}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

81. $y = e^{-x} \sin \pi x$, $y = 0$, $x = 1$

82. $y = x^3 \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$

83. Área, volumen y centroide Dada la región acotada por las gráficas de $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = e$, encuentre

- (a) el área de la región.
 (b) el volumen del sólido generado al girar la región respecto al eje x .
 (c) el volumen del sólido generado al girar la región respecto al eje y .
 (d) el centroide de la región.

84. **Área, volumen y centroide** Dada la región acotada por las gráficas de $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi$, encuentre
- el área de la región.
 - el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje x .
 - el volumen del sólido generado al girar la región sobre el eje y .
 - el centroide de la región.

85. **Centroide** Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \arcsin x$, $x = 0$ y $y = \pi/2$. ¿Cómo se relaciona este problema con el ejemplo 6 en esta sección?

86. **Centroide** Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$, $x = 2$ y $x = 4$.

87. **Desplazamiento promedio** La vibración de un resorte es afectada por una fuerza de amortiguación de manera que el desplazamiento del resorte está dado por

$$y = e^{-t}(\cos 2t + 5 \sin 2t).$$

Encuentre el valor promedio de y en el intervalo de $t = 0$ a $t = \pi$.

•• 88. **Modelo de memoria** •••••

Un modelo para la capacidad M de un niño para memorizar, medido en una escala de 0 a 10, está dada por

$$M = 1 + 1.6t \ln t, \quad 0 < t \leq 4$$

donde t es la edad del niño en años. Encuentre el valor promedio de este modelo

- entre el primer y segundo cumpleaños del niño.
- entre el tercer y cuarto cumpleaños del niño.



Valor presente En los ejercicios 89 y 90, encuentre el valor presente P de un flujo de ingreso continuo de $c(t)$ dólares por año para

$$P = \int_0^{t_1} c(t)e^{-rt} dt$$

donde t_1 es el tiempo en años y r es la tasa de interés anual compuesto en forma continua.

89. $c(t) = 100,000 + 4000t$, $r = 5\%$, $t_1 = 10$

90. $c(t) = 30,000 + 500t$, $r = 7\%$, $t_1 = 5$

Integrales utilizadas para encontrar los coeficientes de Fourier En los ejercicios 91 y 92, verifique el valor de la integral definida, donde n es un entero positivo.

$$91. \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \begin{cases} \frac{2\pi}{n} & n \text{ es impar} \\ -\frac{2\pi}{n} & n \text{ es par} \end{cases}$$

$$92. \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{(-1)^n 4\pi}{n^2}$$

93. **Cuerda vibrante** Una cuerda extendida entre los dos puntos $(0, 0)$ y $(2, 0)$ es arrancada por el desplazamiento de la cuerda h unidades en su punto medio. El movimiento de la cuerda se modela por una serie de senos de Fourier cuyos coeficientes están dados por

$$b_n = h \int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx + h \int_1^2 (-x+2) \sin \frac{n\pi x}{2} dx.$$

Encuentre b_n .

94. **Método de Euler** Considere la ecuación diferencial $f'(x) = xe^{x^2}$ con la condición inicial $f(0) = 0$.

- Utilice la integración para resolver la ecuación diferencial.
- Utilice un programa de graficación para trazar la solución de la ecuación diferencial.
- Use el método de Euler con $h = 0.05$ y las capacidades recursivas de una herramienta de graficación, para generar los primeros 80 puntos de la gráfica de la solución aproximada. Utilice la herramienta de graficación para trazar los puntos. Compare el resultado con la gráfica del inciso (b).
- Repita el inciso (c) usando $h = 0.1$ y genere los primeros 40 puntos.
- ¿Por qué el resultado del inciso (c) es una mejor aproximación de la solución que el resultado del inciso (d)?

95. **Método de Euler** En los ejercicios 95 y 96, considere la ecuación diferencial y repita los incisos (a)–(d) del ejercicio 94.

95. $f'(x) = 3x \sin(2x)$ 96. $f'(x) = \cos \sqrt{x}$
 $f(0) = 0$ $f(0) = 1$

97. **Piénselo** Dé una explicación geométrica de por qué

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx \leq \int_0^{\pi/2} x \, dx.$$

Verifique la desigualdad mediante la evaluación de las integrales.

98. **Encontrar un patrón** Encuentre el área acotada por las gráficas de $y = x \sin x$ y $y = 0$ sobre cada intervalo.

(a) $[0, \pi]$ (b) $[\pi, 2\pi]$ (c) $[2\pi, 3\pi]$

Describe cualquier patrón que observe. ¿Cuál es el área entre las gráficas de $y = x \sin x$ y $y = 0$ en el intervalo $[n\pi, (n+1)\pi]$, donde n es cualquier número entero no negativo? Explique.

99. **Encontrar un error** Encuentre el error en el siguiente argumento de que $0 = 1$.

$$dv = dx \implies v = \int dx = x$$

$$u = \frac{1}{x} \implies du = -\frac{1}{x^2} dx$$

$$0 + \int \frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)(x) - \int \left(-\frac{1}{x^2}\right)(x) dx$$

$$= 1 + \int \frac{dx}{x}$$

Por lo que, $0 = 1$.

2.4 Integración de funciones logarítmicas, trigonométricas y exponenciales

- Utilizar la regla para la integración de logaritmos para integrar una función racional.
- Integrar funciones trigonométricas.

Integración de la función logaritmo natural

Con las reglas de derivación

$$\frac{d}{dx}[\ln|x|] = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}[\ln|u|] = \frac{u'}{u}$$

que estudió en la sección anterior se obtiene la siguiente regla de integración.

TEOREMA 2.6 Regla de integración de logaritmos

Sea u una función derivable de x

$$1. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \qquad 2. \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$$

Debido a que $du = u' dx$, la segunda fórmula también se puede escribir como

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C.$$

Forma alternativa de la regla de integración de logaritmos

EJEMPLO 1 Usar la regla de integración de logaritmos

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x} dx &= 2 \int \frac{1}{x} dx \\ &= 2 \ln|x| + C \\ &= \ln(x^2) + C \end{aligned}$$

Regla del múltiplo constante

Regla de integración de logaritmos

Propiedad de los logaritmos

Debido a que x^2 no puede ser negativa, la notación de valor absoluto es innecesaria en la forma final de la antiderivada.

EJEMPLO 2 Usar la regla de integración de logaritmos con un cambio de variable

Encuentre $\int \frac{1}{4x-1} dx$.

Solución Si $u = 4x - 1$, entonces $du = 4 dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{4x-1} dx &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{4x-1} \right) 4 dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{4} \ln|u| + C \\ &= \frac{1}{4} \ln|4x-1| + C \end{aligned}$$

Multiplicar y dividir entre 4.

Sustituya: $u = 4x - 1$.

Aplique la regla de integración de logaritmos.

Sustituya el valor de u .

Exploración

Integración de funciones racionales

En la unidad 4 aprendí las reglas que le han permitido integrar cualquier función polinomial. La regla de integración de logaritmos presentada en esta sección facilita la integración de funciones racionales. Por ejemplo, cada una de las siguientes funciones se puede integrar con la regla de integración de logaritmos.

$$\frac{2}{x} \qquad \text{Ejemplo 1}$$

$$\frac{1}{4x-1} \qquad \text{Ejemplo 2}$$

$$\frac{x}{x^2+1} \qquad \text{Ejemplo 3}$$

$$\frac{3x^2+1}{x^3+x} \qquad \text{Ejemplo 4(a)}$$

$$\frac{x+1}{x^2+2x} \qquad \text{Ejemplo 4(c)}$$

$$\frac{1}{3x+2} \qquad \text{Ejemplo 4(d)}$$

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \qquad \text{Ejemplo 5}$$

$$\frac{2x}{(x+1)^2} \qquad \text{Ejemplo 6}$$

Aunque hay algunas funciones racionales que no pueden integrarse utilizando la regla de integración de logaritmos. Proporcione ejemplos de estas funciones y explique su razonamiento.

El ejemplo 3 utiliza la variante de la regla de integración de logaritmos. Para aplicar esta regla, busque los cocientes en los que el numerador es la derivada del denominador.

EJEMPLO 3 Determinar el área con la regla de integración de logaritmos

Encuentre el área de la región limitada por la gráfica de

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

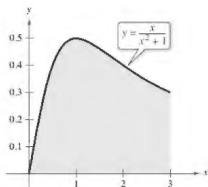
el eje x y la recta $x = 3$.

Solución En la figura 2.8 se puede ver que el área de la región está dada por la integral definida

$$\int_0^3 \frac{x}{x^2 + 1} dx.$$

Si $u = x^2 + 1$, entonces $u' = 2x$. Para aplicar la regla, multiplique y divida entre 2, como se muestra

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{x}{x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{2x}{x^2 + 1} dx && \text{Multiplique y divida entre 2.} \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln(x^2 + 1) \right]_0^3 && \int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C \\ &= \frac{1}{2} (\ln 10 - \ln 1) && \ln 1 = 0 \\ &= \frac{1}{2} \ln 10 && \\ &\approx 1.151 \end{aligned}$$



$$\text{Área} = \int_0^3 \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

El área de la región limitada por la gráfica de y , el eje x y $x = 3$ es $\frac{1}{2} \ln 10$.

Figura 2.8

EJEMPLO 4 Reconocer formas de cociente de la regla de integración de logaritmos

$$\text{a. } \int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x} dx = \ln|x^3 + x| + C \quad u = x^3 + x$$

$$\text{b. } \int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx = \ln|\tan x| + C \quad u = \tan x$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \int \frac{x + 1}{x^2 + 2x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x} dx && u = x^2 + 2x \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \int \frac{1}{3x + 2} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{3}{3x + 2} dx && u = 3x + 2 \\ &= \frac{1}{3} \ln|3x + 2| + C \end{aligned}$$

Con antiderivadas o primitivas que involucran logaritmos, es fácil obtener formas que parecen bastante diferentes, pero siguen siendo equivalentes. Por ejemplo, tanto

$$\ln|(3x + 2)^{1/3}| + C$$

y

$$\ln|3x + 2|^{1/3} + C$$

son equivalentes a la antiderivada que se presenta en el ejemplo 4(d).

Las integrales a las que se puede aplicar la regla de integración de logaritmos aparecen a menudo en forma disfrazada. Por ejemplo, cuando una función racional tiene un *numerador de grado mayor o igual al del denominador*, al dividirse se encuentra una forma a la que se puede aplicar la regla de integración de logaritmos. Esto se muestra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Usar la división larga antes de integrar

... ▶ Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre la integral indefinida.

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} dx$$

Solución Comience usando la división larga para reescribir el integrando.

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \Rightarrow x^2 + 1 \overline{) x^2 + x + 1} \Rightarrow 1 + \frac{x}{x^2 + 1}$$

Ahora puede integrar para obtener

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} dx &= \int \left(1 + \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx && \text{Reescriba usando la división larga.} \\ &= \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx && \text{Reescriba como dos integrales.} \\ &= x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C. && \text{Integre.} \end{aligned}$$

Compruebe este resultado mediante la derivación para obtener el integrando original. ■

El siguiente ejemplo presenta otro caso en el que la regla de integración de logaritmos está disfrazada. En este caso, un cambio de variables ayuda a reconocer la regla de integración de logaritmos.

EJEMPLO 6 Cambiar variables con la regla de integración de logaritmos

Encuentre la integral indefinida.

$$\int \frac{2x}{(x+1)^2} dx$$

Solución Sea $u = x + 1$, entonces $du = dx$ y $x = u - 1$.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{(x+1)^2} dx &= \int \frac{2(u-1)}{u^2} du && \text{Sustituya.} \\ &= 2 \int \left(\frac{u}{u^2} - \frac{1}{u^2} \right) du && \text{Reescriba como dos fracciones.} \\ &= 2 \int \frac{du}{u} - 2 \int u^{-2} du && \text{Reescriba como dos integrales.} \\ &= 2 \ln|u| - 2 \left(\frac{u^{-1}}{-1} \right) + C && \text{Integre.} \\ &= 2 \ln|u| + \frac{2}{u} + C && \text{Simplifique.} \\ &= 2 \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + C && \text{Sustituya } u. \end{aligned}$$

Compruebe este resultado mediante la derivación para obtener el integrando original. ■

▶ **TECNOLOGÍA** Si usted tiene acceso a un sistema algebraico computacional, utilícelo para encontrar las integrales indefinidas en los ejemplos 5 y 6. ¿De qué manera se compara la forma de la antiderivada obtenida con la dada en los ejemplos 5 y 6?

Al estudiar los métodos que se muestran en los ejemplos 5 y 6, considere que ambos métodos implican reescribir el integrando disfrazado para que se ajuste a una o más fórmulas básicas de integración. En las secciones restantes de esta unidad se dedicará mucho tiempo a las técnicas de integración. Para dominar estas técnicas, debe reconocer la naturaleza de “ajustar a la forma” de la integral. En este sentido, la integración no es tan sencilla como la derivación. La derivación es

“Aquí está la pregunta, ¿cuál es la respuesta?”

La integración es más como

“Aquí está la respuesta, ¿cuál es la pregunta?”

A continuación se presentan estrategias que se pueden utilizar para la integración.

REGLAS PARA LA INTEGRACIÓN

1. Aprenda una lista básica de fórmulas de integración. (Incluyendo los que figuran en esta sección, ahora tiene 12 fórmulas: la regla de la potencia, la regla de integración de logaritmos y 10 reglas trigonométricas. Al final de la sección 2.8, esta lista se habrá ampliado a 20 reglas básicas.)
2. Encuentre una fórmula de integración que se asemeje a la totalidad o parte del integrando y, por ensayo y error, encuentre una selección de u que hará que el integrando se ajuste a la fórmula.
3. Cuando no pueda encontrar una sustitución que funcione, intente alterar el integrando. Usted puede tratar con una identidad trigonométrica, multiplicación y división por la misma cantidad, suma y resta de la misma cantidad, o una división larga. Sea creativo.
4. Si usted tiene acceso a un software que encuentre antiderivadas simbólicamente, úselo.

EJEMPLO 7

Sustituir u y regla de integración de logaritmos

Resuelva la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln x}$.

Solución La solución puede escribirse como una integral indefinida.

$$y = \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

Debido a que el integrando es un cociente cuyo denominador está elevado a la primera potencia, usted debe tratar con la regla de integración de logaritmos. Hay tres opciones básicas para u . Las opciones

$$u = x \quad \text{y} \quad u = x \ln x$$

no se ajustan a la forma u'/u de la regla de integración de logaritmos. Sin embargo, la tercera opción se ajusta. Haciendo $u = \ln x$ se tiene $u' = 1/x$ y se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x \ln x} dx &= \int \frac{1/x}{\ln x} dx \\ &= \int \frac{u'}{u} dx \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|\ln x| + C \end{aligned}$$

Divida el numerador y el denominador entre x .

Sustituya: $u = \ln x$.

Aplique la regla de integración de logaritmos.

Sustituya u .

Por tanto, la solución es $y = \ln|\ln x| + C$.

- **COMENTARIO** Tenga en
- cuenta que puede comprobar su
- respuesta a un problema de
- integración derivando la
- respuesta. Por ejemplo, en el
- ejemplo 7, la derivada de $y = \ln$
- $|\ln x| + C$ es $y' = 1/(x \ln x)$.



Integración de funciones trigonométricas

En la sección 1.3 aprendió las seis reglas de integración trigonométrica, las seis que corresponden directamente con las reglas de derivación. Con la regla de integración de logaritmos, ahora puede completar el conjunto de fórmulas trigonométricas básicas de integración.

EJEMPLO 8

Usar una identidad trigonométrica

Encuentre $\int \tan x \, dx$.

Solución Esta integral no parece ajustarse a ninguna fórmula en nuestra lista básica. Sin embargo, mediante el uso de una identidad trigonométrica, se obtiene

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx.$$

Sabiendo que $D_x[\cos x] = -\sin x$, puede hacer $u = \cos x$ y escribir

$$\begin{aligned} \int \tan x \, dx &= - \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx \\ &= - \int \frac{u'}{u} \, dx \\ &= -\ln|u| + C \\ &= -\ln|\cos x| + C. \end{aligned}$$

Aplique la identidad trigonométrica y multiplique y divida entre -1 .

Sustituya: $u = \cos x$.

Aplique la regla de integración de logaritmos.

Sustituya u .

El ejemplo 8 utiliza una identidad trigonométrica para deducir una regla de integración para la función tangente. El siguiente ejemplo da un paso bastante inusual (multiplicando y dividiendo entre la misma cantidad) para deducir una regla de integración para la función secante.

EJEMPLO 9

Deducir la fórmula de la secante

Encuentre $\int \sec x \, dx$.

Solución Considere el siguiente procedimiento.

$$\begin{aligned} \int \sec x \, dx &= \int \sec x \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \right) dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx \end{aligned}$$

Haciendo que u sea el denominador de este cociente se tiene

$$u = \sec x + \tan x$$

y

$$u' = \sec x \tan x + \sec^2 x.$$

Por lo tanto, se puede concluir que

$$\begin{aligned}\int \sec x \, dx &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx \\ &= \int \frac{u'}{u} \, dx \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|\sec x + \tan x| + C.\end{aligned}$$

Reescriba el integrando.

Sustituya: $u = \sec x + \tan x$.

Aplique la regla de integración de logaritmos.

Sustituya u .

Con los resultados de los ejemplos 8 y 9, ahora tiene fórmulas de integración para $\sin x$, $\cos x$ y $\sec x$. Las integrales de las seis funciones trigonométricas básicas se resumen a continuación. (Para las demostraciones de $\cot u$ y $\csc u$, consulte los ejercicios 87 y 88.)

INTEGRALES DE LAS SEIS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS

$$\begin{aligned}\int \sin u \, du &= -\cos u + C & \int \cos u \, du &= \sin u + C \\ \int \tan u \, du &= -\ln|\cos u| + C & \int \cot u \, du &= \ln|\sin u| + C \\ \int \sec u \, du &= \ln|\sec u + \tan u| + C & \int \csc u \, du &= -\ln|\csc u + \cot u| + C\end{aligned}$$

.....▷
•••COMENTARIO Utilizando las identidades trigonométricas y las propiedades de los logaritmos, podría volver a escribir estas seis reglas de integración en otras formas. Por ejemplo, podría escribir

$$\begin{aligned}\int \csc u \, du \\ = \ln|\csc u - \cot u| + C.\end{aligned}$$

EJEMPLO 10 Integrar funciones trigonométricas

Evalúe $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x} \, dx$.

Solución Utilizando $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, puede escribir

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x} \, dx &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x} \, dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \sec x \, dx && \sec x \geq 0 \text{ para } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}. \\ &= \ln|\sec x + \tan x| \Big|_0^{\pi/4} \\ &= \ln(\sqrt{2} + 1) - \ln 1 \\ &\approx 0.881.\end{aligned}$$

EJEMPLO 11 Determinar un valor promedio

Determine el valor promedio de

$$f(x) = \tan x$$

sobre el intervalo $[0, \pi/4]$.

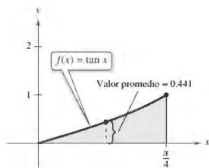


Figura 2.9

Solución

$$\begin{aligned} \text{Valor promedio} &= \frac{1}{(\pi/4) - 0} \int_0^{\pi/4} \tan x \, dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \tan x \, dx \\ &= \frac{4}{\pi} \left[-\ln|\cos x| \right]_0^{\pi/4} \\ &= -\frac{4}{\pi} \left[\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln(1) \right] \\ &= -\frac{4}{\pi} \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &\approx 0.441 \end{aligned}$$

$$\text{Valor promedio} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

Simplifique.

Integre.

El valor promedio es aproximadamente 0.441, como se muestra en la figura 2.9. ■

Integración de funciones exponenciales

Cada fórmula de derivación para funciones exponenciales tiene una fórmula de integración correspondiente.

TEOREMA 2.7 Reglas de integración de funciones exponencialesSea u una función derivable de x .

$$1. \int e^x \, dx = e^x + C \qquad 2. \int e^u \, du = e^u + C$$

EJEMPLO 12 Integrar funciones exponenciales

Encuentre la integral indefinida

$$\int e^{3x+1} \, dx$$

Solución Si $u = 3x + 1$, entonces $du = 3 \, dx$.

$$\begin{aligned} \int e^{3x+1} \, dx &= \frac{1}{3} \int e^{3x+1} (3) \, dx && \text{Multiplique y divida entre 3.} \\ &= \frac{1}{3} \int e^u \, du && \text{Sustituya: } u = 3x + 1. \\ &= \frac{1}{3} e^u + C && \text{Aplique la regla de los exponentes.} \\ &= \frac{e^{3x+1}}{3} + C && \text{Sustituya } u. \end{aligned}$$

... **COMENTARIO** En el ejemplo 7, *falta* el factor constante 3 que se introdujo para crear $du = 3 \, dx$. Sin embargo, recuerde que no se puede introducir un factor *variable* que falta en el integrando. Por ejemplo,

$$\int e^{-x^2} \, dx \neq \frac{1}{x} \int e^{-x^2} (x \, dx).$$

EJEMPLO 13 Integrar funciones exponenciales

Encuentre la integral indefinida.

$$\int 5xe^{-x^2} dx$$

Solución Si $u = -x^2$, entonces $du = -2x dx$ o $x dx = -du/2$.

$$\begin{aligned} \int 5xe^{-x^2} dx &= \int 5e^{-x^2}(x dx) && \text{Reagrupe la integral.} \\ &= \int 5e^u \left(-\frac{du}{2}\right) && \text{Sustituya: } u = -x^2. \\ &= -\frac{5}{2} \int e^u du && \text{Regla del múltiplo constante} \\ &= -\frac{5}{2} e^u + C && \text{Aplique la regla de los exponentes.} \\ &= -\frac{5}{2} e^{-x^2} + C && \text{Sustituya } u. \end{aligned}$$

EJEMPLO 14 Integrar funciones exponenciales

Encuentre cada una de las integrales indefinidas.

$$\text{a. } \int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx \quad \text{b. } \int \sin x e^{\cos x} dx$$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a. } \int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx &= - \int \overbrace{e^{1/x}}^{e^u} \overbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}^{du} dx && u = \frac{1}{x} \\ &= -e^{1/x} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \int \sin x e^{\cos x} dx &= - \int \overbrace{e^{\cos x}}^{e^u} \overbrace{(-\sin x)}^{du} dx && u = \cos x \\ &= -e^{\cos x} + C \end{aligned}$$

EJEMPLO 15 Determinar áreas limitadas por funciones exponenciales

Evalúe cada una de las integrales indefinidas.

$$\text{a. } \int_0^1 e^{-x} dx \quad \text{b. } \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx \quad \text{c. } \int_{-1}^0 [e^x \cos(e^x)] dx$$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a. } \int_0^1 e^{-x} dx &= -e^{-x} \Big|_0^1 && \text{Vea figura 2.10(a).} \\ &= -e^{-1} - (-1) \\ &= 1 - \frac{1}{e} \\ &\approx 0.632 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx &= \ln(1+e^x) \Big|_0^1 && \text{Vea figura 2.10(b).} \\ &= \ln(1+e) - \ln 2 \\ &\approx 0.620 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \int_{-1}^0 [e^x \cos(e^x)] dx &= \text{sen}(e^x) \Big|_{-1}^0 && \text{Vea figura 2.10(c).} \\ &= \text{sen } 1 - \text{sen}(e^{-1}) \\ &\approx 0.482 \end{aligned}$$

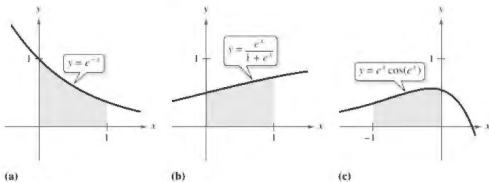


Figura 2.10

A veces el integrando implica una función exponencial a una base distinta de e . Cuando esto ocurre, hay dos opciones: (1) convertir a base e usando la fórmula $a^x = e^{\ln a \cdot x}$ y luego integrar, o (2) integrar directamente, utilizando la fórmula de integración

$$\int a^x dx = \left(\frac{1}{\ln a} \right) a^x + C$$

EJEMPLO 16**Integrar una función exponencial a otra base**

Encuentre $\int 2^x dx$.

Solución

$$\int 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + C$$

Quando se utilizó la regla de la potencia, $D_x[x^n] = nx^{n-1}$, en un curso de cálculo diferencial, se requirió que el exponente fuera un número racional. Ahora la norma se amplía para cubrir cualquier valor real de n . Trate de demostrar este teorema utilizando la derivación logarítmica.

2.4 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Encontrar una integral indefinida En los ejercicios 1-26, calcule la integral indefinida.

1. $\int \frac{5}{x} dx$

2. $\int \frac{10}{x} dx$

3. $\int \frac{1}{x+1} dx$

4. $\int \frac{1}{x-5} dx$

5. $\int \frac{1}{2x+5} dx$

6. $\int \frac{9}{5-4x} dx$

7. $\int \frac{x}{x^2-3} dx$

8. $\int \frac{x^2}{5-x^3} dx$

9. $\int \frac{4x^3+3}{x^4+3x} dx$

10. $\int \frac{x^3-2x}{x^3-3x^2} dx$

11. $\int \frac{x^2-4}{x} dx$

12. $\int \frac{x^3-8x}{x^2} dx$

13. $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3+3x^2+9x} dx$

14. $\int \frac{x^2+4x}{x^3+6x^2+5} dx$

15. $\int \frac{x^2-3x+2}{x+1} dx$

16. $\int \frac{2x^2+7x-3}{x-2} dx$

17. $\int \frac{x^3-3x^2+5}{x-3} dx$

18. $\int \frac{x^3-6x-20}{x+5} dx$

19. $\int \frac{x^4+x-4}{x^2+2} dx$

20. $\int \frac{x^3-4x^2-4x+20}{x^2-5} dx$

21. $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

22. $\int \frac{1}{x \ln x^3} dx$

23. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-3\sqrt{x})} dx$

24. $\int \frac{1}{x^{2/3}(1+x^{1/3})} dx$

25. $\int \frac{2x}{(x-1)^2} dx$

26. $\int \frac{x(x-2)}{(x-1)^3} dx$

Encontrar una integral indefinida por sustitución de u En los ejercicios 27-30, encuentre la integral indefinida por sustitución. (Sugerencia: haga que u sea el denominador del integrando.)

27. $\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}} dx$

28. $\int \frac{1}{1+\sqrt{3x}} dx$

29. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} dx$

30. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1} dx$

Encontrar la integral indefinida de una función trigonométrica En los ejercicios 31-40, calcule la integral indefinida.

31. $\int \cot \frac{\theta}{3} d\theta$

32. $\int \tan 5\theta d\theta$

33. $\int \csc 2x dx$

34. $\int \sec \frac{x}{2} dx$

35. $\int (\cos 3\theta - 1) d\theta$


36. $\int \left(2 - \tan \frac{\theta}{4}\right) d\theta$

37. $\int \frac{\cos t}{1+\sin t} dt$

38. $\int \frac{\csc^2 t}{\cot t} dt$

39. $\int \frac{\sec x \tan x}{\sec x - 1} dx$

40. $\int (\sec 2x + \tan 2x) dx$

 Ecuaciones diferenciales En los ejercicios 41-44, resuelva la ecuación diferencial. Utilice un programa de graficación para trazar tres soluciones, una de ellas pasa por el punto dado.

41. $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2-x}, (1, 0)$

42. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-2}{x}, (-1, 0)$


43. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2-9x}, (0, 4)$

44. $\frac{dr}{dt} = \frac{\sec^2 t}{\tan t + 1}, (\pi, 4)$

Encontrar una solución particular En los ejercicios 45 y 46, encuentre la solución particular que satisfaga la ecuación diferencial y las condiciones iniciales.

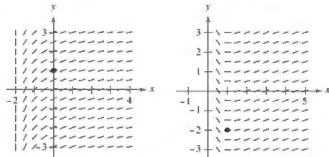
45. $f''(x) = \frac{2}{x^2}, f'(1) = 1, f(1) = 1, x > 0$

46. $f''(x) = -\frac{4}{(x-1)^2} - 2, f'(2) = 0, f(2) = 3, x > 1$

 Campo direccional En los ejercicios 47 y 48 se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo direccional. (a) Dibuje dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo direccional, una de las cuales pasa a través del punto dado. (b) Use la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y utilice un programa de graficación para trazar la solución. Compare el resultado con los dibujos del inciso (a). Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, vaya a MathGraphs.com.

47. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+2}, (0, 1)$

48. $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{x}, (1, -2)$



Evaluar una integral definida En los ejercicios 49-56, evalúe la integral definida. Utilice un programa de graficación para verificar el resultado.

49. $\int_0^4 \frac{5}{3x+1} dx$

50. $\int_{-1}^1 \frac{1}{2x+3} dx$

51. $\int_1^e \frac{(1 + \ln x)^2}{x} dx$


52. $\int_1^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$

53. $\int_0^2 \frac{x^2 - 2}{x + 1} dx$

54. $\int_0^1 \frac{x - 1}{x + 1} dx$

55. $\int_1^2 \frac{1 - \cos \theta}{\theta - \sin \theta} d\theta$

56. $\int_{\pi/8}^{\pi/4} (\csc 2\theta - \cot 2\theta) d\theta$

 Usar tecnología para encontrar una integral En los ejercicios 57-62, utilice un sistema de álgebra computacional para encontrar o evaluar la integral.

57. $\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$

58. $\int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$

59. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx$

60. $\int \frac{x^2}{x-1} dx$

61. $\int_{\pi/2}^{\pi/3} (\csc x - \sec x) dx$

62. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sec^2 x - \cos^2 x}{\cos x} dx$

Encontrar una derivada En los ejercicios 63-66, encuentre $F'(x)$.

63. $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

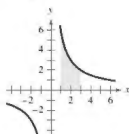
64. $F(x) = \int_0^x \tan t dt$

65. $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{t} dt$

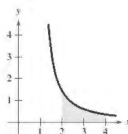
66. $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{t} dt$

Área En los ejercicios 67-70, encuentre el área de una región determinada. Utilice un programa de graficación para verificar el resultado.

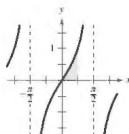
67. $y = \frac{6}{x}$



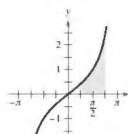
68. $y = \frac{2}{x \ln x}$



69. $y = \tan x$



70. $y = \frac{\sec x}{1 + \cos x}$



Área En los ejercicios 71-74, encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones. Utilice un programa de graficación para verificar el resultado.

71. $y = \frac{x^2 + 4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$

72. $y = \frac{5x}{x^2 + 2}$, $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$

73. $y = 2 \sec \frac{\pi x}{6}$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$

74. $y = 2x - \tan 0.3x$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$

Integración numérica En los ejercicios 75-78, utilice la regla del trapecio y la regla de Simpson para aproximar el valor de la integral definida. Haga que $n = 4$ y redondee su respuesta a cuatro decimales. Utilice un programa de graficación para verificar el resultado.

75. $\int_1^2 \frac{12}{x} dx$

76. $\int_0^3 \frac{8x}{x^2 + 4} dx$

77. $\int_2^6 \ln x dx$

78. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x dx$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

Elección de una fórmula En los ejercicios 79-82, establezca la fórmula de integración que podría usar para realizar la integración. No integre.

79. $\int \sqrt{x} dx$

80. $\int \frac{x}{(x^2 + 4)^2} dx$

81. $\int \frac{x}{x^2 + 4} dx$

82. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx$

Aproximación En los ejercicios 83 y 84, determine qué valores se aproximan mejor a la zona de la región entre el eje x y la gráfica de la función sobre el intervalo dado. (Haga su selección a partir de un dibujo de la región, no mediante la realización de los cálculos.)

83. $f(x) = \sec x$, $[0, 1]$

- (a) 6 (b) -6 (c)
- $\frac{1}{2}$
- (d) 1.25 (e) 3

84. $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $[0, 4]$

- (a) 3 (b) 7 (c) -2 (d) 5 (e) 1

85. Encontrar un valor Encuentre un valor de x tal que

$$\int_1^x \frac{3}{t} dt = \int_{1/4}^1 \frac{1}{t} dt.$$

86. Encontrar un valor Encuentre un valor de x tal que

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt$$

sea igual a (a) $\ln 5$ y (b) 1.

87. Demostración Demuestre que

$$\int \cot u du = -\ln|\sec u| + C.$$

88. Demostración Demuestre que

$$\int \csc u du = -\ln|\csc u + \cot u| + C.$$

Usar las propiedades de los logaritmos y de las identidades trigonométricas. En los ejercicios 89-92, demuestre que las dos fórmulas son equivalentes.

$$89. \int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + C$$

$$90. \int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \cot x \, dx = -\ln|\csc x| + C$$

$$91. \int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \sec x \, dx = -\ln|\sec x - \tan x| + C$$

$$92. \int \csc x \, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$$

$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

Determinar el valor promedio de una función. En los ejercicios 93-96, encuentre el valor promedio de la función sobre el intervalo dado.

$$93. f(x) = \frac{8}{x^2}, [2, 4]$$

$$94. f(x) = \frac{4(x+1)}{x^2}, [2, 4]$$

$$95. f(x) = \frac{2 \ln x}{x}, [1, e]$$

$$96. f(x) = \sec \frac{\pi x}{6}, [0, 2]$$

97. Crecimiento de la población Una población de bacterias está cambiando a un ritmo de

$$\frac{dP}{dt} = \frac{3000}{1 + 0.25t}$$

dónde t es el tiempo en días. La población inicial (cuando $t = 0$) es 1000. Escriba una ecuación que da la población en un tiempo t . A continuación, encuentre la población cuando $t = 3$ días.

98. Ventas La tasa de cambio en las ventas es inversamente proporcional al tiempo t ($t > 1$) medido en semanas. Encuentre S como una función de t cuando las ventas después de 2 y 4 semanas son 200 unidades y 300 unidades, respectivamente.

99. Transferencia de calor

- Encuentre el tiempo
- requerido para que
- un objeto se enfríe
- de 300°F a 250°F
- evaluando

$$t = \frac{10}{\ln 2} \int_{250}^{300} \frac{1}{T - 100} dT$$

• donde t es el tiempo en minutos.



100. Precio promedio La ecuación de demanda de un producto es

$$p = \frac{90,000}{400 + 3x}$$

donde p es el precio (en dólares) y x es el número de unidades (en miles). Encuentre el precio promedio p en el intervalo $40 \leq x \leq 50$.

101. Área y pendiente Grafique la función

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

sobre el intervalo $(0, \infty)$.

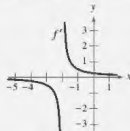
(a) Determine el área limitada por la gráfica de f y la recta $y = \frac{1}{3}x$.

(b) Determine los valores de la pendiente m de tal manera que la recta $y = mx$ y la gráfica de f encierren una región finita.

(c) Calcule el área de esta región como una función de m .



¿CÓMO LO VE? Use la gráfica de f' que se muestra en la figura para responder a lo siguiente.



(a) Aproxime la pendiente de f en $x = -1$. Explique.

(b) Aproxime los intervalos abiertos en los que la gráfica de f es creciente y los intervalos abiertos en los que es decreciente. Explique.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 103-106, determine si la expresión es verdadera o falsa. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falsa.

$$103. (\ln x)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln x$$

$$104. \int \ln x \, dx = (1/x) + C$$

$$105. \int_x^1 dx = \ln|cx|, \quad c \neq 0$$

$$106. \int_{-1}^2 \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x| \right]_{-1}^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

107. Desigualdad de Napier Para $0 < x < y$, demuestre que

$$\frac{1}{y} < \frac{\ln y - \ln x}{y - x} < \frac{1}{x}$$

108. Demostración Demuestre que la función

$$F(x) = \int_1^{2x} \frac{1}{t} dt$$

es constante sobre el intervalo $(0, \infty)$.

Encontrar una integral indefinida. En los ejercicios 109-126, encuentre la integral indefinida.

109. $\int e^{5x}(5) dx$

110. $\int e^{-x}(-4x^3) dx$

111. $\int e^{2x-1} dx$

112. $\int e^{1-3x} dx$

113. $\int x^2 e^{x^3} dx$

114. $\int e^x(e^x + 1)^2 dx$

115. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

116. $\int \frac{e^{1/x^2}}{x^3} dx$

117. $\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$

118. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$

119. $\int e^x \sqrt{1-e^x} dx$

120. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

121. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$

122. $\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} dx$

123. $\int \frac{5 - e^{-x}}{e^{2x}} dx$

124. $\int \frac{e^{2x} + 2e^x + 1}{e^x} dx$

125. $\int e^{-x} \tan(e^{-x}) dx$

126. $\int e^{2x} \csc(e^{2x}) dx$

Evaluar una integral definida. En los ejercicios 127-136, calcule la integral definida. Utilice un programa de graficación para verificar el resultado.

127. $\int_0^1 e^{-2x} dx$

128. $\int_1^2 e^{3x-3} dx$

129. $\int_0^1 x e^{-x^2} dx$

130. $\int_{-2}^0 x^2 e^{x^2/2} dx$

131. $\int_1^4 \frac{e^{3/\sqrt{x}}}{x^2} dx$

132. $\int_0^{\sqrt{2}} x e^{-(x^2/2)} dx$

133. $\int_0^{\pi/2} \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$

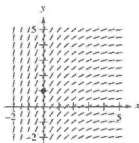
134. $\int_0^1 \frac{e^x}{5-e^x} dx$

135. $\int_0^{\pi/2} e^{\cos \pi x} \cos \pi x dx$

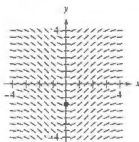
136. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} e^{\cos 2x} \sec 2x \tan 2x dx$

Campo direccional En los ejercicios 137 y 138 se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo direccional. (a) Dibuje dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo direccional, una de las cuales pasa a través del punto dado. (b) Utilice la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y utilice un programa de graficación para trazar la solución. Compare el resultado con los dibujos del inciso (a). Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite MathGraphs.com.

137. $\frac{dy}{dx} = 2e^{-x/2}, (0, 1)$



138. $\frac{dy}{dx} = x e^{-0.2x^2}, (0, -\frac{3}{2})$



Ecuaciones diferenciales En los ejercicios 139 y 140, resuelva la ecuación diferencial.

139. $\frac{dy}{dx} = x e^{ax^2}$

140. $\frac{dy}{dx} = (e^x - e^{-x})^2$

Ecuaciones diferenciales En los ejercicios 141 y 142, encuentre la solución particular que satisface las condiciones iniciales.

141. $f''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$
 $f(0) = 1, f'(0) = 0$

142. $f''(x) = \sin x + e^{2x},$
 $f(0) = \frac{1}{4}, f'(0) = \frac{1}{2}$

Área En los ejercicios 143-146, encuentre el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones. Utilice un programa de graficación para trazar la ecuación y verificar su resultado.

143. $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 5$

144. $y = e^{-2x}, y = 0, x = -1, x = 3$

145. $y = x e^{-x^2/4}, y = 0, x = 0, x = \sqrt{6}$

146. $y = e^{-2x} + 2, y = 0, x = 0, x = 2$

Integración numérica En los ejercicios 147 y 148, aproxime la integral utilizando la regla del punto medio, la regla del trapecio y la regla de Simpson con $n = 12$. Utilice un programa de graficación para verificar sus resultados.

147. $\int_0^4 \sqrt{x} e^x dx$

148. $\int_0^2 2x e^{-x} dx$

149. Probabilidad Una batería de automóvil tiene una vida media de 48 meses con una desviación estándar de 6 meses. La vida de la batería se distribuye normalmente. La probabilidad de que una batería dada durará entre 48 meses y 60 meses es de

$$0.0065 \int_{48}^{60} e^{-0.0139(t-48)^2} dt.$$

Utilice las capacidades de integración de un programa de graficación para aproximar la integral. Interprete la probabilidad resultante.

150. Probabilidad La mediana de tiempo de espera (en minutos) para la gente esperando el servicio en una tienda de conveniencia está dada por la solución de la ecuación

$$\int_0^x 0.3e^{-0.3t} dt = \frac{1}{2}.$$

¿Cuál es el tiempo de espera promedio?

151. Uso del área de una región Encuentre el valor de a tal que la superficie delimitada por $y = e^{-x}$, el eje x , $x = -a$ y $x = a$ es $\frac{5}{3}$.

152. Modelado de datos Una válvula de un tanque de almacenamiento se abre durante 4 horas para liberar una sustancia química en un proceso de fabricación. En la tabla se da la velocidad de flujo R (en litros por hora) en el tiempo t (en horas).

t	0	1	2	3	4
R	425	240	118	71	36

- (a) Utilice las capacidades de regresión de un programa de graficación para encontrar un modelo lineal para los puntos $(t, \ln R)$. Escriba la ecuación resultante de la forma $\ln R = at + b$ en forma exponencial.
 (b) Utilice un programa de graficación para trazar los datos y graficar el modelo exponencial.
 (c) Use la integral definida para aproximar el número de litros de sustancia química liberados durante las 4 horas.

DESARROLLO DE CONCEPTOS

153. Propiedades de la función exponencial natural En sus propias palabras, explique las propiedades de la función exponencial natural.
 154. Una función y su derivada ¿Hay una función f tal que $f(x) = f'(x)$? Si es así, identifíquela.
 155. Seleccionar de una función Sin integrar, establezca la fórmula de integración que puede utilizar para integrar cada uno de los siguientes.

(a) $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ (b) $\int xe^{x^2} dx$

156. Analizar una gráfica Considere la función

$$f(x) = \frac{2}{1 + e^{1/x}}.$$

- (a) Utilice un programa de graficación para trazar f .
 (b) Escriba un breve párrafo explicando por qué la gráfica tiene una asíntota horizontal en $y = 1$ y por qué la función tiene una discontinuidad no extraíble en $x = 0$.

157. Derivar una desigualdad Dada $e^x \geq 1$, para $x \geq 0$ se tiene que

$$\int_0^x e^t dt \geq \int_0^x 1 dt.$$

Realice esta integración para derivar la desigualdad

$$e^x \geq 1 + x \\ \text{para } x \geq 0.$$

158. Resolver una ecuación Encuentre, con tres decimales, el valor de x tal que $e^{-x} = x$. (Use el método de Newton o la característica *zero* o *root* de un programa de graficación.)

Encontrar una integral indefinida En los ejercicios 159-166, encuentre la integral indefinida.

159. $\int 3^x dx$
 160. $\int (x^2 + 2^{-x}) dx$
 161. $\int x(5^{-x^2}) dx$
 162. $\int \frac{3^{2x}}{1 + 3^{2x}} dx$
 163. $\int 8^{-x} dx$
 164. $\int (x^4 + 5^x) dx$
 165. $\int (x + 4)6^{(x+4)^2} dx$
 166. $\int 2^{\sin x} \cos x dx$

Evaluar una integral definida En los ejercicios 167-170, evalúe la integral definida.

167. $\int_{-1}^2 2^x dx$
 168. $\int_0^1 (5^x - 3^x) dx$
 169. $\int_{-4}^4 3^{x/4} dx$
 170. $\int_1^3 (7^x - 4^x) dx$

Área En los ejercicios 171 y 172, encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones.

171. $y = 3^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$
 172. $y = 3^{\cos x} \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$

2.5 Integrales trigonométricas

- Resolver integrales trigonométricas que implican potencias de senos y cosenos.
- Resolver integrales trigonométricas que implican potencias de la secante y tangente.
- Resolver integrales trigonométricas que implican productos seno-coseno con diferentes ángulos.

Integrales que implican potencias de seno y coseno

En esta sección estudiará las técnicas para evaluar integrales de la forma

$$\int \sen^m x \cos^n x \, dx \quad \text{y} \quad \int \sec^m x \tan^n x \, dx$$

donde m o n es un número entero positivo. Para encontrar antiderivadas o primitivas de estas formas, trate de separarlas en combinaciones de las integrales trigonométricas a la que se puede aplicar la regla de la potencia.

Por ejemplo, puede evaluar

$$\int \sen^5 x \cos x \, dx$$

con la regla de la potencia al hacer que $u = \sen x$. Entonces, $du = \cos x \, dx$ y obtiene

$$\int \sen^5 x \cos x \, dx = \int u^5 \, du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{\sen^6 x}{6} + C.$$

Para separar $\int \sen^m x \cos^n x \, dx$ en formas a las que se puede aplicar la regla de la potencia, utilice las siguientes identidades.

$$\sen^2 x + \cos^2 x = 1$$

Identidad pitagórica

$$\sen^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Identidad de medio ángulo para $\sen^2 x$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Identidad de medio ángulo de $\cos^2 x$

DIRECTRICES PARA LA EVALUACIÓN DE INTEGRALES QUE IMPLICAN POTENCIAS DE SENO Y COSENO

1. Cuando la potencia del seno es impar y positiva, separe un factor de seno y convierta los factores restantes a cosenos. Después, desarrolle e integre.

$$\int \overbrace{\sen^{2k+1} x}^{\text{Impar}} \cos^n x \, dx = \int \overbrace{(\sen^2 x)^k}^{\text{Convertir a cosenos}} \overbrace{\sen x}^{\text{Separar para } du} \cos^n x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \, dx$$

2. Cuando la potencia del coseno es impar y positiva, separe un factor coseno y convierta los restantes factores a senos. Luego desarrolle e integre.

$$\int \sen^m x \overbrace{\cos^{2k+1} x}^{\text{Impar}} \, dx = \int \overbrace{\sen^m x (\cos^2 x)^k}^{\text{Convertir a cosenos}} \overbrace{\cos x}^{\text{Separar para } du} \, dx = \int \sen^m x (1 - \sen^2 x)^k \cos x \, dx$$

3. Cuando las potencias tanto del seno como del coseno son pares y no negativas, use repetidamente las identidades

$$\sen^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

para convertir el integrando a potencias impares del coseno. Después, proceda como en la segunda directriz.

EJEMPLO 1 Potencia del seno es impar y positiva

Encuentre $\int \sen^3 x \cos^4 x \, dx$.

Solución Debido a que espera utilizar la regla de la potencia con $u = \cos x$, *separe un factor del seno para formar du y convierta los factores del seno restantes en cosenos.*

$$\begin{aligned} \int \sen^3 x \cos^4 x \, dx &= \int \sen^2 x \cos^3 x (\sen x) \, dx && \text{Reescriba.} \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \cos^3 x \sen x \, dx && \text{Identidad trigonométrica} \\ &= \int (\cos^4 x - \cos^6 x) \sen x \, dx && \text{Multiplique.} \\ &= \int \cos^4 x \sen x \, dx - \int \cos^6 x \sen x \, dx && \text{Reescriba.} \\ &= -\int \cos^4 x (-\sen x) \, dx + \int \cos^6 x (-\sen x) \, dx \\ &= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C && \text{Integre.} \end{aligned}$$

▷ **TECNOLOGÍA** Un sistema de álgebra computacional utilizado para calcular la integral en el ejemplo 1, produjo el siguiente resultado.

$$\int \sen^3 x \cos^4 x \, dx = -\cos^5 x \left(\frac{1}{7} \sen^2 x + \frac{2}{35} \right) + C$$

• ¿Esto es equivalente al resultado obtenido en el ejemplo 1?

En el ejemplo 1, *ambas* potencias de m y n se convirtieron en enteros positivos. Esta estrategia funciona siempre y cuando m o n sea impar y positivo. Para el caso del siguiente ejemplo, la potencia del coseno es 3, pero la potencia del seno es $-\frac{1}{2}$.

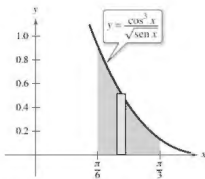
EJEMPLO 2 Potencia del coseno es impar y positiva

• • • ▷ Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Evalúe $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sen x}} \, dx$.

Solución Debido a que espera utilizar la regla de la potencia con $u = \sen x$, *separe un factor de coseno para formar du y convierta los factores coseno restantes en senos.*

$$\begin{aligned} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sen x}} \, dx &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^2 x \cos x}{\sqrt{\sen x}} \, dx \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{(1 - \sen^2 x)(\cos x)}{\sqrt{\sen x}} \, dx \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} [(\sen x)^{-1/2} - (\sen x)^{3/2}] \cos x \, dx \\ &= \left[\frac{(\sen x)^{1/2}}{1/2} - \frac{(\sen x)^{5/2}}{5/2} \right]_{\pi/6}^{\pi/3} \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{1/2} - \frac{2}{5} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{5/2} - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{32}}{80} \\ &\approx 0.239 \end{aligned}$$



El área de la región es de aproximadamente 0.239.

Figura 2.11

La figura 2.11 muestra la región cuya área está representada por esta integral.

EJEMPLO 3

Potencia del coseno es par y no negativa

Encuentre $\int \cos^4 x \, dx$.

Solución Como m y n son pares y no negativos ($m = 0$) puede reemplazar $\cos^4 x$ por

$$\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2.$$

Así, puede integrar como se muestra.

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx && \text{Identidad de medio ángulo} \\ &= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4}\right) dx && \text{Desarrolle.} \\ &= \int \left[\frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right)\right] dx && \text{Identidad de medio ángulo} \\ &= \frac{3}{8} \int dx + \frac{1}{4} \int 2 \cos 2x \, dx + \frac{1}{32} \int 4 \cos 4x \, dx && \text{Reescriba.} \\ &= \frac{3x}{8} + \frac{\sen 2x}{4} + \frac{\sen 4x}{32} + C && \text{Integre.} \end{aligned}$$

Use un programa de derivación simbólica para verificar esto. ¿Se puede simplificar la derivada para obtener el integrando original?

En el ejemplo 3, cuando se evalúa la integral definida entre 0 y $\pi/2$ se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^4 x \, dx &= \left[\frac{3x}{8} + \frac{\sen 2x}{4} + \frac{\sen 4x}{32}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \left(\frac{3\pi}{16} + 0 + 0\right) - (0 + 0 + 0) \\ &= \frac{3\pi}{16}. \end{aligned}$$

Observe que el único término que contribuye a la solución es

$$\frac{3x}{8}.$$

Esta observación se generaliza en las siguientes fórmulas desarrolladas por John Wallis (1616-1703).

Fórmulas de Wallis

1. Si n es impar ($n \geq 3$), a continuación

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right) \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right).$$

2. Si n es par ($n \geq 2$), a continuación

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\right) \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Estas fórmulas también son válidas cuando $\cos^n x$ se sustituye por $\sen^n x$. (En el ejercicio 88 se le pide que demuestre ambas fórmulas.)



JOHN WALLIS (1616-1703)

Wallis hizo gran parte de su trabajo en el cálculo antes de Newton y Leibniz, el cual influyó en el pensamiento de estos dos hombres. A Wallis también se le atribuye la introducción del símbolo actual para el infinito (∞).
Consulte *LarsonCalculus.com* para leer más de esta biografía.

Integrales que implican potencias de la secante y tangente

Las siguientes directrices pueden ayudarle a evaluar integrales de la forma

$$\int \sec^m x \tan^n x \, dx.$$

DIRECTRICES PARA LA EVALUACIÓN DE INTEGRALES QUE IMPLICAN POTENCIAS DE LA SECANTE Y LA TANGENTE

1. Cuando la potencia de la secante es par y positiva, separe un factor de secante al cuadrado y convierta los factores restantes en tangentes. Después, desarrolle e integre.

$$\int \overbrace{\sec^{2k}}^{\text{Par}} \tan^n x \, dx = \int \overbrace{(\sec^2 x)^{k-1}}^{\text{Convertir a tangentes}} \overbrace{\tan^n x \sec^2 x}^{\text{Separar para } du} \, dx = \int (1 + \tan^2 x)^{k-1} \tan^n x \sec^2 x \, dx$$

2. Cuando la potencia de la tangente es impar y positiva, separe un factor secante-tangente y convierta los factores restantes a secantes. A continuación, desarrolle e integre.

$$\int \sec^m x \overbrace{\tan^{2k+1}}^{\text{Impar}} x \, dx = \int \overbrace{\sec^{m-1} x (\tan^2 x)^k}^{\text{Convertir a secantes}} \overbrace{\sec x \tan x}^{\text{Separar para } du} \, dx = \int \sec^{m-1} x (\sec^2 x - 1)^k \sec x \tan x \, dx$$

3. Cuando no hay factores secantes y la potencia de la tangente es uniforme y positiva, convierta un factor de tangente-cuadrada a un factor de secante-cuadrada, a continuación, desarrolle y repita si es necesario.

$$\int \tan^n x \, dx = \int \overbrace{\tan^{n-2} x (\tan^2 x)}^{\text{Convertir a secantes}} \, dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) \, dx$$

4. Cuando la integral es de la forma

$$\int \sec^m x \, dx$$

donde m es impar y positiva, utilice la integración por partes, como se ilustra en el ejemplo 5 en la sección 2.3.

5. Cuando no se aplique ninguna de las cuatro primeras directrices, intente convertir a senos y cosenos.

EJEMPLO 4 Potencia de la tangente es impar y positiva

Encuentre $\int \frac{\tan^3 x}{\sqrt{\sec x}} \, dx$.

Solución Debido a que espera utilizar la regla de la potencia con $u = \sec x$, separe un factor de $(\sec x \tan x)$ para formar du y convierta los factores restantes de las tangentes a secantes.

$$\begin{aligned} \int \frac{\tan^3 x}{\sqrt{\sec x}} \, dx &= \int (\sec x)^{-1/2} \tan^3 x \, dx \\ &= \int (\sec x)^{-3/2} (\tan^2 x) (\sec x \tan x) \, dx \\ &= \int (\sec x)^{-3/2} (\sec^2 x - 1) (\sec x \tan x) \, dx \\ &= \int [(\sec x)^{1/2} - (\sec x)^{-3/2}] (\sec x \tan x) \, dx \\ &= \frac{2}{3} (\sec x)^{3/2} + 2(\sec x)^{-1/2} + C \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 La potencia de la secante es par y positiva

Encuentre $\int \sec^4 3x \tan^3 3x \, dx$.

Solución Sea $u = \tan 3x$, entonces $du = 3 \sec^2 x \, 3x \, dx$ y puede escribir

$$\begin{aligned} \int \sec^4 3x \tan^3 3x \, dx &= \int \sec^2 3x \tan^3 3x (\sec^2 3x) \, dx \\ &= \int (1 + \tan^2 3x) \tan^3 3x (\sec^2 3x) \, dx \\ &= \frac{1}{3} \int (\tan^3 3x + \tan^5 3x) (3 \sec^2 3x) \, dx \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\tan^4 3x}{4} + \frac{\tan^6 3x}{6} \right) + C \\ &= \frac{\tan^4 3x}{12} + \frac{\tan^6 3x}{18} + C. \end{aligned}$$

En el ejemplo 5, la potencia de la tangente es impar y positiva. Así, también se puede encontrar la integral utilizando el procedimiento descrito en la segunda directriz en la página anterior. En los ejercicios 69 y 70, se le pedirá demostrar que los resultados obtenidos por estos dos procedimientos difieren solo por una constante.

EJEMPLO 6 La potencia de la tangente es par

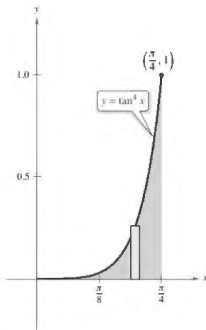
Evalúe $\int_0^{\pi/4} \tan^4 x \, dx$.

Solución Puesto que no existen factores secantes, puede comenzar mediante la conversión de un factor tangente cuadrada a un factor secante cuadrada.

$$\begin{aligned} \int \tan^4 x \, dx &= \int \tan^2 x (\tan^2 x) \, dx \\ &= \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx \\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C \end{aligned}$$

A continuación, calcule la integral definida.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \tan^4 x \, dx &= \left[\frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} \\ &\approx 0.119 \end{aligned}$$



El área de la región es de aproximadamente 0.119.

Figura 2.12

En la figura 2.12 se muestra el área representada por la integral definida. Trate de usar la regla de Simpson para aproximar esta integral. Con $n = 18$, se debe obtener una aproximación que está dentro de 0.00001 del valor real.

Para las integrales que implican potencias de cotangentes y cosecantes, se puede seguir una estrategia similar a la utilizada para potencias de tangentes y secantes. Además, al integrar las funciones trigonométricas, recuerde que a veces ayuda convertir todo el integrando a potencias de senos y cosenos.

EJEMPLO 7 Convertir a senos y cosenos

Encuentre $\int \frac{\sec x}{\tan^2 x} dx$.

Solución Debido a que no se aplican las primeras cuatro directrices antes mencionadas intente convertir el integrando a senos y cosenos. En este caso, puede integrar las potencias resultantes del seno y el coseno como se muestra.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec x}{\tan^2 x} dx &= \int \left(\frac{1}{\cos x} \right) \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 dx \\ &= \int (\sin x)^{-2} (\cos x) dx \\ &= -(\sin x)^{-1} + C \\ &= -\csc x + C\end{aligned}$$

Integrales que implican productos seno-coseno con diferentes ángulos

Las integrales que implican los productos de senos y cosenos de dos ángulos *diferentes* se producen en muchas aplicaciones. En estos casos, puede utilizar las siguientes identidades de producto a suma.

$$\begin{aligned}\sin mx \sin nx &= \frac{1}{2} (\cos [(m-n)x] - \cos [(m+n)x]) \\ \sin mx \cos nx &= \frac{1}{2} (\sin [(m-n)x] + \sin [(m+n)x]) \\ \cos mx \cos nx &= \frac{1}{2} (\cos [(m-n)x] + \cos [(m+n)x])\end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Usar identidades de producto a suma

Encuentre $\int \sin 5x \cos 4x dx$.

Solución Considerando la segunda identidad producto-suma anterior, puede escribir

$$\begin{aligned}\int \sin 5x \cos 4x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin x + \sin 9x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(-\cos x - \frac{\cos 9x}{9} \right) + C \\ &= -\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + C.\end{aligned}$$

PARA INFORMACIÓN ADICIONAL

Para aprender más acerca de las integrales que implican productos seno-coseno con diferentes ángulos, consulte el artículo "Integrals of Products of Sine and Cosine with Different Arguments", por Sherrie J. Nicol, en *The College Mathematics Journal*. Para ver este artículo, visite Math-Articles.com.

2.5 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Encontrar una integral indefinida que implica seno y coseno. En los ejercicios 1-12, calcule la integral indefinida.

1. $\int \cos^5 x \sin x \, dx$

2. $\int \cos^3 x \sin^4 x \, dx$

3. $\int \sin^7 2x \cos 2x \, dx$

4. $\int \sin^3 3x \, dx$

5. $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

6. $\int \cos^4 \frac{x}{3} \, dx$

7. $\int \sin^3 2\theta \sqrt{\cos 2\theta} \, d\theta$

8. $\int \frac{\cos^5 t}{\sqrt{\sin t}} \, dt$

9. $\int \cos^2 3x \, dx$

10. $\int \sin^4 6\theta \, d\theta$

11. $\int x \sin^2 x \, dx$

12. $\int x^2 \sin^2 x \, dx$

Usar las fórmulas de Wallis. En los ejercicios 13-18, utilice las fórmulas de Wallis para evaluar la integral.

13. $\int_0^{\pi/2} \cos^7 x \, dx$

14. $\int_0^{\pi/2} \cos^9 x \, dx$

15. $\int_0^{\pi/2} \cos^{10} x \, dx$

16. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx$

17. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \, dx$

18. $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \, dx$

Encontrar una integral indefinida que implica secante y tangente. En los ejercicios 19-32, calcule la integral indefinida.

19. $\int \sec 4x \, dx$

20. $\int \sec^4 2x \, dx$

21. $\int \sec^3 \pi x \, dx$

22. $\int \tan^3 3x \, dx$

23. $\int \tan^5 \frac{x}{2} \, dx$

24. $\int \tan^3 \frac{\pi x}{2} \sec^2 \frac{\pi x}{2} \, dx$

25. $\int \tan^3 2t \sec^3 2t \, dt$

26. $\int \tan^5 2x \sec^4 2x \, dx$

27. $\int \sec^6 4x \tan 4x \, dx$

28. $\int \sec^2 \frac{x}{2} \tan \frac{x}{2} \, dx$

29. $\int \sec^2 x \tan^3 x \, dx$

30. $\int \tan^3 3x \, dx$

31. $\int \frac{\tan^2 x}{\sec x} \, dx$

32. $\int \frac{\tan^2 x}{\sec^2 x} \, dx$

Ecuaciones diferenciales. En los ejercicios 33-36, resuelva la ecuación diferencial.

33. $\frac{dr}{d\theta} = \sin^4 \pi\theta$

34. $\frac{ds}{d\alpha} = \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

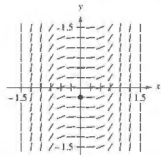
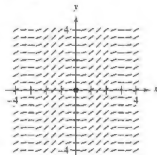
35. $y' = \tan^3 3x \sec 3x$

36. $y' = \sqrt{\tan x} \sec^4 x$

Campo direccional En los ejercicios 37 y 38 se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo direccional. (a) Trace dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo direccional, una de las cuales pasa a través del punto dado. (b) Utilice la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y use una utilidad gráfica para representar gráficamente la solución. Compare el resultado con los dibujos del inciso (a). Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite MathGraphs.com.

37. $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x, (0, 0)$

38. $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x \tan^2 x, (0, \frac{1}{4})$



Campo direccional En los ejercicios 39 y 40, utilice un sistema de álgebra computacional para graficar el campo direccional de la ecuación diferencial, y la gráfica de la solución a través de la condición inicial especificada.

39. $\frac{dy}{dx} = \frac{3 \sin x}{y}, y(0) = 2$

40. $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{y} \tan^3 x, y(0) = 3$

Usar identidades producto-suma. En los ejercicios 41-46, encuentre la integral indefinida.

41. $\int \cos 2x \cos 6x \, dx$

42. $\int \cos 5\theta \cos 3\theta \, d\theta$

43. $\int \sin 2x \cos 4x \, dx$

44. $\int \sin(-7x) \cos 6x \, dx$

45. $\int \sin \theta \sin 3\theta \, d\theta$

46. $\int \sin 5x \sin 4x \, dx$

Encontrar una integral indefinida. En los ejercicios 47-56, calcule la integral indefinida. Utilice un sistema de álgebra computacional para confirmar su resultado.

47. $\int \cot^3 2x \, dx$

48. $\int \tan^5 \frac{x}{4} \sec^4 \frac{x}{4} \, dx$

49. $\int \csc^4 3x \, dx$

50. $\int \cot^3 \frac{x}{2} \csc^4 \frac{x}{2} \, dx$

51. $\int \frac{\cot^3 t}{\csc t} \, dt$

52. $\int \frac{\cot^3 t}{\csc t} \, dt$

53. $\int \frac{1}{\sec x \tan x} \, dx$

54. $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x} \, dx$

55. $\int (\tan^4 t - \sec^4 t) \, dt$

56. $\int \frac{1 - \sec t}{\cos t - 1} \, dt$

Evaluar una integral definida En los ejercicios 57-64, calcule la integral definida.

57. $\int_{-\pi}^{\pi} \sec^2 x \, dx$

58. $\int_0^{\pi/3} \tan^2 x \, dx$

59. $\int_0^{\pi/4} 6 \tan^3 x \, dx$

60. $\int_0^{\pi/3} \sec^{3/2} x \tan x \, dx$

61. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1 + \sin t} \, dt$

62. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin 6x \cos 4x \, dx$

63. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3 \cos^3 x \, dx$

64. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sec^2 x + 1) \, dx$

Comparar métodos En los ejercicios 69 y 70, (a) resuelva la integral indefinida de dos maneras diferentes. (b) Utilice un programa de graficación para trazar la antiderivada (sin la constante de integración) obtenida por cada método para demostrar que los resultados solo difieren por una constante, (c) demuestre analíticamente que los resultados difieren solo por una constante.

69. $\int \sec^3 3x \tan^3 3x \, dx$

70. $\int \sec^2 x \tan x \, dx$

Área En los ejercicios 71-74, encuentre el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

71. $y = \sin x$, $y = \sec^3 x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$

72. $y = \sec^2 \pi x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

73. $y = \cos^2 x$, $y = \sec^2 x$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$

74. $y = \cos^2 x$, $y = \sin x \cos x$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4}$

Volumen En los ejercicios 75 y 76, determine el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de la ecuación sobre el eje x .

75. $y = \tan x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$

76. $y = \cos \frac{x}{2}$, $y = \sin \frac{x}{2}$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$

Volumen y centroide En los ejercicios 77 y 78, para la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, encuentre (a) el volumen del sólido formado por girar la región alrededor del eje x y (b) el centroide de la región.

77. $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$

78. $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$

Verificar una fórmula de reducción En los ejercicios 79-82, utilice la integración por partes para verificar la fórmula de reducción.

79. $\int \sec^n x \, dx = -\frac{\sec^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sec^{n-2} x \, dx$

80. $\int \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$

81. $\int \cos^m x \sin^n x \, dx = -\frac{\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \cos^m x \sin^{n-2} x \, dx$

82. $\int \sec^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx$

Usar fórmulas En los ejercicios 83-86, utilice los resultados de los ejercicios 79-82 para encontrar la integral

83. $\int \sec^3 x \, dx$

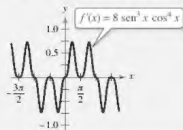
84. $\int \cos^4 x \, dx$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

65. Describir cómo encontrar un integral En sus propias palabras, describa cómo podría integrarse para cada condición $\int \sec^m x \cos^n x \, dx$.
- (a) m es positiva e impar. (b) n es positiva e impar.
 (c) m y n son positivos y pares.
66. Describir cómo encontrar un integral En sus propias palabras, describa cómo se integrará $\int \sec^m x \tan^n x \, dx$ para cada condición.
- (a) m es positiva y par. (b) n es positiva e impar.
 (c) n es positivo y par, y no hay factores de secantes.
 (d) m es positivo e impar, y no hay factores de tangentes.
67. Comparar métodos Evalúe $\int \sin x \cos x \, dx$ utilizando el método indicado. Explique cómo difieren sus respuestas para cada método.
- (a) Sustitución con $u = \sin x$
 (b) Sustitución con $u = \cos x$
 (c) Integración por partes
 (d) Uso de la identidad $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$



¿CÓMO LO VE? Use la gráfica de f' que se muestra en la figura para responder lo siguiente



- (a) Usando el intervalo que se muestra en la figura, aproxime el (los) valor(es) de x si f es máximo. Explique.
- (b) Usando el intervalo que se muestra en la figura, aproxime el (los) valor(es) de x si f es mínimo. Explique.

85. $\int \sec^4(2\pi x/5) dx$

86. $\int \sec^4 x \cos^2 x dx$

87. **Modelar datos** La tabla muestra las temperaturas normales máxima (alta) y mínima (baja) (en grados Fahrenheit) en Erie, Pennsylvania, para cada mes del año. (Fuente: NOAA)

Mes	Enero	Feb	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Máx	33.5	35.4	44.7	55.6	67.4	76.2
Mín	20.3	20.9	28.2	37.9	48.7	58.5

Mes	Jul	Ago	Sept	Oct	Nov	Dic
Máx	80.4	79.0	72.0	61.0	49.3	38.6
Mín	63.7	62.7	55.9	45.5	36.4	26.8

Las temperaturas máximas y mínimas se pueden modelar por

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \frac{\pi t}{6} + b_1 \sin \frac{\pi t}{6}$$

donde $t = 0$ corresponde al 1 de enero y a_0, a_1 y b_1 son las siguientes

$$a_0 = \frac{1}{12} \int_0^{12} f(t) dt \quad a_1 = \frac{1}{6} \int_0^{12} f(t) \cos \frac{\pi t}{6} dt$$

$$b_1 = \frac{1}{6} \int_0^{12} f(t) \sin \frac{\pi t}{6} dt$$

- (a) Aproxime el modelo $H(t)$ para las temperaturas máximas. (Sugerencia: Use la regla de Simpson para aproximar las integrales y utilice los datos de enero dos veces.)
 (b) Repita el inciso (a) para un modelo $L(t)$ para los datos de temperatura mínima.
 (c) Use un programa de graficación para trazar cada modelo. ¿Durante qué parte del año la diferencia entre las temperaturas máximas y mínimas es mayor?

88. **Fórmulas de Wallis** Utilice el resultado del ejercicio 80 para demostrar las siguientes versiones de las fórmulas de Wallis.

- (a) Si n es impar ($n \geq 3$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right) \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right)$$

- (b) Si n es par ($n \geq 2$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\right) \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

89. **Funciones ortogonales** El producto interno de dos funciones f y g sobre $[a, b]$ está dado por

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Se dice que dos funciones distintas f y g son ortogonales si $(f, g) = 0$. Demuestre que el siguiente conjunto de funciones es ortogonal sobre $[-\pi, \pi]$

$$\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots\}$$

Vicor Stewart/Shutterstock.com

90. **Serie de Fourier** La siguiente suma es una serie de Fourier finita.

$$f(x) = \sum_{n=1}^N a_n \sin nx$$

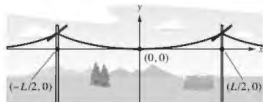
$$= a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots + a_N \sin Nx$$

- (a) Use el ejercicio 89 para demostrar que el coeficiente n -ésimo está dado por $a_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$.
 (b) Sea $f(x) = x$. Encuentre a_1, a_2 y a_3 .

PROYECTO DE TRABAJO

Líneas eléctricas

Las líneas eléctricas se construyen encadenando un cable entre los soportes y ajustando la tensión en cada tramo. El cable cuelga entre los soportes en la forma de una catenaria, como se muestra en la figura.



Sea T la tensión (en libras) en un tramo de alambre, sea u la densidad (en libras por pie) del alambre, sea $g = 32.2$ la aceleración de la gravedad (en pies por segundo por segundo), y sea L la distancia (en pies) entre los soportes. Entonces la ecuación de la catenaria es

$$y = \frac{T}{ug} \left(\cosh \frac{ugx}{T} - 1 \right), \text{ donde } x \text{ y } y \text{ se miden en pies.}$$

- (a) Encuentre la longitud del cable entre dos tramos.
 (b) Para medir la tensión en un tramo, los trabajadores de la línea de energía utilizan el método de la onda de retorno. El cable es golpeado en un soporte, creando una onda sobre la línea, y se mide el tiempo t (en segundos) que tarda la onda en hacer un viaje de ida y vuelta. La velocidad v (en pies por segundo) está dada por $v = \sqrt{T/u}$. ¿Cuánto tiempo tarda la onda en hacer un viaje de ida y vuelta entre los soportes?

- (c) El pandeo s (en pulgadas) se puede obtener mediante la evaluación de y cuando $x = L/2$ en la ecuación de la catenaria (y multiplicando por 12). Sin embargo, en la práctica, los trabajadores de la línea de energía utilizan la "ecuación del instalador de líneas" dada por $s = 12.075t^2$. Utilice el hecho de que

$$\cosh \frac{ugL}{2T} + 1 = 2$$

para deducir esta ecuación.



■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para obtener más información sobre las matemáticas de las líneas de energía, consulte el artículo "Constructing Power Lines", por Thomas O'Neil, en *The UMAP Journal*.

2.6 Integración por sustitución trigonométrica

- Utilizar sustitución trigonométrica para resolver una integral.
- Utilizar integrales para modelar y resolver aplicaciones de la vida real.

Sustitución trigonométrica

Ahora que puede evaluar integrales que implican potencias de funciones trigonométricas, puede utilizar la sustitución trigonométrica para evaluar integrales que implican a los radicales

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \sqrt{u^2 + a^2} \text{ y } \sqrt{u^2 - a^2}.$$

El objetivo con sustitución trigonométrica es eliminar el radical en el integrando. Esto se hace mediante el uso de las identidades pitagóricas.

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta &= 1 - \sin^2 \theta \\ \sec^2 \theta &= 1 + \tan^2 \theta \\ \tan^2 \theta &= \sec^2 \theta - 1\end{aligned}$$

Por ejemplo, para $a > 0$, sea $u = a \sin \theta$, donde $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - u^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} \\ &= a \cos \theta.\end{aligned}$$

Observe que $\cos \theta \geq 0$, porque $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Exploración

Integración de una función radical Hasta este punto en el texto, no se ha evaluado la integral

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

De la geometría, debe poder encontrar el valor exacto de esta integral. ¿cuál es? Usando integración numérica, con la regla de Simpson o la regla del trapecio, no se puede estar seguro de la exactitud de la aproximación. ¿Por qué?

Trate de encontrar el valor exacto mediante la sustitución

$$x = \sin \theta$$

y

$$dx = \cos \theta d\theta.$$

¿Su respuesta concuerda con el valor que obtuvo utilizando la geometría?

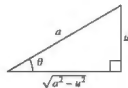
Sustitución trigonométrica ($a > 0$)

1. Para integrales que implican $\sqrt{a^2 - u^2}$, sea

$$u = a \sin \theta.$$

Entonces $\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta$, donde

$$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2.$$

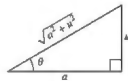


2. Para integrales que implican $\sqrt{a^2 + u^2}$, sea

$$u = a \tan \theta.$$

Entonces $\sqrt{a^2 + u^2} = a \sec \theta$, donde

$$-\pi/2 < \theta < \pi/2.$$



3. Para integrales que implican $\sqrt{u^2 - a^2}$, sea

$$u = a \sec \theta.$$

Entonces

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \begin{cases} a \tan \theta & \text{para } u > a, \text{ donde } 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ -a \tan \theta & \text{para } u < -a, \text{ donde } \pi/2 < \theta \leq \pi. \end{cases}$$



Las restricciones sobre θ aseguran que la función que define la sustitución es uno a uno. De hecho, estos son los mismos intervalos sobre los que se definen el coseno, arcotangente y arcosecante.

EJEMPLO 1

Sustitución trigonométrica $u = a \operatorname{sen} \theta$

Encuentre $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9-x^2}}$.

Solución En primer lugar, advierta que no se aplica ninguna de las reglas básicas de integración. Para utilizar la sustitución trigonométrica, debe observar que

$$\sqrt{9-x^2}$$

es de la forma $\sqrt{a^2 - u^2}$. Así, puede utilizar la sustitución

$$x = a \operatorname{sen} \theta = 3 \operatorname{sen} \theta.$$

Usando la derivación y el triángulo que se muestra en la figura 2.13, obtiene

$$dx = 3 \cos \theta d\theta, \quad \sqrt{9-x^2} = 3 \cos \theta \quad \text{y} \quad x^2 = 9 \operatorname{sen}^2 \theta.$$

Así, la sustitución trigonométrica da como resultado

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9-x^2}} = \int \frac{3 \cos \theta d\theta}{(9 \operatorname{sen}^2 \theta)(3 \cos \theta)} \quad \text{Sustituya.}$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \quad \text{Simplifique.}$$

$$= \frac{1}{9} \int \csc^2 \theta d\theta \quad \text{Identidad trigonométrica}$$

$$= -\frac{1}{9} \cot \theta + C \quad \text{Aplique la regla de la cosecante.}$$

$$= -\frac{1}{9} \left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} \right) + C \quad \text{Sustituya para } \cot \theta.$$

$$= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C.$$

Observe que el triángulo en la figura 2.13 se puede utilizar para convertir las θ 's de nuevo en x 's, como se muestra.

$$\begin{aligned} \cot \theta &= \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} \\ &= \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} \end{aligned}$$

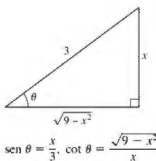


Figura 2.13

▷ **TECNOLOGÍA** Utilice un sistema de álgebra computacional para encontrar cada una de las integrales indefinidas.

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} & \int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} \\ & \int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} & \int \frac{dx}{x^3\sqrt{9-x^2}} \end{aligned}$$

Luego, utilice la sustitución trigonométrica para duplicar los resultados obtenidos con el sistema de álgebra computacional.

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}, \quad \int \frac{du}{a^2 - u^2}, \quad \text{y} \quad \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}}$$

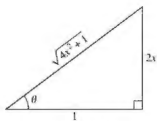
También se pueden evaluar estas integrales utilizando sustitución trigonométrica. Esto se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Sustitución trigonométrica: $u = a \tan \theta$ Encuentre $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 1}}$.**Solución** Sea $u = 2x$, $a = 1$ y $2x = \tan \theta$, como se muestra en la figura 2.14. Entonces,

$$dx = \frac{1}{2} \sec^2 \theta d\theta \quad \text{y} \quad \sqrt{4x^2 + 1} = \sec \theta.$$

Con la sustitución trigonométrica obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec \theta} && \text{Sustituya.} \\ &= \frac{1}{2} \int \sec \theta d\theta && \text{Simplifique.} \\ &= \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C && \text{Aplice la regla de la secante.} \\ &= \frac{1}{2} \ln |\sqrt{4x^2 + 1} + 2x| + C. && \text{Sustituya hacia atrás.} \end{aligned}$$



$\tan \theta = 2x$, $\sec \theta = \sqrt{4x^2 + 1}$
Figura 2.14

Intente comprobar este resultado con un sistema de álgebra computacional. ¿El resultado está dado en esta forma o en la forma de una función hiperbólica inversa? ■

Puede extender el uso de la sustitución trigonométrica para cubrir las integrales que implican expresiones como $(a^2 - u^2)^{n/2}$ escribiendo la expresión como

$$(a^2 - u^2)^{n/2} = (\sqrt{a^2 - u^2})^n.$$

EJEMPLO 3 Sustitución trigonométrica: potencias racionales

•••► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

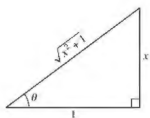
Encuentre $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{3/2}}$.**Solución** Comience escribiendo $(x^2 + 1)^{3/2}$ como

$$(\sqrt{x^2 + 1})^3.$$

Luego, sea $a = 1$ y $u = x = \tan \theta$, como se muestra en la figura 2.15. Utilizando

$$dx = \sec^2 \theta d\theta \quad \text{y} \quad \sqrt{x^2 + 1} = \sec \theta$$

puede aplicar la sustitución trigonométrica, como se muestra.



$\tan \theta = x$, $\sec \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
Figura 2.15

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{3/2}} &= \int \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + 1})^3} && \text{Reescriba el denominador.} \\ &= \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec^3 \theta} && \text{Sustituya.} \\ &= \int \frac{d\theta}{\sec \theta} && \text{Simplifique.} \\ &= \int \cos \theta d\theta && \text{Identidad trigonométrica} \\ &= \sin \theta + C && \text{Aplice la regla del coseno.} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + C && \text{Sustituya hacia atrás.} \end{aligned}$$

Para integrales definidas, a menudo esto es conveniente para determinar los límites de integración para θ que evite convertir de nuevo a x . Es posible que desee revisar este procedimiento en la sección 2.1, ejemplos 8 y 9.

EJEMPLO 4 Convertir los límites de integración

Evalúe $\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\sqrt{x^2-3}}{x} dx$.

Solución Como $\sqrt{x^2-3}$ tiene la forma $\sqrt{u^2-a^2}$, puede considerar

$$u = x, \quad a = \sqrt{3} \quad \text{y} \quad x = \sqrt{3} \sec \theta$$

como se muestra en la figura 2.9. Entonces,

$$dx = \sqrt{3} \sec \theta \tan \theta d\theta \quad \text{y} \quad \sqrt{x^2-3} = \sqrt{3} \tan \theta.$$

Para determinar los límites superior e inferior de integración, utilice la sustitución $x = \sqrt{3} \sec \theta$, como se muestra.

Límite inferior

$$\begin{aligned} \text{Cuando } x = \sqrt{3}, \sec \theta &= 1 \\ \text{y } \theta &= 0. \end{aligned}$$

Límite superior

$$\begin{aligned} \text{Cuando } x = 2, \sec \theta &= \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \text{y } \theta &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Por tanto, tiene

Límites de integración para x	Límites de integración para θ
↓	↓
$\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\sqrt{x^2-3}}{x} dx = \int_0^{\pi/6} \frac{(\sqrt{3} \tan \theta)(\sqrt{3} \sec \theta \tan \theta) d\theta}{\sqrt{3} \sec \theta}$	
$= \int_0^{\pi/6} \sqrt{3} \tan^2 \theta d\theta$	
$= \sqrt{3} \int_0^{\pi/6} (\sec^2 \theta - 1) d\theta$	
$= \sqrt{3} \left[\tan \theta - \theta \right]_0^{\pi/6}$	
$= \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right)$	
$= 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$	
$\approx 0.0931.$	

En el ejemplo 4, intente convertir de nuevo a la variable x y evalúe la antiderivada en los límites originales de la integración. Debe obtener

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\sqrt{x^2-3}}{x} dx &= \sqrt{3} \left[\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3}} - \operatorname{arccsc} \frac{x}{\sqrt{3}} \right]_{\sqrt{3}}^2 \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &\approx 0.0931. \end{aligned}$$

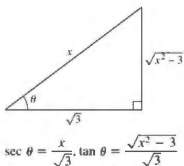


Figura 2.16

Cuando utilice la sustitución trigonométrica para evaluar integrales definidas, debe tener cuidado de comprobar que los valores de θ están en los intervalos analizados al principio de esta sección. Por ejemplo, si en el ejemplo 4 se había pedido evaluar la integral definida

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x} dx$$

entonces, utilizando $u = x$ y $a = \sqrt{3}$ en el intervalo $[-2, -\sqrt{3}]$ implicaría que $u < -a$. Así, al determinar los límites superior e inferior de la integración, se tendría que elegir θ tal que $\pi/2 < \theta \leq \pi$. En este caso, la integral se evalúa como se muestra.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x} dx &= \int_{5\pi/6}^{\pi} \frac{(-\sqrt{3} \tan \theta)(\sqrt{3} \sec \theta \tan \theta) d\theta}{\sqrt{3} \sec \theta} \\ &= \int_{5\pi/6}^{\pi} -\sqrt{3} \tan^2 \theta d\theta \\ &= -\sqrt{3} \int_{5\pi/6}^{\pi} (\sec^2 \theta - 1) d\theta \\ &= -\sqrt{3} \left[\tan \theta - \theta \right]_{5\pi/6}^{\pi} \\ &= -\sqrt{3} \left[(0 - \pi) - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{5\pi}{6} \right) \right] \\ &= -1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \\ &\approx -0.0931 \end{aligned}$$

Se puede utilizar sustitución trigonométrica con completar el cuadrado. Por ejemplo, trate de encontrar la integral

$$\int \sqrt{x^2 - 2x} dx.$$

Para empezar, puede completar el cuadrado y escribir la integral como

$$\int \sqrt{(x-1)^2 - 1^2} dx.$$

Debido a que el integrando es de la forma

$$\sqrt{u^2 - a^2}$$

con $u = x - 1$ y $a = 1$, ahora se puede utilizar sustitución trigonométrica para encontrar la integral.

La sustitución trigonométrica se puede utilizar para evaluar las tres integrales que figuran en el siguiente teorema. Estas integrales se encontrarán varias veces en el resto del texto. Cuando esto suceda, simplemente nos referiremos a este teorema. (En el ejercicio 71, se le pide al lector que demuestre las fórmulas dadas en el teorema.)

TEOREMA 2.8 Fórmulas especiales de integración ($a > 0$)

- $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2} \left(a^2 \arcsen \frac{u}{a} + u \sqrt{a^2 - u^2} \right) + C$
- $\int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{1}{2} \left(u \sqrt{u^2 - a^2} - a^2 \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| \right) + C, \quad u > a$
- $\int \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{1}{2} \left(u \sqrt{u^2 + a^2} + a^2 \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}| \right) + C$

Aplicaciones

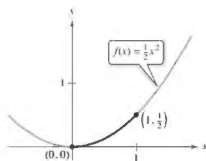
EJEMPLO 5

Encontrar la longitud de arco

Encuentre la longitud de arco de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{5}x^2$ de $x = 0$ a $x = 1$ (vea la figura 2.17).

Solución De la fórmula de longitud de arco tenemos.

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \sec^3 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta| \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)] \\ &\approx 1.148 \end{aligned}$$



Longitud de arco de la curva de $(0, 0)$ a $(1, \frac{1}{5})$.

Figura 2.17

EJEMPLO 6

Comparar dos fuerzas de fluido

Un barril de aceite sellado (con un peso de 48 libras por pie cúbico) está flotando en agua de mar (que pesa 64 libras por pie cúbico), como se muestra en las figuras 2.18 y 2.19. (El barril no está completamente lleno de aceite. Con el barril acostado sobre un lado, 0.2 pies de la parte superior del barril está vacía.) Compare las fuerzas de fluido sobre un extremo del barril desde el interior y desde el exterior.

Solución En la figura 2.19, localice el sistema de coordenadas con el origen en el centro del círculo

$$x^2 + y^2 = 1$$

Para encontrar la fuerza del fluido sobre un extremo del barril desde el interior, integre entre -1 y 0.8 (con un peso de $w = 48$).

$$\begin{aligned} F &= w \int_c^d h(y)L(y) dy && \text{Ecuación general (vea la sección 3.7)} \\ F_{\text{interior}} &= 48 \int_{-1}^{0.8} (0.8 - y)(2)\sqrt{1 - y^2} dy \\ &= 76.8 \int_{-1}^{0.8} \sqrt{1 - y^2} dy - 96 \int_{-1}^{0.8} y\sqrt{1 - y^2} dy \end{aligned}$$

Para encontrar la fuerza del fluido desde el exterior, integre entre -1 y 0.4 (con un peso de $w = 64$).

$$\begin{aligned} F_{\text{exterior}} &= 64 \int_{-1}^{0.4} (0.4 - y)(2)\sqrt{1 - y^2} dy \\ &= 51.2 \int_{-1}^{0.4} \sqrt{1 - y^2} dy - 128 \int_{-1}^{0.4} y\sqrt{1 - y^2} dy \end{aligned}$$

Los detalles de la integración se dejan para que el lector lo complete en el ejercicio 70. Intuitivamente, ¿diría que la fuerza del aceite (el interior) o la fuerza del agua de mar (el exterior) es mayor? Mediante la evaluación de estas dos integrales, puede determinar que

$$F_{\text{interior}} \approx 121.3 \text{ libras} \quad \text{y} \quad F_{\text{exterior}} \approx 93.0 \text{ libras.}$$



El barril no está completamente lleno de aceite, 0.2 pies de la parte superior del barril está vacía.

Figura 2.18

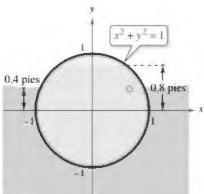


Figura 2.19

2.6 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Sustitución trigonométrica En los ejercicios 1-4, establezca la sustitución trigonométrica que utilizaría para encontrar la integral indefinida. No integre.

1. $\int (9 + x^2)^{-2} dx$

2. $\int \sqrt{4 - x^2} dx$

3. $\int \frac{x^3}{\sqrt{25 - x^2}} dx$

4. $\int x^2(x^2 - 25)^{3/2} dx$

Sustitución trigonométrica En los ejercicios 5-8, calcule la integral indefinida usando la sustitución $x = 4 \sin \theta$.

5. $\int \frac{1}{(16 - x^2)^{3/2}} dx$

6. $\int \frac{4}{x^2 \sqrt{16 - x^2}} dx$

7. $\int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x} dx$

8. $\int \frac{x^3}{\sqrt{16 - x^2}} dx$

Usar sustitución trigonométrica En los ejercicios 9-12, calcule la integral indefinida usando la sustitución $x = 5 \sec \theta$.

9. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 25}} dx$

10. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx$

11. $\int x^3 \sqrt{x^2 - 25} dx$

12. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 25}} dx$

Usar sustitución trigonométrica En los ejercicios 13-16, calcule la integral indefinida mediante la sustitución $x = \tan \theta$.

13. $\int x \sqrt{1 + x^2} dx$

14. $\int \frac{9x^3}{\sqrt{1 + x^2}} dx$

15. $\int \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx$

16. $\int \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} dx$

Usar fórmulas En los ejercicios 17-20, utilice las fórmulas especiales de integración (teorema 2.2) para encontrar la integral indefinida.

17. $\int \sqrt{9 + 16x^2} dx$

18. $\int \sqrt{4 + x^2} dx$

19. $\int \sqrt{25 - 4x^2} dx$

20. $\int \sqrt{5x^2 - 1} dx$

Encontrar una integral indefinida En los ejercicios 21-36, calcule la integral indefinida.

21. $\int \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}} dx$

22. $\int \frac{x^2}{\sqrt{36 - x^2}} dx$

23. $\int \sqrt{16 - 4x^2} dx$

24. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$

25. $\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^4} dx$

26. $\int \frac{\sqrt{25x^2 + 4}}{x^4} dx$

27. $\int \frac{1}{x \sqrt{4x^2 + 9}} dx$

28. $\int \frac{1}{x \sqrt{9x^2 + 1}} dx$

29. $\int \frac{-3x}{(x^2 + 3)^{3/2}} dx$

30. $\int \frac{1}{(x^2 + 5)^{3/2}} dx$

31. $\int e^x \sqrt{1 - e^{2x}} dx$

32. $\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx$

33. $\int \frac{1}{4 + 4x^2 + x^4} dx$

34. $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} dx$

35. $\int \arccos 2x dx, \quad x > \frac{1}{2}$

36. $\int x \arcsen x dx$

Completar el cuadrado En los ejercicios 37-40, complete el cuadrado y encuentre la integral indefinida.

37. $\int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} dx$

38. $\int \frac{x^3}{\sqrt{2x - x^2}} dx$

39. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 6x + 12}} dx$

40. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} dx$

Convertir límites de integración En los ejercicios 41-46, evalúe la integral definida mediante (a) los límites de integración dados y (b) los límites obtenidos por sustitución trigonométrica.

41. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{t^2}{(1 - t^2)^{3/2}} dt$

42. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{(1 - t^2)^{3/2}} dt$

43. $\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$

44. $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{9 - 25x^3} dx$

45. $\int_4^6 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}} dx$

46. $\int_2^8 \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^2} dx$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

47. **Sustitución trigonométrica** Establezca la sustitución que haría si utilizó sustitución trigonométrica para una integral que implica el radical dado, donde $a > 0$. Explique su razonamiento.

(a) $\sqrt{a^2 - u^2}$

(b) $\sqrt{a^2 + u^2}$

(c) $\sqrt{u^2 - a^2}$

48. **Elegir un método** Establezca el método de integración que utilizaría para realizar cada integración. Explique por qué eligió ese método. No integre.

(a) $\int x \sqrt{x^2 + 1} dx$

(b) $\int x^2 \sqrt{x^2 - 1} dx$

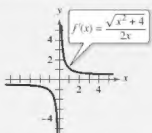
49. **Comparar métodos**

(a) Encuentre la integral $\int \frac{x}{x^2 + 9} dx$ mediante la sustitución de u . Después, determine la integral mediante sustitución trigonométrica. Analice los resultados.

(b) Encuentre la integral $\int \frac{x^2}{x^2 + 9} dx$ algebraicamente utilizando $x^2 = (x^2 + 9) - 9$. Luego, determine la integral mediante sustitución trigonométrica. Analice los resultados.



¿CÓMO LO VE? Utilice la gráfica de f' mostrada en la figura para responder lo siguiente.



- Identifique el (los) intervalo(s) abierto(s) en el (los) que la gráfica de f es creciente o decreciente. Explique.
- Identifique el (los) intervalo(s) abierto(s) en el (los) que la gráfica de f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo. Explique.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 51-54, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

51. Si $x = \sin \theta$, entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int d\theta.$$

52. Si $x = \sec \theta$, entonces

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = \int \sec \theta \tan \theta d\theta.$$

53. Si $x = \tan \theta$, entonces

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \int_0^{4\pi/3} \cos \theta d\theta.$$

54. Si $x = \sin \theta$, entonces

$$\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta.$$

55. **Área** Calcule el área encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mostrada en la figura.

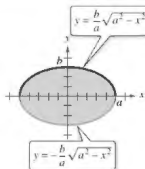


Figura para 55

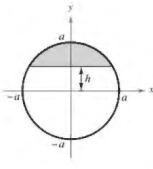


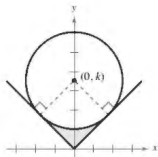
Figura para 56

56. **Área** Calcule el área de la región sombreada del círculo de radio a cuando la cuerda está a h unidades ($0 < h < a$) desde el centro del círculo (vea la figura).

2.6 Integración por sustitución trigonométrica

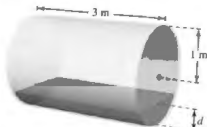
123

57. **Diseño mecánico** La superficie de una pieza mecánica es la región entre las gráficas de $y = |x|$ y $x^2 + (y-k)^2 = 25$ (vea la figura).



- Determine k cuando el círculo es tangente a la gráfica de $y = |x|$.
- Encuentre el área de la superficie de la pieza de la máquina.
- Encuentre el área de la superficie de la pieza de la máquina en función del radio r del círculo.

58. **Volumen** El eje de un tanque de almacenamiento en la forma de un cilindro circular recto es horizontal (vea la figura). El radio y la longitud del tanque son de 1 metro y 3 metros, respectivamente.



- Determine el volumen de fluido en el tanque como una función de su profundidad d .
- Utilice un programa de graficación para trazar la función en el inciso (a).
- Diseñar una varilla para el tanque con marcas de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$.
- El fluido está entrando en el tanque a una velocidad de $\frac{1}{2}$ metros cúbicos por minuto. Determine la rapidez de cambio de la profundidad del fluido como una función de su profundidad d .
- Utilice una herramienta de graficación para trazar la función en el inciso (d). ¿En qué momento la rapidez de cambio de la profundidad es mínima? ¿Concuerda esto con su intuición? Explique.

Volumen de un toro En los ejercicios 59 y 60, encuentre el volumen del toro generado al girar la región acotada por la gráfica de la circunferencia respecto al eje x .

59. $(x-3)^2 + y^2 = 1$

60. $(x-h)^2 + y^2 = r^2, \quad h > r$

Longitud de arco En los ejercicios 61 y 62, encuentre la longitud de arco de la curva en el intervalo dado.

61. $y = \ln x, \quad [1, 5]$

62. $y = \frac{1}{2}x^2, \quad [0, 4]$

63. **Longitud de arco** Demuestre que la longitud de un arco de la curva del seno es igual a la longitud de un arco de la curva del coseno.

64. Conjetura

- (a) Encuentre las fórmulas para las distancias entre $(0, 0)$ y (a, a^2) a lo largo de la recta entre estos puntos y a lo largo de la parábola $y = x^2$.
- (b) Utilice las fórmulas del inciso (a) para encontrar las distancias para $a = 1$ y $a = 10$.
- (c) Haga una conjetura acerca de la diferencia entre las dos distancias a medida que a se incrementa.

Centroide En los ejercicios 65 y 66, encuentre el centroide de la región determinada por las gráficas de las desigualdades.

65. $y \leq 3/\sqrt{x^2 + 9}$, $y \geq 0$, $x \geq -4$, $x \leq 4$
66. $y \leq \frac{1}{4}x^2$, $(x - 4)^2 + y^2 \leq 16$, $y \geq 0$

67. **Superficie** Encuentre el área superficial del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \sqrt{2}$ alrededor del eje x .

68. **Intensidad de campo** La intensidad de campo H de un imán de longitud $2L$ sobre una partícula r unidades desde el centro del imán es

$$H = \frac{2mL}{(r^2 + L^2)^{3/2}}$$

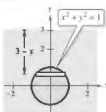
donde $\pm m$ son los polos del imán (vea la gráfica). Encuentre la fuerza promedio del campo a medida que la partícula se mueve de 0 a R unidades del centro mediante la evaluación de la integral

$$\frac{1}{R} \int_0^R \frac{2mL}{(r^2 + L^2)^{3/2}} dr.$$



69. Fuerza del fluido

Encuentre la fuerza del fluido sobre una ventana de observación circular de 1 pie de radio en una pared vertical de un gran tanque lleno de agua en un criadero de peces cuando el centro de la ventana está (a) 3 pies y (b) d pies ($d > 1$) por debajo de la superficie del agua (vea la figura). Utilice sustitución trigonométrica para evaluar la integral. El agua pesa 62.4 libras por pie cúbico.



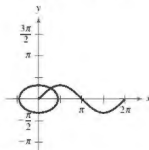
70. **Fuerza del fluido** Evaluar los dos integrales siguientes, que producen las fuerzas de fluido dadas en el ejemplo 6.

$$(a) F_{\text{interior}} = 48 \int_{-1}^{0.8} (0.8 - y)(2)\sqrt{1 - y^2} dy$$

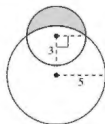
$$(b) F_{\text{exterior}} = 64 \int_{-1}^{0.3} (0.4 - y)(2)\sqrt{1 - y^2} dy$$

71. **Verificar fórmulas** Use sustitución trigonométrica para verificar las fórmulas de integración dadas en el teorema 2.2.

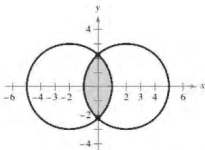
72. **Longitud de arco** Demuestre que la longitud de arco de la gráfica de $y = \sin x$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ es igual a la circunferencia de la elipse $x^2 + 2y^2 = 2$ (vea la figura).



73. **Área de una luna** La región en forma de media luna, acotada por dos círculos, forma una *luna* (vea la figura). Encuentre el área de la luna si el radio del círculo más pequeño es de 3 y el radio del círculo más grande es 5.



74. **Área** Dos círculos de radio 3, con centros en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ se intersecan, como se muestra en la figura. Encuentre el área de la región sombreada.



DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

75. Evalúe

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx.$$

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

2.7 Integración por fracciones parciales

- Entender el concepto de descomposición en fracciones parciales.
- Utilizar la descomposición en fracciones parciales con factores lineales para integrar funciones racionales.
- Utilizar la descomposición en fracciones parciales con factores cuadráticos para integrar funciones racionales.

Fracciones parciales

En esta sección se examina un procedimiento para descomponer una función racional en funciones racionales sencillas a las que se pueden aplicar las fórmulas básicas de integración. Este procedimiento recibe el nombre de método de fracciones parciales. Para ver el beneficio del método de fracciones parciales, considere la integral

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

Para evaluar esta integral sin fracciones parciales, se puede completar el cuadrado y utilizar la sustitución trigonométrica (vea la figura 2.20) para obtener

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int \frac{dx}{(x - 5/2)^2 - (1/2)^2} & a = \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \sec \theta \\ &= \int \frac{(1/2) \sec \theta \tan \theta d\theta}{(1/4) \tan^2 \theta} & dx &= \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta d\theta \\ &= 2 \int \csc \theta d\theta \\ &= 2 \ln |\csc \theta - \cot \theta| + C \\ &= 2 \ln \left| \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 6}} - \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 5x + 6}} \right| + C \\ &= 2 \ln \left| \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}} \right| + C \\ &= 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x - 3}}{\sqrt{x - 2}} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{x - 3}{x - 2} \right| + C \\ &= \ln|x - 3| - \ln|x - 2| + C. \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que había observado que

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x - 2}.$$

Descomposición en fracciones parciales

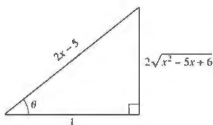
Entonces, se podría calcular la integral como se muestra.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int \left(\frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x - 2} \right) dx \\ &= \ln|x - 3| - \ln|x - 2| + C \end{aligned}$$

Este método es claramente preferible a la sustitución trigonométrica. Sin embargo, su uso depende de la capacidad para factorizar el denominador, $x^2 - 5x + 6$, y encontrar las fracciones parciales

$$\frac{1}{x - 3} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{x - 2}.$$

En esta sección estudiará las técnicas para encontrar descomposiciones en fracciones parciales.



$$\sec \theta = 2x - 5$$

Figura 2.20



JOHN BERNOULLI (1667-1748)

El método de fracciones parciales fue introducido por John Bernoulli, un matemático suizo que fue clave en el desarrollo inicial del cálculo. John Bernoulli fue profesor en la Universidad de Basilea y enseñó a muchos estudiantes sobresalientes, de los cuales el más famoso fue Leonhard Euler.

Consulte LarsonCalculus.com para leer más de esta biografía.

Recuerde del álgebra que todo polinomio con coeficientes reales se puede factorizar en factores lineales y cuadráticos irreducibles.* Por ejemplo, el polinomio

$$x^5 + x^4 - x - 1$$

puede ser escrito como

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - x - 1 &= x^4(x + 1) - (x + 1) \\ &= (x^4 - 1)(x + 1) \\ &= (x^2 + 1)(x^2 - 1)(x + 1) \\ &= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)(x + 1) \\ &= (x - 1)(x + 1)^2(x^2 + 1) \end{aligned}$$

donde $(x - 1)$ es un factor lineal, $(x + 1)^2$ es un factor lineal repetido, y $(x^2 + 1)$ es un factor cuadrático irreducible. Usando esta factorización, se puede escribir la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional

$$\frac{N(x)}{x^5 + x^4 - x - 1}$$

donde $N(x)$ es un polinomio de grado menor que 5, tal como se muestra.

$$\frac{N(x)}{(x - 1)(x + 1)^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1}$$

COMENTARIO

En precálculo, aprendió a combinar funciones tales como

$$\frac{1}{x - 2} + \frac{-1}{x + 3} = \frac{5}{(x - 2)(x + 3)}$$

El método de fracciones parciales le muestra cómo revertir este proceso.

$$\frac{5}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{?}{x - 2} + \frac{?}{x + 3}$$

Descomposición de $N(x)/D(x)$ en fracciones parciales

- 1. Dividir cuando es impropia:** Si $N(x)/D(x)$ es una fracción impropia (es decir, cuando el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador), divida el denominador en el numerador para obtener

$$\frac{N(x)}{D(x)} = (\text{un polinomio}) + \frac{N_1(x)}{D(x)}$$

donde el grado de $N_1(x)$ es menor que el grado de $D(x)$. Después aplique los pasos 2, 3 y 4 a la expresión racional propia $N_1(x)/D(x)$.

- 2. Factor denominador:** Factorice completamente el denominador en factores de forma

$$(px + q)^m \text{ y } (ax^2 + bx + c)^n$$

donde $ax^2 + bx + c$ es irreducible.

- 3. Factores lineales:** Para cada factor de la forma $(px + q)^m$, la descomposición en fracciones parciales debe incluir la siguiente suma de m fracciones.

$$\frac{A_1}{(px + q)} + \frac{A_2}{(px + q)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(px + q)^m}$$

- 4. Factores cuadráticos:** Para cada factor de la forma $(ax^2 + bx + c)^n$, la descomposición en fracciones parciales debe incluir la siguiente suma de n fracciones.

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

* Para una revisión de técnicas de factorización, vea *Precalculus*, 9a. edición, o *Precalculus: Real Mathematics by Real People*, 6a. edición, ambos por Ron Larson (Boston, Massachusetts: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2014 y 2012, respectivamente).

Factores lineales

Las técnicas algebraicas para la determinación de las constantes en los numeradores de una descomposición en fracciones parciales con factores lineales o repetidos se muestran en los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 1

Factores lineales diferentes

Escriba la descomposición en fracciones parciales para

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

Solución Como $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$, podría incluir una fracción parcial por cada factor y escribir

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2}$$

donde deben determinarse A y B . Multiplicando esta ecuación por el mínimo común denominador $(x - 3)(x - 2)$ obtiene la ecuación básica

$$1 = A(x - 2) + B(x - 3). \quad \text{Ecuación básica}$$

Debido a que esta ecuación es verdadera para todas las x , puede sustituir los valores convenientes para x para obtener ecuaciones en A y B . Los valores más convenientes son los que hacen que determinados factores sean iguales a 0.

.....▶
 •••COMENTARIO Observe que las sustituciones para x en el ejemplo 1 se eligen por su conveniencia en la determinación de los valores de A y B ; $x = 3$ se elige para eliminar el término $B(x - 3)$ y $x = 2$ se elige para eliminar el término $A(x - 2)$. El objetivo es hacer sustituciones convenientes siempre que sea posible.

Para resolver para A , sea $x = 3$

$$1 = A(3 - 2) + B(3 - 3) \quad \text{Haga } x = 3 \text{ en la ecuación básica.}$$

$$1 = A(1) + B(0)$$

$$1 = A$$

Para resolver para B , sea $x = 2$

$$1 = A(2 - 2) + B(2 - 3) \quad \text{Haga } x = 2 \text{ en la ecuación básica.}$$

$$1 = A(0) + B(-1)$$

$$-1 = B$$

Por tanto, la descomposición es

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x - 2}$$

como se demostró al inicio de esta sección. ■

■ PARA INFORMACIÓN ADICIONAL. Para aprender un método diferente para encontrar descomposiciones en fracciones parciales, llamado el método Heaviside, consulte el artículo "Calculus to Algebra Connections in Partial Fraction Decomposition", por Joseph Wiener y Will Watkins, en *The AMATYC Review*.

Asegúrese de ver que el método de fracciones parciales es práctico solo para las integrales de funciones racionales cuyos denominadores se factorizan "perfectamente". Por ejemplo, cuando el denominador en el ejemplo 1 se cambia a

$$x^2 - 5x + 5$$

su descomposición en factores es

$$x^2 - 5x + 5 = \left[x - \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right] \left[x - \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right]$$

sería demasiado complicado usarla con fracciones parciales. En estos casos, se debe completar el cuadrado o utilizar un sistema de álgebra computacional para realizar la integración. Al hacer esto, se debe obtener

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 5} dx = \frac{\sqrt{5}}{5} \ln|2x - \sqrt{5} - 5| - \frac{\sqrt{5}}{5} \ln|2x + \sqrt{5} - 5| + C.$$

EJEMPLO 2 Factores lineales repetidosEncuentre $\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} dx$.**Solución** Como

$$x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$$

debe incluir una fracción para cada potencia de x y $(x + 1)$ y escribir

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$

Multiplicando por el mínimo común denominador $x(x + 1)^2$ obtiene la *ecuación básica*

$$5x^2 + 20x + 6 = A(x + 1)^2 + Bx(x + 1) + Cx. \quad \text{Ecuación básica}$$

Para despejar a A , se hace $x = 0$. Esto elimina los términos B y C y produce

$$6 = A(1) + 0 + 0$$

$$6 = A.$$

Para despejar a C , se hace $x = -1$. Esto elimina los términos A y B y produce

$$5 - 20 + 6 = 0 + 0 - C$$

$$9 = C.$$

Se han utilizado las opciones más convenientes para x , por lo que para encontrar el valor de B puede utilizar *cualquier otro valor* de x , junto con los valores calculados de A y C . Utilizando $x = 1$, $A = 6$ y $C = 9$ produce

$$5 + 20 + 6 = A(4) + B(2) + C$$

$$31 = 6(4) + 2B + 9$$

$$-2 = 2B$$

$$-1 = B.$$

Por tanto, tiene que

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x + 1)^2} dx &= \int \left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x + 1} + \frac{9}{(x + 1)^2} \right) dx \\ &= 6 \ln|x| - \ln|x + 1| + 9 \frac{(x + 1)^{-1}}{-1} + C \\ &= \ln \left| \frac{x^6}{x + 1} \right| - \frac{9}{x + 1} + C. \end{aligned}$$

Intente comprobar este resultado mediante la derivación. Incluya álgebra en su comprobación, simplificando la derivada hasta que haya obtenido el integrando original. ■

Es necesario hacer tantas sustituciones como incógnitas (A , B , C , ...) haya que determinar. Por ejemplo, en el ejemplo 2 se han hecho tres sustituciones ($x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$) para resolver para A , B y C .

▷ **TECNOLOGÍA** Se pueden utilizar la mayoría de los sistemas de álgebra computacional, como *Maple*, *Mathematica* y la *TI-nSpire*, para convertir una función racional a su descomposición en fracciones parciales. Por ejemplo, usando *Mathematica*, se obtiene lo siguiente.

$$\text{Apart}[(5 * x \wedge 2 + 20 * x + 6)/(x * (x + 1) \wedge 2), x]$$

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{(1 + x)^2} - \frac{1}{1 + x}$$

■ PARA INFORMACIÓN ADICIONAL.

Para una aproximación alternativa al uso de fracciones parciales, vea el artículo "A Shortcut in Partial Fractions", por Xun-Cheng Huang, en *The College Mathematics Journal*.

Factores cuadráticos

Al utilizar el método de fracciones parciales con factores lineales, una elección conveniente de x inmediatamente produce un valor para uno de los coeficientes. Con los factores *cuadráticos*, por lo general un sistema de ecuaciones lineales tiene que ser resuelto, independientemente de la elección de x .

EJEMPLO 3 Factores lineales distintos y factores cuadráticos

•••► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre $\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)} dx$.

Solución Como

$$(x^2 - x)(x^2 + 4) = x(x - 1)(x^2 + 4)$$

puede incluir una fracción parcial para cada factor y escribir

$$\frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x - 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por el mínimo común denominador

$$x(x - 1)(x^2 + 4)$$

obtiene la ecuación básica

$$2x^3 - 4x - 8 = A(x - 1)(x^2 + 4) + Bx(x^2 + 4) + (Cx + D)(x)(x - 1).$$

Para resolver para A , haga $x = 0$ para obtener

$$\begin{aligned} -8 &= A(-1)(4) + 0 + 0 \\ 2 &= A. \end{aligned}$$

Para despejar a B , haga $x = 1$ para obtener

$$\begin{aligned} -10 &= 0 + B(5) + 0 \\ -2 &= B. \end{aligned}$$

Hasta este punto, C y D están aún por determinarse. Puede encontrar estas constantes eligiendo otros dos valores de x y resolviendo el sistema resultante de ecuaciones lineales. Usando $x = -1$, $A = 2$ y $B = -2$, puede escribir

$$\begin{aligned} -6 &= (2)(-2)(5) + (-2)(-1)(5) + (-C + D)(-1)(-2) \\ 2 &= -C + D. \end{aligned}$$

Para $x = 2$, tiene

$$\begin{aligned} 0 &= (2)(1)(8) + (-2)(2)(8) + (2C + D)(2)(1) \\ 8 &= 2C + D. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema lineal restando la primera ecuación de la segunda

$$\begin{aligned} -C + D &= 2 \\ 2C + D &= 8 \end{aligned}$$

obtiene $C = 2$. En consecuencia, $D = 4$ y tiene que

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x - 1)(x^2 + 4)} dx &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x - 1} + \frac{2x}{x^2 + 4} + \frac{4}{x^2 + 4} \right) dx \\ &= 2 \ln|x| - 2 \ln|x - 1| + \ln|x^2 + 4| + 2 \arctan \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

En los ejemplos 1-3, la solución de la ecuación básica comenzó con la sustitución de los valores de x , lo que hizo los factores lineales iguales a 0. Este método funciona bien cuando la descomposición en fracciones parciales implica factores lineales. Sin embargo, cuando la descomposición implica solo factores cuadráticos, a menudo es más conveniente un procedimiento alternativo. Por ejemplo, trate de escribir el lado derecho de la ecuación básica en forma polinómica e iguale los *coeficientes de los términos semejantes*. Este método se muestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Factores cuadráticos repetidos

Encuentre $\int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2} dx$.

Solución Incluya una fracción parcial por cada potencia de $(x^2 + 2)$ y escriba

$$\frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2}$$

Multiplique por el mínimo común denominador $(x^2 + 2)^2$ para obtener la *ecuación básica*

$$8x^3 + 13x = (Ax + B)(x^2 + 2) + Cx + D.$$

Desarrolle la ecuación básica y agrupe términos semejantes para obtener

$$8x^3 + 13x = Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx + D$$

$$8x^3 + 13x = Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D).$$

Ahora, puede igualar los coeficientes de los términos semejantes en los lados opuestos de la ecuación.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 8 = A & & & 0 = 2B + D & \\ & \swarrow & & \searrow & & & \\ & & & & & & \\ 8x^3 + 0x^2 + 13x + 0 & = & Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D) & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 0 = B & & 13 = 2A + C & & \end{array}$$

Utilizando los valores conocidos $A = 8$ y $B = 0$, puede escribir

$$13 = 2A + C \quad \Rightarrow \quad 13 = 2(8) + C \quad \Rightarrow \quad -3 = C$$

$$0 = 2B + D \quad \Rightarrow \quad 0 = 2(0) + D \quad \Rightarrow \quad 0 = D.$$

Finalmente, puede concluir que

$$\begin{aligned} \int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2} dx &= \int \left(\frac{8x}{x^2 + 2} + \frac{-3x}{(x^2 + 2)^2} \right) dx \\ &= 4 \ln(x^2 + 2) + \frac{3}{2(x^2 + 2)} + C. \end{aligned}$$

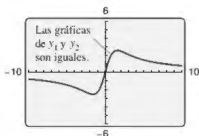
► **TECNOLOGÍA** Puede utilizar una herramienta de graficación para confirmar la descomposición encontrada en el ejemplo 4. Para ello, grafique

$$y_1 = \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2}$$

y

$$y_2 = \frac{8x}{x^2 + 2} + \frac{-3x}{(x^2 + 2)^2}$$

en la misma ventana de visualización. Las gráficas deben ser idénticas, como se muestra a la derecha.



Cuando integre expresiones racionales, considere que para las expresiones racionales *impropias* como

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{2x^3 + x^2 - 7x + 7}{x^2 + x - 2}$$

primero debe dividir para obtener

$$\frac{N(x)}{D(x)} = 2x - 1 + \frac{-2x + 5}{x^2 + x - 2}$$

Después descomponga la expresión racional propia en sus fracciones parciales por los métodos habituales.

Aquí hay algunas directrices para la solución de la ecuación básica que se obtiene en una fracción parcial.

DIRECTRICES PARA SOLUCIONAR LA ECUACIÓN BÁSICA

Factores lineales

1. Sustituir las raíces de los factores lineales distintos en la ecuación básica.
2. Para factores lineales repetidos, utilizar los coeficientes determinados en la primera directriz para volver a escribir la ecuación básica. A continuación, sustituir otros valores propios de x y resolver los coeficientes restantes.

Factores cuadráticos

1. Desarrollar la ecuación básica.
2. Agrupar términos de acuerdo con las potencias de x .
3. Igualar los coeficientes de las potencias para obtener un sistema de ecuaciones lineales que impliquen A , B , C y así sucesivamente.
4. Resolver el sistema de ecuaciones lineales.

■ PARA INFORMACIÓN ADICIONAL

Para leer acerca de otro método de evaluación de las integrales de funciones racionales, consulte el artículo "Alternate Approach to Partial Fractions to Evaluate Integrals of Rational Functions", por NR Nandakumar y Michael J. Bossé, en *The Pi Mu Epsilon Journal*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

Antes de concluir esta sección, se presentan algunas cosas que se deben recordar. En primer lugar, no es necesario utilizar la técnica de fracciones parciales en todas las funciones racionales. Por ejemplo, la siguiente integral se evalúa con mayor facilidad por la regla del logaritmo.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x - 4} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 + 3}{x^3 + 3x - 4} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x^3 + 3x - 4| + C \end{aligned}$$

En segundo lugar, cuando el integrando no está en forma reducida, la reducción puede eliminar la necesidad de fracciones parciales, como se muestra en la siguiente integral.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x - 4} dx &= \int \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 2)} dx \\ &= \int \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x + 2| + C \end{aligned}$$

Finalmente, las fracciones parciales se pueden utilizar con algunos cocientes que implican funciones trascendentes. Por ejemplo, la sustitución le permite escribir

$$\int \frac{\cos x}{\sin x(\sin x - 1)} dx = \int \frac{du}{u(u-1)}, \quad u = \sin x, du = \cos x dx$$

2.7 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Descomponer en fracciones parciales En los ejercicios 1-4, escriba la expresión racional en la forma de descomposición en fracciones parciales. No resuelva para las constantes.

1. $\frac{4}{x^2 - 8x}$

2. $\frac{2x^2 + 1}{(x - 3)^3}$

3. $\frac{2x - 3}{x^3 + 10x}$

4. $\frac{2x - 1}{x(x^2 + 1)^2}$

Usar fracciones parciales En los ejercicios 5-22, use fracciones parciales para encontrar la integral indefinida.

5. $\int \frac{1}{x^2 - 9} dx$

6. $\int \frac{2}{9x^2 - 1} dx$

7. $\int \frac{5}{x^2 + 3x - 4} dx$

8. $\int \frac{3 - x}{3x^2 - 2x - 1} dx$

9. $\int \frac{x^2 + 12x + 12}{x^3 - 4x} dx$

10. $\int \frac{x^3 - x + 3}{x^2 + x - 2} dx$

11. $\int \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8} dx$

12. $\int \frac{x + 2}{x^2 + 5x} dx$

13. $\int \frac{4x^2 + 2x - 1}{x^3 + x^2} dx$

14. $\int \frac{5x - 2}{(x - 2)^2} dx$

15. $\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$

16. $\int \frac{8x}{x^3 + x^2 - x - 1} dx$

17. $\int \frac{x^2 - 1}{x^3 + x} dx$

18. $\int \frac{6x}{x^3 - 8} dx$

19. $\int \frac{x^2}{x^4 - 2x^2 - 8} dx$

20. $\int \frac{x}{16x^4 - 1} dx$

21. $\int \frac{x^2 + 5}{x^3 - x^2 + x + 3} dx$

22. $\int \frac{x^2 + 6x + 4}{x^4 + 8x^2 + 16} dx$

Evaluar una integral definida En los ejercicios 23-26, calcule la integral definida. Use una herramienta de graficación para verificar su resultado.

23. $\int_0^2 \frac{3}{4x^2 + 5x + 1} dx$

24. $\int_1^5 \frac{x - 1}{x^2(x + 1)} dx$

25. $\int_1^2 \frac{x + 1}{x(x^2 + 1)} dx$

26. $\int_0^1 \frac{x^2 - x}{x^2 + x + 1} dx$

Encontrar una integral indefinida En los ejercicios 27-34, use sustitución y fracciones parciales para encontrar la integral indefinida.

27. $\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x} dx$

28. $\int \frac{5 \cos x}{\sin^2 x + 3 \sin x - 4} dx$

29. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5 \tan x + 6} dx$

30. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x(\tan x + 1)} dx$

31. $\int \frac{e^x}{(e^x - 1)(e^x + 4)} dx$

32. $\int \frac{e^x}{(e^{2x} + 1)(e^x - 1)} dx$

33. $\int \frac{\sqrt{x}}{x - 4} dx$

34. $\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$

Verificar una fórmula En los ejercicios 35-38, utilice el método de fracciones parciales para verificar la fórmula de integración.

35. $\int \frac{1}{x(a + bx)} dx = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x}{a + bx} \right| + C$

36. $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C$

37. $\int \frac{x}{(a + bx)^2} dx = \frac{1}{b^2} \left(\frac{a}{a + bx} + \ln |a + bx| \right) + C$

38. $\int \frac{1}{x^2(a + bx)} dx = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{x}{a + bx} \right| + C$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

39. **Usar fracciones parciales** ¿Cuál es el primer paso cuando integra $\int \frac{x^3}{x - 5} dx$? Explique.

40. **Descomposición** Describa la descomposición de la función racional $N(x)/D(x)$ (a) para $D(x) = (px + q)^m$ y (b) para $D(x) = (ax^2 + bx + c)^n$ donde $ax^2 + bx + c$ es irreducible. Explique por qué eligió ese método.

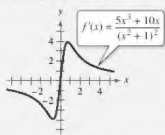
41. **Elegir un método** Escriba el método que utilizará para evaluar cada integral. Explique por qué eligió ese método. No integre.

(a) $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 8} dx$ (b) $\int \frac{7x + 4}{x^2 + 2x - 8} dx$

(c) $\int \frac{4}{x^2 + 2x + 5} dx$



42. **¿CÓMO LO VE?** Utilice la gráfica de f' como se muestra en la figura para responder a lo siguiente.



(a) ¿Es $f(3) - f(2) > 0$? Explique.

(b) ¿Qué es mayor, el área bajo la gráfica de f' de 1 a 2, o el área bajo la gráfica de f' de 3 a 4?

43. **Área** Calcule el área de la región acotada por las gráficas de $y = 12/(x^2 + 5x + 6)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

44. **Área** Calcule el área de la región acotada por las gráficas de $y = 7/(16 - x^2)$ y $y = 1$.

45. **Modelar datos** En la tabla se muestra el costo predicho C (en cientos de miles de dólares) para una empresa para eliminar $p\%$ de un producto químico de sus aguas residuales.

P	0	10	20	30	40
C	0	0.7	1.0	1.3	1.7

P	50	60	70	80	90
C	2.0	2.7	3.6	5.5	11.2

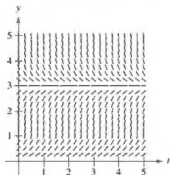
$$\text{Para los datos dados por } C = \frac{124p}{(10+p)(100-p)}$$

para $0 \leq p \leq 100$, utilice el modelo para encontrar el costo promedio de la eliminación entre el 75% y el 80% de la sustancia química.

46. **Crecimiento logístico** En la práctica, a menudo existe un límite superior L más allá del que no puede ocurrir el crecimiento. En tales casos, se supone que la tasa de crecimiento es proporcional no solo a la cantidad existente, sino también a la diferencia entre la cantidad y existente y el límite superior L . Es decir, $dy/dt = ky(L - y)$. En forma integral, se puede escribir esta relación como

$$\int \frac{dy}{y(L - y)} = \int k dt.$$

- (a) Se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial $dy/dt = y(3 - y)$. Dibuje una posible solución a la ecuación diferencial cuando $y(0) = 5$ y otro cuando $y(0) = \frac{1}{2}$. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite MathGraphs.com.



- (b) Cuando $y(0)$ es mayor que 3, ¿cuál es el signo de la pendiente de la solución?
- (c) Para $y > 0$, encuentre $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.
- (d) Evalúe las dos integrales dadas y resuelva para y como una función de t , donde y_0 es la cantidad inicial.
- (e) Utilice el resultado del inciso (d) para encontrar y representar gráficamente las soluciones en el inciso (a). Use un programa de graficación para trazar las soluciones y compare los resultados con las soluciones en el inciso (a).
- (f) La gráfica de la función y es una **curva logística**. Demuestre que la tasa de crecimiento es máxima en el punto de inflexión, y que esto ocurre cuando $y = L/2$.

47. **Volumen y centroide** Considere la región acotada por las gráficas de $y = 2x/(x^2 + 1)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$. Encuentre el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje x . Encuentre el centroide de la región.

48. **Volumen** Considere la región acotada por la gráfica de

$$y^2 = \frac{(2-x)^2}{(1+x)^2}$$

en el intervalo $[0, 1]$. Encuentre el volumen del sólido generado al girar esta región alrededor del eje x .

49. **Modelo epidémico** Un solo individuo infectado entra en una comunidad de n individuos susceptibles de infectarse. Sea x el número de individuos recientemente infectados en el momento t . El modelo epidémico común supone que la enfermedad se propaga a una velocidad proporcional al producto del número total de infectados y el número de los aún no infectados. Por lo que, $dx/dt = k(x + 1)(n - x)$ y se obtiene

$$\int \frac{1}{(x+1)(n-x)} dx = \int k dt.$$

Resuelva para x como una función de t .

50. **Reacción química**

En una reacción química, una unidad de compuesto Y y una unidad de compuesto Z se convierten en una sola unidad del compuesto X . Sea x la cantidad de compuesto X formado. La velocidad de formación de X es proporcional al producto de las cantidades de compuestos no convertidos Y y Z . Por lo tanto, $dx/dt = k(y_0 - x)(z_0 - x)$, donde y_0 y z_0 son las cantidades iniciales de compuestos Y y Z . De esta ecuación, se obtiene

$$\int \frac{1}{(y_0 - x)(z_0 - x)} dx = \int k dt.$$

- (a) Realice las dos integraciones y resuelva para x en términos de t .
- (b) Utilice el resultado del inciso (a) para encontrar x cuando $t \rightarrow \infty$ para (1) $y_0 < z_0$, (2) $y_0 > z_0$ y (3) $y_0 = z_0$.



51. **Utilizar dos métodos** Evalúe

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

de dos maneras diferentes, una de las cuales es fracciones parciales.

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

52. Demuestre $\frac{27}{7} - \pi = \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx$.

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.
© The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

2.8 Integración de funciones trigonométricas inversas

- Integrar funciones cuyas antiderivadas implican funciones trigonométricas inversas.
- Utilizar el método de completar el cuadrado para integrar una función.
- Resumir las reglas básicas de integración que involucran funciones elementales.

Integrales que contienen funciones trigonométricas inversas

Las derivadas de las seis funciones trigonométricas inversas se agrupan en tres pares. En cada par, la derivada de una función es el negativo de la otra. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx} [\arcsen x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

y

$$\frac{d}{dx} [\arccos x] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cuando se relaciona la *antiderivada* que corresponde a cada una de las funciones trigonométricas inversas, es necesario utilizar solo un miembro de cada par. Por convención se utiliza $\arcsen x$ como la antiderivada de $1/\sqrt{1-x^2}$, en lugar de $-\arccos x$. El siguiente teorema proporciona una fórmula antiderivada para cada uno de los tres pares. Las demostraciones de estas reglas de integración se dejan como ejercicio (vea los ejercicios 75-77).

■ PARA INFORMACIÓN ADICIONAL

Para una demostración detallada de la regla 2 del teorema 2.9, consulte el artículo "A Direct Proof of the Integral Formula for Arctangent", por Arnold J. Insel, en *The College Mathematics Journal*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

TEOREMA 2.9 Integrales que contienen funciones trigonométricas inversas

Sea u una función derivable de x , y sea $a > 0$.

- $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsen \frac{u}{a} + C$
- $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$
- $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C$

EJEMPLO 1

Integrar con funciones trigonométricas inversas

- $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsen \frac{x}{2} + C$
- $\int \frac{dx}{2+9x^2} = \frac{1}{3} \int \frac{3 dx}{(\sqrt{2})^2 + (3x)^2} \quad u = 3x, a = \sqrt{2}$
 $= \frac{1}{3\sqrt{2}} \arctan \frac{3x}{\sqrt{2}} + C$
- $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}} = \int \frac{2 dx}{2x\sqrt{(2x)^2-3^2}} \quad u = 2x, a = 3$
 $= \frac{1}{3} \operatorname{arcsec} \frac{|2x|}{3} + C$

Los integrales en el ejemplo 1 son aplicaciones bastante sencillas de las fórmulas de integración. Desafortunadamente, esto no es lo normal. Las fórmulas de integración para las funciones trigonométricas inversas se pueden disfrazar de muchas maneras.

EJEMPLO 2

Integrar por sustitución

$$\text{Encuentre } \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}.$$

Solución En la actualidad, esta integral no encaja en ninguna de las tres fórmulas trigonométricas inversas. Sin embargo, usando la sustitución $u = e^x$, produce

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}.$$

Con esta sustitución, puede integrar como se muestra.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(e^x)^2-1}} && \text{Escriba } e^{2x} \text{ como } (e^x)^2. \\ &= \int \frac{du/u}{\sqrt{u^2-1}} && \text{Sustituya.} \\ &= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} && \text{Reescriba para ajustar a la regla del arco secante.} \\ &= \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{1} + C && \text{Aplice la regla del arco secante.} \\ &= \operatorname{arcsec} e^x + C && \text{Sustituya } u. \end{aligned}$$

▷ **RIESGO DE TECNOLOGÍA** Una utilidad de integración simbólica puede ser útil para la integración de funciones como la del ejemplo 2. Sin embargo, en algunos casos la utilidad puede fallar en encontrar una antiderivada por dos razones. En primer lugar, algunas funciones elementales no tienen antiderivadas que sean funciones elementales. En segundo lugar, todas las utilidades tienen sus limitaciones, podría haber ingresado una función que la utilidad no estaba programada para manejar. Usted también debe recordar que las antiderivadas implican funciones trigonométricas o funciones logarítmicas que se pueden escribir de muchas formas diferentes. Por ejemplo, una utilidad encuentra que la integral en el ejemplo 2 es

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \arctan \sqrt{e^{2x}-1} + C.$$

Intente demostrar que esta antiderivada es equivalente a la encontrada en el ejemplo 2.

EJEMPLO 3

Reescribir como la suma de dos cocientes

$$\text{Encuentre } \int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

Solución Esta integral no parece ajustarse a ninguna de las fórmulas básicas de integración. Sin embargo, al dividir el integrando en dos partes, se puede ver que la primera parte se puede encontrar con la regla de la potencia, y la segunda parte resulta una función inversa del seno.

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx + \int \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int (4-x^2)^{-1/2} (-2x) dx + 2 \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{(4-x^2)^{1/2}}{1/2} \right] + 2 \arcsen \frac{x}{2} + C \\ &= -\sqrt{4-x^2} + 2 \arcsen \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

Completando el cuadrado

Completar el cuadrado ayuda cuando hay funciones cuadráticas en el integrando. Por ejemplo, la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c$ puede ser escrita como la diferencia de dos cuadrados sumando y restando $(b/2)^2$.

$$x^2 + bx + c = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

EJEMPLO 4 Completar el cuadrado

Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 7}$.

Solución Puede escribir el denominador como la suma de dos cuadrados, como se muestra.

$$x^2 - 4x + 7 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 7 = (x - 2)^2 + 3 = u^2 + a^2$$

Ahora, en esta forma cuadrada completa, sea $u = x - 2$ y $a = \sqrt{3}$.

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 7} = \int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x - 2}{\sqrt{3}} + C$$

Cuando el coeficiente principal no es 1, ayuda factorizar antes de completar el cuadrado. Por ejemplo, puede completar el cuadrado de $2x^2 - 8x + 10$ al factorizar primero.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 10 &= 2(x^2 - 4x + 5) \\ &= 2(x^2 - 4x + 4 - 4 + 5) \\ &= 2[(x - 2)^2 + 1] \end{aligned}$$

Para completar el cuadrado cuando el coeficiente de x^2 es negativo, utilice el mismo proceso de factorización apenas mostrado. Por ejemplo, puede completar el cuadrado para $3x^2 - x^2$ como se muestra.

$$3x - x^2 = -(x^2 - 3x) = -\left[x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

EJEMPLO 5 Completar el cuadrado

Encuentre el área de la región limitada por la gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}$$

el eje x y las rectas $x = \frac{3}{2}$ y $x = \frac{9}{4}$.

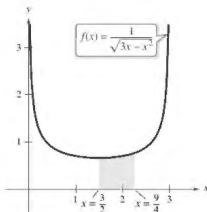
Solución En la figura 2.21 puede ver que el área es

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{3/2}^{9/4} \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}} dx \\ &= \int_{3/2}^{9/4} \frac{dx}{\sqrt{(3/2)^2 - [x - (3/2)]^2}} \end{aligned}$$

Use la forma de completar cuadrados.

$$\begin{aligned} &= \arcsen \frac{x - (3/2)}{3/2} \Big|_{3/2}^{9/4} \\ &= \arcsen \frac{1}{2} - \arcsen 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{6} \\ &\approx 0.524. \end{aligned}$$



El área de la región limitada por la gráfica de f , el eje x , $x = \frac{3}{2}$ y $x = \frac{9}{4}$ es $\pi/6$.

Figura 2.21

▶ **TECNOLOGÍA** Con integrales definidas, como la dada en el ejemplo 5, recuerde que puede recurrir a una solución numérica. Por ejemplo, aplicando la regla de Simpson (con $n = 12$) a la integral en el ejemplo, se obtiene $\int_{3/2}^{9/4} \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}} dx \approx 0.523599$. Esta difiere del valor exacto de la integral ($= \pi/6 \approx 0.52235988$) en menos de una millonésima.

Repaso de las reglas básicas de integración

Ya ha completado la introducción de las reglas básicas de integración. Para ser eficientes en la aplicación de estas reglas, usted debe haber practicado lo suficiente para que haya memorizado cada regla.

REGLAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN ($a > 0$)

$$1. \int kf(u) \, du = k \int f(u) \, du$$

$$2. \int [f(u) \pm g(u)] \, du = \int f(u) \, du \pm \int g(u) \, du$$

$$3. \int du = u + C$$

$$4. \int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$5. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$6. \int e^u \, du = e^u + C$$

$$7. \int a^u \, du = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^u + C$$

$$8. \int \sin u \, du = -\cos u + C$$

$$9. \int \cos u \, du = \sin u + C$$

$$10. \int \tan u \, du = -\ln|\cos u| + C$$

$$11. \int \cot u \, du = \ln|\sin u| + C$$

$$12. \int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$13. \int \csc u \, du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$$

$$14. \int \sec^2 u \, du = \tan u + C$$

$$15. \int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$$

$$16. \int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$$

$$17. \int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$$

$$18. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsen \frac{u}{a} + C$$

$$19. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$$

$$20. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C$$

Puede aprender mucho acerca de la naturaleza de la integración comparando esta lista con el resumen de las reglas de derivación que se presentan en la sección anterior. Para la derivación, ahora tiene reglas que permiten derivar *cualquier* función elemental. Para la integración, esto está lejos de ser cierto.

Las reglas de integración antes mencionadas son fundamentalmente las que se presentan durante el desarrollo de las reglas de derivación. Hasta el momento no ha aprendido reglas o técnicas para encontrar la antiderivada de un producto o cociente general, la función logaritmo natural o las funciones trigonométricas inversas. Más importante, no puede aplicar ninguna de las reglas en esta lista a menos que pueda crear la du correcta correspondiente a la u de la fórmula. El punto es que hay que trabajar más con las técnicas de integración, lo que podrá hacer en las siguientes secciones. Los dos ejemplos siguientes deben darle una mejor idea de los problemas de integración que *puede* y *no puede* resolver con las técnicas y reglas que hasta hoy conocemos.

2.8 Ejercicios

Consulta CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Encontrar una integral indefinida En los ejercicios 1-20, encuentre la integral indefinida.

- $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$
- $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}} dx$
- $\int \frac{12}{1+9x^2} dx$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}} dx$
- $\int \frac{1}{4+(x-3)^2} dx$
- $\int \frac{t}{\sqrt{1-t^4}} dt$
- $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-4}} dx$
- $\int \frac{t}{t^4+25} dt$
- $\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} dx$
- $\int \frac{e^{2x}}{4+e^{4x}} dx$
- $\int \frac{2}{x\sqrt{9x^2-25}} dx$
- $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{25-\tan^2 x}} dx$
- $\int \frac{\sin x}{7+\cos^2 x} dx$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx$
- $\int \frac{3}{2\sqrt{x}(1+x)} dx$
- $\int \frac{x-3}{x^2+1} dx$
- $\int \frac{x^2+3}{x\sqrt{x^2-4}} dx$
- $\int \frac{x+5}{\sqrt{9-(x-3)^2}} dx$
- $\int \frac{x-2}{(x+1)^2+4} dx$

Evaluar una integral definida En los ejercicios 21-32, evalúe la integral definida.

- $\int_0^{1/6} \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} dx$
- $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{1+4x^2} dx$
- $\int_4^{16} \frac{1}{25+(x-3)^2} dx$
- $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$
- $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$
- $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$
- $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{4x^2-9}} dx$
- $\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{16x^2-5}} dx$
- $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} dx$
- $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sec^2 x} dx$
- $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Completar el cuadrado En los ejercicios 33-42, encuentre o evalúe la integral completando el cuadrado.

- $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-2x+2}$
- $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2+4x+13}$
- $\int \frac{2x}{x^2+6x+13} dx$
- $\int \frac{2x-5}{x^2+2x+2} dx$
- $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-4x}} dx$
- $\int \frac{2}{\sqrt{-x^2+4x}} dx$

- $\int_2^3 \frac{2x-3}{\sqrt{4x-x^2}} dx$
- $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}} dx$
- $\int \frac{x}{x^4+2x^2+2} dx$
- $\int \frac{x}{\sqrt{9+8x^2-x^4}} dx$

Integrar por sustitución En los ejercicios 43-46, utilice la sustitución especificada para encontrar o evaluar la integral.

- $\int \sqrt{e^t-3} dt$
 $u = \sqrt{e^t-3}$
- $\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1} dx$
 $u = \sqrt{x-2}$
- $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$
 $u = \sqrt{x}$
- $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{3-x}\sqrt{x+1}}$
 $u = \sqrt{x+1}$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

Comparar problemas de integración En los ejercicios 47-50, determine cuál de las integrales se puede encontrar utilizando las fórmulas básicas de integración que ha estudiado hasta ahora en el texto.

- (a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- (b) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- (c) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$
- (a) $\int \sqrt{x-1} dx$
- (b) $\int x\sqrt{x-1} dx$
- (c) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$
- (a) $\int e^{x^2} dx$
- (b) $\int xe^{x^2} dx$
- (c) $\int \frac{1}{x^2} e^{1/x} dx$
- (a) $\int \frac{1}{1+x^4} dx$
- (b) $\int \frac{x}{1+x^4} dx$
- (c) $\int \frac{x^2}{1+x^4} dx$

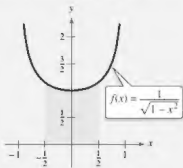
51. Determinar una integral Decida si puede encontrar la integral

$$\int \frac{2 dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

usando las fórmulas y técnicas que ha estudiado hasta ahora. Explique su razonamiento.

52.

¿CÓMO LO VE? Utilizando la gráfica, ¿qué valor aproxima mejor el área de la región entre el eje x y la función sobre el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$? Explique.



- (a)
- -3
- (b)
- $\frac{1}{2}$
- (c)
- 1
- (d)
- 2
- (e)
- 4

Ecuaciones diferenciales En los ejercicios 53 y 54, utilice la ecuación diferencial y la condición inicial especificada para encontrar y .

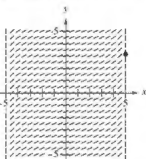
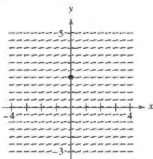
$$53. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \\ y(0) = \pi$$

$$54. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4+x^2} \\ y(2) = \pi$$

Campo direccional En los ejercicios 55 y 56 se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo direccional. (a) Dibuje dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo direccional, uno de los cuales pasa a través del punto dado. (b) Utilice la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y use un programa de graficación para trazar la solución. Compare el resultado con los dibujos del inciso (a). Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, vaya a MathGraphs.com.

$$55. \frac{dy}{dx} = \frac{2}{9+x^2}, \quad (0, 2)$$

$$56. \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{25-x^2}}, \quad (5, \pi)$$



Campo direccional En los ejercicios 57-60, utilice un sistema de álgebra computacional para graficar el campo direccional de la ecuación diferencial y la gráfica de la solución que satisfase la condición inicial dada.

$$57. \frac{dy}{dx} = \frac{10}{x\sqrt{x^2-1}} \\ y(3) = 0$$

$$58. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{12+x^2} \\ y(4) = 2$$

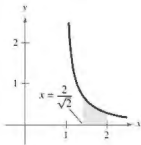
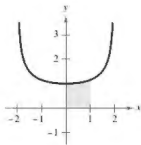
$$59. \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{\sqrt{16-x^2}} \\ y(0) = 2$$

$$60. \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{1+x^2} \\ y(0) = 4$$

Área En los ejercicios 61-66, halle el área de la región.

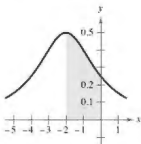
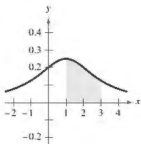
$$61. y = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$62. y = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$



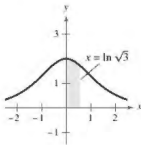
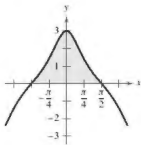
$$63. y = \frac{1}{x^2-2x+5}$$

$$64. y = \frac{2}{x^2+4x+8}$$



$$65. y = \frac{3 \cos x}{1 + \sin^2 x}$$

$$66. y = \frac{4e^x}{1 + e^{2x}}$$



67. Área

(a) Dibuje la región cuya área está representada por

$$\int_0^1 \arcsin x \, dx.$$

(b) Utilice las capacidades de integración de un programa de graficación para aproximar el área.

(c) Halle el área exacta analíticamente.

68. Aproximar π

(a) Demuestre que

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi.$$

(b) Aproxime el número π usando la regla de Simpson (con $n = 6$) y la integral del inciso (a).

(c) Aproxime el número π mediante el uso de las capacidades de integración de una herramienta de graficación.

69. Investigación Considere la función

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_x^{x+2} \frac{2}{t^2 + 1} dt.$$

- (a) Escriba un párrafo corto que dé una interpretación geométrica de la función
- $F(x)$
- en relación con la función

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}.$$


Use lo que ha escrito para suponer el valor de x que hará F máximo.

- (b) Realice la integración dada para encontrar una forma alternativa de
- $F(x)$
- . Utilice cálculo para localizar el valor de
- x
- que hará
- F
- máximo y compare el resultado con su suposición en el inciso (a).

70. Comparar integrales Considere la integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{6x - x^2}} dx.$$

- (a) Halle la integral al completar el cuadrado del radicando.
-
- (b) Halle la integral al hacer la sustitución
- $u = \sqrt{x}$
- .

-  (c) Las antiderivadas en los incisos (a) y (b) parecen ser significativamente diferentes. Utilice un programa de graficación para trazar cada antiderivada en la misma ventana de visualización y determine la relación entre ellas. Encuentre el dominio de cada una.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 71-74, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falsa.

71.
$$\int \frac{dx}{3x\sqrt{9x^2 - 16}} = \frac{1}{4} \arcsen \frac{3x}{4} + C$$

72.
$$\int \frac{dx}{25 + x^2} = \frac{1}{25} \arctan \frac{x}{25} + C$$

73.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = -\arcsen \frac{x}{2} + C$$

74. Una forma de encontrar
- $\int \frac{2e^{2x}}{\sqrt{9 - e^{2x}}} dx$
- es usar la regla del arcosen.

Comprobar una regla de integración En los ejercicios 75-77, compruebe la regla derivando. Sea $a > 0$.

75.
$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsen \frac{u}{a} + C$$

76.
$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$$

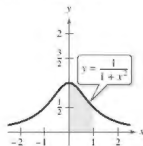
77.
$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsen} \frac{|u|}{a} + C$$


78. Demostración Trace la gráfica de
- $y_1 = \frac{1}{1+x^2}$
- ,
- $y_2 = \arctan x$
- y
- $y_3 = x$

en $[0, 10]$. Demuestre que $\frac{1}{1+x^2} < \arctan x < x$ para $x > 0$.

79. Integración numérica

- (a) Escriba una integral que represente el área de la región en la figura.
(b) Utilice la regla del trapecio con $n = 8$ para calcular el área de la región.
(c) Explique cómo se pueden utilizar los resultados de los incisos (a) y (b) para calcular π .



-  80. Movimiento vertical Un objeto se proyecta hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 500 pies por segundo. En este ejercicio, el objetivo es analizar el movimiento del objeto durante su vuelo hacia arriba.

- (a) Si se desprecia la resistencia del aire, encuentre la velocidad del objeto como una función del tiempo. Utilice un programa de graficación para trazar esta función.
(b) Utilice el resultado del inciso (a) para encontrar la función de posición y determine la altura máxima alcanzada por el objeto.
(c) Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, se obtiene la ecuación

$$\frac{dv}{dt} = -(32 + kv^2)$$

donde -32 pies por segundo cuadrado es la aceleración debida a la gravedad y k es una constante. Encuentre la velocidad como una función del tiempo mediante la resolución de la ecuación

$$\int \frac{dv}{32 + kv^2} = - \int dt.$$

- (d) Utilice un programa de graficación para trazar la función velocidad $v(t)$ en el inciso (c) para $k = 0.001$. Use la gráfica para aproximar el tiempo en que el objeto alcanza su altura máxima.
(e) Utilice las capacidades de integración de un programa de graficación para aproximar la integral

$$\int_0^{t_0} v(t) dt$$

donde $v(t)$ y t_0 son las que se encontraron en el inciso (d). Esta es la aproximación de la altura máxima del objeto.

- (f) Explique la diferencial entre los resultados de los incisos (b) y (e).

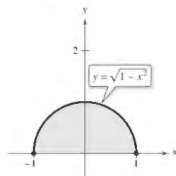
■ PARA INFORMACIÓN ADICIONAL. Para obtener más información sobre este tema, consulte el artículo "What Goes Up Must Come Down: Will Air Resistance Make It Return Sooner, or Later?", de John Lekner, en *Mathematics Magazine*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

2.9 Integración de funciones hiperbólicas

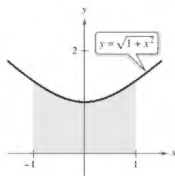
- Desarrollar propiedades de las funciones hiperbólicas.
- Integrar funciones hiperbólicas.
- Desarrollar propiedades de las funciones hiperbólicas inversas.
- Integrar funciones que implican funciones hiperbólicas inversas.

Funciones hiperbólicas

En esta sección se analizará una clase especial de funciones exponenciales llamadas **funciones hiperbólicas**. El nombre *función hiperbólica* surgió de la comparación de la zona de una región semicircular, como se muestra en la figura 2.22, con el área de una región bajo una hipérbola, como se muestra en la figura 2.23.



Círculo: $x^2 + y^2 = 1$.
Figura 2.22



Hipérbola: $-x^2 + y^2 = 1$.
Figura 2.23

La integral para la región semicircular implica una función trigonométrica inversa (circular):

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsen x \right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} \approx 1.571.$$

La integral de la región hiperbólica implica una función hiperbólica inversa:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{senh}^{-1} x \right]_{-1}^1 \approx 2.296.$$

Esta es solo una de las muchas maneras en que las funciones hiperbólicas son similares a las funciones trigonométricas.

Definiciones de las funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{cosh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{tanh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\operatorname{cosh} x}$$

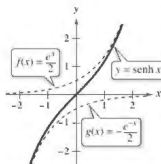
$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}, \quad x \neq 0$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{cosh} x}$$

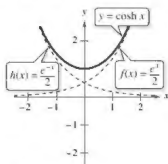
$$\operatorname{coth} x = \frac{1}{\operatorname{tanh} x}, \quad x \neq 0$$

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para más información sobre el desarrollo de las funciones hiperbólicas, vea el artículo "An Introduction to Hyperbolic Functions in Elementary Calculus", por Jerome Rosenthal, en *Mathematics Teacher*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

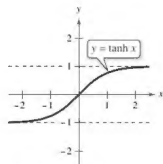
Las gráficas de las seis funciones hiperbólicas y sus dominios y los intervalos se muestran en la figura 2.24. Observe que la gráfica de $\sinh x$ se puede obtener mediante la adición de las coordenadas y correspondientes de las funciones exponenciales $f(x) = \frac{1}{2}e^x$ y $g(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$. Del mismo modo, la gráfica de $\cosh x$ se puede obtener mediante la adición de las correspondientes coordenadas y de las funciones exponenciales $f(x) = \frac{1}{2}e^x$ y $h(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$.



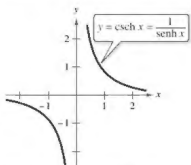
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $(-\infty, \infty)$



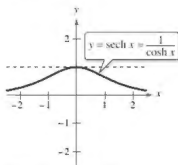
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $[1, \infty)$



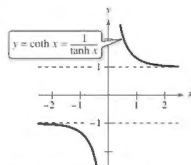
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $(-1, 1)$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $(0, 1]$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Rango: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Figura 2.24

Muchas de las identidades trigonométricas tienen *identidades hiperbólicas* correspondientes. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

IDENTIDADES HIPERBÓLICAS

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$$

$$\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{-1 + \cosh 2x}{2}$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$$

$$\cosh^2 x = \frac{1 + \cosh 2x}{2}$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

■ PARA INFORMACIÓN ADICIONAL

Para entender geoméricamente la relación entre las funciones hiperbólicas y exponenciales, vea el artículo "A Short Proof Linking the Hyperbolic and Exponential Functions", por Michael J. Seery, en *The AMATYC Review*.

Integración de funciones hiperbólicas

Debido a que las funciones hiperbólicas están escritas en términos de e^u y e^{-u} , usted puede fácilmente deducir las reglas de sus integrales indefinidas. El siguiente teorema enumera estas reglas.

TEOREMA 2.10 Integrales de funciones hiperbólicas

Sea u una función derivable de x .

$$1. \int \cosh u \, du = \sinh u + C$$

$$2. \int \sinh u \, du = \cosh u + C$$

$$3. \int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$$

$$4. \int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\operatorname{coth} u + C$$

$$5. \int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$6. \int \operatorname{csch} u \operatorname{coth} u \, du = -\operatorname{csch} u + C$$

EJEMPLO 1 Integrar una función hiperbólica

Encuentre $\int \cosh 2x \sinh^2 2x \, dx$.

Solución

$$\begin{aligned} \int \cosh 2x \sinh^2 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int (\sinh 2x)^2 (2 \cosh 2x) \, dx && u = \sinh 2x \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(\sinh 2x)^3}{3} \right] + C \\ &= \frac{\sinh^3 2x}{6} + C \end{aligned}$$

Funciones hiperbólicas inversas

A diferencia de las funciones trigonométricas, las funciones hiperbólicas no son periódicas. De hecho, al revisar la figura 2.24 se puede ver que cuatro de las seis funciones hiperbólicas son en realidad uno a uno (seno, tangente, cosecante y cotangente hiperbólicas). Así, se puede aplicar el teorema de la existencia de una función inversa para concluir que estas cuatro funciones tienen funciones inversas. Las otras dos (el coseno y la secante hiperbólicas) son uno a uno cuando sus dominios están restringidos a los números reales positivos, y para este dominio restringido también tienen funciones inversas. Debido a que las funciones hiperbólicas están definidas en términos de funcio-

exponenciales, no es sorprendente encontrar que las funciones hiperbólicas inversas se pueden escribir en términos de funciones logarítmicas, como se muestra en el teorema 2.11.

TEOREMA 2.11 Funciones hiperbólicas inversas

Función	Dominio
$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$(-\infty, \infty)$
$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$[1, \infty)$
$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$(-1, 1)$
$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$	$(0, 1]$
$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{ x } \right)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Demostración La demostración de este teorema es una aplicación directa de las propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas. Por ejemplo, para

$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

y

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

puede demostrar que

$$f(g(x)) = x \quad \text{y} \quad g(f(x)) = x$$

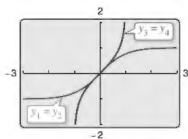
lo que implica que g es la función inversa de f .

Consulte LarsonCalculus.com para el video de Bruce Edwards de esta demostración. 

▶ TECNOLOGÍA Puede utilizar una herramienta de graficación para confirmar gráficamente los resultados del teorema 2.11. Por ejemplo, grafique las siguientes funciones.

$y_1 = \tanh x$	Tangente hiperbólica
$y_2 = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	Definición de tangente hiperbólica
$y_3 = \tanh^{-1} x$	Tangente hiperbólica inversa
$y_4 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	Definición de tangente hiperbólica inversa

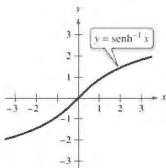
En la figura 2.25 se muestra la pantalla resultante. Como puede ver en las gráficas trazadas, advierta que $y_1 = y_2$ y $y_3 = y_4$. Observe también que la gráfica de y_1 es la reflexión de la gráfica de y_3 en la recta $y = x$.



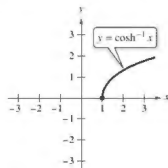
Gráficas de la función tangente hiperbólica y la función tangente hiperbólica inversa.

Figura 2.25

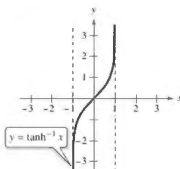
Las gráficas de las funciones hiperbólicas inversas se muestran en la figura 2.26.



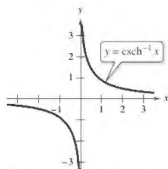
Domínio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $(-\infty, \infty)$



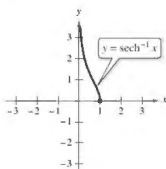
Domínio: $[1, \infty)$
Rango: $[0, \infty)$



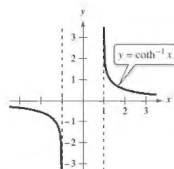
Domínio: $(-1, 1)$
Rango: $(-\infty, \infty)$



Domínio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

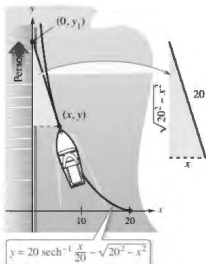


Domínio: $(0, 1]$
Rango: $[0, \infty)$



Domínio: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Figura 2.26



Una persona tiene que caminar unos 41.27 pies para llevar el barco a una posición a 5 pies del muelle.

Figura 2.27

La secante hiperbólica inversa se puede utilizar para definir una curva llamada *tractriz* o *curva de seguimiento*, como se analiza en el ejemplo 5.

EJEMPLO 2 Tractriz

Una persona sostiene una cuerda que está atada a un barco, como se muestra en la figura 2.27. A medida que la persona camina a lo largo del muelle, el barco viaja a lo largo de una tractriz, dada por la ecuación

$$y = a \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

donde a es la longitud de la cuerda. Para $a = 20$ pies, encuentre la distancia que la persona tiene que caminar para llevar el barco a una posición a 5 pies del muelle.

Solución En la figura 2.27, observe que la distancia que la persona ha caminado es

$$\begin{aligned} y_1 &= y + \sqrt{20^2 - x^2} \\ &= \left(20 \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{20} - \sqrt{20^2 - x^2} \right) + \sqrt{20^2 - x^2} \\ &= 20 \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{20}. \end{aligned}$$

Cuando $x = 5$ esta distancia es

$$y_1 = 20 \operatorname{sech}^{-1} \frac{5}{20} = 20 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - (1/4)^2}}{1/4} = 20 \ln(4 + \sqrt{15}) \approx 41.27 \text{ pies.}$$

Por lo tanto, la persona debe caminar unos 41.27 pies para llevar el barco a una posición a 5 pies del muelle. ■

Integración de las funciones hiperbólicas inversas

Las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas, que se asemejan a las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, se enumeran en el teorema 2.13 con las fórmulas de integración correspondientes (en forma logarítmica). Puede verificar cada una de estas fórmulas, según las definiciones logarítmicas de las funciones hiperbólicas inversas.

TEOREMA 2.12 Integración que involucran funciones hiperbólicas inversas

Sea u una función derivable de x

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{|u|} \right| + C$$

EJEMPLO 3

Integrar usando funciones hiperbólicas inversas

..... ▷ a. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-9x^2}} = \int \frac{3 dx}{(3x)\sqrt{4-9x^2}} \quad \int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}}$
 ***COMENTARIO Sea $a = 2$
 $y u = 3.$ $= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2 + \sqrt{4-9x^2}}{|3x|} \right| + C \quad -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2-u^2}}{|u|} \right| + C$

..... ▷ b. $\int \frac{dx}{5-4x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2 dx}{(\sqrt{5})^2 - (2x)^2} \quad \int \frac{du}{u^2-u^2}$
 ***COMENTARIO Sea
 $a = \sqrt{5} \text{ y } u = 2x.$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + 2x}{\sqrt{5} - 2x} \right| \right) + C \quad \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C$
 $= \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + 2x}{\sqrt{5} - 2x} \right| + C$

2.9 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Verificar una identidad En los ejercicios 1-8, verifique la identidad.

1. $\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$

2. $\operatorname{coth}^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$

3. $\cosh^2 x = \frac{1 + \cosh 2x}{2}$

4. $\sinh^2 x = \frac{-1 + \cosh 2x}{2}$

5. $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

6. $e^{2x} = \sinh 2x + \cosh 2x$

7. $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

8. $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$

Encontrar una integral indefinida En los ejercicios 9-20, encuentre la integral indefinida.

9. $\int \cosh 2x \, dx$

10. $\int \operatorname{sech}^2(3x) \, dx$

11. $\int \sinh(1 - 2x) \, dx$

12. $\int \frac{\cosh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

13. $\int \cosh^2(x - 1) \sinh(x - 1) \, dx$

14. $\int \frac{\sinh x}{1 + \sinh^2 x} \, dx$

15. $\int \frac{\cosh x}{\sinh x} \, dx$

16. $\int \operatorname{sech}^2(2x - 1) \, dx$

17. $\int x \operatorname{csch}^2 \frac{x^2}{2} \, dx$

18. $\int \operatorname{sech}^3 x \tanh x \, dx$

19. $\int \frac{\operatorname{csch}(1/x) \coth(1/x)}{x^2} \, dx$

20. $\int \frac{\cosh x}{\sqrt{9 - \sinh^2 x}} \, dx$

Evaluar una integral definida En los ejercicios 21-26, evalúe la integral.

21. $\int_0^{\ln 2} \tanh x \, dx$

22. $\int_0^1 \cosh^2 x \, dx$

23. $\int_0^4 \frac{1}{25 - x^2} \, dx$

24. $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}} \, dx$

25. $\int_0^{\sqrt{2}/4} \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}} \, dx$

26. $\int_0^{\ln 2} 2e^{-x} \cosh x \, dx$

Encontrar una integral indefinida En los ejercicios 27-34, encuentre la integral indefinida utilizando las fórmulas del teorema 2.13.

27. $\int \frac{1}{3 - 9x^2} \, dx$

28. $\int \frac{1}{2x\sqrt{1 - 4x^2}} \, dx$

29. $\int \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}} \, dx$

30. $\int \frac{x}{9 - x^4} \, dx$

31. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}} \, dx$

32. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^3}} \, dx$

33. $\int \frac{-1}{4x - x^2} \, dx$

34. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+8}}$

Evaluar una integral definida En los ejercicios 35-38, evalúe la integral definida utilizando las fórmulas del teorema 5.20.

35. $\int_3^7 \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \, dx$

36. $\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} \, dx$

37. $\int_{-1}^1 \frac{1}{16-9x^2} \, dx$

38. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{25x^2+1}} \, dx$

Ecuaciones diferenciales En los ejercicios 39-42, resuelva la ecuación diferencial.

39. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{80+8x-16x^2}}$

40. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{-4x^2+8x-1}}$

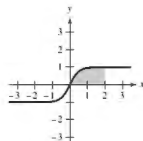
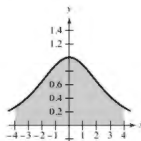
41. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 21x}{5 + 4x - x^2}$

42. $\frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{4x-x^2}$

Área En los ejercicios 43-46, halle el área de la región.

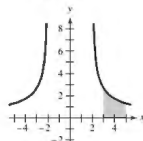
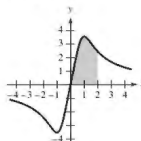
43. $y = \operatorname{sech} \frac{x}{2}$

44. $y = \tanh 2x$



45. $y = \frac{5x}{\sqrt{x^4+1}}$

46. $y = \frac{6}{\sqrt{x^2-4}}$




47. **Reacciones químicas** Los productos químicos A y B se combinan en una proporción de 3 a 1 para formar un compuesto. La cantidad de compuesto que se produce en cualquier momento es proporcional a las cantidades sin cambios de A y B que quedan en la disolución. Así que cuando 3 kilogramos de A se mezclan con 2 kilogramos de B, se tiene

$$\frac{dx}{dt} = k \left(3 - \frac{3x}{4} \right) \left(2 - \frac{x}{4} \right) = \frac{3k}{16} (x^2 - 12x + 32).$$

Un kilogramo del compuesto se forma después de 10 minutos. Encuentre la cantidad formada después de 20 minutos mediante la resolución de la ecuación

$$\int \frac{3k}{16} dt = \int \frac{dx}{x^2 - 12x + 32}.$$

48. **Movimiento vertical** Se deja caer un objeto desde una altura de 400 pies.
- Encuentre la velocidad del objeto en función del tiempo (ignore la resistencia del aire sobre el objeto).
 - Utilice el resultado del inciso (a) para encontrar la función de posición.
 - Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, entonces $dv/dt = -32 + kv^2$, donde -32 pies por segundo por segundo es la aceleración debida a la gravedad y k es una constante. Demuestre que la velocidad v como una función de tiempo es $v(t) = -\sqrt{32/k} \tanh(\sqrt{32k}t)$ realizando $\int dv/(32 - kv^2) = -\int dt$ y simplificando el resultado.
 - Use el resultado del inciso (c) para encontrar $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ y dé su interpretación.
-  (e) Integre la función de velocidad en el inciso (c) y determine la posición s del objeto como una función de t . Use una herramienta de graficación para trazar la función de posición cuando $k = 0.01$ y la función de posición en el inciso (b) en la misma ventana de visualización. Estime el tiempo adicional necesario para que el objeto alcance el nivel del suelo cuando la resistencia del aire no se desprecia.
- Escriba una descripción de lo que usted cree que pasará si k se incrementara. A continuación demuestre su afirmación con un determinado valor de k .
49. **Tractriz** Considere la ecuación de la tractriz

$$y = a \operatorname{sech}^{-1}(x/a) - \sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > 0.$$

- Halle dy/dx .
 - Sea L la recta tangente a la tractriz en el punto P . Cuando L se cruza con el eje y en el punto Q , muestre que la distancia entre P y Q es a .
50. **Tractriz** Demuestre que el barco en el ejemplo 5 siempre está apuntando hacia la persona.

51. **Demostración** Demuestre que

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad -1 < x < 1.$$

52. **Demostración** Demuestre que

$$\operatorname{sech}^{-1} t = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}).$$

53. **Uso de un triángulo rectángulo** Demuestre que $\arctan(\operatorname{senh} x) = \operatorname{arcsen}(\tanh x)$.
54. **Integración** Sea $x > 0$ y $b > 0$. Demuestre que

$$\int_{-b}^b e^{bx} dx = \frac{2 \operatorname{senh} bx}{x}.$$

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

55. Desde el vértice $(0, c)$ de la catenaria $y = c \cosh(x/c)$ se traza una recta L , perpendicular a la tangente a la catenaria en el punto P . Demuestre que la longitud de L interceptado por los ejes es igual a la ordenada Y del punto P .
56. Demostrar o refutar: hay por lo menos una recta perpendicular a la gráfica de $y = \cosh x$ en un punto $(a, \cosh a)$ y que además es normal a la gráfica de $y = \operatorname{senh} x$ en un punto $(c, \operatorname{senh} c)$.

[En un punto sobre una gráfica, la recta normal es la perpendicular a la tangente en ese punto. Además, $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ y $\operatorname{senh} x = (e^x - e^{-x})/2$.]

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.
© The Mathematical Association of America. Reservados todos los derechos

PROYECTO DE TRABAJO

Arco de St. Louis

El arco de entrada a St. Luis, Missouri, fue diseñado utilizando la función coseno hiperbólico. La ecuación utilizada para la construcción del arco fue

$$y = 693.8597 - 68.7672 \cosh 0.0100333x, \\ -299.2239 \leq x \leq 299.2239$$

donde x y y se miden en pies. Las secciones transversales del arco son triángulos equiláteros, y (x, y) traza la ruta de los centros de masa de los triángulos de la sección transversal. Para cada valor de x , el área del triángulo de la sección transversal es

$$A = 125.1406 \cosh 0.0100333x.$$

(Fuente: *Owner's Manual for the Gateway Arch, Saint Louis, MO*, por William Thayer.)

- ¿A qué altura sobre el suelo está el centro del triángulo más alto? (A nivel del suelo, $y = 0$.)
- ¿Cuál es la altura del arco? (Sugerencia: Para un triángulo equilátero, $A = \sqrt{3}c^2$, donde c es la mitad de la base del triángulo, y el centro de masa del triángulo está situado a dos tercios de la altura del triángulo.)
- ¿Qué tan ancho es el arco al nivel del suelo?



2.10 Integración por tablas y otras técnicas de integración

- Evaluar una integral indefinida mediante una tabla de integrales.
- Evaluar una integral indefinida utilizando fórmulas de reducción.
- Evaluar una integral indefinida que implica funciones racionales de seno y coseno.

Integración por tablas

Hasta ahora, en esta unidad se han estudiado varias técnicas de integración que se pueden usar con las reglas básicas de integración. Pero saber cómo utilizar las diversas técnicas no es suficiente. También se necesita saber cuándo usarlas. La integración es, ante todo, un problema de reconocimiento. Es decir, se debe reconocer la regla o la técnica a aplicar para obtener una antiderivada o primitiva. Con frecuencia, una ligera alteración de un integrando requerirá una técnica de integración diferente (o producir una función cuya antiderivada no es una función elemental), como se muestra a continuación.

$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$	Integración por partes
$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$	Regla de potencias
$\int \frac{1}{x \ln x} \, dx = \ln \ln x + C$	Regla de logaritmos
$\int \frac{x}{\ln x} \, dx = ?$	No es una función elemental

- ▷ **TECNOLOGÍA** Un sistema de álgebra computacional consiste, en parte, de una base de datos de fórmulas de integración. La principal diferencia entre el uso de un sistema de álgebra computacional y el uso de tablas de integrales es que con un sistema de álgebra computacional, el equipo busca a través de la base de datos para encontrar un ajuste. Con tablas de integración, *se debe* buscar.

Muchas personas encuentran que las tablas de integrales son un valioso complemento a las técnicas de integración que se tratan en esta unidad. En el apéndice B se pueden encontrar tablas de integrales comunes. La **integración por tablas** no es un "cura-todo" para todas las dificultades que pueden acompañar a la integración, usando tablas de integrales requieren mucho razonamiento e intuición y con frecuencia implica sustitución.

Cada fórmula de integración en el apéndice B se puede desarrollar usando una o más de las técnicas en esta unidad. Debe tratar de verificar varias de las fórmulas. Por ejemplo, la fórmula 4

$$\int \frac{u}{(a + bu)^2} \, du = \frac{1}{b^2} \left(\frac{a}{a + bu} + \ln|a + bu| \right) + C \quad \text{Fórmula 4}$$

se puede verificar usando el método de fracciones parciales. La fórmula 19

$$\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u} \, du = 2\sqrt{a + bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}} \quad \text{Fórmula 19}$$

puede verificarse usando integración por partes, y la fórmula 84

$$\int \frac{1}{1 + e^u} \, du = u - \ln(1 + e^u) + C \quad \text{Fórmula 84}$$

se puede verificar utilizando la sustitución. Tenga en cuenta que las integrales en el apéndice B se clasifican de acuerdo a la forma del integrando. Varias de estas formas se muestran a continuación.

u^n	$(a + bu)$
$(a + bu + cu^2)$	$\sqrt{a + bu}$
$(a^2 \pm u^2)$	$\sqrt{u^2 \pm a^2}$
$\sqrt{a^2 - u^2}$	Funciones trigonométricas
Funciones trigonométricas inversas	Funciones exponenciales
Funciones logarítmicas	

Exploración

Utilice las tablas de integrales en el apéndice B y la sustitución

$$u = \sqrt{x-1}$$

para evaluar la integral en el ejemplo 1. Al hacer esto, usted debe obtener

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int \frac{2 du}{u^2 + 1}$$

¿Esto produce el mismo resultado que el obtenido en el ejemplo 1?

EJEMPLO 1 Integrar por tablas

Encuentre $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

Solución Debido a que la expresión dentro del radical es lineal, debe considerar formas que implican $\sqrt{a+bu}$.

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C \quad \text{Fórmula 17 (} a < 0 \text{)}$$

Sea $a = -1$, $b = 1$ y $u = x$. Entonces $du = dx$, y puede escribir

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = 2 \arctan \sqrt{x-1} + C.$$

EJEMPLO 2 Integrar por tablas

... ▶ Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre $\int x\sqrt{x^4-9} dx$.

Solución Debido a que el radical tiene la forma $\sqrt{u^2-a^2}$, debería considerar la fórmula 26.

$$\int \sqrt{u^2-a^2} du = \frac{1}{2}(u\sqrt{u^2-a^2} - a^2 \ln|u + \sqrt{u^2-a^2}|) + C$$

Sea $u = x^2$ y $a = 3$. Entonces $du = 2x dx$, y obtiene

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x^4-9} dx &= \frac{1}{2} \int \sqrt{(x^2)^2-3^2} (2x) dx \\ &= \frac{1}{4}(x^2\sqrt{x^4-9} - 9 \ln|x^2 + \sqrt{x^4-9}|) + C. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Integrar por tablas

Evalúe $\int_0^2 \frac{x}{1+e^{-x^2}} dx$.

Solución De las formas que implican e^u considere la fórmula

$$\int \frac{du}{1+e^u} = u - \ln(1+e^u) + C. \quad \text{Fórmula 84}$$

Sea $u = -x^2$. Entonces $du = -2x dx$, y obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1+e^{-x^2}} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x dx}{1+e^{-x^2}} \\ &= -\frac{1}{2}[-x^2 - \ln(1+e^{-x^2})] + C \\ &= \frac{1}{2}[x^2 + \ln(1+e^{-x^2})] + C. \end{aligned}$$

Por tanto, el valor de la integral definida es

$$\int_0^2 \frac{x}{1+e^{-x^2}} dx = \left[\frac{1}{2}(x^2 + \ln(1+e^{-x^2})) \right]_0^2 = \frac{1}{2}[4 + \ln(1+e^{-4}) - \ln 2] \approx 1.66.$$

La figura 2.28 muestra la región cuya área está representada por esta integral.

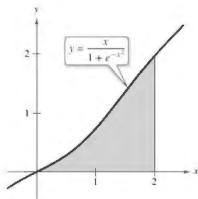


Figura 2.28

Fórmulas de reducción

Varias de las integrales de las tablas de integración tienen la forma

$$\int f(x) dx = g(x) + \int h(x) dx.$$

Estas fórmulas de integración se denominan fórmulas de reducción, ya que reducen una integral dada a la suma de una función y una integral simple.

EJEMPLO 4 Usar una fórmula de reducción

Encuentre $\int x^3 \operatorname{sen} x dx$.

Solución Considere las tres fórmulas siguientes

$$\int u \operatorname{sen} u du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C \quad \text{Fórmula 52}$$

$$\int u^n \operatorname{sen} u du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u du \quad \text{Fórmula 54}$$

$$\int u^n \cos u du = u^n \operatorname{sen} u - n \int u^{n-1} \operatorname{sen} u du \quad \text{Fórmula 55}$$

Utilizando las fórmulas 54, 55 y 52, obtiene

$$\begin{aligned} \int x^3 \operatorname{sen} x dx &= -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x dx \\ &= -x^3 \cos x + 3 \left(x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen} x dx \right) \\ &= -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x - 6 \operatorname{sen} x + C. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Usar una fórmula de reducción

Encuentre $\int \frac{\sqrt{3-5x}}{2x} dx$.

Solución Considere las dos fórmulas siguientes

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bu} + \sqrt{a}} \right| + C \quad \text{Fórmula 17 } (a > 0)$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u} du = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} \quad \text{Fórmula 19}$$

Usando la fórmula 19 con $a = 3$, $b = -5$ y $u = x$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{3-5x}}{x} dx &= \frac{1}{2} \left(2\sqrt{3-5x} + 3 \int \frac{dx}{x\sqrt{3-5x}} \right) \\ &= \sqrt{3-5x} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{3-5x}} \end{aligned}$$

Usando la fórmula 17 con $a = 3$, $b = -5$ y $u = x$, obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{3-5x}}{2x} dx &= \sqrt{3-5x} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3-5x} - \sqrt{3}}{\sqrt{3-5x} + \sqrt{3}} \right| \right) + C \\ &= \sqrt{3-5x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{3-5x} - \sqrt{3}}{\sqrt{3-5x} + \sqrt{3}} \right| + C. \end{aligned}$$

▶ **TECNOLOGÍA** A veces, cuando utiliza sistemas de álgebra computacional obtiene resultados que se ven muy diferentes, pero en realidad son equivalentes. Así es como dos sistemas diferentes evaluaron la integral en el ejemplo 5.

Maple

$$\begin{aligned} &\sqrt{3-5x} - \\ &\sqrt{3} \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3-5x} \sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

Mathematica

$$\begin{aligned} &\sqrt{3-5x} - \\ &\sqrt{3} \operatorname{ArcTanh} \left[\sqrt{1 - \frac{5x}{3}} \right] \end{aligned}$$

Observe que los sistemas de álgebra computacional no incluyen una constante de integración.

Funciones racionales de seno y coseno

EJEMPLO 6

Integrar por tablas

Encuentre $\int \frac{\sen 2x}{2 + \cos x} dx$.

Solución Sustituyendo $2 \sen x \cos x$ por $\sen 2x$ se obtiene

$$\int \frac{\sen 2x}{2 + \cos x} dx = 2 \int \frac{\sen x \cos x}{2 + \cos x} dx.$$

Una verificación de las formas que implican $\sen u$ o $\cos u$ en el apéndice B muestra que no se aplica ninguna de las enumeradas. Así, se pueden considerar formas que implican $a + bu$, por ejemplo,

$$\int \frac{u \, du}{a + bu} = \frac{1}{b^2} (bu - a \ln|a + bu|) + C. \quad \text{Fórmula 3}$$

Sea $a = 2$, $b = 1$ y $u = \cos x$. Entonces $du = -\sen x \, dx$, y se obtiene

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{\sen x \cos x}{2 + \cos x} dx &= -2 \int \frac{\cos x (-\sen x \, dx)}{2 + \cos x} \\ &= -2(\cos x - 2 \ln|2 + \cos x|) + C \\ &= -2 \cos x + 4 \ln|2 + \cos x| + C. \end{aligned}$$

El ejemplo 6 implica una expresión racional de $\sen x$ y $\cos x$. Cuando no se puede encontrar una integral de esta forma en las tablas de integración, pruebe utilizar la siguiente sustitución especial para convertir la expresión trigonométrica a una expresión racional estándar.

Sustitución de funciones racionales de seno y coseno

Para integrales que implican funciones racionales de seno y coseno, la sustitución

$$u = \frac{\sen x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$$

da como resultado

$$\cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad \sen x = \frac{2u}{1 + u^2} \quad \text{y} \quad dx = \frac{2 \, du}{1 + u^2}.$$

Demostración De la sustitución de u , se tiene que

$$u^2 = \frac{\sen^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Resolviendo para $\cos x$, obtiene $\cos x = (1 - u^2)/(1 + u^2)$. Para hallar $\sen x$, escriba $u = \sen x/(1 + \cos x)$ como

$$\sen x = u(1 + \cos x) = u \left(1 + \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \right) = \frac{2u}{1 + u^2}.$$

Por último, para hallar dx , considere $u = \tan(x/2)$. Entonces se obtiene $arctan u = x/2$ y

$$dx = \frac{2 \, du}{1 + u^2}.$$

2.10 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Integrar por tablas En los ejercicios 1 y 2, utilice una tabla de integrales con formas que implican $a + bu$ para encontrar la integral indefinida.

$$1. \int \frac{x^2}{5+x} dx \quad 2. \int \frac{2}{x^2(4+3x)^2} dx$$

Integrar por tablas En los ejercicios 3 y 4, use una tabla de integrales con las formas que implican $\sqrt{a^2 - u^2}$ para encontrar la integral indefinida.

$$3. \int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx \quad 4. \int \frac{\sqrt{64-x^4}}{x} dx$$

Integrar por tablas En los ejercicios 5-8, use una tabla de integrales con formas que implican funciones trigonométricas para encontrar la integral indefinida.

$$5. \int \cos^3 3x dx \quad 6. \int \frac{\sec^4 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$7. \int \frac{1}{\sqrt{x}(1-\cos \sqrt{x})} dx$$

$$8. \int \frac{1}{1+\cot 4x} dx$$

Integrar por tablas En los ejercicios 9 y 10, use una tabla de integrales con formas que implican e^u para encontrar la integral indefinida.

$$9. \int \frac{1}{1+e^{2x}} dx \quad 10. \int e^{-3x} \sin 3x dx$$

Integrar por tablas En los ejercicios 11 y 12, utilice una tabla de integrales con formas que implican $\ln u$ para encontrar la integral indefinida.

$$11. \int x^2 \ln x dx \quad 12. \int (\ln x)^3 dx$$

Usar dos métodos En los ejercicios 13-16, calcule la integral indefinida (a) utilizando tablas de integración y (b) utilizando el método indicado.

Integral	Método
13. $\int x^2 e^{4x} dx$	Integración por partes
14. $\int x^2 \ln x dx$	Integración por partes
15. $\int \frac{1}{x^2(x+1)} dx$	Fracciones parciales
16. $\int \frac{1}{x^2-36} dx$	Fracciones parciales

Encontrar una integral indefinida En los ejercicios 17-38, utilice tablas de integración para encontrar la integral indefinida.

$$17. \int \arccos(\sqrt{x^2+1}) dx \quad 18. \int \arcsen 4x dx$$

$$19. \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}} dx \quad 20. \int \frac{1}{x^2+4x+8} dx$$

$$21. \int \frac{4x}{(2-5x)^2} dx \quad 22. \int \frac{\theta^5}{1+\sin \theta^2} d\theta$$

$$23. \int e^x \arccos e^x dx \quad 24. \int \frac{e^x}{1-\tan e^x} dx$$

$$25. \int \frac{x}{1-\sec x^2} dx \quad 26. \int \frac{1}{t[1+(\ln t)^2]} dt$$

$$27. \int \frac{\cos \theta}{3+2\sin \theta + \sec^2 \theta} d\theta \quad 28. \int x^2\sqrt{2+9x^2} dx$$

$$29. \int \frac{1}{x^2\sqrt{2+9x^2}} dx \quad 30. \int \sqrt{x} \arctan x^{3/2} dx$$

$$31. \int \frac{\ln x}{x(3+2\ln x)} dx \quad 32. \int \frac{e^x}{(1-e^{2x})^{3/2}} dx$$

$$33. \int \frac{x}{(x^2-6x+10)^2} dx \quad 34. \int \sqrt{\frac{5-x}{5+x}} dx$$

$$35. \int \frac{x}{\sqrt{x^4-6x^2+5}} dx \quad 36. \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sec^2 x+1}} dx$$

$$37. \int \frac{e^{3x}}{(1+e^x)^3} dx \quad 38. \int \cot^4 \theta d\theta$$

Evaluar una integral definida En los ejercicios 39-46, utilice tablas de integración para calcular la integral definida.

$$39. \int_0^1 xe^{x^2} dx \quad 40. \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3+2x}} dx$$

$$41. \int_1^2 x^4 \ln x dx \quad 42. \int_0^{\pi/2} x \sin 2x dx$$

$$43. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx \quad 44. \int_0^5 \frac{x^2}{(5+2x)^2} dx$$

$$45. \int_0^{\pi/2} t^3 \cos t dt \quad 46. \int_0^3 \sqrt{x^2+16} dx$$

Verificar una fórmula En los ejercicios 47-52, verifique la fórmula de integración.

$$47. \int \frac{u^2}{(a+bu)^2} du = \frac{1}{b^2} \left(bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a \ln|a+bu| \right) + C$$

$$48. \int \frac{u^n}{\sqrt{a+bu}} du = \frac{2}{(2n+1)b} \left(u^n \sqrt{a+bu} - nu \int \frac{u^{n-1}}{\sqrt{a+bu}} du \right)$$

$$49. \int \frac{1}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} du = \frac{\pm u}{a^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$$

$$50. \int u^n \cos u du = u^n \sin u - n \int u^{n-1} \sin u du$$

$$51. \int \arctan u du = u \arctan u - \ln \sqrt{1+u^2} + C$$

$$52. \int (\ln u)^n du = u(\ln u)^n - n \int (\ln u)^{n-1} du$$

Encontrar o evaluar una integral En los ejercicios 53-60, encuentre o evalúe la integral.

53.
$$\int \frac{1}{2 - 3 \sin \theta} d\theta$$

54.
$$\int \frac{\sec \theta}{1 + \cos^2 \theta} d\theta$$

55.
$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sin \theta + \cos \theta} d\theta$$

56.
$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3 - 2 \cos \theta} d\theta$$

57.
$$\int \frac{\sec \theta}{3 - 2 \cos \theta} d\theta$$

58.
$$\int \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} d\theta$$

59.
$$\int \frac{\sec \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}} d\theta$$

60.
$$\int \frac{4}{\csc \theta - \cot \theta} d\theta$$

Área En los ejercicios 61 y 62, encuentre el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

61. $y = \frac{x}{\sqrt{x+3}}, y = 0, x = 6$

62. $y = \frac{x}{1+e^{2x}}, y = 0, x = 2$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

63. Encontrar un patrón

- (a) Evalúe $\int x^n \ln x \, dx$ para $n = 1, 2$ y 3 . Describa cualquier patrón que observe.
 (b) Escriba una regla general para la evaluación de la integral en el inciso (a), para un entero $n \geq 1$.

64. Fórmula de reducción Describa qué se entiende por fórmula de reducción. Dé un ejemplo.

65. Elegir un método Escriba (si es posible) el método o fórmula de integración que utilizó para encontrar la antiderivada. Explique por qué eligió ese método o fórmula. No integre.

- (a) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$ (b) $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ (c) $\int xe^{x^2} dx$
 (d) $\int xe^x dx$ (e) $\int e^x dx$ (f) $\int e^{2x} \sqrt{e^{2x} + 1} dx$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 67 y 68, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

67. Para utilizar una tabla de integrales, la integral que está evaluando debe aparecer en la tabla.

68. Cuando utiliza una tabla de integrales, quizá tenga que hacer sustituciones para reescribir su integral en la forma que aparece en la tabla.

69. Trabajo Un cilindro hidráulico en una máquina industrial empuja un bloque de acero a una distancia de x pies ($0 \leq x \leq 5$) donde la fuerza variable requerida es $F(x) = 2000xe^{-x}$ libras. Calcule el trabajo realizado al empujar el bloque un máximo de 5 pies a través de la máquina.

70. Trabajo Repita el ejercicio 69, usando

$$F(x) = \frac{500x}{\sqrt{26-x^2}} \text{ libras.}$$

71. Volumen Considere la región acotada por las gráficas de

$$y = x\sqrt{16-x^2}, y = 0, x = 0 \text{ y } x = 4.$$

Encuentre el volumen del sólido generado al girar la región sobre el eje y .

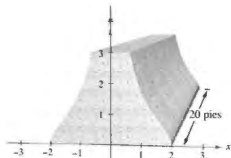
72. Diseñar edificaciones La sección transversal de una viga de concreto prefabricado para un edificio está acotada por las gráficas de las ecuaciones

$$x = \frac{2}{\sqrt{1+y^2}}, x = \frac{-2}{\sqrt{1+y^2}}, y = 0 \text{ y } y = 3$$

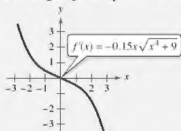
donde x y y se miden en pies. La longitud de la viga es de 20 pies (vea la figura).

(a) Encuentre el volumen V y el peso W de la viga. Suponga que el concreto pesa 148 libras por pie cúbico.

(b) Encuentre el centroide de una sección transversal de la viga.



¿CÓMO LO VE? Utilice la gráfica de f' que se muestra en la figura para responder a lo siguiente.



- (a) Calcule la pendiente de f en $x = -1$. Explique.
 (b) Aproxime los intervalos abiertos sobre los que la gráfica de f es creciente y los intervalos abiertos sobre los que es decreciente. Explique.

73. Población Una población está creciendo de acuerdo con el modelo logístico

$$N = \frac{5000}{1 + e^{4.8-1.9t}}$$

donde t es el tiempo en días. Encuentra la población media en el intervalo $[0, 2]$.

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

74. Evalúe $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}$.

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

Ejercicios de repaso

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Encontrar o evaluar una integral En los ejercicios 1-8, use las reglas básicas de integración para encontrar o evaluar la integral.

1. $\int x\sqrt{x^2-36} dx$

2. $\int xe^{x^2-1} dx$

3. $\int \frac{x}{x^2-49} dx$

4. $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$

5. $\int_1^e \frac{\ln(2x)}{x} dx$

6. $\int_{3/2}^2 2x\sqrt{2x-3} dx$

7. $\int \frac{100}{\sqrt{100-x^2}} dx$

8. $\int \frac{2x}{x-3} dx$

Usar la integración por partes En los ejercicios 9-16, utilice la integración por partes para encontrar la integral indefinida.

9. $\int xe^{3x} dx$

10. $\int x^3e^x dx$

11. $\int e^{2x} \sin 3x dx$

12. $\int x\sqrt{x-1} dx$

13. $\int x^2 \sin 2x dx$

14. $\int \ln\sqrt{x^2-4} dx$

15. $\int x \arcsen 2x dx$

16. $\int \arctan 2x dx$

Encontrar una integral trigonométrica En los ejercicios 17-22, calcule la integral trigonométrica.

17. $\int \cos^3(\pi x - 1) dx$

18. $\int \sen^2 \frac{\pi x}{2} dx$

19. $\int \sec^4 \frac{x}{2} dx$

20. $\int \tan \theta \sec^4 \theta d\theta$

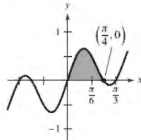
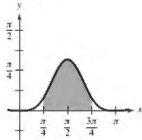
21. $\int \frac{1}{1-\sen \theta} d\theta$

22. $\int \cos 2\theta(\sen \theta + \cos \theta)^2 d\theta$

Área En los ejercicios 23 y 24, encuentre el área de la región.

23. $y = \sen^4 x$

24. $y = \sen 3x \cos 2x$



Usar la sustitución trigonométrica En los ejercicios 25-30, utilice sustitución trigonométrica para encontrar o evaluar la integral.

25. $\int \frac{-12}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx$

26. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx, x > 3$

27. $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}} dx$

28. $\int \sqrt{25-9x^2} dx$

29. $\int_0^1 \frac{6x^3}{\sqrt{16+x^2}} dx$

30. $\int_3^4 x^3 \sqrt{x^2-9} dx$

Usar métodos diferentes En los ejercicios 31 y 32, encuentre la integral indefinida utilizando cada método.

31. $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}} dx$

(a) Sustitución trigonométrica

(b) Sustitución: $u^2 = 4 + x^2$ (c) Integración por partes: $dv = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} dx$

32. $\int x\sqrt{4+x} dx$

(a) Sustitución trigonométrica

(b) Sustitución: $u^2 = 4 + x$ (c) Sustitución: $u = 4 + x$ (d) Integración por partes: $dv = \sqrt{4+x} dx$

Usar fracciones parciales En los ejercicios 33-38, use fracciones parciales para encontrar la integral indefinida.

33. $\int \frac{x-39}{x^2-x-12} dx$

34. $\int \frac{5x-2}{x^2-x} dx$

35. $\int \frac{x^2+2x}{x^3-x^2+x-1} dx$

36. $\int \frac{4x-2}{3(x-1)^2} dx$

37. $\int \frac{x^2}{x^2+5x-24} dx$

38. $\int \frac{\sec^2 \theta}{\tan(\theta-1)} d\theta$

Integrar por tablas En los ejercicios 39-46, utilice tablas de integración para encontrar o evaluar la integral.

39. $\int \frac{x}{(4+5x)^2} dx$

40. $\int \frac{x}{\sqrt{4+5x}} dx$

41. $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{x}{1+\sen x^2} dx$

42. $\int_0^1 \frac{x}{1+e^{x^2}} dx$

43. $\int \frac{x}{x^2+4x+8} dx$

44. $\int \frac{3}{2x\sqrt{9x^2-1}} dx, x > \frac{1}{3}$

45. $\int \frac{1}{\sen \pi x \cos \pi x} dx$

46. $\int \frac{1}{1+\tan \pi x} dx$

47. Verificar la fórmula Verifique la fórmula de reducción

$$\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx.$$

48. Verificar la fórmula Verifique la fórmula de reducción

$$\int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx.$$

Encontrar una integral indefinida En los ejercicios 49-56, encuentre la integral indefinida usando cualquier método.

49. $\int \theta \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta$

50. $\int \frac{\csc \sqrt{2x}}{\sqrt{x}} dx$

51. $\int \frac{x^{1/4}}{1+x^{1/2}} dx$

52. $\int \sqrt{1+\sqrt{x}} dx$

53. $\int \sqrt{1+\cos x} dx$

54. $\int \frac{3x^3+4x}{(x^2+1)^2} dx$

55. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x) dx$

56. $\int (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)^2 d\theta$

Ecuaciones diferenciales En los ejercicios 57-60, resuelva la ecuación diferencial usando cualquier método.

57. $\frac{dy}{dx} = \frac{25}{x^2 - 25}$

58. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2x}$

59. $y' = \ln(x^2 + x)$

60. $y' = \sqrt{1-\cos \theta}$

Evaluar una integral definida En los ejercicios 61-66, evalúe la integral definida utilizando cualquier método. Use un programa de graficación para verificar su resultado.

61. $\int_2^{\sqrt{3}} x(x^2 - 4)^{3/2} dx$

62. $\int_0^1 \frac{x}{(x-2)(x-4)} dx$

63. $\int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx$

64. $\int_0^2 xe^{3x} dx$

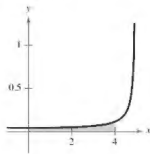
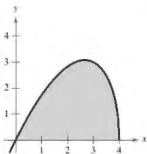
65. $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x dx$

66. $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{4+x}} dx$

Área En los ejercicios 67 y 68, encuentre el área de la región.

67. $y = x\sqrt{4-x}$

68. $y = \frac{1}{25-x^2}$



Centroide En los ejercicios 69 y 70, encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

69. $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = 0$

70. $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $(x-4)^2 + y^2 = 4$

Longitud de arco En los ejercicios 71 y 72, aproxime a dos cifras decimales la longitud de arco de la curva en el intervalo dado.

Función Intervalo

71. $y = \operatorname{sen} x$ [0, π]

72. $y = \operatorname{sen}^2 x$ [0, π]

73. Valor presente El consejo de administración de una sociedad anónima está calculando el precio a pagar por un negocio que se pronostica producirá un flujo continuo de ganancia de \$500,000 por año. El dinero va a ganar una tasa nominal del 5% anual compuesto en forma continua. ¿Cuál es el valor presente del negocio

(a) para 20 años?

(b) para siempre (a perpetuidad)?

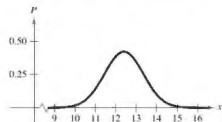
(Nota: El valor presente durante t_0 años es de $\int_0^{t_0} 500,000e^{-0.05t} dt$.)

74. Volumen Encuentre el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de $y = xe^{x^2}$, $y = 0$ y $x = 0$ alrededor del eje x .

75. Probabilidad Las longitudes promedio (de pico a cola) de diferentes especies de curruacas en el este de Estados Unidos tienen una distribución normal aproximada con una media de 12.9 centímetros y una desviación estándar de 0.95 centímetros (vea la figura). La probabilidad de que una curruaca seleccionada al azar tenga una longitud entre a y b centímetros es de

$$P(a \leq x \leq b) = \frac{1}{0.95\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}(x-12.9)^2/0.905} dx.$$

Use una herramienta de graficación para aproximar la probabilidad de que una curruaca seleccionada al azar tenga una longitud de (a) 13 centímetros o más, y (b) de 15 centímetros o más. (Fuente: Peterson's Field Guide: Eastern Birds)



Encontrar una integral indefinida En los ejercicios 76-78, encuentre la integral indefinida.

76. $\int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx$

77. $\int \frac{\sec x}{1 + \cos x} dx$

78. $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx$

Evaluar una integral definida En los ejercicios 79-82, evalúe la integral definida.

79. $\int_1^4 \frac{2x + 1}{2x} dx$

80. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

81. $\int_0^{\pi/3} \sec \theta d\theta$

82. $\int_0^{\pi} \tan \frac{\theta}{3} d\theta$

Encontrar una integral indefinida En los ejercicios 83-86, encuentre la integral indefinida.

83. $\int xe^{1-x^2} dx$

84. $\int x^2 e^{x^3+1} dx$

85. $\int \frac{e^{4x} - e^{2x} + 1}{e^x} dx$

86. $\int \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} dx$

Evaluar una integral definida En los ejercicios 87-90, evalúe la integral definida.

87. $\int_0^1 xe^{-3x^2} dx$

88. $\int_{1/2}^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

89. $\int_1^3 \frac{e^x}{e^x - 1} dx$

90. $\int_0^2 \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx$

91. Área Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de $y = 2e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 2$.

92. Depreciación El valor V de un artículo t años después de su adquisición es $V = 9000e^{-0.1t}$ para $0 \leq t \leq 5$.

- (a) Utilice un programa de graficación para trazar la función.
 (b) Halle las tasas de variación de V respecto a t cuando $t = 1$ y $t = 4$.
 (c) Utilice un programa de graficación para trazar las rectas tangentes a la función cuando $t = 1$ y $t = 4$.

Dibujar un gráfico En los ejercicios 93 y 94, dibuje a mano la gráfica de la función.

93. $y = 3^{x/2}$

94. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

Encontrar una derivada En los ejercicios 95-100, encuentre la derivada de la función.

95. $f(x) = 3^{x-1}$

96. $f(x) = 5^{3x}$

97. $y = x^{2x+1}$

98. $f(x) = x(4^{-3x})$

99. $g(x) = \log_3 \sqrt{1-x}$

100. $h(x) = \log_5 \frac{x}{x-1}$

Encontrar una integral indefinida En los ejercicios 101 y 102, encuentre la integral indefinida.

101. $\int (x+1)5^{(x+1)^2} dx$

102. $\int \frac{2^{-1/t}}{t^2} dt$

Encontrar una integral indefinida En los ejercicios 103-108, encuentre la integral indefinida.

103. $\int \frac{1}{e^{2x} + e^{-2x}} dx$

104. $\int \frac{1}{3 + 25x^2} dx$

105. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

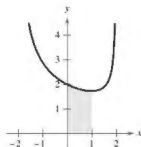
106. $\int \frac{1}{x\sqrt{9x^2-49}} dx$

107. $\int \frac{\arctan(x/2)}{4+x^2} dx$

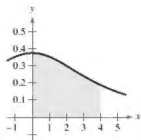
108. $\int \frac{\arcsen 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

Área En los ejercicios 109 y 110, encuentre el área de la región.

109. $y = \frac{4-x}{\sqrt{4-x^2}}$



110. $y = \frac{6}{16+x^2}$



Encontrar una integral indefinida En los ejercicios 111-116, encuentre la integral indefinida.

111. $\int x^2 \operatorname{sech}^2 x^3 dx$

112. $\int \sinh 6x dx$

113. $\int \frac{\operatorname{sech}^2 x}{\tanh x} dx$

114. $\int \operatorname{csch}^4(3x) \operatorname{coth}(3x) dx$

115. $\int \frac{1}{9-4x^2} dx$

116. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$

Solución de problemas

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

1. Fórmulas de Wallis

(a) Evalúe las integrales

$$\int_{-1}^1 (1-x^2) dx \quad \text{y} \quad \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 dx.$$

(b) Use las fórmulas de Wallis para demostrar que

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \frac{2^{2n+1}(\pi)^2}{(2n+1)!}$$

para todos los enteros positivos n .

2. Demostración

(a) Evalúe las integrales

$$\int_0^1 \ln x dx \quad \text{y} \quad \int_0^1 (\ln x)^2 dx.$$

(b) Demuestre que

$$\int_0^1 (\ln x)^n dx = (-1)^n n!$$

para todos los enteros positivos n .

3. Encontrar un valor

Encuentre el valor de la constante positiva c tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = 9.$$

4. Encontrar un valor

Encuentre el valor de la constante positiva c tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-c}{x+c} \right)^x = \frac{1}{4}.$$

5. Longitud

La recta $x=1$ es tangente al círculo unitario en A . La longitud del segmento QA es igual a la longitud de arco circular PA (ver figura). Demostrar que la longitud del segmento OR se aproxima a 2 conforme P se aproxima a A .

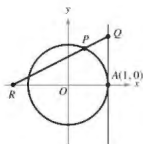


Figura para 5

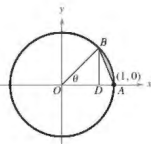


Figura para 6

6. Encontrar un límite

El segmento BD es la altura del $\triangle OAB$. Sea R la relación del área del $\triangle DAB$ a la de la región sombreada formada mediante la supresión de $\triangle OAB$ desde el sector circular subtendido por el ángulo θ (vea la figura). Encuentre $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} R$.

7. Área

Considere el problema de encontrar el área de la región acotada por el eje x , la recta $x=4$ y la curva

$$y = \frac{x^2}{(x^2+9)^{3/2}}.$$

(a) Use un programa de graficación para trazar la región y aproximar su área.

(b) Utilice una sustitución trigonométrica adecuada para encontrar el área exacta.

(c) Utilice la sustitución $x = 3 \sec u$ para encontrar el área exacta y verifique que se obtiene la misma respuesta del inciso (b).

8. Área

Utilice la sustitución $u = \tan(x/2)$ para encontrar el área de la región sombreada debajo de la gráfica de

$$y = \frac{1}{2 + \cos x} \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi/2 \quad (\text{vea la figura})$$

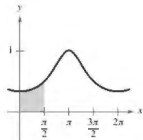


Figura para 8

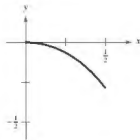


Figura para 9

9. Longitud de arco

Encuentre la longitud del arco de la gráfica de la función $y = \ln(1-x^2)$ en el intervalo $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ (vea la figura).

10. Función inversa y área

(a) Sea $y = f^{-1}(x)$ la función inversa de f . Utilice integración por partes para derivar la fórmula

$$\int f^{-1}(x) dx = x f^{-1}(x) - \int f(y) dy.$$

(b) Utilice la fórmula del inciso (a) para encontrar la integral

$$\int \arcsen x dx.$$

(c) Utilice la fórmula del inciso (a) para encontrar el área bajo la gráfica de $y = \ln x$, $1 \leq x \leq e$ (vea la figura).

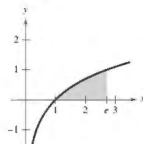


Figura para 12

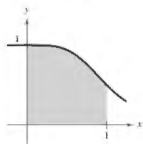


Figura para 13

11. **Área** Factorice el polinomio $p(x) = x^4 + 1$ y a continuación encuentre el área bajo la gráfica de

$$y = \frac{1}{x^4 + 1}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{vea la figura}).$$

12. **Descomponer en fracciones parciales** Suponga que el denominador de una fracción racional se puede factorizar en factores lineales distintos $D(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$ para un número entero positivo n y distintos números reales c_1, c_2, \dots, c_n . Si N es un polinomio de grado menor que n , demuestre que

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{P_1}{x - c_1} + \frac{P_2}{x - c_2} + \cdots + \frac{P_n}{x - c_n}$$

donde $P_k = N(c_k)/D'(c_k)$ para $k = 1, 2, \dots, n$. Observe que esta es la descomposición en fracciones parciales de $N(x)/D(x)$.

13. **Descomponer en fracciones parciales** Utilice el resultado del ejercicio 14 para encontrar la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^4 - 13x^2 + 12x}$$

14. **Evaluar una integral**

(a) Utilice la sustitución $u = \frac{\pi}{2} - x$ para evaluar la integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx.$$

(b) Sea n un entero positivo. Evalúe la integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx.$$

15. **Funciones elementales** Algunas funciones elementales, como $f(x) = \sin(x^2)$, no tienen antiderivadas que son funciones elementales. Joseph Liouville demostró que

$$\int \frac{e^x}{x} dx$$

no tiene una antiderivada elemental. Utilice este hecho para demostrar que

$$\int \frac{1}{\ln x} dx$$

no es elemental.

16. **Cohete** La velocidad (en metros por segundo) de un cohete cuya masa inicial (incluido el combustible) está dada por

$$v = gt + u \ln \frac{m}{m - rt}, \quad t < \frac{m}{r}$$

donde u es la velocidad de expulsión del combustible, r es la velocidad a la que se consume el combustible y $g = -32$ pies por segundo cuadrado es la aceleración de la gravedad. Encuentre la ecuación de la posición de un cohete para los que $m = 50,000$ libras, $u = 12,000$ pies por segundo y $r = 400$ libras por segundo. ¿Cuál es la altura del cohete cuando $t = 100$ segundos? (Suponga que el cohete fue disparado desde el nivel del suelo y se mueve directamente hacia arriba.)

17. **Demostración** Suponga que $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$ y las segundas derivadas de f y g son continuas sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. Demuestre que

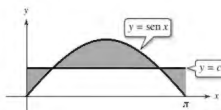
$$\int_a^b f(x)g''(x) dx = \int_a^b f''(x)g(x) dx.$$

18. **Demostración** Suponga que $f(a) = f(b) = 0$ y existen las segundas derivadas de f en el intervalo cerrado $[a, b]$. Demuestre que

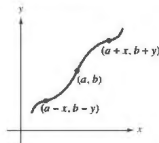
$$\int_a^b (x - a)(x - b)f''(x) dx = 2 \int_a^b f(x) dx.$$

19. **Volumen** Considere la región sombreada entre la gráfica de $y = \sin x$, donde $0 \leq x \leq \pi$, y la recta $y = c$, donde $0 \leq c \leq 1$ (vea la figura). Se forma un sólido mediante la revolución de la región sobre la recta $y = c$.

- (a) ¿Para qué valor de c el sólido no tiene volumen mínimo?
(b) ¿Para qué valor de c el sólido no tiene volumen máximo?



20. **Simetría** Recuerde que la gráfica de una función $y = f(x)$ es simétrica con respecto al origen, siempre y cuando (x, y) sea un punto sobre la gráfica, y $(-x, -y)$ sea también un punto sobre la gráfica. La gráfica de la función $y = f(x)$ es **simétrica respecto al punto (a, b)** , siempre que $(a - x, b - y)$ sea un punto sobre la gráfica y sea también un punto sobre la gráfica $(a + x, b + y)$, como se muestra en la figura.



- (a) Dibuje la gráfica de $y = \sin x$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$. Escriba un breve párrafo explicando cómo la simetría de la gráfica respecto al punto $(\pi, 0)$ le permite concluir que

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0.$$

- (b) Trace la gráfica de $y = \sin x + 2$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$. Utilice la simetría de la gráfica con respecto al punto $(\pi, 2)$ para evaluar la integral

$$\int_0^{2\pi} (\sin x + 2) dx.$$

- (c) Trace la gráfica de $y = \arccos x$ sobre el intervalo $[-1, 1]$. Utilice la simetría de la gráfica para calcular la integral

$$\int_{-1}^1 \arccos x dx.$$

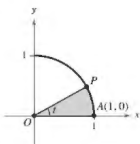
- (d) Evalúe la integral $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + (\tan x)\sqrt{x}} dx$.

21. Demostración

- (a) Utilice un programa de graficación para trazar $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ sobre el intervalo $[-1, 1]$.
- (b) Utilice la gráfica para estimar $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- (c) Utilice la definición de derivada para demostrar su respuesta al inciso (b).

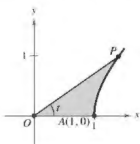
22. Áreas y ángulos

- (a) Sea $P(\cos t, \sin t)$ un punto en el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ en el primer cuadrante (vea la figura). Demuestre que t es igual a dos veces el área del sector circular sombreado AOP .

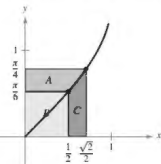


- (b) Sea $P(\cosh t, \sinh t)$ un punto de la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$ en el primer cuadrante (vea la figura). Demuestre que t es igual a dos veces el área de la región sombreada de AOP . Comience mostrando que el área de la región sombreada de AOP está dada por la fórmula

$$A(t) = \frac{1}{2} \cosh t \sinh t - \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1} \, dx.$$



23. Área Considere las tres regiones A, B y C determinadas por la gráfica de $f(x) = \arcsen x$, como se muestra en la figura.



- (a) Calcule las áreas de las regiones A y B.
- (b) Utilice las respuestas del inciso (a) para evaluar la integral

$$\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \arcsen x \, dx.$$

- (c) Utilice los métodos del inciso (a) para evaluar la integral

$$\int_1^3 \ln x \, dx.$$

- (d) Utilice los métodos del inciso (a) para evaluar la integral

$$\int_1^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx.$$

24. Distancia Sea L la recta tangente a la gráfica de la función $y = \ln x$ en el punto (a, b) . Demuestre que la distancia entre b y c siempre es igual a 1.

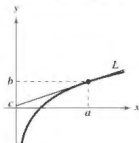


Figura para 10

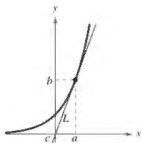


Figura para 11

25. Distancia Sea L la recta tangente a la gráfica de la función $y = e^t$ en el punto (a, b) . Demuestre que la distancia entre a y c siempre es igual a 1.

26. Función gudermanniana La función gudermanniana de x es $gd(x) = \arctan(\sinh x)$.

- (a) Grafique gd utilizando una herramienta de graficación.
- (b) Demuestre que gd es una función impar.
- (c) Demuestre que gd es monótona y por lo tanto tiene una inversa.
- (d) Encuentre el punto de inflexión de gd .
- (e) Verifique que $gd(x) = \arcsen(\tanh x)$.
- (f) Verifique que $gd(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cosh t}$.

27. Área Use integración por sustitución para encontrar el área bajo la curva

$$y = \frac{1}{\sqrt{x} + x}$$

$$\text{entre } x = 1 \text{ y } x = 4.$$

28. Área Use integración por sustitución para encontrar el área bajo la curva

$$y = \frac{1}{\sec^2 x + 4 \cos^2 x}$$

$$\text{entre } x = 0 \text{ y } x = \frac{\pi}{4}.$$

29. Aproximar una función

- (a) Utilice un programa de graficación para comparar la gráfica de la función $y = e^x$ con la gráfica de cada función dada.

$$(i) y_1 = 1 + \frac{x}{1!}$$

$$(ii) y_2 = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$$

$$(iii) y_3 = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

(b) Identifique el patrón de polinomios sucesivos en el inciso (a), extienda el patrón un término más y compare la gráfica de la función polinomial resultante con la gráfica de $y = e^x$.

(c) ¿Qué cree que implica este patrón?

- 30. Hipoteca** La hipoteca de 120.000 dólares de una casa durante 35 años a $9\frac{1}{2}\%$ tiene un pago mensual de \$985.93. Parte del pago mensual va al cargo por intereses sobre el saldo pendiente de pago, y el resto del pago se utiliza para reducir el capital. La cantidad que va al interés es

$$u = M - \left(M - \frac{Pr}{12}\right) \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}$$

y la cantidad que se destina a la reducción del capital es

$$v = \left(M - \frac{Pr}{12}\right) \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}.$$

En estas fórmulas, P es la cantidad de la hipoteca, r es la tasa de interés (en forma decimal), M es el pago mensual y t es el tiempo en años.

- (a) Utilice un programa de graficación para trazar cada función en la misma ventana de visualización. (La ventana de visualización debe mostrar los 35 años de pagos de hipoteca.)
- (b) En los primeros años de la hipoteca, ¿cuál es el propósito de la mayor parte del pago mensual? Aproxime el momento en que el pago mensual se divide por igual entre el interés y la reducción del capital.
- (c) Utilice las gráficas del inciso (a) para hacer una suposición sobre la relación entre las pendientes de las rectas tangentes a las dos curvas para un determinado valor de t . Dé un argumento analítico para verificar su suposición. Encuentre $u'(15)$ y $v'(15)$.
- (d) Repita los incisos (a) y (b) para un periodo de reembolso de 20 años ($M = \$1118.56$). ¿Qué se puede concluir?

Aplicaciones de la integral

- 3.1 Área de una región entre dos curvas
- 3.2 Volumen: método de los discos
- 3.3 Volumen: método de las capas
- 3.4 Longitud de arco y superficies de revolución
- 3.5 Trabajo
- 3.6 Momentos, centros de masa y centroides
- 3.7 Presión y fuerza de un fluido
- 3.8 Integrales impropias



Poner un módulo espacial en órbita



Energía de las mareas



Saturno



Torre de agua



Diseño de edificaciones

3.1 Área de una región entre dos curvas

- Encontrar el área de una región entre dos curvas utilizando la integración.
- Encontrar el área de una región entre las curvas de intersección utilizando la integración.
- Describir la integración como un proceso de acumulación.

Área de una región entre dos curvas

Con algunas modificaciones, se puede extender la aplicación de las integrales definidas del área de una región *bajo* una curva al área de una región *entre* dos curvas. Consideremos dos funciones f y g que son continuas en el intervalo $[a, b]$. Además, las gráficas de f y g se encuentran por encima del eje x , y la gráfica de g se encuentra por debajo de la gráfica de f como se muestra en la figura 3.1. Puede interpretarse geoméricamente el área de la región entre las gráficas como el área de la región bajo la gráfica de g restada del área de la región bajo la gráfica de f como se muestra en la figura 3.2.

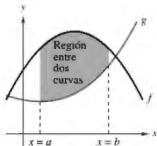


Figura 3.1

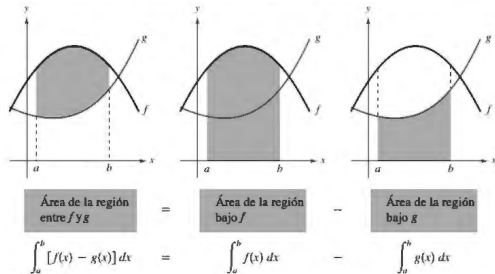


Figura 3.2

Para verificar la razonabilidad del resultado que se muestra en la figura 3.2, se puede dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de ancho Δx . Entonces, como se muestra en la figura 3.3, el dibujo de un **rectángulo representativo** de ancho Δx y alto $f(x_i) - g(x_i)$, donde x_i se encuentra en el i -ésimo subintervalo. El área de este rectángulo representativo es

$$\Delta A_i = (\text{alto})(\text{ancho}) = [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x.$$

Mediante la suma de las áreas de los n rectángulos y tomando el límite cuando $\|\Delta\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x.$$

Debido a que f y g son continuas en $[a, b]$, $f - g$ también es continua en $[a, b]$ y existe el límite. Por lo que el área de la región es

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \end{aligned}$$

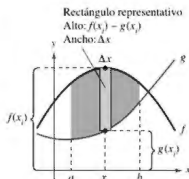


Figura 3.3

..... ▷
 ••• **COMENTARIO** Recuerde de la sección 1.3 que $\|\Delta\|$ es la norma de la partición. En una partición normal, los enunciados $\|\Delta\| \rightarrow 0$ y $n \rightarrow \infty$ son equivalentes.

Área de una región entre dos curvas

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para toda x en $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por las gráficas de f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

En la figura 3.1, las gráficas de f y g se muestran por encima del eje x . Sin embargo, esto no es necesario. El mismo integrando $[f(x) - g(x)]$ se puede utilizar mientras f y g sean continuas y $g(x) \leq f(x)$ para toda x en el intervalo $[a, b]$. Esto se resume gráficamente en la figura 3.4. Observe en la figura 3.4 que la altura de un rectángulo representativo es $f(x) - g(x)$ independientemente de la posición relativa del eje x .

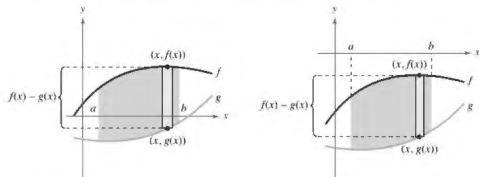


Figura 3.4

Los rectángulos representativos se utilizan a lo largo de esta unidad en diversas aplicaciones de la integral. Un rectángulo vertical (de ancho Δx) implica la integración respecto a x , mientras que un rectángulo horizontal (de ancho Δy) implica la integración respecto a y .

EJEMPLO 1

Encontrar el área de una región entre dos curvas

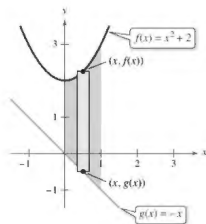
Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 2$, $y = -x$, $x = 0$ y $x = 1$.

Solución Sea $g(x) = -x$ y $f(x) = x^2 + 2$. Entonces $g(x) \leq f(x)$ para toda x en $[0, 1]$ como se muestra en la figura 3.5. Por lo que el área del rectángulo representativo es

$$\begin{aligned} \Delta A &= [f(x) - g(x)] \Delta x \\ &= [(x^2 + 2) - (-x)] \Delta x \end{aligned}$$

y el área de la región es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx \\ &= \int_0^1 [(x^2 + 2) - (-x)] dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 \\ &= \frac{17}{6}. \end{aligned}$$



Región acotada por la gráfica de f , la gráfica g , $x = 0$ y $x = 1$.

Figura 3.5

Área de la región de la intersección entre las curvas

En el ejemplo 1, las gráficas de $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = -x$ no se intersecan y los valores de a y b están dados en forma explícita. Un problema muy común implica el área de una región acotada por dos gráficas que se *intersecan*, donde se deben calcular los valores de a y b .

EJEMPLO 2 Región entre dos gráficas que se intersecan

Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x$

Solución En la figura 3.6, observe que las gráficas de f y g tienen dos puntos de intersección. Para encontrar las coordenadas x de estos puntos, iguale $f(x)$ y $g(x)$ y despeje a x .

$$2 - x^2 = x$$

$$-x^2 - x + 2 = 0$$

$$-(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = -2 \text{ o } 1$$

Igualé $f(x)$ y $g(x)$.

Escriba en forma general.

Factorice.

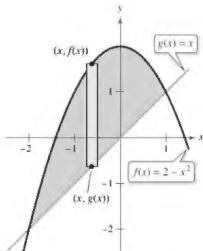
Resuelva para x .

Por lo tanto, $a = -2$ y $b = 1$. Como $g(x) \leq f(x)$ para toda x en el intervalo $[-2, 1]$, el rectángulo representativo tiene una superficie de

$$\Delta A = [f(x) - g(x)] \Delta x = [(2 - x^2) - x] \Delta x$$

y el área de la región es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 [(2 - x^2) - x] dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$



Región acotada por la gráfica de f y la gráfica de g .

Figura 3.6

EJEMPLO 3 Región entre dos gráficas que se intersecan

Las curvas de seno y coseno se cruzan un número infinito de veces, delimitando regiones de áreas iguales, como se muestra en la figura 3.7. Encuentre el área de una de estas regiones.

Solución Sea $g(x) = \cos x$ y $f(x) = \sin x$. Entonces $g(x) \leq f(x)$ para toda x en el intervalo correspondiente a la región sombreada en la figura 3.7. Para encontrar los dos puntos de intersección en este intervalo, iguale $f(x)$ y $g(x)$ y resuelva para x .

$$\sin x = \cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$$\tan x = 1$$

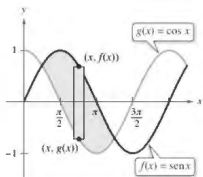
$$x = \frac{\pi}{4} \text{ o } \frac{5\pi}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

Igualé $f(x)$ y $g(x)$.

Divida cada lado entre $\cos x$.

Identidad trigonométrica

Resuelva para x .



Una de las regiones delimitadas por las gráficas de las funciones seno y coseno.

Figura 3.7

Por lo tanto, $a = \pi/4$ y $b = 5\pi/4$. Ya que $\sin x \geq \cos x$ para toda x en el intervalo $[\pi/4, 5\pi/4]$, el área de la región es

$$\begin{aligned} A &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} [\sin x - \cos x] dx \\ &= \left[-\cos x - \sin x \right]_{\pi/4}^{5\pi/4} \\ &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Para encontrar el área de la región entre dos curvas que se intersecan en más de dos puntos, en primer lugar determine todos los puntos de intersección. Después, compruebe que la curva está por encima de la otra en cada intervalo determinado por estos puntos, como se muestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Curvas que se intersecan en más de dos puntos

Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre el área de la región entre las gráficas de

$$f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x \quad \text{y} \quad g(x) = -x^2 + 2x.$$

Solución Comience igualando $f(x)$ y $g(x)$ y despeje a x . Esto produce los valores en todos los puntos de intersección de las dos gráficas.

$$3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x$$

$$3x^3 - 12x = 0$$

$$3x(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x = -2, 0, 2$$

Igualé $f(x)$ y $g(x)$.

Escriba la forma general.

Factorice.

Despeje x .

Así, las dos gráficas se intersecan cuando $x = -2, 0$ y 2 . En la figura 3.8, observe que $g(x) \leq f(x)$ en el intervalo $[-2, 0]$. Sin embargo, las dos gráficas cambian en el origen, y $f(x) \leq g(x)$ en el intervalo $[0, 2]$. Por lo tanto, necesita dos integrales, una para el intervalo $[-2, 0]$ y otra para el intervalo $[0, 2]$.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^0 [f(x) - g(x)] dx + \int_0^2 [g(x) - f(x)] dx \\ &= \int_{-2}^0 (3x^3 - 12x) dx + \int_0^2 (-3x^3 + 12x) dx \\ &= \left[\frac{3x^4}{4} - 6x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{3x^4}{4} + 6x^2 \right]_0^2 \\ &= -(12 - 24) + (-12 + 24) \\ &= 24 \end{aligned}$$

•••▷

••••COMENTARIO En el ejemplo 4, observe que obtiene un resultado incorrecto cuando integra de -2 a 2 . Dicha integración produce

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 [f(x) - g(x)] dx &= \int_{-2}^2 (3x^3 - 12x) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

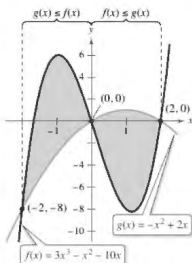
Cuando la gráfica de una función de y es una frontera de una región, a menudo es conveniente utilizar rectángulos representativos *horizontales* y encontrar el área mediante la integración respecto a y . En general, para determinar el área entre dos curvas, se puede utilizar

$$A = \int_{y_1}^{y_2} \underbrace{[(\text{curva superior}) - (\text{curva inferior})]}_{\text{en la variable } x} dx \quad \text{Rectángulos verticales}$$

o

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{[(\text{curva derecha}) - (\text{curva izquierda})]}_{\text{en la variable } y} dy \quad \text{Rectángulos horizontales}$$

donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son puntos adyacentes de intersección de las dos curvas implicadas o puntos en las líneas frontera especificadas.



En $[-2, 0]$, $g(x) \leq f(x)$, y en $[0, 2]$, $f(x) \leq g(x)$.

Figura 3.8

EJEMPLO 5 Rectángulos representativos horizontales

Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de $x = 3 - y^2$ y $x = y + 1$.

Solución Considere

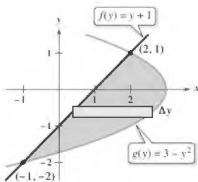
$$g(y) = 3 - y^2 \quad y \quad f(y) = y + 1$$

Estas dos curvas se intersecan cuando $y = -2$ y $y = 1$, como se muestra en la figura 3.9. Como $f(y) \leq g(y)$ en este intervalo, tiene

$$\Delta A = [g(y) - f(y)] \Delta y = [(3 - y^2) - (y + 1)] \Delta y.$$

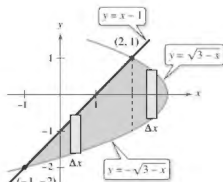
Por tanto, el área es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 [(3 - y^2) - (y + 1)] dy \\ &= \int_{-2}^1 (-y^2 - y + 2) dy \\ &= \left[-\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y \right]_{-2}^1 \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$



Rectángulos horizontales (integración respecto a y).

Figura 3.9



Rectángulos verticales (integración respecto a x).

Figura 3.10

En el ejemplo 5, observe que mediante la integración respecto a y , necesita solo una integral. Para integrar respecto a x , necesitaría dos integrales porque los límites superiores cambian en $x = 2$, como se muestra en la figura 3.10.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 [(x - 1) + \sqrt{3 - x}] dx + \int_2^3 (\sqrt{3 - x} + \sqrt{3 - x}) dx \\ &= \int_{-1}^2 [x - 1 + (3 - x)^{1/2}] dx + 2 \int_2^3 (3 - x)^{1/2} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{(3 - x)^{3/2}}{3/2} \right]_{-1}^2 - 2 \left[\frac{(3 - x)^{3/2}}{3/2} \right]_2^3 \\ &= \left(2 - 2 - \frac{2}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{16}{3} \right) - 2(0) + 2 \left(\frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

La integración como un proceso de acumulación

En esta sección, la fórmula de integración para el área entre dos curvas se desarrolló mediante el uso de un rectángulo como elemento representativo. Para cada nueva aplicación en las secciones restantes de esta unidad, un elemento representativo apropiado será construido usando las fórmulas de precálculo que ya conoce. Entonces, cada fórmula de integración será obtenida sumando o acumulando estos elementos representativos.

Fórmula de precálculo conocida



Elemento representativo



Nueva fórmula de integración

Por ejemplo, en esta sección se desarrolló la fórmula del área como sigue.

$A = (\text{alto})(\text{ancho})$



$\Delta A = [f(x) - g(x)] \Delta x$



$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$

EJEMPLO 6

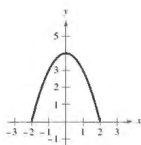
Integrar como un proceso de acumulación

Encuentre el área de la región acotada por la gráfica de $y = 4 - x^2$ y el eje x . Describa la integración como un proceso de acumulación.

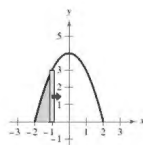
Solución El área de la región es

$$A = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx.$$

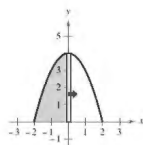
Se puede pensar en la integración como una acumulación de las áreas de los rectángulos formados cuando el rectángulo representativo se desliza de $x = -2$ a $x = 2$, como se muestra en la figura 3.11.



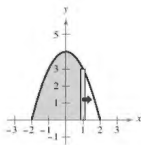
$$A = \int_{-2}^{-2} (4 - x^2) dx = 0$$



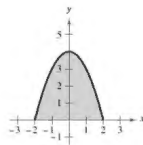
$$A = \int_{-2}^{-1} (4 - x^2) dx = \frac{5}{3}$$



$$A = \int_{-2}^0 (4 - x^2) dx = \frac{16}{3}$$



$$A = \int_{-2}^1 (4 - x^2) dx = 9$$



$$A = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \frac{32}{3}$$

Figura 3.11

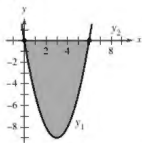
3.1 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Escribir una integral definida En los ejercicios 1-6, encuentre la integral definida que da el área de la región sombreada.

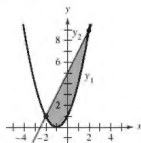
1. $y_1 = x^2 - 6x$

$y_2 = 0$



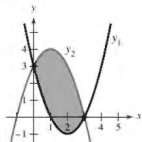
2. $y_1 = x^2 + 2x + 1$

$y_2 = 2x + 5$



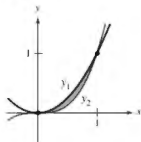
3. $y_1 = x^2 - 4x + 3$

$y_2 = -x^2 + 2x + 3$



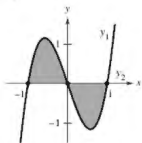
4. $y_1 = x^2$

$y_2 = x^3$



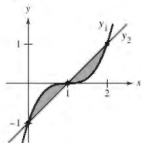
5. $y_1 = 3(x^3 - x)$

$y_2 = 0$



6. $y_1 = (x - 1)^3$

$y_2 = x - 1$



Encontrar una región En los ejercicios 7-12, el integrando de la integral definida es una diferencia de dos funciones. Dibuje la gráfica de cada función y sombree la región cuya área está representada por la integral.

7. $\int_0^4 \left[(x+1) - \frac{x}{2} \right] dx$

8. $\int_{-1}^1 [(2-x^2) - x^2] dx$

9. $\int_2^3 \left[\left(\frac{x^3}{3} - x \right) - \frac{x}{3} \right] dx$

10. $\int_{-\pi/2}^{\pi/4} (\sec^2 x - \cos x) dx$

11. $\int_{-2}^1 [(2-y) - y^2] dy$

12. $\int_0^4 (2\sqrt{y} - y) dy$

Piénselo En los ejercicios 13 y 14, determine qué valores aproximan mejor el área de la región acotada por las gráficas de f y g . (Haga su selección con base en un trazo de la región y no mediante la realización de los cálculos.)

13. $f(x) = x + 1$, $g(x) = (x - 1)^2$

(a) -2 (b) 2 (c) 10 (d) 4 (e) 8

14. $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x$, $g(x) = 2 - \sqrt{x}$

(a) 1 (b) 6 (c) -3 (d) 3 (e) 4

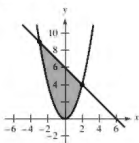
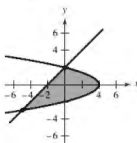
Comparar métodos En los ejercicios 15 y 16, encuentre el área de la región mediante la integración de (a) respecto a x , y (b) respecto a y . (c) Compare los resultados. ¿Qué método es más sencillo? En general, ¿este método será siempre más sencillo que el otro? ¿Por qué sí o por qué no?

15. $x = 4 - y^2$

$x = y - 2$

16. $y = x^2$

$y = 6 - x$



Encontrar el área de una región En los ejercicios 17-30, dibuje la región acotada por las gráficas de las ecuaciones y encuentre el área de la región.

17. $y = x^2 - 1$, $y = -x + 2$, $x = 0$, $x = 1$

18. $y = -x^3 + 2$, $y = x - 3$, $x = -1$, $x = 1$

19. $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = x + 2$

20. $y = -x^2 + 3x + 1$, $y = -x + 1$

21. $y = x$, $y = 2 - x$, $y = 0$

22. $y = \frac{4}{x^3}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$

23. $f(x) = \sqrt{x} + 3$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$

24. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, $g(x) = x - 1$

25. $f(y) = y^2$, $g(y) = y + 2$

26. $f(y) = y(2 - y)$, $g(y) = -y$

27. $f(y) = y^2 + 1$, $g(y) = 0$, $y = -1$, $y = 2$

28. $f(y) = \frac{y}{\sqrt{16 - y^2}}$, $g(y) = 0$, $y = 3$

29. $f(x) = \frac{10}{x}$, $x = 0$, $y = 2$, $y = 10$

30. $g(x) = \frac{4}{2 - x}$, $y = 4$, $x = 0$

■ Encontrar el área de una región En los ejercicios 31-36, (a) utilice una herramienta de graficación para trazar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, (b) encuentre el área de la región de forma analítica, y (c) use las capacidades de integración de la herramienta de graficación para verificar sus resultados.

31. $f(x) = x(x^2 - 3x + 3)$, $g(x) = x^2$

32. $y = x^4 - 2x^2$, $y = 2x^2$

33. $f(x) = x^4 - 4x^2$, $g(x) = x^2 - 4$

34. $f(x) = x^4 - 9x^2$, $g(x) = x^3 - 9x$

35. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

36. $f(x) = \frac{6x}{x^2+1}$, $y=0$, $0 \leq x \leq 3$

Encontrar el área de una región En los ejercicios 37-42, dibuje la región acotada por las gráficas de las funciones y encuentre el área de la región.

37. $f(x) = \cos x$, $g(x) = 2 - \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$

38. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos 2x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$

39. $f(x) = 2 \sin x$, $g(x) = \tan x$, $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

40. $f(x) = \sec \frac{\pi x}{4} \tan \frac{\pi x}{4}$, $g(x) = (\sqrt{2} - 4)x + 4$, $x = 0$

41. $f(x) = xe^{-x^2}$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$

42. $f(x) = 2^x$, $g(x) = \frac{3}{2}x + 1$

■ Encontrar el área de una región En los ejercicios 43-46, (a) utilice una herramienta de graficación para trazar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, (b) encuentre el área de la región, y (c) use las capacidades de integración de la herramienta de graficación para verificar sus resultados.

43. $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$

44. $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x$, $y = 0$, $0 < x \leq \pi$

45. $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{1/x}$, $y = 0$, $1 \leq x \leq 3$

46. $g(x) = \frac{4 \ln x}{x}$, $y = 0$, $x = 5$

■ Encontrar el área de una región En los ejercicios 47-50, (a) utilice una herramienta de graficación para trazar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, (b) explique por qué es difícil encontrar a mano el área de la región, y (c) utilice las capacidades de integración de la herramienta de graficación para aproximar el área a cuatro decimales.

47. $y = \sqrt{\frac{x^3}{4-x}}$, $y = 0$, $x = 3$

48. $y = \sqrt{x}e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

49. $y = x^2$, $y = 4 \cos x$

50. $y = x^2$, $y = \sqrt{3+x}$

Entregar como un proceso de acumulación En los ejercicios 51-54, hallar la función de acumulación F . Después evalúe cada valor de la variable independiente y muestre gráficamente el área determinada por cada valor de F .

51. $F(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2}t + 1\right) dt$ (a) $F(0)$ (b) $F(2)$ (c) $F(6)$

52. $F(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2}t^2 + 2\right) dt$ (a) $F(0)$ (b) $F(4)$ (c) $F(6)$

53. $F(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} \cos \frac{\pi\theta}{2} d\theta$ (a) $F(-1)$ (b) $F(0)$ (c) $F\left(\frac{1}{2}\right)$

54. $F(y) = \int_{-1}^y 4e^{y/2} dx$ (a) $F(-1)$ (b) $F(0)$ (c) $F(4)$

Calcular el área de una figura En los ejercicios 55-58, utilice la integración para encontrar el área de la figura que tiene los vértices dados.

55. (2, -3), (4, 6), (6, 1)

56. (0, 0), (6, 0), (4, 3)

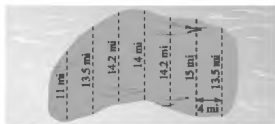
57. (0, 2), (4, 2), (0, -2), (-4, -2)

58. (0, 0), (1, 2), (3, -2), (1, -3)

59. Integración numérica Calcule la superficie del green del campo de golf usando (a) la regla del trapecio y (b) la regla de Simpson.



60. Integración numérica Calcule la superficie del derrame de petróleo usando (a) la regla del trapecio y (b) la regla de Simpson.



Utilizar una recta tangente En los ejercicios 61-64, configure y calcule la integral definida que da el área de la región acotada por la gráfica de la función y la recta tangente a la gráfica en el punto dado.

61. $f(x) = x^3$, (1, 1)

62. $y = x^3 - 2x$, (-1, 1)

63. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

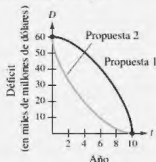
64. $y = \frac{2}{1+4x^2}$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

65. **Área entre curvas** Las gráficas de $y = 1 - x^2$ y $y = x^4 - 2x^3 + 1$ se intersecan en tres puntos. Sin embargo, el área entre las curvas se puede encontrar con una sola integral. Explique por qué esto es así, y escriba una integral para esta área.
66. **Usar simetría** El área de la región acotada por las gráficas de $y = x^3$ y $y = x$ no se puede encontrar con la integral simple $\int_{-1}^1 (x^3 - x) dx$. Explique por qué esto es así. Utilice la simetría para escribir una sola integral que sí represente el área.
67. **Interpretar integrales** Dos automóviles con velocidades v_1 y v_2 (en metros por segundo) se prueban en una carretera recta. Considere lo siguiente.
- $$\int_0^5 [v_1(t) - v_2(t)] dt = 10 \quad \int_0^{10} [v_1(t) - v_2(t)] dt = 30$$
- $$\int_{20}^{30} [v_1(t) - v_2(t)] dt = -5$$
- (a) Escriba una interpretación verbal de cada integral.
- (b) ¿Es posible determinar la distancia entre los dos vehículos cuando $t = 5$ segundos? ¿Por qué sí o por qué no?
- (c) Suponga que los dos automóviles comienzan en el mismo momento y lugar. ¿Qué automóvil está por delante cuando $t = 10$ segundos? ¿A qué distancia está el vehículo?
- (d) Suponga que el vehículo 1 tiene velocidad v_1 y está por delante del vehículo 2 por 13 metros cuando $t = 20$ segundos. ¿A qué distancia por delante o por detrás está el automóvil 1 cuando $t = 30$ segundos?



68. ¿CÓMO LO VE? Una legislatura estatal está debatiendo dos propuestas para la eliminación de los déficits presupuestarios anuales después de 10 años. La tasa de disminución de los déficits para cada propuesta se muestra en la figura.



- (a) ¿Qué representa el área entre las dos curvas?
- (b) Desde el punto de vista de minimizar el déficit estatal acumulado, ¿cuál es la mejor propuesta? Explique.

Dividir una región En los ejercicios 69 y 70, encuentre b tal que la recta $y = b$ divida la región acotada por las gráficas de las dos ecuaciones en dos regiones de igual área.

69. $y = 9 - x^2$, $y = 0$ 70. $y = 9 - |x|$, $y = 0$

Dividir una región En los ejercicios 71 y 72, encuentre a tal que la recta $x = a$ divida la región acotada por las gráficas de las ecuaciones en dos regiones de igual área.

71. $y = x$, $y = 4$, $x = 0$ 72. $y^2 = 4 - x$, $x = 0$

Límites e integrales En los ejercicios 73 y 74, evalúe el límite y trace la gráfica de la región cuya área está representada por el límite.

73. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^2) \Delta x$, donde $x_i = \frac{i}{n}$ y $\Delta x = \frac{1}{n}$

74. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (4 - x_i^2) \Delta x$, donde $x_i = -2 + \frac{4i}{n}$ y $\Delta x = \frac{4}{n}$

Ingresos En los ejercicios 75 y 76, se dan dos modelos R_1 y R_2 para los ingresos (en miles de millones de dólares) para una gran corporación. Ambos modelos son estimaciones de los ingresos desde 2015 hasta el 2020, con $t = 15$ correspondiente a 2015. ¿Qué modelo proyecta el mayor ingreso? ¿Qué modelo proyecta más ingresos totales en el periodo de seis años?

75. $R_1 = 7.21 + 0.58t$

$R_2 = 7.21 + 0.45t$

76. $R_1 = 7.21 + 0.26t + 0.02t^2$

$R_2 = 7.21 + 0.1t + 0.01t^2$

77. Curva de Lorenz Los economistas utilizan curvas de Lorenz para ilustrar la distribución del ingreso en un país. Una curva de Lorenz, $y = f(x)$, representa la distribución del ingreso real en el país. En este modelo, x representa porcentajes de familias en el país y y representa los porcentajes de los ingresos totales. El modelo $y = x$ representa a un país en el que cada familia tiene el mismo ingreso. El área entre estos dos modelos, donde $0 \leq x \leq 100$, indica "la desigualdad de ingresos" de un país. La tabla muestra los porcentajes de ingresos y para los porcentajes seleccionados de familias x en un país.

x	10	20	30	40	50
y	3.35	6.07	9.17	13.39	19.45

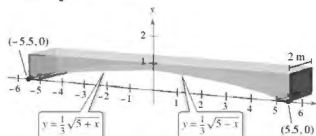
x	60	70	80	90
y	28.03	39.77	55.28	75.12

- (a) Utilice una herramienta de graficación para encontrar un modelo cuadrático para la curva de Lorenz.
- (b) Represente gráficamente los datos y grafique el modelo.
- (c) Represente gráficamente el modelo $y = x$. ¿Cómo se compara este modelo con el modelo del inciso (a)?
- (d) Utilice las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximar la "desigualdad de los ingresos".

78. Utilidad El director financiero de una empresa informa que las ganancias para el año fiscal pasado fueron \$15.9 millones. El funcionario predice que las utilidades para los próximos 5 años crecerán a una tasa anual continua en algún lugar entre $3\frac{1}{2}\%$ y 5% . Calcule la diferencia acumulada en la utilidad total durante los 5 años en función del rango previsto de las tasas de crecimiento.

79. Diseño de edificaciones

Las secciones de concreto para un nuevo edificio tienen las dimensiones (en metros) y la forma que se muestra en la figura.



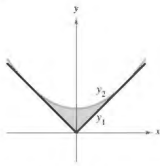
(a) Encuentre el área de la cara de la sección superpuesta en el sistema de coordenadas rectangulares.

(b) Encuentre el volumen de concreto en una de las secciones multiplicando el área en el inciso (a) por 2 metros.

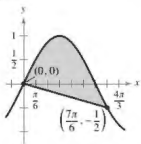
(c) Un metro cúbico de concreto pesa 5000 libras. Encuentre el peso de la sección.



80. **Diseño mecánico** La superficie de una pieza de la máquina es la región entre las gráficas de $y_1 = |x|$ y $y_2 = 0.08x^2 + k$ (vea la figura).

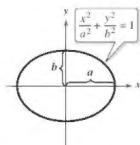


- (a) Determine k donde la parábola es tangente a la gráfica de y_1 .
- (b) Encuentre el área de la superficie de la pieza de la máquina.
81. **Área** Calcule el área entre la gráfica de $y = \sin x$ y el segmento de recta que une los puntos $(0, 0)$ y $(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2})$, como se muestra en la figura.



82. **Área** Sea $a > 0$ y $b > 0$. Demuestre que el área de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ es } \pi ab \text{ (vea la figura).}$$



¿Verdadero o falso? En los ejercicios 83-86, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

83. Si el área de la región acotada por las gráficas de f y g es 1, entonces el área de la región acotada por las gráficas de $h(x) = f(x) + C$ y $k(x) = g(x) + C$ también es 1.

84. Si

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = A$$

entonces

$$\int_a^b [g(x) - f(x)] dx = -A.$$

85. Si las gráficas de f y g se intersecan a medio camino entre $x = a$ y $x = b$, entonces

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = 0.$$

86. La recta

$$y = (1 - \sqrt[3]{0.5})x$$

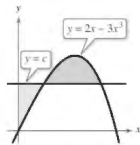
divide la región bajo la curva

$$f(x) = x(1 - x)$$

en $[0, 1]$ en dos regiones de área igual.

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

87. La línea horizontal corta a la curva $y = 2x - 3x^3$ en el primer cuadrante como se muestra en la figura. Encuentre c de manera que las áreas de las dos regiones sombreadas sean iguales.



Estos problemas fueron preparados por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

3.2 Volumen: método de los discos

- Encontrar el volumen de un sólido de revolución utilizando el método de los discos.
- Encontrar el volumen de un sólido de revolución utilizando el método de la arandela.
- Encontrar el volumen de un sólido con secciones transversales conocidas.

Método de los discos

Ya ha aprendido que el área es solo una de las *muchas* aplicaciones de la integral definida. Otra aplicación importante es encontrar el volumen de un sólido tridimensional. En esta sección se estudiará un tipo particular de sólido de tres dimensiones, uno cuyas secciones transversales son similares. Los sólidos de revolución son de uso común en la ingeniería y la fabricación. Algunos ejemplos son ejes, embudos, píldoras, botellas y pistones, como se muestra en la figura 3.12.



Sólidos de revolución.

Figura 3.12

Cuando se gira una región plana alrededor de una recta, el sólido resultante es un **sólido de revolución**, y la recta recibe el nombre de **eje de revolución**. El sólido más sencillo es un cilindro circular recto o **disco**, que está formado por un rectángulo que gira alrededor de un eje adyacente a un lado del rectángulo, como se muestra en la figura 3.13. El volumen de un disco de este tipo es

$$\begin{aligned}\text{Volumen del disco} &= (\text{área del disco})(\text{ancho del disco}) \\ &= \pi R^2 w\end{aligned}$$

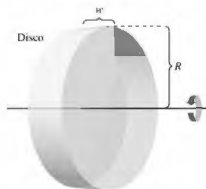
donde R es el radio del disco y w es el ancho.

Para ver cómo usar el volumen de un disco para encontrar el volumen de un sólido general de revolución, considere un sólido de revolución formado al girar la región plana en la figura 3.14 alrededor del eje indicado. Para determinar el volumen de este sólido, considere un rectángulo representativo en la región plana. Cuando este rectángulo se hace girar alrededor del eje de revolución, se genera un disco representativo cuyo volumen es

$$\Delta V = \pi R^2 \Delta x.$$

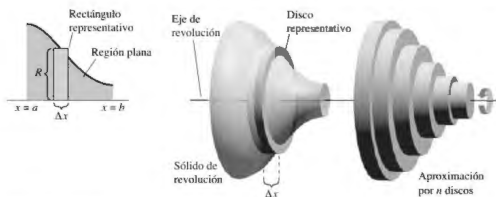
Aproximando el volumen del sólido por n de estos discos de ancho Δx y radio $R(x)$, se obtiene

$$\begin{aligned}\text{Volumen del sólido} &\approx \sum_{i=1}^n \pi [R(x_i)]^2 \Delta x \\ &= \pi \sum_{i=1}^n [R(x_i)]^2 \Delta x.\end{aligned}$$



Volumen de un disco: $\pi R^2 w$.

Figura 3.13



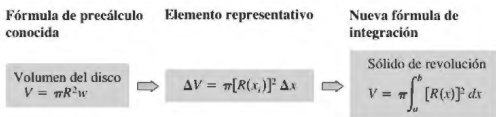
Método de los discos.

Figura 3.14

Esta aproximación parece mejorar a medida que $\|\Delta\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Por lo que se puede definir el volumen del sólido como

$$\text{Volumen del sólido} = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \pi \sum_{i=1}^n [R(x_i)]^2 \Delta x = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx.$$

Esquemáticamente, el método de disco se parece a esto.



Una fórmula similar se puede deducir cuando el eje de revolución es vertical.

MÉTODO DE LOS DISCOS

Para encontrar el volumen de un sólido de revolución con el método de los discos, utilice una de las siguientes fórmulas. (Vea la figura 3.15.)

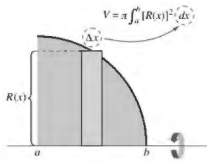
Eje horizontal de revolución

$$\text{Volumen} = V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx$$

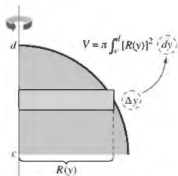
Eje vertical de revolución

$$\text{Volumen} = V = \pi \int_c^d [R(y)]^2 dy$$

••• **COMENTARIO** En la figura 3.15, observe que puede determinar la variable de integración mediante la colocación de un rectángulo representativo en la región plana “perpendicular” al eje de revolución. Cuando el ancho del rectángulo es Δx se integra respecto a x , y cuando el ancho del rectángulo es Δy se integra respecto a y .



Eje horizontal de revolución.



Eje vertical de revolución.

Figura 3.15

La aplicación más sencilla del método de los discos implica una región plana acotada por la gráfica de f y el eje x . Cuando el eje de revolución es el eje x , el radio $R(x)$ es simplemente $f(x)$.

EJEMPLO 1 Usar el método de los discos

Encuentre el volumen del sólido formado al girar la región acotada por la gráfica de

$$f(x) = \sqrt{\sen x}$$

y el eje x ($0 \leq x \leq \pi$) en el eje x .

Solución Del rectángulo representativo en la gráfica superior en la figura 3.16, se puede ver que el radio de este sólido es

$$\begin{aligned} R(x) &= f(x) \\ &= \sqrt{\sen x}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx && \text{Aplique el método de los discos.} \\ &= \pi \int_0^\pi (\sqrt{\sen x})^2 dx && \text{Sustituya } \sqrt{\sen x} \text{ para } R(x). \\ &= \pi \int_0^\pi \sen x dx && \text{Simplifique.} \\ &= \pi [-\cos x]_0^\pi && \text{Integre.} \\ &= \pi(1 + 1) \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

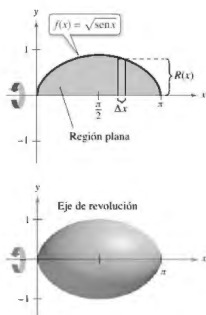


Figura 3.16

EJEMPLO 2 Usar una recta que no es un eje coordenado

Encuentre el volumen del sólido formado al girar la región acotada por la gráfica de

$$f(x) = 2 - x^2$$

y $g(x) = 1$ respecto a la recta $y = 1$, como se muestra en la figura 3.17.

Solución Al igualar $f(x)$ y $g(x)$ puede determinar que los dos gráficos se intersectan cuando $x = \pm 1$. Para encontrar el radio, reste $g(x)$ de $f(x)$.

$$\begin{aligned} R(x) &= f(x) - g(x) \\ &= (2 - x^2) - 1 \\ &= 1 - x^2 \end{aligned}$$

Para encontrar el volumen, integre entre -1 y 1 .

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx && \text{Aplique el método de los discos.} \\ &= \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx && \text{Sustituya } 1 - x^2 \text{ para } R(x). \\ &= \pi \int_{-1}^1 (1 - 2x^2 + x^4) dx && \text{Simplifique.} \\ &= \pi \left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 && \text{Integre.} \\ &= \frac{16\pi}{15} \end{aligned}$$

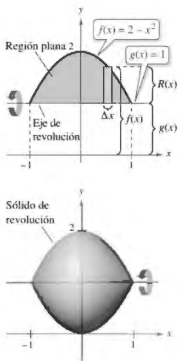


Figura 3.17

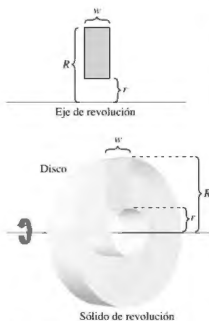


Figura 3.18

Método de la arandela

El método de los discos se puede extender para cubrir sólidos de revolución con agujeros mediante la sustitución del disco representativo con una **arandela** representativa. La arandela está formada por un rectángulo que gira alrededor de un eje, como se muestra en la figura 3.18. Si r y R son los radios interior y exterior de la arandela y w es el ancho de la arandela, entonces el volumen es

$$\text{Volumen de la arandela} = \pi(R^2 - r^2)w.$$

Para ver cómo se puede utilizar este concepto para encontrar el volumen de un sólido de revolución, considere una región delimitada por un **radio exterior** $R(x)$ y un **radio interior** $r(x)$ como se muestra en la figura 3.19. Si la región se hace girar alrededor de su eje de revolución, entonces el volumen del sólido resultante es

$$V = \pi \int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx. \quad \text{Método de la arandela}$$

Observe que la integral que implica el radio interior representa el volumen del agujero y se *resta* de la integral que implica el radio exterior.

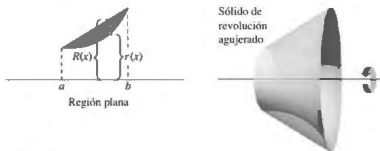


Figura 3.19

EJEMPLO 3 Usar el método de la arandela

Encuentre el volumen del sólido formado al girar la región acotada por la gráfica de

$$y = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad y = x^2$$

en el eje x , como se muestra en la figura 3.20.

Solución En la figura 3.20, puede ver que los radios exterior e interior son los siguientes.

$$R(x) = \sqrt{x}$$

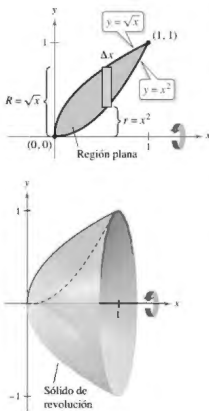
Radio exterior

$$r(x) = x^2$$

Radio interior

Integrando entre 0 y 1 obtiene

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 ([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx && \text{Aplicue el método de la arandela.} \\ &= \pi \int_0^1 [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] dx && \text{Sustituya } \sqrt{x} \text{ para } R(x) \text{ y } x^2 \text{ para } r(x). \\ &= \pi \int_0^1 (x - x^4) dx && \text{Simplifique.} \\ &= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 && \text{Integre.} \\ &= \frac{3\pi}{10}. \end{aligned}$$



Sólido de revolución.

Figura 3.20

En cada ejemplo hasta el momento, el eje de revolución ha sido *horizontal* y se ha integrado respecto a x . En el siguiente ejemplo, el eje de revolución es vertical y se integra respecto a y . En este ejemplo, usted necesita dos integrales separadas para calcular el volumen.

EJEMPLO 4 Integrar respecto a y : caso de dos integrales

Encuentre el volumen del sólido formado al girar la región acotada por la gráfica de

$$y = x^2 + 1, \quad y = 0, \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = 1$$

respecto al eje y , como se muestra en la figura 3.21.

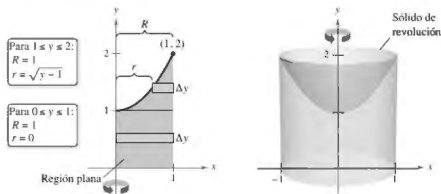


Figura 3.21

Solución Para la región mostrada en la figura 3.21, el radio exterior es simplemente $R = 1$. Sin embargo, no hay una fórmula conveniente que represente el radio interior. Cuando $0 \leq y \leq 1$, $r = 0$, pero cuando $1 \leq y \leq 2$, r está determinada por la ecuación $y = x^2 + 1$, lo cual implica que $r = \sqrt{y - 1}$.

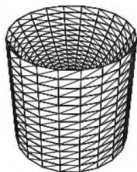
$$r(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq 1 \\ \sqrt{y - 1}, & 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Usando esta definición del radio interno, puede utilizar dos integrales para encontrar el volumen.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (1^2 - 0^2) dy + \pi \int_1^2 [1^2 - (\sqrt{y - 1})^2] dy && \text{Aplique el método de la arandela.} \\ &= \pi \int_0^1 1 dy + \pi \int_1^2 (2 - y) dy && \text{Simplifique.} \\ &= \pi \left[y \right]_0^1 + \pi \left[2y - \frac{y^2}{2} \right]_1^2 && \text{Integre.} \\ &= \pi + \pi \left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que la primera integral $\pi \int_0^1 1 dy$ representa el volumen de un cilindro circular recto de radio 1 y altura 1. Esta porción del volumen podría haber sido determinada sin utilizar el cálculo. ■

► **TECNOLOGÍA** Algunas utilidades gráficas tienen la capacidad de generar (o se han incorporado en un software capaz de generar) un sólido de revolución. Si tiene acceso a una utilidad, utilícelo para representar gráficamente algunos de los sólidos de revolución descritos en esta sección. Por ejemplo, el sólido en el ejemplo 4 podría aparecer como el que se muestra en la figura 3.22.



Generado con Mathematica

Figura 3.22

EJEMPLO 5 Fabricación

... ▶ Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Un fabricante hace un agujero a través del centro de una esfera metálica de un radio de 5 pulgadas, tal como se muestra en la figura 3.23(a). El agujero tiene un radio de 3 pulgadas. ¿Cuál es el volumen del anillo de metal resultante?

Solución Puede imaginar que el anillo se genera por un segmento del círculo cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 25$, como se muestra en la figura 3.23(b). Debido a que el radio del agujero es de 3 pulgadas, se puede hacer $y = 3$ y resolver la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ para determinar que los límites de integración son $x = \pm 4$. Por tanto, los radios interior y exterior son $r(x) = 3$ y $R(x) = \sqrt{25 - x^2}$, y el volumen es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx \\ &= \pi \int_{-4}^4 [(\sqrt{25 - x^2})^2 - (3)^2] dx \\ &= \pi \int_{-4}^4 (16 - x^2) dx \\ &= \pi \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_{-4}^4 \\ &= \frac{256\pi}{3} \text{ pulgadas cúbicas.} \end{aligned}$$

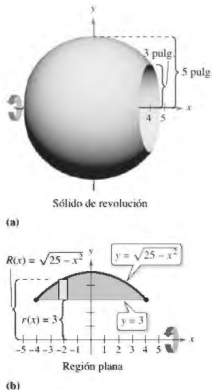


Figura 3.23

Sólidos con secciones transversales conocidas

Con el método de los discos se puede encontrar el volumen de un sólido que tiene una sección transversal circular cuya área es $A = \pi R^2$. Este método se puede generalizar a sólidos de cualquier forma, siempre y cuando conozca la fórmula para el área de una sección transversal arbitraria. Algunas secciones transversales comunes son cuadrados, rectángulos, triángulos, semicírculos y trapecios.

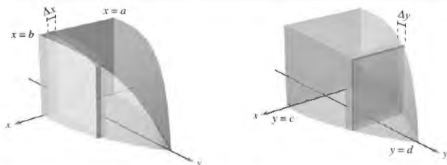
VOLÚMENES DE SÓLIDOS CON SECCIONES TRANSVERSALES CONOCIDAS

1. Para secciones transversales de área $A(x)$ tomada perpendicular al eje x ,

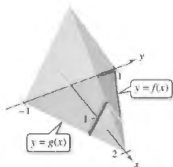
$$\text{Volumen} = \int_a^b A(x) dx. \quad \text{Vea la figura 3.24(a).}$$

2. Para secciones transversales de área $A(y)$ tomada perpendicular al eje y ,

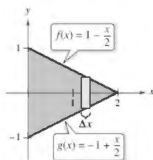
$$\text{Volumen} = \int_c^d A(y) dy. \quad \text{Vea la figura 3.24(b).}$$



(a) Secciones transversales perpendiculares al eje x (b) Secciones transversales perpendiculares al eje y
Figura 3.24



Las secciones transversales son triángulos equiláteros



Base triangular en el plano xy .
Figura 3.25

EJEMPLO 6 Secciones transversales triangulares

Encuentre el volumen del sólido mostrado en la figura 3.25. La base del sólido es la región acotada por las rectas

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2}, \quad g(x) = -1 + \frac{x}{2} \quad y \quad x = 0.$$

Las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros.

Solución La base y el área de cada sección transversal triangular son los siguientes.

$$\text{Base} = \left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(-1 + \frac{x}{2}\right) = 2 - x \quad \text{Largo de la base}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\text{base})^2 \quad \text{Área del triángulo equilátero}$$

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2 - x)^2 \quad \text{Área de la sección transversal}$$

Debido a que x varía de 0 a 2, el volumen del sólido es

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{4}(2 - x)^2 dx = -\frac{\sqrt{3}}{4} \left[\frac{(2 - x)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

EJEMPLO 7 Aplicar a la geometría

Demuestre que el volumen de una pirámide de base cuadrada es

$$V = \frac{1}{3}hB$$

donde h es la altura de la pirámide y B es el área de la base.

Solución Como se muestra en la figura 3.26, puede intersecar la pirámide con un plano paralelo a la base y a la altura y para formar una sección transversal cuadrada cuyos lados son de longitud b' . Usando triángulos semejantes, puede demostrar que

$$\frac{b'}{b} = \frac{h - y}{h} \quad \text{o} \quad b' = \frac{b}{h}(h - y)$$

donde b es la longitud de los lados de la base de la pirámide. Por lo tanto,

$$A(y) = (b')^2 = \frac{b^2}{h^2}(h - y)^2.$$

Al integrar entre 0 y h se obtiene

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(y) dy \\ &= \int_0^h \frac{b^2}{h^2}(h - y)^2 dy \\ &= \frac{b^2}{h^2} \int_0^h (h - y)^2 dy \\ &= -\left(\frac{b^2}{h^2}\right) \left[\frac{(h - y)^3}{3} \right]_0^h \\ &= \frac{b^2}{h^2} \left(\frac{h^3}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3}hB. \end{aligned}$$

$$B = h^2$$

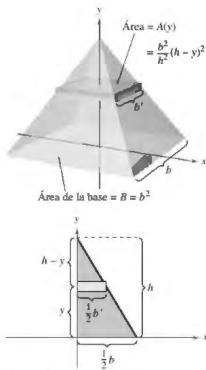


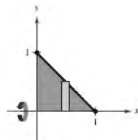
Figura 3.26

3.2 Ejercicios

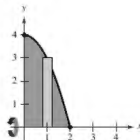
Consulta CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Encontrar el volumen de un sólido En los ejercicios 1-6, establezca y calcule la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje x .

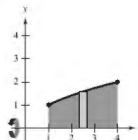
1. $y = -x + 1$



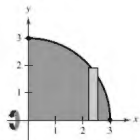
2. $y = 4 - x^2$



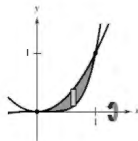
3. $y = \sqrt{x}$



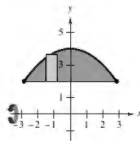
4. $y = \sqrt{9 - x^2}$



5. $y = x^2$, $y = x^5$

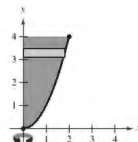


6. $y = 2$, $y = 4 - \frac{x^2}{4}$

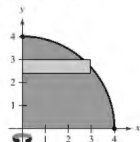


Encontrar el volumen de un sólido En los ejercicios 7-10, establezca y calcule la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región respecto al eje y .

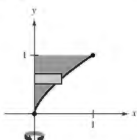
7. $y = x^2$



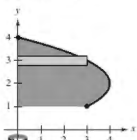
8. $y = \sqrt{16 - x^2}$



9. $y = x^{2/3}$



10. $x = -y^2 + 4y$



Encontrar el volumen de un sólido En los ejercicios 11-14, encuentre los volúmenes de los sólidos generados al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones sobre las rectas dadas.

11. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 3$

- (a) el eje x (b) el eje y
(c) la recta $x = 3$ (d) la recta $x = 6$

12. $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 2$

- (a) el eje x (b) el eje y
(c) la recta $y = 8$ (d) la recta $x = 2$

13. $y = x^2$, $y = 4x - x^2$

- (a) el eje x (b) la recta $y = 6$

14. $y = 4 + 2x - x^2$, $y = 4 - x$

- (a) el eje x (b) la recta $y = 1$

Encontrar el volumen de un sólido En los ejercicios 15-18, determine el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones respecto a la recta $y = 4$.

15. $y = x$, $y = 3$, $x = 0$

16. $y = \frac{1}{2}x^3$, $y = 4$, $x = 0$

17. $y = \frac{3}{1+x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$

18. $y = \sec x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

Encontrar el volumen de un sólido En los ejercicios 19-22, determine el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones respecto a la recta $x = 5$.

19. $y = x$, $y = 0$, $y = 4$, $x = 5$

20. $y = 3 - x$, $y = 0$, $y = 2$, $x = 0$

21. $x = y^2$, $x = 4$

22. $xy = 3$, $y = 1$, $y = 4$, $x = 5$

Encontrar el volumen de un sólido En los ejercicios 23-30, halle el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones respecto al eje x .

23. $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$

24. $y = x\sqrt{4-x^2}$, $y = 0$

25. $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$

26. $y = \frac{2}{x+1}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 6$

27. $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $y = 1$

28. $y = e^{\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 6$

29. $y = x^2 + 1$, $y = -x^2 + 2x + 5$, $x = 0$, $x = 3$

30. $y = \sqrt{x}$, $y = -\frac{1}{2}x + 4$, $x = 0$, $x = 8$

Encontrar el volumen de un sólido En los ejercicios 31 y 32, encuentre el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones respecto al eje y .

31. $y = 3(2 - x)$, $y = 0$, $x = 0$

32. $y = 9 - x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$


Encontrar el volumen de un sólido En los ejercicios 33-36, encuentre el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones respecto al eje x . Verifique sus resultados usando las capacidades de integración de una utilidad gráfica.

33. $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$

34. $y = \cos 2x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$

35. $y = e^{x-1}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$

36. $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$

 Encontrar el volumen de un sólido En los ejercicios 37-40, utilice las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones respecto al eje x .

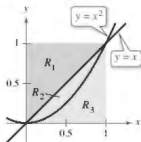
37. $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

38. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$

39. $y = 2 \arctan(0.2x)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$

40. $y = \sqrt{2x}$, $y = x^2$

Encontrar el volumen de un sólido En los ejercicios 41-48, encuentre el volumen generado por la rotación de la región determinada respecto a la recta especificada.



41. R_1 sobre $x = 0$

42. R_1 sobre $x = 1$

43. R_2 sobre $y = 0$

44. R_2 sobre $y = 1$

45. R_3 sobre $x = 0$

46. R_3 sobre $x = 1$

47. R_2 sobre $x = 0$

48. R_2 sobre $x = 1$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

Describir un sólido En los ejercicios 49 y 50, la integral representa el volumen de un sólido. Describa el sólido.

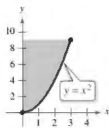
49. $\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$

50. $\pi \int_2^4 y^4 \, dy$

51. Comparar volúmenes Una región acotada por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje x se hace girar alrededor del eje x . Una segunda región acotada por la parábola $y = 4 - x^2$ y el eje x se hace girar alrededor del eje x . Sin integrar, ¿cómo se puede comparar los volúmenes de los dos sólidos? Explique.

52. Comparar volúmenes

La región en la figura se gira alrededor de los ejes y y la recta indicados. Ordene los volúmenes de los sólidos resultantes de menor a mayor. Explique su razonamiento.



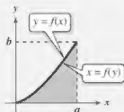
- (a) Eje x
(b) Eje y
(c) $x = 3$

53. Analizar enunciados Analice la validez de los siguientes enunciados.

- (a) Para un sólido formado mediante la rotación de la región bajo una gráfica respecto al eje x , las secciones transversales perpendiculares al eje x son discos circulares.
(b) Para un sólido formado mediante la rotación de la región entre dos gráficas respecto al eje x , las secciones transversales perpendiculares al eje x son discos circulares.



¿CÓMO LO VE? Use la gráfica para relacionar la integral para el volumen con el eje de rotación.



(a) $V = \pi \int_0^b (a^2 - [f(y)]^2) \, dy$ (i) Eje x

(b) $V = \pi \int_0^a (b^2 - [b - f(x)]^2) \, dx$ (ii) Eje y

(c) $V = \pi \int_0^a [f(x)]^2 \, dx$ (iii) $x = a$

(d) $V = \pi \int_0^b [a - f(y)]^2 \, dy$ (iv) $y = b$

Dividir un sólido En los ejercicios 55 y 56, considere el sólido formado al girar la región acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$ alrededor del eje x .

55. Encuentre el valor de x en el intervalo $[0, 4]$ que divide al sólido en dos partes de igual volumen.

56. Encuentre los valores de x en el intervalo $[0, 4]$ que dividan al sólido en tres partes de igual volumen.

57. **Fabricación** Un fabricante realiza un agujero a través del centro de una esfera metálica de radio R . El agujero tiene un radio r . Encuentre el volumen del anillo resultante.

58. **Fabricación** Para la esfera de metal en el ejercicio 57, sea $R = 6$. ¿Qué valor de r producirá un anillo cuyo volumen es exactamente la mitad del volumen de la esfera?

59. **Volumen de un cono** Utilice el método de los discos para verificar que el volumen de un cono circular recto es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h es la altura.

60. **Volumen de una esfera** Utilice el método de los discos para verificar que el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio.

61. **Usar un cono** Un cono de altura H con una base de radio r se corta con un plano paralelo a y a h unidades por encima de la base, donde $h < H$. Encuentre el volumen del sólido (cono truncado) por debajo del plano.

62. **Usar una esfera** Una esfera de radio r es cortada por un plano h unidades sobre el ecuador, donde $h < r$. Encuentre el volumen del sólido (segmento esférico) por encima del plano.

63. **Volumen del depósito de combustible** Un tanque en el ala de un avión de reacción se forma al girar la región acotada por la gráfica de $y = \frac{1}{8}x^2\sqrt{2-x}$ y el eje x ($0 \leq x \leq 2$) respecto al eje x , donde x y y se miden en metros. Use un programa de graficación para trazar la función y encontrar el volumen del depósito.

64. **Volumen de un recipiente de vidrio** Un recipiente de vidrio puede ser modelado mediante la revolución de la gráfica de

$$y = \begin{cases} \sqrt{0.1x^3 - 2.2x^2 + 10.9x + 22.2}, & 0 \leq x \leq 11.5 \\ 2.95, & 11.5 < x \leq 15 \end{cases}$$

respecto al eje x , donde x y y se miden en centímetros. Use un programa de graficación para trazar la función y encontrar el volumen del recipiente.

65. **Determinar los volúmenes de un sólido** Encuentre los volúmenes de los sólidos (vea las figuras) generados si la mitad superior de la elipse se hace girar respecto (a) al eje x para formar un esferoide alargado (con forma de balón de fútbol americano), y (b) al eje y para formar un esferoide achatado (en forma de la mitad de un caramelo).

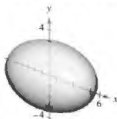


Figura para 65(a)



Figura para 65(b)

66. **Torre de agua**  Un tanque en una torre de agua está en una esfera de 50 pies de radio. Determine la profundidad del agua cuando el tanque se llena hasta un cuarto y tres cuartos de su capacidad total. (Nota: Utilice la función *cero* o *raíz* de un programa de graficación después de evaluar la integral definida.)

67. **Volumen mínimo** El arco de $y = 4 - (x^2/4)$ en el intervalo $[0, 4]$ se hace girar en torno a la recta (vea la figura).

- (a) Determine el volumen del sólido resultante en función de h .
 (b) Utilice un programa de graficación para trazar la función en el inciso (a), y use la gráfica para aproximar el valor de h que minimiza el volumen del sólido.
 (c) Utilice el cálculo para hallar el valor de h que minimiza el volumen del sólido, y compare el resultado con la respuesta al inciso (b).



Figura para 67



Figura para 68

68. **Modelar datos** Se le pide a un dibujante determinar la cantidad de material necesario para producir una pieza de la máquina (ver figura). Los diámetros de la parte en puntos igualmente espaciados se enumeran en la tabla. Las mediciones se indican en centímetros.

x	0	1	2	3	4	5
d	4.2	3.8	4.2	4.7	5.2	5.7

x	6	7	8	9	10
d	5.8	5.4	4.9	4.4	4.6

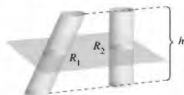
- (a) Utilice estos datos con la regla de Simpson para aproximar el volumen de la pieza.
 (b) Utilice las capacidades de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un polinomio de cuarto grado a través de los puntos que representan el radio del sólido. Represente gráficamente los datos y grafique el modelo.
 (c) Utilice una herramienta de graficación para aproximar la integral definida que produce el volumen de la pieza. Compare el resultado con la respuesta al inciso (a).

69. **Piénselo** Relacione cada integral con el sólido cuyo volumen representa, y dé las dimensiones de cada sólido.

(a) Cilindro circular recto (b) Elipsoide
(c) Esfera (d) Cono circular recto (e) Toro

(i) $\pi \int_0^b \left(\frac{rx^2}{h}\right) dx$ (ii) $\pi \int_0^b r^2 dx$
 (iii) $\pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx$
 (iv) $\pi \int_{-b}^b \left(a\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}\right)^2 dx$
 (v) $\pi \int_{-r}^r [(R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2] dx$

70. **Teorema de Cavalieri** Demuestre que si dos sólidos tienen alturas iguales y todas las secciones planas paralelas a sus bases y a distancias iguales desde sus bases tienen áreas iguales, entonces los sólidos tienen el mismo volumen (vea la figura).



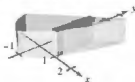
Área de $R_1 = \text{área de } R_2$

71. **Usar secciones transversales** Encuentre los volúmenes de los sólidos cuyas bases están acotadas por las gráficas de $y = x + 1$ y $y = x^2 - 1$, con las secciones transversales indicadas tomadas perpendiculares al eje x .

(a) Cuadrados



(b) Rectángulos de altura 1



72. **Usar secciones transversales** Encuentre los volúmenes de los sólidos cuyas bases están delimitadas por el círculo $x^2 + y^2 = 4$, con las secciones transversales indicadas tomadas perpendiculares al eje x .

(a) Cuadrados



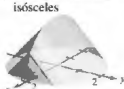
(b) Triángulos equiláteros



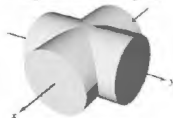
(c) Semicírculos



(d) Triángulos rectángulos isósceles



73. **Usar secciones transversales** Encuentre el volumen del sólido de intersección (el sólido común a ambos) de los dos cilindros circulares rectos de radio r cuyos ejes se producen en ángulo recto (vea la figura).



Intersección de dos cilindros



Sólido de intersección

■ PARA INFORMACIÓN ADICIONAL Para más información sobre este problema, consulte el artículo "Estimating the Volumes of Solid Figures with Curved Surfaces", de Donald Cohen, en *Mathematics Teacher*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

74. **Usar secciones transversales** El sólido mostrado en la figura tiene secciones transversales limitadas por la gráfica de $|x|^a + |y|^a = 1$, donde $1 \leq a \leq 2$.

(a) Describa la sección transversal cuando $a = 1$ y $a = 2$.

(b) Describa un procedimiento para aproximar el volumen del sólido.



75. **Volumen de una cuña** Dos planos cortan un cilindro circular recto para formar una cuña. Un plano es perpendicular al eje del cilindro y el segundo forma un ángulo de θ grados con el primero (vea la figura).

(a) Calcule el volumen de la cuña si $\theta = 45^\circ$.

(b) Calcule el volumen de la cuña para un ángulo arbitrario θ . Suponiendo que el cilindro tiene longitud suficiente, ¿cómo determina el cambio de volumen de la cuña a medida que θ aumenta desde 0° a 90° ?



Figura para 75

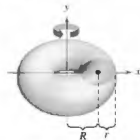


Figura para 76

76. **Volumen de un toro**

(a) Demuestre que el volumen del toro mostrado en la figura está dado por la integral $8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} dy$, donde $R < r < 0$.

(b) Determine el volumen del toro.

3.3 Volumen: método de las capas

- Encontrar el volumen de un sólido de revolución utilizando el método de las capas.
- Comparar los usos del método de los discos y el método de las capas.

Método de las capas

En esta sección estudiará un método alternativo para encontrar el volumen de un sólido de revolución. Este método se llama **método de las capas**, ya que utiliza capas cilíndricas. Una comparación de las ventajas de los métodos de los discos y las capas se da más adelante en esta sección.

Para empezar, considere un rectángulo representativo como se muestra en la figura 3.27, donde w es el ancho del rectángulo, h es la altura del rectángulo y p es la distancia entre el eje de revolución y el centro del rectángulo. Cuando este rectángulo se hace girar alrededor de su eje de revolución, se forma una capa cilíndrica (o tubo) de espesor w . Para encontrar el volumen de esta capa, considere dos cilindros. El radio del cilindro más grande corresponde al radio exterior de la capa, y el radio del cilindro más pequeño corresponde al radio interior de la capa. Debido a que p es el radio promedio de la capa, se sabe que el radio exterior es

$$p + \frac{w}{2} \quad \text{Radio exterior}$$

y que el radio interior es

$$p - \frac{w}{2} \quad \text{Radio interior}$$

Por tanto, el volumen de la capa es

$$\begin{aligned} \text{Volumen de la capa} &= (\text{volumen del cilindro}) - (\text{volumen del agujero}) \\ &= \pi \left(p + \frac{w}{2} \right)^2 h - \pi \left(p - \frac{w}{2} \right)^2 h \\ &= 2\pi p h w \\ &= 2\pi(\text{radio promedio})(\text{alto})(\text{espesor}). \end{aligned}$$

Se puede utilizar esta fórmula para encontrar el volumen de un sólido de revolución. Por ejemplo, en la figura 3.28 se hace girar la región plana alrededor de una recta para formar el sólido indicado. Considere un rectángulo horizontal de ancho Δy . A medida que la región plana gira alrededor de una recta paralela al eje x , el rectángulo genera una capa representativa cuyo volumen es

$$\Delta V = 2\pi [p(y)h(y)] \Delta y.$$

Se puede aproximar el volumen del sólido por n de estas capas de espesor Δy , altura $h(y)$ y radio medio $p(y)$.

$$\text{Volumen del sólido} \approx \sum_{i=1}^n 2\pi [p(y_i)h(y_i)] \Delta y = 2\pi \sum_{i=1}^n [p(y_i)h(y_i)] \Delta y$$

Esta aproximación parece mejorar a medida que $\|\Delta\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Por lo tanto, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} \text{Volumen del sólido} &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} 2\pi \sum_{i=1}^n [p(y_i)h(y_i)] \Delta y \\ &= 2\pi \int_c^d [p(y)h(y)] dy. \end{aligned}$$

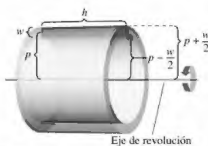


Figura 3.27

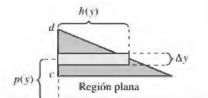


Figura 3.28

MÉTODO DE LAS CAPAS

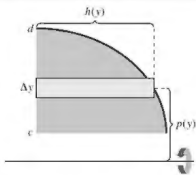
Para encontrar el volumen de un sólido de revolución con el método de las capas, utilice una de las siguientes fórmulas. (Vea la figura 3.29.)

Eje horizontal de revolución

$$\text{Volumen} = V = 2\pi \int_c^d p(y)h(y) dy$$

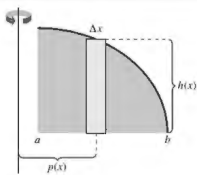
Eje vertical de revolución

$$\text{Volumen} = V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x) dx$$



Eje horizontal de revolución

Figura 3.29



Eje vertical de revolución

EJEMPLO 1**Usar el método de las capas para determinar un volumen**

Encuentre el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por la gráfica de

$$y = x - x^3$$

y el eje x ($0 \leq x \leq 1$) respecto al eje y .

Solución Debido a que el eje de revolución es vertical, utilice un rectángulo representativo vertical, como se muestra en la figura 3.30. El ancho Δx indica que x es la variable de integración. La distancia desde el centro del rectángulo al eje de revolución es $p(x) = x$, y la altura del rectángulo es

$$h(x) = x - x^3.$$

Debido a los rangos x de 0 a 1, se aplica el método de las capas para encontrar el volumen del sólido.

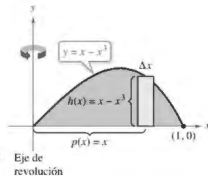


Figura 3.30

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b p(x)h(x) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x(x - x^3) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (-x^4 + x^2) dx && \text{Simplifique.} \\ &= 2\pi \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 && \text{Integre.} \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{4\pi}{15} \end{aligned}$$

EJEMPLO 2

Usar el método de las capas para determinar un volumen

Encuentre el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por la gráfica de

$$x = e^{-y^2}$$

y el eje x ($0 \leq y \leq 1$) respecto al eje x .

Solución Debido a que el eje de revolución es horizontal, utilice un rectángulo representativo horizontal, como se muestra en la figura 3.31. El ancho Δy indica que y es la variable de integración. La distancia desde el centro del rectángulo al eje de revolución es $p(y) = y$, y la altura del rectángulo es $h(y) = e^{-y^2}$. Debido a que y va de 0 a 1, el volumen del sólido es

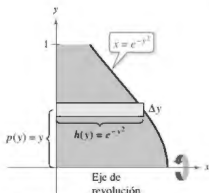


Figura 3.31

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_c^d p(y)h(y) \, dy && \text{Aplique el método de las capas.} \\ &= 2\pi \int_0^1 ye^{-y^2} \, dy \\ &= -\pi \left[e^{-y^2} \right]_0^1 && \text{Integre.} \\ &= \pi \left(1 - \frac{1}{e} \right) \\ &= 1.986. \end{aligned}$$

Exploración

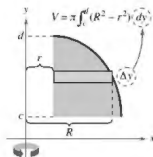
Para ver la ventaja de utilizar el método de las capas en el ejemplo 2, resuelva la ecuación $x = e^{-y^2}$ para y .

$$y = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/e \\ \sqrt{-\ln x}, & 1/e < x \leq 1 \end{cases}$$

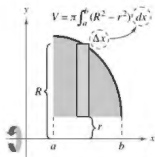
Luego, utilice esta ecuación para encontrar el volumen mediante el método de los discos.

Comparación del método de los discos y el método de las capas

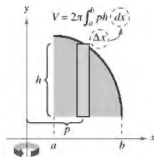
Los métodos de los discos y las capas se pueden diferenciar de la siguiente manera. Para el método de los discos, el rectángulo representativo es siempre perpendicular al eje de revolución, mientras que para el método de las capas, el rectángulo representativo está siempre paralelo al eje de revolución, como se muestra en la figura 3.32.



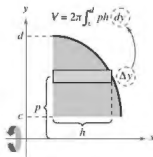
Eje de revolución vertical



Eje de revolución horizontal



Eje de revolución vertical



Eje de revolución horizontal

Método de los discos: el rectángulo representativo es perpendicular al eje de revolución.

Método de las capas: el rectángulo representativo es paralelo al eje de revolución.

Figura 3.32

A veces es más cómodo usar un método que otro. El siguiente ejemplo ilustra un caso en el que el método de las capas es preferible.

EJEMPLO 3 Preferible el método de las capas

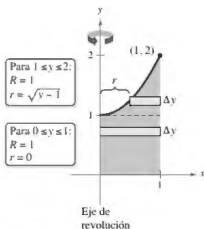
•••► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por la gráfica de

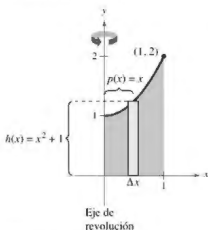
$$y = x^2 + 1, \quad y = 0, \quad x = 0 \quad y \quad x = 1$$

respecto al eje y .

Solución En el ejemplo 4 de la sección 3.2, vio que el método de la arandela requiere dos integrales para determinar el volumen de este sólido. Vea la figura 3.33(a).



(a) Método de los discos



(b) Método de las capas

Figura 3.33

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (1^2 - 0^2) dy + \pi \int_1^2 [1^2 - (\sqrt{y-1})^2] dy && \text{Aplique el método de la arandela.} \\ &= \pi \int_0^1 1 dy + \pi \int_1^2 (2-y) dy && \text{Simplifique.} \\ &= \pi [y]_0^1 + \pi \left[2y - \frac{y^2}{2} \right]_1^2 && \text{Integre.} \\ &= \pi + \pi \left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

En la figura 3.33(b) se puede ver que el método de las capas requiere solo una integral para encontrar el volumen.

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 p(x)h(x) dx && \text{Aplique el método de las capas.} \\ &= 2\pi \int_0^1 x(x^2 + 1) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 && \text{Integre.} \\ &= 2\pi \left(\frac{3}{4} \right) \\ &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Considere el sólido formado mediante la revolución de la región en el ejemplo 3 respecto a la línea vertical $x = 1$. ¿El sólido de revolución resultante tiene un volumen mayor o menor que el sólido en el ejemplo 3? Sin integrar, se puede razonar que el sólido resultante tendría un volumen menor porque “más” de la región girada estaría más cerca del eje de revolución. Para confirmar esto, intente resolver la integral

$$V = 2\pi \int_0^1 (1-x)(x^2 + 1) dx \quad \rho(x) = 1-x$$

que da el volumen del sólido.

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para obtener más información sobre los métodos de disco y de las capas, consulte el artículo “The Disk and Shell Method”, por Charles A. Cable, en *The American Mathematical Monthly*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

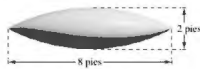
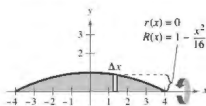


Figura 3.34



Método de los discos.

Figura 3.35

EJEMPLO 4 Volumen de un flotador

Un flotador debe ser hecho en la forma mostrada en la figura 3.34. El flotador está diseñado al rotar la gráfica de

$$y = 1 - \frac{x^2}{16}, \quad -4 \leq x \leq 4$$

alrededor del eje x , donde x y y se miden en pies. Encuentre el volumen del flotador.

Solución Consulte la figura 3.35 y utilice el método de los discos como se muestra.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-4}^4 \left(1 - \frac{x^2}{16}\right)^2 dx && \text{Aplique el método de los discos.} \\ &= \pi \int_{-4}^4 \left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{256}\right) dx && \text{Simplifique.} \\ &= \pi \left[x - \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{1280} \right]_{-4}^4 && \text{Integre.} \\ &= \frac{64\pi}{15} \\ &= 13.4 \text{ pies cúbicos} \end{aligned}$$

Para utilizar el método de las capas en el ejemplo 4, tendría que resolver en los términos de la ecuación

$$y = 1 - \frac{x^2}{16}$$

y luego evaluar una integral que requiere una sustitución de u .

A veces es muy difícil (o incluso imposible) de resolver. En estos casos, debe utilizar un rectángulo vertical (de ancho Δx), así x es la variable de integración. La posición (horizontal o vertical) del eje de revolución determina entonces el método a utilizar. Esto se muestra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Necesidad del método de las capas

Encuentre el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^3 + x + 1$, $y = 1$ y $x = 1$ respecto a la recta $x = 2$ como se muestra en la figura 3.36.

Solución En la ecuación $y = x^3 + x + 1$, no puede resolver fácilmente para x en términos de y . Por lo tanto, la variable de integración debe ser x , y debe elegir un rectángulo representativo vertical. Debido a que el rectángulo es paralelo al eje de revolución, utilice el método de las capas.

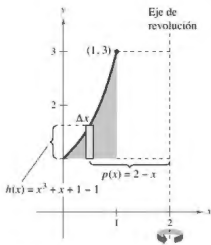


Figura 3.36

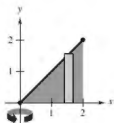
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b p(x)h(x) dx && \text{Aplique el método de las capas.} \\ &= 2\pi \int_0^1 (2-x)(x^3 + x + 1 - 1) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (-x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x) dx && \text{Simplifique.} \\ &= 2\pi \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 && \text{Integre.} \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 \right) \\ &= \frac{29\pi}{15} \end{aligned}$$

3.3 Ejercicios

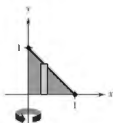
Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Encontrar el volumen de un sólido En los ejercicios 1-14, utilice el método de las capas para configurar y calcular la integral que da el volumen del sólido generado al girar la región plana respecto al eje y .

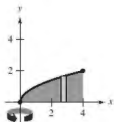
1. $y = x$



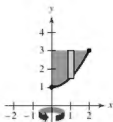
2. $y = 1 - x$



3. $y = \sqrt{x}$



4. $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$



5. $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 0$, $x = 4$

6. $y = \frac{1}{2}e^x$, $y = 0$, $x = 3$

7. $y = x^2$, $y = 4x - x^2$

8. $y = 9 - x^2$, $y = 0$

9. $y = 4x - x^2$, $x = 0$, $y = 4$

10. $y = x^{3/2}$, $y = 8$, $x = 0$

11. $y = \sqrt{x-2}$, $y = 0$, $x = 4$

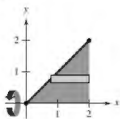
12. $y = -x^2 + 1$, $y = 0$

13. $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

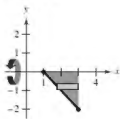
$$14. y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, y = 0, x = 0, x = \pi$$

Encontrar el volumen de un sólido En los ejercicios 15-22, utilice el método de las capas para configurar y calcular la integral que da el volumen del sólido generado al girar la región plana respecto al eje x .

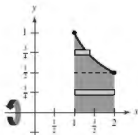
15. $y = x$



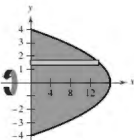
16. $y = 1 - x$



17. $y = \frac{1}{x}$



18. $x + y^2 = 16$



19. $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$

20. $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 4$

21. $x + y = 4$, $y = x$, $y = 0$

22. $y = \sqrt{x+2}$, $y = x$, $y = 0$

Encontrar el volumen de un sólido En los ejercicios 23-26, utilice el método de las capas para encontrar el volumen del sólido generado al girar la región plana sobre la recta dada.

23. $y = 2x - x^2$, $y = 0$, respecto a la recta $x = 4$

24. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$, respecto a la recta $x = 1$

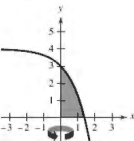
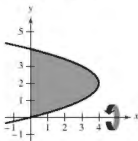
25. $y = x^2$, $y = 4x - x^2$, respecto a la recta $x = 4$

26. $y = \frac{1}{3}x^3$, $y = 6x - x^2$, respecto a la recta $x = 3$

Elegir un método En los ejercicios 27 y 28, debe decidir si es más conveniente utilizar el método de los discos o el método de las capas para encontrar el volumen del sólido de revolución. Explique su razonamiento. (No calcule el volumen.)

27. $(y-2)^2 = 4-x$

28. $y = 4 - e^x$



Elegir un método En los ejercicios 29-32, utilice el método de los discos o el método de las capas para encontrar los volúmenes de los sólidos generados al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones respecto a las rectas dadas.

29. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$

(a) el eje x (b) el eje y (c) la recta $x = 4$

30. $y = \frac{10}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$

(a) el eje x (b) el eje y (c) la recta $y = 10$

31. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$, $x = 0$, $y = 0$
 (a) el eje x (b) el eje y (c) la recta $x = a$
32. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$ (hipocicloide)
 (a) el eje x (b) el eje y

43 Encontrar el volumen de un sólido. En los ejercicios 33-36, (a) utilice una herramienta de graficación para trazar la región plana acotada por las gráficas de las ecuaciones, y (b) use las capacidades de integración de la herramienta de graficación para aproximar el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje y .

33. $x^{4/3} + y^{4/3} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, primer cuadrante
34. $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$
35. $y = \sqrt{(x-2)^2(x-6)^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 6$
36. $y = \frac{2}{1+e^{1/x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

37. **Rectángulos representativos** Considere un sólido que se genera al hacer girar una región plana respecto al eje y . Describa la posición de un rectángulo representativo cuando se usa (a) el método de las capas y (b) el método de los discos para encontrar el volumen del sólido.
38. **Describir capas cilíndricas** Considere la región plana acotada por las gráficas de
 $y = k$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = b$
 donde $k > 0$ y $b > 0$. ¿Cuáles son las alturas y los radios de los cilindros generados cuando se gira esta región respecto a (a) el eje x y (b) el eje y ?

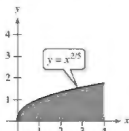
Comparar integrales En los ejercicios 39 y 40, dé un argumento geométrico que explique por qué las integrales tienen valores iguales.

39. $\int_1^5 (x-1) dx = 2\pi \int_0^2 y[5-(y^2+1)] dy$

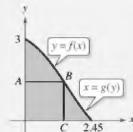
40. $\int_0^2 [16-(2y)^2] dy = 2\pi \int_0^4 x(\frac{x}{2}) dx$

41. **Comparar volúmenes** La región en la figura se gira alrededor de los ejes y la recta dados. Ordene los volúmenes de los sólidos resultantes de menor a mayor. Explique su razonamiento.

- (a) Del eje x (b) Del eje y (c) $x = 4$



¿CÓMO LO VE? Use la gráfica para responder a lo siguiente.



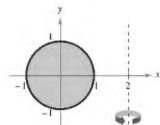
- (a) Describa la figura generada por la rotación del segmento AB respecto al eje y .
- (b) Describa la figura generada por la rotación del segmento BC respecto al eje y .
- (c) Suponga que la curva en la figura puede ser descrita como $y = f(x)$ o $x = g(x)$. Al girar la región acotada por la curva, $y = 0$ y $x = 0$ respecto al eje y se genera un sólido. Determine las integrales para encontrar el volumen de este sólido utilizando el método de los discos y el método de las capas. (No integre.)

Analizar una integral En los ejercicios 43-46, la integral representa el volumen de un sólido de revolución. Identifique (a) la región plana que se gira y (b) el eje de revolución.

43. $2\pi \int_0^2 x^2 dx$ 44. $2\pi \int_0^1 y - y^{3/2} dy$

45. $2\pi \int_0^6 (y+2)\sqrt{6-y} dy$ 46. $2\pi \int_0^1 (4-x)e^x dx$

47. **Pieza de máquina** Se genera un sólido al girar la región acotada por $y = \frac{1}{2}x^2$ y $y = 2$ respecto al eje y . Un agujero, centrado a lo largo del eje de revolución, es perforado a través de este sólido de manera que se elimina una cuarta parte del volumen. Encuentre el diámetro del agujero.
48. **Pieza de máquina** Se genera un sólido al girar la región acotada por $y = \sqrt{9-x^2}$ y $y = 0$ respecto al eje y . Un agujero, centrado a lo largo del eje de revolución, es perforado a través de este sólido de manera que se elimina un tercio del volumen. Encuentre el diámetro del agujero.
49. **Volumen de un toro** Un toro se forma al girar la región acotada por el círculo $x^2 + y^2 = 1$ respecto a la recta $x = 2$ (vea la figura). Calcule el volumen de este sólido "en forma de rosquilla". (Sugerencia: La integral $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ representa el área de un semicírculo.)



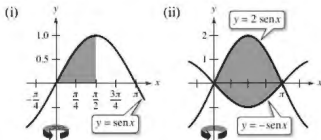
50. **Volumen de un toro** Repita el ejercicio 49 para un toro formado por el giro de la región acotada por el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ respecto a la recta $x = R$, donde $r < R$

51. **Hallar el volumen de sólidos**

- (a) Utilice la derivación para verificar que

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = \operatorname{sen} x - x \cos x + C.$$

- (b) Utilice el resultado del inciso (a) para encontrar el volumen del sólido generado al girar cada región plana respecto al eje y .

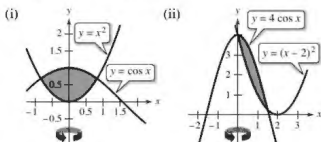


52. **Hallar el volumen de sólidos**

- (a) Utilice la derivación para verificar que

$$\int x \cos x \, dx = \cos x + x \operatorname{sen} x + C.$$

- (b) Utilice el resultado del inciso (a) para encontrar el volumen del sólido generado al girar cada región plana respecto al eje y . (*Sugerencia:* Comience por la aproximación de los puntos de intersección.)



53. **Volumen de un segmento de esfera** Sea una esfera de radio r que es cortada por un plano, formando de este modo un segmento de altura h . Demuestre que el volumen de este segmento es

$$\frac{1}{3} \pi r^2 (3r - h).$$

54. **Volumen de un elipsoide** Considere la región plana acotada por la gráfica de

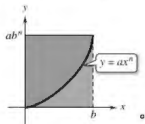
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

donde $a > 0$ y $b > 0$. Demuestre que el volumen del elipsoide formado cuando esta región gira respecto al eje y es

$$\frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

¿Cuál es el volumen cuando se hace girar la región alrededor del eje x ?

55. **Exploración** Considere la región acotada por las gráficas de $y = ax^n$, $y = ab^n/x$ y $x = 0$ (vea la figura).



- (a) Determine la razón $R_1(n)$ del área de la región al área del rectángulo circunscrito.
 (b) Encuentre $\lim_{n \rightarrow \infty} R_1(n)$ y compare el resultado con el área del rectángulo circunscrito.
 (c) Determine el volumen del sólido de revolución formado al girar la región alrededor del eje y . Encuentre la razón $R_2(n)$ de este volumen al volumen del cilindro circular recto circunscrito.
 (d) Encuentre $\lim_{n \rightarrow \infty} R_2(n)$ y compare el resultado con el volumen del cilindro circunscrito.
 (e) Utilice los resultados de los incisos (b) y (d) para hacer una conjetura acerca de la forma de la gráfica de $y = ax^n$ ($0 \leq x \leq b$) cuando $n \rightarrow \infty$.

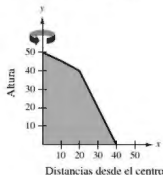
56. **Pléneslo** Relacione cada integral con el sólido cuyo volumen representa, y proporcione las dimensiones de cada sólido.

- (a) Cono circular recto (b) Toro (c) Esfera
 (d) Cilindro circular recto (e) Elipsoide

- (i) $2\pi \int_0^r hx \, dx$ (ii) $2\pi \int_0^r hx \left(1 - \frac{x}{r}\right) dx$
 (iii) $2\pi \int_0^r 2x\sqrt{r^2 - x^2} \, dx$ (iv) $2\pi \int_0^b 2ax \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}} \, dx$
 (v) $2\pi \int_{-r}^r (R-x)(2\sqrt{r^2 - x^2}) \, dx$

57. **Volumen de un cobertizo de almacenamiento** Un cobertizo de almacenamiento tiene una base circular de diámetro 80 pies. Comenzando en el centro, la altura interior se mide cada 10 pies y se registra en la tabla (vea la figura).

x	Altura
0	50
10	45
20	40
30	20
40	0



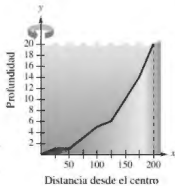
- (a) Use la regla de Simpson para aproximar el volumen del cobertizo.
 (b) Tenga en cuenta que la línea del techo se compone de dos segmentos de recta. Encuentre las ecuaciones de los segmentos de recta y utilice la integración para encontrar el volumen del cobertizo.

- 58. Modelar datos** Un estanque es aproximadamente circular, con un diámetro de 400 metros. Comenzando en el centro, la profundidad del agua se mide cada 25 pies y se registra en la tabla (ver figura).

x	0	25	50
Profundidad	20	19	19

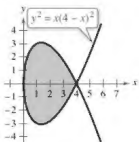
x	75	100	125
Profundidad	17	15	14

x	150	175	200
Profundidad	10	6	0



- (a) Use la regla de Simpson para aproximar el volumen de agua en el estanque.
- (b) Utilice la capacidad de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo cuadrático para las profundidades registradas en la tabla. Utilice la herramienta de graficación para trazar las profundidades y graficar el modelo.
- (c) Utilice las capacidades de integración de una herramienta de graficación y el modelo en el inciso (b) para aproximar el volumen de agua en el estanque.
- (d) Use el resultado del inciso (c) para aproximar el número de galones de agua en el estanque. (*Sugerencia:* 1 pie cúbico de agua es de aproximadamente 7.48 galones.)

- 59. Volúmenes iguales** Sean V_1 y V_2 los volúmenes de los sólidos que resultan cuando la región plana acotada por $y = 1/x$, $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$ y $x = c$ (donde $c > \frac{1}{4}$) es girado alrededor del eje x y el eje y , respectivamente. Encuentre el valor de c para los que $V_1 = V_2$.
- 60. Volumen de un segmento de un paraboloides** La región acotada por $y = r^2 - x^2$, $y = 0$ y $x = 0$ se hace girar alrededor del eje y y para formar un paraboloides. Un agujero, centrado a lo largo del eje de revolución, es perforado a través de este sólido. El agujero tiene un radio de k , $0 < k < r$. Encuentre el volumen del anillo resultante (a) mediante la integración respecto a x , y (b) mediante la integración respecto a y .
- 61. Hallar volúmenes de cuerpos sólidos** Considere la gráfica de $y^2 = x(4-x)^2$ (vea la figura). Encuentre los volúmenes de los sólidos que se generan cuando el hueco de esta gráfica se gira respecto a (a) el eje x , (b) el eje y y (c) la recta $x = 4$.



PROYECTO DE TRABAJO

Saturno

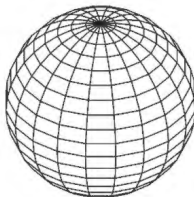


El achatamiento de Saturno Saturno es el más achatado de los planetas de nuestro sistema solar. Su radio ecuatorial mide 60,268 kilómetros y su radio polar mide 54,364 kilómetros. La fotografía mejorada a color de Saturno fue tomada por el Voyager 1. En la fotografía, el achatamiento de Saturno es claramente visible.

- (a) Encuentre la razón de los volúmenes de la esfera y el elipsoide achatado mostrados a continuación.
- (b) Si un planeta era esférico y tenía el mismo volumen que Saturno, ¿cuál sería su radio?

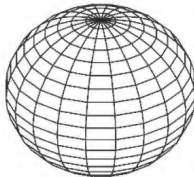
Modelo computarizado de "Saturno esférico", cuyo radio ecuatorial es igual a su radio polar. La ecuación de la sección transversal que pasa por el polo es

$$x^2 + y^2 = 60,268^2.$$



Modelo computarizado de "Saturno achatado", cuyo radio ecuatorial es mayor que su radio polar. La ecuación de la sección transversal que pasa por el polo es

$$\frac{x^2}{60,268^2} + \frac{y^2}{54,364^2} = 1.$$



3.4 Longitud de arco y superficies de revolución



CHRISTIAN HUYGENS
(1629–1695)

El matemático holandés Christian Huygens, quien inventó el reloj de péndulo, y James Gregory (1638–1675), un matemático escocés, hicieron contribuciones tempranas al problema de encontrar la longitud de una curva rectificable.

Consulte *LarsonCalculus.com* para leer más de esta biografía.

- Encuentre la longitud de arco de una curva suave.
- Encuentre el área de una superficie de revolución.

Longitud de arco

En esta sección se utilizan integrales definidas para encontrar las longitudes de arco de las curvas y las áreas de superficies de revolución. En cualquier caso, un arco (un segmento de una curva) se aproxima por segmentos de recta cuyas longitudes vienen dadas por la fórmula de la distancia

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Una curva **rectificable** es aquella que tiene una longitud de arco finita. Verá que una condición suficiente para que la gráfica de una función sea rectificable entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es que f' sea continua en $[a, b]$. Tal función es **continuamente diferenciable** en $[a, b]$ y su gráfica en el intervalo $[a, b]$ es una **curva suave**.

Considere una función $y = f(x)$ que es continuamente diferenciable en el intervalo $[a, b]$. Puede aproximar la gráfica de f por n segmentos de recta cuyos puntos finales son determinados por la partición

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

como se muestra en la figura 3.37. Al hacer que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, se puede aproximar la longitud del gráfico por

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2 (\Delta x_i)^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} (\Delta x_i). \end{aligned}$$

Esta aproximación parece mejorar cuando $\|\Delta\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Así, la longitud de la gráfica es

$$s = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} (\Delta x_i).$$

Debido a que $f'(x)$ existe para cada x en (x_{i-1}, x_i) el teorema del valor medio garantiza la existencia de c_i en (x_{i-1}, x_i) tal que

$$\begin{aligned} f(x_i) - f(x_{i-1}) &= f'(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\ \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} &= f'(c_i) \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(c_i).$$

Debido a que f' es continua en $[a, b]$ se deduce que $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ también es continua (y por lo tanto integrable) en $[a, b]$ lo que implica que

$$\begin{aligned} s &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} (\Delta x_i) \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \end{aligned}$$

donde s se denomina **longitud de arco** de f entre a y b .

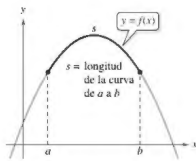
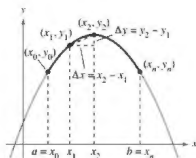


Figura 3.37

Definición de longitud del arco

Sea la función $y = f(x)$ que representa una curva suave en el intervalo $[a, b]$. La **longitud de arco de f entre a y b** es

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Del mismo modo, para una curva suave $x = g(y)$, la **longitud de arco de g entre c y d** es

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy.$$

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para ver cómo se puede utilizar la longitud de arco para definir las funciones trigonométricas, consulte el artículo "Trigonometry Requires Calculus, Not Vice Versa", de Yves Nievergelt, en *UMAP Modules*.

Debido a que la definición de longitud del arco es aplicable a una función lineal, se puede comprobar que esta nueva definición concuerda con la fórmula estándar de la distancia para la longitud de un segmento de recta. Esto se demuestra en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Longitud de un segmento de recta

Encuentre la longitud del arco de (x_1, y_1) a (x_2, y_2) en la gráfica de

$$f(x) = mx + b$$

como se muestra en la figura 3.38.

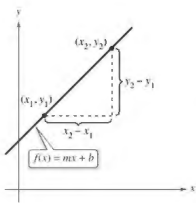
Solución Como

$$m = f'(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

se deduce que

$$\begin{aligned} s &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx && \text{Fórmula de la longitud de arco} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2} dx \\ &= \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}}(x) \Big|_{x_1}^{x_2} && \text{Integre y simplifique.} \\ &= \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}}(x_2 - x_1) \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

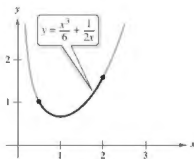
que es la fórmula para la distancia entre dos puntos en el plano. ■



La fórmula para la longitud de arco de la gráfica (x_1, y_1) a (x_2, y_2) es la misma que la fórmula estándar de la distancia.

Figura 3.38

▷ **TECNOLOGÍA** Las integrales definidas que representan la longitud de arco a menudo son muy difíciles de evaluar. En esta sección se presentan algunos ejemplos. En la siguiente unidad, con técnicas de integración más avanzadas, podrá enfrentar problemas más difíciles de longitud de arco. Mientras tanto, recuerde que siempre puede utilizar un programa de integración numérica para aproximar una longitud de arco. Por ejemplo, utilice la función de integración numérica de una herramienta de graficación para aproximar longitudes de arco en los ejemplos 2 y 3.



Longitud del arco de la gráfica de y en $[\frac{1}{2}, 2]$.

Figura 3.39

EJEMPLO 2 Encontrar la longitud de arco

Determine la longitud de arco de la gráfica de

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$$

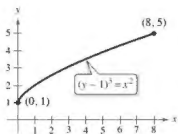
en el intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$, como se muestra en la figura 3.39.

Solución Utilizando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{6} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right)$$

obtiene una longitud de arco de

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx && \text{Fórmula de la longitud de arco} \\ &= \int_{1/2}^2 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\right]^2} dx \\ &= \int_{1/2}^2 \sqrt{\frac{1}{4} \left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}\right)} dx \\ &= \int_{1/2}^2 \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx && \text{Simplifique.} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} \right]_{1/2}^2 && \text{Integre.} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{13}{6} + \frac{47}{24} \right) \\ &= \frac{33}{16}. \end{aligned}$$



Longitud del arco de la gráfica de y en $[0, 8]$.

Figura 3.40

EJEMPLO 3 Encontrar la longitud de arco

Determine la longitud de arco de la gráfica de $(y - 1)^3 = x^2$ en el intervalo $[0, 8]$, como se muestra en la figura 3.40.

Solución Comience por resolver para x en términos de y : $x = \pm(y - 1)^{3/2}$. Elegir el valor positivo de x produce

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}(y - 1)^{1/2}.$$

El intervalo $[0, 8]$ de x corresponde al intervalo $[1, 5]$ de y y la longitud de arco es

$$\begin{aligned} s &= \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy && \text{Fórmula de la longitud de arco} \\ &= \int_1^5 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2}(y - 1)^{1/2}\right]^2} dy \\ &= \int_1^5 \sqrt{\frac{9}{4}y - \frac{5}{4}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_1^5 \sqrt{9y - 5} dy && \text{Simplifique.} \\ &= \frac{1}{18} \left[\frac{(9y - 5)^{3/2}}{3/2} \right]_1^5 && \text{Integre.} \\ &= \frac{1}{27} (40^{3/2} - 4^{3/2}) \\ &\approx 9.073. \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Encontrar la longitud de arco

***► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Determine la longitud de arco de la gráfica de

$$y = \ln(\cos x)$$

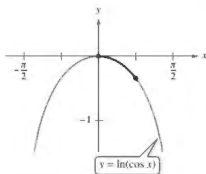
de $x = 0$ a $x = \pi/4$, como se muestra en la figura 3.41.

Solución Utilizando

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\tan x$$

obtiene una longitud de arco de

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx && \text{Fórmula de la longitud de arco} \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x} dx && \text{Identidad trigonométrica} \\ &= \int_0^{\pi/4} \sec x dx && \text{Simplifique.} \\ &= \left[\ln|\sec x + \tan x| \right]_0^{\pi/4} && \text{Integre.} \\ &= \ln(\sqrt{2} + 1) - \ln 1 \\ &\approx 0.881. \end{aligned}$$



Longitud del arco de la gráfica de y en

$$\left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

Figura 3.41

EJEMPLO 5 Longitud de un cable

Un cable eléctrico cuelga entre dos torres que se encuentran a 200 pies de distancia, como se muestra en la figura 3.42. El cable toma la forma de una catenaria cuya ecuación es

$$y = 75(e^{x/150} + e^{-x/150}) = 150 \cosh \frac{x}{150}$$

Encuentre la longitud de arco del cable entre las dos torres.

Solución Debido a que $y' = \frac{1}{2}(e^{x/150} - e^{-x/150})$ puede escribir

$$(y')^2 = \frac{1}{4}(e^{x/75} - 2 + e^{-x/75})$$

y

$$1 + (y')^2 = \frac{1}{4}(e^{x/75} + 2 + e^{-x/75}) = \left[\frac{1}{2}(e^{x/150} + e^{-x/150}) \right]^2.$$

Por lo tanto, la longitud de arco del cable es

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx && \text{Fórmula de la longitud de arco} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-100}^{100} (e^{x/150} + e^{-x/150}) dx \\ &= 75 \left[e^{x/150} - e^{-x/150} \right]_{-100}^{100} && \text{Integre.} \\ &= 150(e^{2/3} - e^{-2/3}) \\ &\approx 215 \text{ pies.} \end{aligned}$$

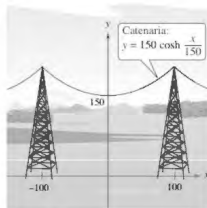


Figura 3.42

Área de una superficie de revolución

En las secciones 3.2 y 3.3 se usó la integración para calcular el volumen de un sólido de revolución. Ahora verá un procedimiento para hallar el área de una superficie de revolución.

Definición de la superficie de revolución

Cuando la gráfica de una función continua se hace girar alrededor de una recta, la superficie resultante es una **superficie de revolución**.

El área de una superficie de revolución se deduce de la fórmula para el área de la superficie lateral de un cono circular recto truncado. Considere el segmento de recta en la figura de la derecha, donde L es la longitud, r_1 es el radio en el extremo izquierdo y r_2 es el radio en el extremo derecho del segmento de recta. Cuando el segmento de recta se hace girar alrededor de su eje de revolución, se forma un cono circular recto truncado, con

$$S = 2\pi rL \quad \text{Superficie lateral del cono truncado}$$

donde

$$r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2). \quad \text{Radio promedio del cono truncado}$$

(En el ejercicio 54, se le pedirá que verifique la fórmula para S .)

Considere una función f que tiene derivada continua en el intervalo $[a, b]$. La gráfica de f se hace girar alrededor del eje x para formar una superficie de revolución, como se muestra en la figura 3.43. Sea Δ una partición de $[a, b]$ con subintervalos de ancho Δx_i , entonces el segmento de recta de longitud

$$\Delta L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

genera un cono truncado. Sea r_i el radio promedio de este cono truncado. Por el teorema del valor medio, existe un punto d_i (en el i -ésimo subintervalo) tal que

$$r_i = f(d_i).$$

El área de superficie lateral ΔS_i del cono truncado es

$$\begin{aligned} \Delta S_i &= 2\pi r_i \Delta L_i \\ &= 2\pi f(d_i) \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \\ &= 2\pi f(d_i) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i. \end{aligned}$$

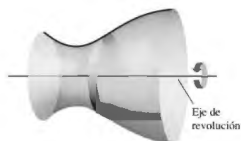
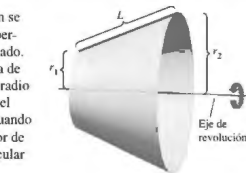
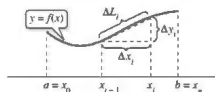


Figura 3.43

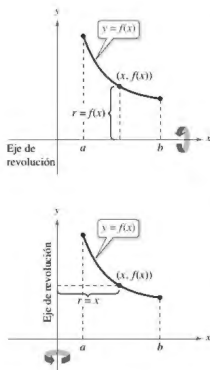


Figura 3.44

Por el teorema del valor medio, existe un punto c_i en (x_{i-1}, x_i) tal que

$$\begin{aligned} f'(c_i) &= \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \\ &= \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}. \end{aligned}$$

Así, $\Delta S_i = 2\pi f(d_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i$, y la superficie total se puede aproximar por

$$S \approx 2\pi \sum_{i=1}^n f(d_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i.$$

Se puede demostrar que el límite de la parte derecha como $\|\Delta\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) es

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

De una manera similar, si la gráfica de f se hace girar respecto al eje y , entonces S es

$$S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

En estas dos fórmulas de S , puede considerar los productos $2\pi f(x)$ y $2\pi x$ como las circunferencias de los círculos trazados por un punto (x, y) en la gráfica de f al girar alrededor del eje x y el eje y (figura 3.44). En un caso, el radio es $r = f(x)$ y en el otro caso, el radio es $r = x$. Además, ajustando r adecuadamente se puede generalizar la fórmula para el área de superficie para cubrir *cualquier* eje horizontal o vertical de la revolución, como se indica en la siguiente definición.

Definición del área de una superficie de revolución

Sea $y = f(x)$ que tiene una derivada continua en el intervalo $[a, b]$. El área S de la superficie de revolución formada al girar la gráfica de f alrededor de un eje horizontal o vertical es

$$S = 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad \text{y es una función de } x.$$

donde $r(x)$ es la distancia entre la gráfica de y y el eje de revolución. Si $x = g(y)$ en el intervalo $[c, d]$, entonces el área de la superficie es

$$S = 2\pi \int_c^d r(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy \quad \text{x es una función de } y.$$

donde $r(y)$ es la distancia entre la gráfica de g y el eje de revolución.

Las fórmulas de esta definición a veces se escriben como

$$S = 2\pi \int_a^b r(x) ds \quad \text{y es una función de } x.$$

y

$$S = 2\pi \int_c^d r(y) ds \quad \text{x es una función de } y.$$

donde

$$ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad \text{y} \quad ds = \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy,$$

respectivamente.

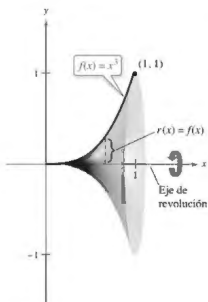


Figura 3.45

EJEMPLO 6 Área de una superficie de revolución

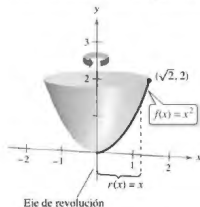
Encuentre el área de la superficie formada al girar la gráfica de $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 1]$ alrededor del eje x , como se muestra en la figura 3.45.

Solución La distancia entre el eje x y la gráfica de f es $r(x) = f(x)$, y como $f'(x) = 3x^2$, el área de la superficie es

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_a^b r(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx && \text{Fórmula para el área de la superficie} \\
 &= 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} \, dx \\
 &= \frac{2\pi}{36} \int_0^1 (36x^3)(1 + 9x^4)^{1/2} \, dx && \text{Simplifique.} \\
 &= \frac{\pi}{18} \left[\frac{(1 + 9x^4)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 && \text{Integre.} \\
 &= \frac{\pi}{27} (10^{3/2} - 1) \\
 &\approx 3.563.
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Área de una superficie de revolución

Encuentre el área de la superficie formada al girar la gráfica de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, \sqrt{2}]$ alrededor del eje x , como se muestra en la siguiente figura.



Solución En este caso, la distancia entre la gráfica de f y el eje y es $r(x) = x$. Con $f'(x) = 2x$ y la fórmula para el área de una superficie, se puede determinar que

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_a^b r(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx \\
 &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1 + (2x)^2} \, dx \\
 &= \frac{2\pi}{8} \int_0^{\sqrt{2}} (1 + 4x^2)^{1/2} (8x) \, dx && \text{Simplifique.} \\
 &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{(1 + 4x^2)^{3/2}}{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}} && \text{Integre.} \\
 &= \frac{\pi}{6} [(1 + 8)^{3/2} - 1] \\
 &= \frac{13\pi}{3} \\
 &\approx 13.614.
 \end{aligned}$$

3.4 Ejercicios

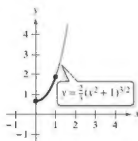
Consulta CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Encontrar la distancia utilizando dos métodos En los ejercicios 1 y 2, determine la distancia entre los puntos utilizando (a) la fórmula de la distancia y (b) integración.

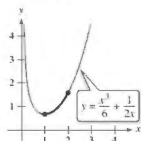
1. (0, 0), (8, 15) 2. (1, 2), (7, 10)

Encontrar la longitud de arco En los ejercicios 3-16, encuentre la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo indicado.

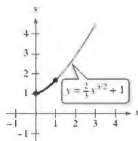
3. $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$



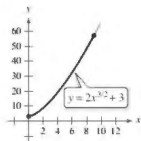
4. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$



5. $y = \frac{2}{3}x^{3/2} + 1$



6. $y = 2x^{3/2} + 3$



7. $y = \frac{3}{2}x^{2/3}$, [1, 8]

8. $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$, [1, 3]

9. $y = \frac{x^5}{10} + \frac{1}{6x^3}$, [2, 5]

10. $y = \frac{3}{2}x^{2/3} + 4$, [1, 27]

11. $y = \ln(\sec x)$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$


12. $y = \ln(\cos x)$, $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

13. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, [0, 2]

14. $y = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$, [ln 2, ln 3]

15. $x = \frac{1}{2}(y^2 + 2)^{3/2}$, $0 \leq y \leq 4$

16. $x = \frac{1}{3}\sqrt{y(y-3)}$, $1 \leq y \leq 4$

 Encontrar la longitud de arco En los ejercicios 17-26, (a) trace la gráfica de la función, destacando la parte indicada por el intervalo dado, (b) encuentre una integral definida que represente la longitud de arco de la curva en el intervalo indicado y observe que la integral no puede ser evaluada con las técnicas estudiadas hasta el momento, y (c) use las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud de arco.

17. $y = 4 - x^2$, $0 \leq x \leq 2$

18. $y = x^2 + x - 2$, $-2 \leq x \leq 1$

19. $y = \frac{1}{x}$, $1 \leq x \leq 3$

20. $y = \frac{1}{x+1}$, $0 \leq x \leq 1$

21. $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$

22. $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

23. $x = e^{-y}$, $0 \leq y \leq 2$

24. $y = \ln x$, $1 \leq x \leq 5$

25. $y = 2 \arctan x$, $0 \leq x \leq 1$

26. $x = \sqrt{36 - y^2}$, $0 \leq y \leq 3$


Aproximar En los ejercicios 27 y 28, determine qué valor se aproxima mejor a la longitud de arco representada por el integral. (Haga su selección a partir de un dibujo del arco, no mediante la realización de los cálculos.)

27. $\int_0^2 \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{x^2 + 1}\right)\right]^2} dx$

- (a) 25 (b) 5 (c) 2 (d) -4 (e) 3

28. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx}(\tan x)\right]^2} dx$

- (a) 3 (b) -2 (c) 4 (d) $\frac{4\pi}{3}$ (e) 1

 Aproximar En los ejercicios 29 y 30, aproxime la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo [0, 4] de cuatro maneras. (a) Utilice la fórmula de la distancia para encontrar la distancia entre los puntos terminales del arco. (b) Utilice la fórmula de la distancia para encontrar las longitudes de los cuatro segmentos de línea que conectan los puntos en el arco cuando $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ y $x = 4$. Encuentre la suma de las cuatro longitudes. (c) Use la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar la integral obteniendo la longitud de arco indicada. (d) Utilice las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximar la integral obteniendo la longitud de arco indicada.

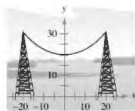
29. $f(x) = x^4$

30. $f(x) = (x^2 - 4)^2$

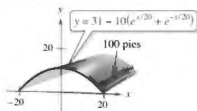
31. Longitud de una catenaria Los cables eléctricos suspendidos entre dos torres forman una catenaria (ver figura) modelada por la ecuación

$$y = 20 \cosh \frac{x}{20}, \quad -20 \leq x \leq 20$$

donde x y y se miden en metros. Las torres tienen 40 metros de separación. Encuentre la longitud del cable suspendido.



32. **Área de un techo** Un granero mide 100 pies de largo y 40 pies de ancho (vea la figura). Una sección transversal del techo es la catenaria invertida $y = 31 - 10(e^{x/20} + e^{-x/20})$. Encuentre el número de pies cuadrados de techo sobre el granero.



33. **Longitud del Gateway Arch** El Gateway Arch en St. Louis, Missouri, está modelado por $y = 693.8597 - 68.7672 \cosh 0.0100333x$, $-299.2239 \leq x \leq 299.2239$.

Utilice las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximarse a la longitud de esta curva (vea la figura).

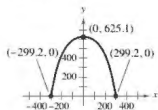


Figura para 33

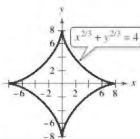


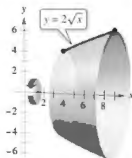
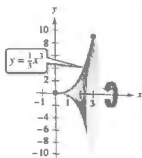
Figura para 34

34. **Astroide** Encuentre la longitud total de la gráfica de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$.
35. **Longitud de arco de un sector circular** Encuentre la longitud de arco desde $(0, 3)$ hasta $(2, \sqrt{3})$ en sentido horario a lo largo del círculo $x^2 + y^2 = 9$.
36. **Longitud de arco de un sector circular** Encuentre la longitud del arco desde $(-3, 4)$ hasta $(4, 3)$ en sentido horario a lo largo del círculo $x^2 + y^2 = 25$. Demuestre que el resultado es un cuarto de la circunferencia del círculo.

Calcular el área de una superficie de revolución En los ejercicios 37-42, configure y evalúe la integral definida para el área de la superficie generada al girar la curva alrededor del eje x .

37. $y = \frac{1}{3}x^3$

38. $y = 2\sqrt{x}$



39. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, $1 \leq x \leq 2$

40. $y = 3x$, $0 \leq x \leq 3$

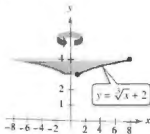
41. $y = \sqrt{4-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$

42. $y = \sqrt{9-x^2}$, $-2 \leq x \leq 2$

Calcular el área de una superficie de revolución En los ejercicios 43-46, configure y calcule la integral definida para el área de la superficie generada al girar la curva alrededor del eje y .

43. $y = \sqrt[3]{x} + 2$

44. $y = 9 - x^2$



45. $y = 1 - \frac{x^2}{4}$, $0 \leq x \leq 2$

46. $y = \frac{x}{2} + 3$, $1 \leq x \leq 5$

47. **Calcular el área de una superficie de revolución** En los ejercicios 47 y 48, utilice las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximar la superficie del sólido de revolución.

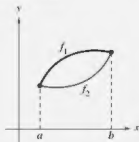
Función	Intervalo	Eje de revolución
47. $y = \sin x$	$[0, \pi]$	Eje y
48. $y = \ln x$	$[1, e]$	Eje y

DESARROLLO DE CONCEPTOS

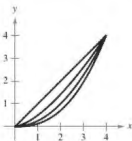
49. **Curva rectificable** Defina una curva rectificable.
50. **Precálculo y cálculo** ¿Qué fórmula y elemento representativo de precálculo se utiliza para desarrollar la fórmula de integración de longitud de arco?
51. **Precálculo y cálculo** ¿Qué fórmula y elemento representativo de precálculo se utiliza para desarrollar la fórmula de integración para el área de una superficie de revolución?



¿CÓMO LO VE? En la figura se muestran las gráficas de las funciones f_1 y f_2 en el intervalo $[a, b]$. La gráfica de cada función se gira alrededor del eje x . ¿Qué superficie de revolución tiene la mayor área de superficie? Explique.



53. Piénselo La figura muestra las gráficas de las funciones $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{2}x^{3/2}$, $y_3 = \frac{1}{4}x^2$ y $y_4 = \frac{1}{8}x^{3/2}$ en el intervalo $[0, 4]$. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite *Math-Graphs.com*.



- (a) Identifique las funciones.
 (b) Ordene las funciones en forma creciente de la longitud de arco.
 (c) Verifique su respuesta en el inciso (b) mediante el uso de las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximar cada longitud de arco con tres cifras decimales.

54. Verificar la fórmula

- (a) Dado un sector circular con un radio L y el ángulo central θ (vea la figura), demuestre que el área del sector está dada por $S = \frac{1}{2}L^2\theta$.
 (b) Al unir los bordes rectos del sector en el inciso (a), se forma un cono circular recto (vea la figura) y la superficie lateral del cono es la misma que el área del sector. Demuestre que el área es $S = \pi rL$, donde r es el radio de la base del cono. (*Sugerencia:* La longitud de arco del sector es igual a la circunferencia de la base del cono.)



Figura para 54(a)

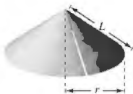
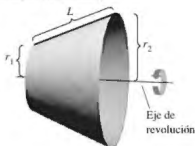


Figura para 54(b)

- (c) Use el resultado del inciso (b) para verificar que la fórmula para el área de la superficie lateral del cono truncado con altura inclinada L y radios r_1 y r_2 (vea la figura) es $S = \pi(r_1 + r_2)L$. (*Nota:* Esta fórmula se utilizó para desarrollar la integral para encontrar el área superficial de una superficie de revolución.)



55. Área de la superficie lateral de un cono Un cono circular recto se genera al girar la región acotada por $y = 3\sqrt{4-x}$, $y = 3$ y $x = 0$ respecto al eje y . Encuentre el área de la superficie lateral del cono.

56. Área de la superficie lateral de un cono Un cono circular recto se genera al girar la región acotada por $y = hx/r$, $y = h$ y $x = 0$ respecto al eje y . Compruebe que el área de la superficie lateral del cono es $S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.

57. Usar una esfera Encuentre el área de la superficie de una esfera formada al girar la gráfica de $y = \sqrt{9-x^2}$, $0 \leq x \leq 2$, alrededor del eje y .

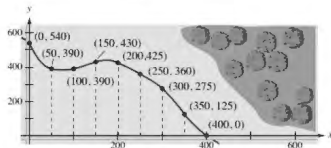
58. Usar una esfera Encuentre el área de la superficie de una esfera formada al girar la gráfica de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq a$, alrededor del eje y . Suponga que $a < r$.

59. Modelar datos La circunferencia C (en pulgadas) de un florero se mide a intervalos de tres pulgadas a partir de su base. Las mediciones se muestran en la tabla, donde y es la distancia vertical en pulgadas desde la base.

y	0	3	6	9	12	15	18
C	50	65.5	70	66	58	51	48

- (a) Utilice los datos para aproximar el volumen del florero usando los volúmenes de los discos de aproximación.
 (b) Utilice los datos para aproximar la superficie exterior (excluyendo la base) del florero sumando las superficies exteriores de los conos truncados circulares rectos de aproximación.
 (c) Utilice las capacidades de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo cúbico para los puntos (y, r) , donde $r = C/(2\pi)$. Utilice la herramienta de graficación para trazar los puntos y graficar el modelo.
 (d) Utilice el modelo en el inciso (c) y las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximar el volumen y el área de la superficie exterior del florero. Compare los resultados con sus respuestas en los incisos (a) y (b).

60. Modelar datos En la figura se muestra una propiedad delimitada por dos caminos perpendiculares y una corriente. Las distancias se miden en pies.



- (a) Utilice las capacidades de regresión de una herramienta de graficación para adaptarse a un polinomio de cuarto grado en la trayectoria de la corriente.
 (b) Utilice el modelo en el inciso (a) para aproximar el área de la propiedad en acres.
 (c) Utilice las capacidades de integración de una herramienta de graficación para hallar la longitud de la corriente que limita la propiedad.

61. **Volumen y área superficial** Sea R la región acotada por $y = 1/x$, el eje x , $x = 1$ y $x = b$, donde $b > 1$. Sea D el sólido formado cuando R se hace girar alrededor del eje x .

- Calcule el volumen V de D .
- Escriba la superficie S como una integral.
- Demuestre que V se acerca a un límite finito cuando $b \rightarrow \infty$.
- Demuestre que $S \rightarrow \infty$ cuando $b \rightarrow \infty$.

62. Piénselo Considere la ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

- Use un programa de graficación para trazar la ecuación.
- Establezca la integral definida para encontrar el primer cuadrante de longitud de arco de la gráfica en el inciso (a).
- Compare el intervalo de integración en el inciso (b) y el dominio del integrando. ¿Es posible calcular la integral definida? ¿Es posible utilizar la regla de Simpson para evaluar la integral definida? Explique. (Aprenderá cómo evaluar este tipo de integral en la sección 3.8.)

Aproximar la longitud de arco o superficie En los ejercicios 63–66, configure la integral definida para encontrar la longitud de arco o superficie indicada. Luego utilice las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximar el área de longitud de arco o la superficie. (Aprenderá cómo evaluar este tipo de integral en la sección 3.8.)

63. **Distancia de persecución** Un objeto huyendo sale del origen y se mueve hacia arriba sobre el eje y (vea la figura). Al mismo tiempo, un perseguidor deja el punto $(1, 0)$ y siempre se mueve hacia el objeto que huye. La velocidad del perseguidor es el doble de la del objeto que escapa. La ecuación de la trayectoria está modelada por

$$y = \frac{1}{3}(x^{3/2} - 3x^{1/2} + 2).$$

¿Hasta dónde se desplazó el objeto que huía cuando es atrapado? Demuestre que el perseguidor se ha desplazado dos veces más lejos.

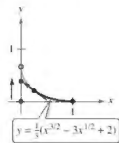


Figura para 63

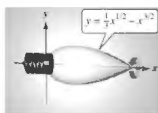


Figura para 64

64. **Diseñar un foco** Un foco ornamental ha sido diseñado mediante la revolución de la gráfica de

$$y = \frac{1}{3}x^{1/2} - x^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{3}$$

respecto al eje x , donde x y y se miden en pies (vea la figura). Encuentre el área de la superficie del foco y utilice el resultado para aproximar la cantidad de vidrio necesaria para fabricar el foco. (Suponga que el vidrio tiene 0.015 pulgadas de espesor.)

65. **Astroide** Encuentre el área de la superficie formada por la porción que gira en el primer cuadrante de la gráfica de $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$, $0 \leq y \leq 8$, alrededor del eje y .



Figura para 65

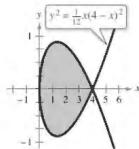


Figura para 66

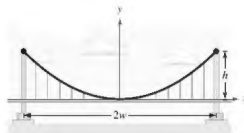
66. **Usar un rizo** Considere la gráfica de

$$y^2 = \frac{1}{12}x(4-x)^2$$

mostrada en la figura. Encuentre el área de la superficie que se forma cuando el rizo de esta gráfica se gira en torno al eje x .

67. **Puente colgante** Un cable para un puente colgante tiene la forma de una parábola con la ecuación $y = kx^2$. Sea h la altura del cable desde su punto más bajo hasta su punto más alto y sea $2w$ la longitud total del puente (vea la figura). Demuestre que la longitud del cable C está dada por

$$C = 2 \int_0^w \sqrt{1 + (4ht^2/w^4)^2} dt.$$



68. **Puente colgante** El puente Humber, que se encuentra en el Reino Unido e inaugurado en 1981, cuenta con un claro principal de unos 1400 metros. Cada una de sus torres tiene una altura de unos 155 metros. Utilice estas dimensiones, la integral en el ejercicio 67 y las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud de un cable parabólico a lo largo del claro principal.

69. **Longitud de arco y área** Sea C la curva dada por $f(x) = \cosh x$ para $0 \leq x \leq t$, donde $t > 0$. Demuestre que el longitud de arco de C es igual a la zona delimitada por C y el eje x . Identifique otra curva en el intervalo $0 \leq x \leq t$ con esta propiedad.

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

70. Encuentre la longitud de la curva $y^2 = x^3$ desde el origen hasta el punto donde la tangente forma un ángulo de 45° con el eje x .

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.
© The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

3.5 Trabajo

- Encontrar el trabajo realizado por una fuerza constante.
- Encontrar el trabajo realizado por una fuerza variable.

Trabajo realizado por una fuerza constante

El concepto de trabajo es importante para los científicos e ingenieros para determinar la energía necesaria para llevar a cabo diversas tareas. Por ejemplo, es útil saber la cantidad de trabajo hecho cuando una grúa levanta una viga de acero, cuando se comprime un resorte, cuando un cohete es propulsado en el aire, o cuando un camión jala una carga a lo largo de una carretera.

En general, el **trabajo** es realizado por una fuerza cuando se mueve un objeto. Si la fuerza aplicada al objeto es *constante*, entonces la definición de trabajo es la siguiente.

Definición de trabajo realizado por una fuerza constante

Si un objeto se mueve una distancia D en la dirección de una fuerza constante aplicada F entonces el **trabajo** W realizado por la fuerza se define como $W = FD$.

Hay cuatro tipos fundamentales de fuerzas: gravitacional, electromagnética, nuclear fuerte y nuclear débil. Se puede pensar en una **fuerza** como un *empujón* o un *jalón*; una fuerza cambia el estado de reposo o estado de movimiento de un cuerpo. Para las fuerzas gravitacionales de la Tierra, es común el uso de unidades de medición correspondientes al peso de un objeto.

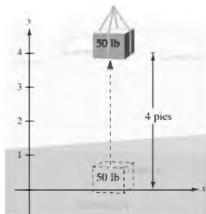
EJEMPLO 1 Levantar un objeto

Determine el trabajo realizado al levantar un objeto de 50 libras a 4 pies.

Solución La magnitud de la fuerza requerida es el peso del objeto, como se muestra en la figura 3.46. Así, el trabajo realizado al levantar el objeto 4 pies es

$$\begin{aligned} W &= FD && \text{Trabajo} = (\text{fuerza})(\text{distancia}) \\ &= 50(4) && \text{Fuerza} = 50 \text{ libras, distancia } 4 \text{ pies} \\ &= 200 \text{ pie-libras.} \end{aligned}$$

En el sistema de medición de Estados Unidos, el trabajo se expresa normalmente en pie-libras (ft-lb), pulgadas-libra, o pies-tonelada. En el Sistema Internacional de Unidades (SI), la unidad básica de la fuerza es el **newton**, la fuerza que se requiere para producir una aceleración de 1 metro por segundo cuadrado sobre una masa de 1 kilogramo. En este sistema, el trabajo se expresa típicamente en newton-metros, también llamados joules. En otro sistema, el sistema centímetro-gramo-segundo (CGS), la unidad básica de la fuerza es la **dina**, la fuerza requerida para producir una aceleración de 1 centímetro por segundo cuadrado sobre una masa de 1 gramo. En este sistema, el trabajo se expresa típicamente en dinas-centímetros (ergs) o newton-metros (joules).



El trabajo realizado en el levantamiento de un objeto de 50 libras 4 pies es de 200 pie-libras.

Figura 3.46

Exploración

¿Cuánto trabajo? En el ejemplo 1, se necesitan 200 pie-libras de trabajo para levantar el objeto de 50 libras a 4 pies verticalmente del suelo. Después de levantar el objeto, se camina una distancia horizontal de 4 pies. ¿Requeriría esto 200 pie-libras adicionales de trabajo? Explique su razonamiento.

Trabajo realizado por una fuerza variable

En el ejemplo 1, la fuerza implicada era *constante*. Cuando se aplica una fuerza *variable* a un objeto, se necesita del cálculo para determinar el trabajo realizado, pues la cantidad de fuerza cambia a medida que el objeto cambia de posición. Por ejemplo, la fuerza requerida para comprimir el resorte aumenta conforme el resorte se comprime.

Considere un objeto que se mueve a lo largo de una recta desde $x = a$ hasta $x = b$ por una fuerza $F(x)$ que varía continuamente. Sea Δ una partición que divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos determinados por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

y sea $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Para cada i , elija c_i tal que

$$x_{i-1} \leq c_i \leq x_i.$$

Por lo tanto, en c_i la fuerza es $F(c_i)$. Debido a que F es continua, se puede aproximar el trabajo realizado al mover el objeto a través del i -ésimo subintervalo por el incremento

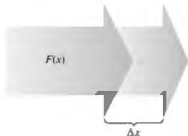
$$\Delta W_i = F(c_i) \Delta x_i$$

como se muestra en la figura 3.47. Por lo tanto, el trabajo total realizado a medida que el objeto se mueve de a a b es aproximado por

$$\begin{aligned} W &\approx \sum_{i=1}^n \Delta W_i \\ &= \sum_{i=1}^n F(c_i) \Delta x_i. \end{aligned}$$

Esta aproximación parece mejorar cuando $\|\Delta\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Así, el trabajo realizado es

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(c_i) \Delta x_i \\ &= \int_a^b F(x) dx. \end{aligned}$$



La cantidad de fuerza cambia a medida que un objeto cambia de posición (Δx).

Figura 3.47



EMILIE DE BRETEUIL
(1706–1749)

Un trabajo importante hecho por Breteuil fue la traducción de "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica" de Newton al francés. Su traducción y comentario contribuyeron en gran medida a la aceptación de la ciencia newtoniana en Europa.

Consulte LarsonCalculus.com para leer más de esta biografía.

Definición de trabajo realizado por una fuerza variable

Si un objeto se mueve a lo largo de una recta por una fuerza $F(x)$ que varía continuamente, entonces el **trabajo** W realizado por la fuerza a medida que el objeto se mueve de

$$x = a \text{ hasta } x = b$$

está dado por

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta W_i \\ &= \int_a^b F(x) dx. \end{aligned}$$

Los ejemplos que restan en esta sección usan algunas leyes físicas conocidas. Los descubrimientos de muchas de estas leyes se produjeron durante el mismo periodo en que se estaba desarrollando el cálculo. De hecho, durante los siglos XVII y XVIII, hubo poca diferencia entre los físicos y matemáticos. Uno de éstos fue la física matemática Emilie de Breteuil. Ella fue clave en la síntesis del trabajo de muchos otros científicos, incluyendo a Newton, Leibniz, Huygens, Kepler y Descartes. Su texto de física *Institutions* fue ampliamente utilizado por muchos años.

Las tres leyes de la física mencionadas a continuación fueron desarrolladas por Robert Hooke (1635–1703), Isaac Newton (1642–1727) y Charles de Coulomb (1736–1806).

- 1. Ley de Hooke:** La fuerza F requerida para comprimir o estirar un resorte (dentro de sus límites elásticos) es proporcional a la distancia d que el resorte se comprime o se estira desde su longitud original. Es decir,

$$F = kd$$

donde la constante de proporcionalidad k (la constante del resorte) depende de la naturaleza específica del resorte.

- 2. Ley de Newton de la gravitación universal:** La fuerza F de atracción entre dos partículas de masas m_1 y m_2 es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d entre las dos partículas. Es decir,

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

Debido a que m_1 y m_2 están en kilogramos y d en metros, F estará en newtons para un valor de $G = 6.67 \times 10^{-11}$ metros cúbicos por kilogramo-segundo al cuadrado, donde G es la constante gravitacional.

- 3. Ley de Coulomb:** La fuerza F entre dos cargas q_1 y q_2 en el vacío es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d entre las dos cargas. Es decir,

$$F = k \frac{q_1 q_2}{d^2}$$

Cuando q_1 y q_2 están dadas en unidades electrostáticas y d en centímetros, F estará en dinas para un valor de $k = 1$.

EJEMPLO 2 Compresión de un resorte

••• ▶ Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Una fuerza de 750 libras comprime un resorte 3 pulgadas desde su longitud natural de 15 pulgadas. Calcule el trabajo realizado en la compresión adicional del resorte de 3 pulgadas.

Solución Por la ley de Hooke, la fuerza $F(x)$ requerida para comprimir las unidades de resorte de x (de su longitud natural) es $F(x) = kx$. Debido a que $F(3) = 750$, se deduce que

$$F(3) = (k)(3) \Rightarrow 750 = 3k \Rightarrow 250 = k.$$

Por lo tanto, $F(x) = 250x$, como se muestra en la figura 3.48. Para encontrar el incremento de trabajo, suponga que la fuerza requerida para comprimir el resorte sobre un pequeño incremento Δx es casi constante. Así, el incremento del trabajo es

$$\Delta W = (\text{fuerza})(\text{incremento de la distancia}) = (250x) \Delta x.$$

Debido a que el resorte se comprime desde $x = 3$ hasta $x = 6$ pulgadas menos que su longitud natural, el trabajo requerido es

$$W = \int_a^b F(x) dx = \int_3^6 250x dx = 125x^2 \Big|_3^6 = 4500 - 1125 = 3375 \text{ pulg.-libras.}$$

Observe que *no* se integra desde $x = 0$ hasta $x = 6$, ya que se le pidió determinar el trabajo realizado en la compresión *adicional* del resorte 3 pulgadas (sin incluir las primeras 3 pulgadas).

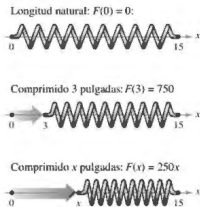


Figura 3.48



En 2011, China puso en marcha un módulo espacial de 8.5 toneladas. El módulo se utiliza para realizar pruebas a medida que China se prepara para construir una estación espacial entre 2020 y 2022.

EJEMPLO 3 Colocar un módulo espacial en órbita

Un módulo espacial pesa 15 toneladas métricas en la superficie de la Tierra. ¿Cuánto trabajo se realiza al propulsar el módulo a una altura de 800 millas sobre la Tierra, como se muestra en la figura 3.49? (Utilice 4000 millas como el radio de la Tierra. No considere el efecto de la resistencia del aire o el peso del propulsor.)

Solución Debido a que el peso de un cuerpo es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de la Tierra, la fuerza $F(x)$ ejercida por la gravedad es

$$F(x) = \frac{C}{x^2}$$

donde C es la constante de proporcionalidad. Debido a que el módulo pesa 15 toneladas métricas en la superficie de la Tierra y el radio de la Tierra es de aproximadamente 4000 millas, se tiene

$$15 = \frac{C}{(4000)^2} \Rightarrow 240,000,000 = C.$$

Así, el incremento del trabajo es

$$\Delta W = (\text{fuerza})(\text{incremento de la distancia}) = \frac{240,000,000}{x^2} \Delta x.$$

Por último, debido a que el módulo es lanzado desde $x = 4000$ a $x = 4800$ millas, el trabajo total realizado es

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F(x) dx && \text{Fórmula para el trabajo} \\ &= \int_{4000}^{4800} \frac{240,000,000}{x^2} dx \\ &= \left. -\frac{240,000,000}{x} \right|_{4000}^{4800} && \text{Integre.} \\ &= -50,000 + 60,000 \\ &= 10,000 \text{ toneladas-millas} \\ &\approx 1.164 \times 10^{11} \text{ pie-libras} \end{aligned}$$

En las unidades del SI, usando un factor de conversión de 1 pie-libra ≈ 1.35582 joules, el trabajo realizado es

$$W \approx 1.578 \times 10^{11} \text{ joules.}$$

Las soluciones a los ejemplos 2 y 3 se ajustan a nuestro desarrollo del trabajo como la suma de los incrementos en la forma

$$\Delta W = (\text{fuerza})(\text{incremento de la distancia}) = (F)(\Delta x).$$

Otra manera de formular el incremento de trabajo es

$$\Delta W = (\text{incremento de la fuerza})(\text{distancia}) = (\Delta F)(x).$$

Esta segunda interpretación de ΔW es útil en problemas que involucren el movimiento de sustancias no rígidas como fluidos y cadenas.

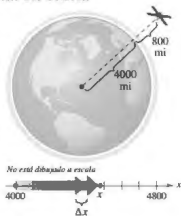


Figura 3.49

EJEMPLO 4 Vaciado de un tanque de combustible

Un tanque esférico de 8 pies de radio está medio lleno de aceite que pesa 50 libras por pie cúbico. Encuentre el trabajo necesario para bombear el aceite a través de un agujero en la parte superior del tanque.

Solución Considere que el aceite se puede subdividir en discos de espesor Δy y radio x como se muestra en la figura 3.50. Debido a que el incremento de la fuerza de cada disco está dado por su peso, tiene

$$\begin{aligned}\Delta F &= \text{peso} \\ &= \left(\frac{50 \text{ libras}}{\text{pie cúbico}}\right)(\text{volumen}) \\ &= 50(\pi x^2 \Delta y) \text{ libras}\end{aligned}$$

Para un círculo de radio 8 y centro en $(0, 8)$, tiene

$$\begin{aligned}x^2 + (y - 8)^2 &= 8^2 \\ x^2 &= 16y - y^2\end{aligned}$$

y puede escribir el incremento de fuerza como

$$\begin{aligned}\Delta F &= 50(\pi x^2 \Delta y) \\ &= 50\pi(16y - y^2) \Delta y.\end{aligned}$$

En la figura 3.50, observe que un disco a y pies de la parte inferior del tanque se debe mover una distancia de $(16 - y)$ pies. Así, el incremento del trabajo es

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta F(16 - y) \\ &= 50\pi(16y - y^2) \Delta y(16 - y) \\ &= 50\pi(256y - 32y^2 + y^3) \Delta y.\end{aligned}$$

Debido a que el tanque está medio lleno, va de 0 a 8, y el trabajo necesario para vaciar el depósito es

$$\begin{aligned}W &= \int_0^8 50\pi(256y - 32y^2 + y^3) dy \\ &= 50\pi \left[128y^2 - \frac{32}{3}y^3 + \frac{y^4}{4} \right]_0^8 \\ &= 50\pi \left(\frac{11,264}{3} \right) \\ &\approx 589,782 \text{ pies-libra.}\end{aligned}$$

Para estimar la razonabilidad de los resultados en el ejemplo 4, considere que el peso del aceite en el tanque es

$$\left(\frac{1}{2}\right)(\text{volumen})(\text{densidad}) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}\pi 8^3\right)(50) \approx 53,616.5 \text{ libras}$$

Elevar la totalidad de la mitad del tanque de aceite de 8 pies implicaría el trabajo de

$$\begin{aligned}W &= FD && \text{Fórmula para el trabajo realizado por una fuerza constante} \\ &\approx (53,616.5)(8) \\ &= 428,932 \text{ pies-libra.}\end{aligned}$$

Debido a que el aceite en realidad se levantó de entre 8 y 16 pies, parece razonable que el trabajo realizado sea de unas 589,782 pie-libra.

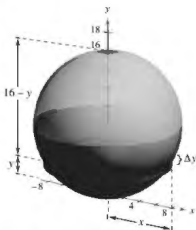
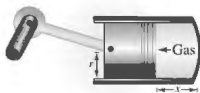


Figura 3.50



Trabajo que se requiere para elevar un extremo de la cadena

Figura 3.51



Trabajo realizado por el gas en expansión

Figura 3.52

EJEMPLO 5 Levantar una cadena

Una cadena de 20 pies de largo y peso de 5 libras por pie está enrollada en el suelo. ¿Cuánto trabajo se requiere para elevar un extremo de la cadena a una altura de 20 pies para que quede totalmente extendida, como se muestra en la figura 3.51?

Solución Imagine que la cadena se divide en pequeñas secciones, cada una de longitud Δy . Entonces, el peso de cada sección es el incremento de la fuerza

$$\Delta F = (\text{peso}) = \left(\frac{5 \text{ libras}}{\text{pie}} \right) (\text{longitud}) = 5 \Delta y.$$

Debido a que una sección típica (inicialmente en el suelo) se eleva a una altura de y , el incremento del trabajo es

$$\Delta W = (\text{incremento de la fuerza})(\text{distancia}) = (5 \Delta y)y = 5y \Delta y.$$

Debido a que los rangos de y son de 0 a 20, el trabajo total es

$$W = \int_0^{20} 5y \, dy = \left. \frac{5y^2}{2} \right|_0^{20} = \frac{5(400)}{2} = 1000 \text{ pies-libra}$$

En el siguiente ejemplo, se considera un pistón de radio r en una carcasa cilíndrica, como se muestra en la figura 3.52. A medida que el gas se expande en el cilindro, se mueve el pistón, y se realiza el trabajo. Si p representa la presión del gas (en libras por pie cuadrado) contra la cabeza del pistón y V representa el volumen del gas (en pies cúbicos), entonces el incremento de trabajo implicado en mover el pistón Δx pies es

$$\Delta W = (\text{fuerza})(\text{incremento de la distancia}) = F(\Delta x) = p(\pi r^2) \Delta x = p \Delta V.$$

Por lo que, como el volumen del gas se expande desde V_0 hasta V_1 , el trabajo realizado en el movimiento del pistón es

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p \, dV.$$

Suponiendo que la presión del gas es inversamente proporcional a su volumen, se tiene $p = k/V$ y la integral para el trabajo se convierte en

$$W = \int_{V_0}^{V_1} \frac{k}{V} \, dV.$$

EJEMPLO 6 Trabajo realizado por la expansión de un gas

Una cantidad de gas con un volumen inicial de 1 pie cúbico y una presión de 500 libras por pie cuadrado se expande hasta un volumen de 2 pies cúbicos. Encuentre el trabajo realizado por el gas. (Suponga que la presión es inversamente proporcional al volumen.)

Solución Como $p = k/V$ y $p = 500$ cuando $V = 1$, se tiene $k = 500$. Por lo tanto, el trabajo es

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_0}^{V_1} \frac{k}{V} \, dV \\ &= \int_1^2 \frac{500}{V} \, dV \\ &= 500 \ln|V| \Big|_1^2 \\ &\approx 346.6 \text{ pies-libra} \end{aligned}$$

3.5 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Fuerza constante En los ejercicios 1-4, determine el trabajo realizado por la fuerza constante.

- Una viga de acero de 1200 libras se levanta 40 pies.
- Un polipasto eléctrico levanta 6 pies a un automóvil de 2500 libras.
- Se requiere una fuerza de 112 newtons para deslizar un bloque de cemento de 8 metros en un proyecto de construcción.
- La locomotora de un tren de carga que jala sus coches con una fuerza constante de 9 toneladas a una distancia de una milla y media.

Ley de Hooke En los ejercicios 5-10, utilice la ley de Hooke para determinar la fuerza variable en el problema del resorte.

- Una fuerza de 5 libras comprime un resorte de 15 pulgadas al total de 3 pulgadas. ¿Cuánto trabajo se realiza al comprimir el resorte 7 pulgadas?
- Una fuerza de 250 newtons estira un resorte 30 centímetros. ¿Cuánto trabajo se realiza en el estiramiento del resorte de 20 a 50 centímetros?
- Una fuerza de 20 libras estira un resorte de 9 pulgadas en una máquina de ejercicios. Calcule el trabajo realizado al estirar el resorte 1 pie desde su posición natural.
- La puerta de garaje tiene dos resortes, uno a cada lado de la puerta. Se requiere una fuerza de 15 libras para estirar cada resorte 1 pie. Debido al sistema de polea, los resortes se estirando solo la mitad de la distancia que se desplaza la puerta. La puerta se mueve un total de 8 pies, y los resortes están en su longitud natural cuando la puerta está abierta. Calcule el trabajo realizado por el par de resortes.
- Se necesitan 18 pies-libra de trabajo para estirar un resorte 4 pulgadas desde su longitud natural. Encuentre el trabajo necesario para estirar el resorte 3 pulgadas adicionales.
- Se necesitan $7\frac{1}{2}$ pies-libra de trabajo para comprimir el resorte 2 pulgadas desde su longitud natural. Encuentre el trabajo requerido para comprimir el resorte media pulgada adicional.
- Propulsión** Despreciando la resistencia del aire y el peso del propulsor, determine el trabajo realizado en la propulsión de un satélite de cinco toneladas a una altura de (a) 100 millas sobre la Tierra, y (b) a 300 millas sobre la Tierra.
- Propulsión** Utilice la información en el ejercicio 11 para escribir el trabajo W del sistema de propulsión en función de la altura h del satélite sobre la Tierra. Encuentre el límite (si es que existe) de W cuando h tiende a infinito.

- Propulsión** Despreciando la resistencia del aire y el peso del propulsor, determine el trabajo realizado en la propulsión de un satélite de 10 toneladas a una altura de (a) 11,000 millas sobre la Tierra, y (b) 22,000 millas sobre la Tierra.

- Propulsión** Un módulo lunar pesa 12 toneladas en la superficie de la Tierra. ¿Cuánto trabajo se realiza al propulsar el módulo de la superficie de la Luna a una altura de 50 millas? Considere que el radio de la Luna es de 1100 millas y su fuerza de gravedad es una sexta parte del de la Tierra.

- Bombeo de agua** Un tanque rectangular con una base de 4 por 5 pies y una altura de 4 pies está lleno de agua (vea la figura). El agua pesa 62.4 libras por pie cúbico. ¿Cuánto trabajo se realiza al bombear agua a lo largo del borde superior con el fin de vaciar (a) la mitad del tanque y (b) todo el tanque?



- Plénselo** Explique por qué la respuesta del inciso (b) del ejercicio 15 no es el doble de la respuesta en el inciso (a).
- Bombeo de agua** Un tanque de agua cilíndrico con 4 metros de altura y un radio de 2 metros es enterrado de manera que la parte superior del tanque está a 1 metro por debajo del nivel del suelo (ver la figura). ¿Cuánto trabajo se hace en el bombeo de un tanque lleno de agua hasta el nivel del suelo? (El agua pesa 9800 newtons por metro cúbico.)

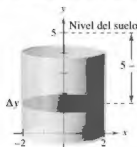


Figura para 17

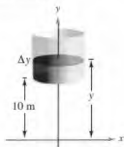
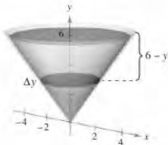
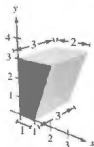


Figura para 18

- Bombeo de agua** Suponga que el tanque en el ejercicio 17 se encuentra en una torre de manera que la parte inferior del tanque está a 10 metros arriba del nivel de una corriente (vea la figura). ¿Cuánto trabajo se lleva a cabo en el llenado de la mitad del tanque de agua a través de un agujero en la parte inferior, utilizando el agua de la corriente?
- Bombeo de agua** Un tanque abierto tiene la forma de un cono circular recto (vea la figura). El depósito tiene 8 pies de ancho y 6 pies de altura. ¿Cuánto trabajo se realiza en el vaciado del depósito mediante el bombeo del agua sobre el borde superior?



20. **Bombeo de agua** En el ejercicio 19, se bombea agua a través de la parte inferior del tanque. ¿Cuánto trabajo se realiza para llenar el depósito
- hasta una profundidad de 2 pies?
 - desde una profundidad de 4 pies hasta una profundidad de 6 pies?
21. **Bombeo de agua** Un tanque hemisférico de 6 pies de radio se coloca de modo que su base es circular. ¿Cuánto trabajo se requiere para llenar el tanque con agua a través de un agujero en la base cuando la fuente de agua está en la base?
22. **Bombeo de combustible diesel** El tanque de combustible en un camión tiene secciones transversales trapezoidales con las dimensiones (en pies) que se muestran en la figura. Suponga que el motor está aproximadamente a 3 pies por encima de la parte superior del depósito de combustible y que el combustible diesel pesa aproximadamente 53.1 libras por pie cúbico. Encuentre el trabajo realizado por la bomba de combustible desde el tanque lleno de combustible hasta el nivel del motor.



Bombeo de gasolina En los ejercicios 23 y 24, encuentre el trabajo realizado en el bombeo de gasolina que pesa 42 libras por pie cúbico. (Sugerencia: Evalúe una integral mediante una fórmula geométrica y la otra observando que el integrando es una función impar.)

23. Un tanque de gasolina cilíndrico de 3 pies de diámetro y 4 pies de largo es transportado en la parte posterior de un camión y se utiliza para proveer de combustible a los tractores. El eje del tanque es horizontal. La abertura en el tanque en el tractor está a 5 pies por encima de la parte superior del tanque en el camión. Encuentre el trabajo realizado en el bombeo de todo el contenido del depósito de combustible en el tractor.
24. La parte superior de un tanque de almacenamiento de gasolina cilíndrico en una estación de servicio está a 4 pies por debajo del nivel del suelo. El eje del tanque es horizontal y su diámetro y longitud son 5 pies y 12 pies, respectivamente. Calcule el trabajo realizado en el bombeo de todo el contenido de la cisterna llena hasta una altura de 3 metros sobre el nivel del suelo.

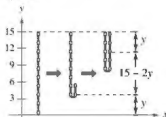
Levantar una cadena En los ejercicios 25-28, considere una cadena de 20 metros que pesa 3 libras por pie colgando de un malacate a 20 pies sobre el nivel del suelo. Encuentre el trabajo realizado por el malacate en el enrollado de la cantidad de cadena especificada.

25. Levantar la cadena entera.
26. Levantar una tercera parte de la cadena.
27. Soltar el malacate hasta la parte inferior de la cadena que está al nivel de 10 pies.

28. Levantar toda la cadena cuando se le añade una carga de 500 libras.

Levantar una cadena En los ejercicios 29 y 30, considere una cadena colgante de 15 pies que pesa 3 libras por pie. Calcule el trabajo realizado en el levantamiento de la cadena verticalmente a la posición indicada.

29. Tome la parte inferior de la cadena y elévela al nivel de 15 pies, dejando la cadena doblada y todavía colgando verticalmente (vea la figura).



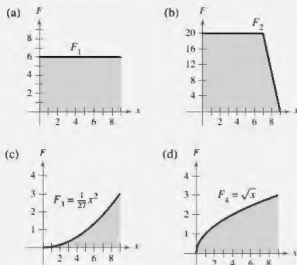
30. Repita el ejercicio 29 levantando la parte inferior de la cadena al nivel de 12 pies.

DESARROLLO DE CONCEPTOS

31. **Trabajo de una fuerza constante** Escriba la definición del trabajo realizado por una fuerza constante.
32. **Trabajo de una fuerza variable** Escriba la definición del trabajo realizado por una fuerza variable.
33. **Trabajo** ¿Cuál de los siguientes requiere más trabajo? Explique su razonamiento.
- Elevar 3 pies una caja de 60 libras de libros.
 - Sostener 3 pies en el aire una caja de 60 libras de libros durante 2 minutos.



¿CÓMO LO VE? Las gráficas muestran la fuerza F_1 (en libras) requerida para mover un objeto 9 pies a lo largo del eje x . Ordene las funciones de la fuerza de la que se obtiene el mínimo trabajo a la que se obtiene el máximo trabajo sin hacer ningún cálculo. Explique su razonamiento.



35. Ordenar fuerzas Verifique su respuesta al ejercicio 34 mediante el cálculo del trabajo para cada función de la fuerza.
36. Fuerza eléctrica Dos electrones se repelen entre sí con una fuerza que varía inversamente con el cuadrado de la distancia entre ellos. Un electrón está fijo en el punto $(2, 4)$. Calcule el trabajo realizado en el movimiento del segundo electrón de $(-2, 4)$ a $(1, 4)$.

Ley de Boyle En los ejercicios 37 y 38, encuentre el trabajo realizado por el gas para el volumen y la presión dada. Suponga que la presión es inversamente proporcional al volumen. (Consulte el ejemplo 6.)

37. Una cantidad de gas con un volumen inicial de 2 pies cúbicos y una presión de 1000 libras por pie cuadrado se expande hasta un volumen de 3 pies cúbicos.
38. Una cantidad de gas con un volumen inicial de 1 pie cúbico y una presión de 2500 libras por pie cuadrado se expande hasta un volumen de 3 pies cúbicos.

Presión hidráulica En los ejercicios 39–42, utilice las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximar el trabajo realizado por una prensa en un proceso de fabricación. Se da el modelo de la fuerza variable F (en libras) y la distancia x (en pies) que se mueve la prensa.

Fuerza **Intervalo**

39. $F(x) = 1000[1.8 - \ln(x + 1)]$ $0 \leq x \leq 5$
40. $F(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{100}$ $0 \leq x \leq 4$
41. $F(x) = 100x\sqrt{125 - x^2}$ $0 \leq x \leq 5$
42. $F(x) = 1000 \sinh x$ $0 \leq x \leq 2$

Modelar datos El cilindro hidráulico sobre un divisor de madera tiene un diámetro de 4 pulgadas (diámetro) y una carrera de 2 pies. La bomba hidráulica crea una presión máxima de 2000 libras por pulgada cuadrada. Por lo tanto, la fuerza máxima creada por el cilindro es $2000(\pi 2^2) = 8000\pi$ libras.

- (a) Calcule el trabajo realizado a través de una extensión del cilindro, ya que se requiere la máxima fuerza.
- (b) La fuerza ejercida en la división de un trozo de madera es variable. En la tabla se muestran las mediciones de la fuerza obtenida sobre la división de una pieza de madera. La variable x mide la extensión del cilindro en pies, y F es la fuerza en libras. Utilice la regla de Simpson para aproximar el trabajo realizado sobre la división de la pieza de madera.

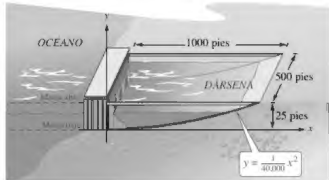
x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
$F(x)$	0	20,000	22,000	15,000	10,000	5000	0

- (c) Utilice las capacidades de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo polinomial de cuarto grado para los datos. Represente gráficamente los datos y grafique el modelo.
- (d) Utilice el modelo del inciso (c) para aproximar la extensión del cilindro cuando la fuerza es máxima.
- (e) Utilice el modelo del inciso (c) para aproximar el trabajo realizado sobre la división de la pieza de madera.

PROYECTO DE TRABAJO

Energía de las mareas

Las plantas de energía oceánica utilizan la “energía de las mareas” para producir electricidad. Para edificar una planta de energía mareomotriz, se construyó una presa para separar una dársena del mar. La energía eléctrica se produce cuando el agua fluye de ida y vuelta entre la dársena y el océano. La cantidad de “energía natural” producida depende del volumen de la cuenca y el rango de la distancia vertical entre las mareas altas y las mareas bajas. (Algunas cuencas naturales tienen rangos de marea de más de 15 pies, la Bahía de Fundy en Nueva Escocia tiene un rango de marea de 53 pies.)



- (a) Considere una dársena con una base rectangular, como se muestra en la figura. La dársena tiene un rango de marea de 25 pies, con la marea baja correspondiente a $y = 0$. ¿Cuánta agua contiene la dársena durante la marea alta?
- (b) La cantidad de energía producida durante el llenado (o vaciado) de la dársena es proporcional a la cantidad de trabajo requerido para llenar (o vaciar) la dársena. ¿Cuánto trabajo se requiere para llenar la dársena con agua de mar? (Utilice una densidad del agua de mar de 64 libras por pie cúbico.)



La Bahía de Fundy en Nueva Escocia tiene un rango de mareas extremas, como se muestra arriba en las fotos de enorme contraste.

PARA INFORMACIÓN ADICIONAL Para más información sobre la energía mareomotriz, consulte el artículo “La Race: Six Years of Operating a Tidal Power Plant in France”, por J. Cotillon, en *Water Power Magazine*.

3.6 Momentos, centros de masa y centroides

- Comprender la definición de masa.
- Encontrar el centro de masa en un sistema unidimensional.
- Encontrar el centro de masa en un sistema de dos dimensiones.
- Encontrar el centro de masa de una lámina plana.
- Usar el teorema de Pappus para encontrar el volumen de un sólido de revolución.

Masa

En esta sección estudiará varias aplicaciones importantes de la integral que se relacionan con la masa. La masa es una medida de la resistencia de un cuerpo a los cambios en el movimiento, y es independiente del sistema gravitacional particular en el que se encuentra el cuerpo. Sin embargo, debido a que muchas aplicaciones relacionadas con la masa se producen sobre la superficie de la Tierra, a veces la masa de un objeto se equipara con su peso. Esto no es técnicamente correcto. El peso es un tipo de fuerza, y como tal depende de la gravedad. La fuerza y la masa están relacionadas por la ecuación

$$\text{Fuerza} = (\text{masa})(\text{aceleración}).$$

La siguiente tabla muestra algunas de las medidas de uso común de la masa y la fuerza, así como sus factores de conversión.

Sistema de medición	Medida de masa	Medida de fuerza
Estadounidense	Slug	Libra = (slug)(pie/s ²)
Internacional	Kilogramo	Newton = (kilogramo)(m/s ²)
C-G-S	Gramo	Dina = (gramo)(cm/s ²)
Conversiones:		
1 libra = 4.448 newtons	1 lingote = 14.59 kilogramos	
1 newton = 0.2248 libras	1 kilogramo = 0.06852 slugs	
1 dina = 0.00002248 libras	1 gramo = 0.00006852 slugs	
1 dina = 0.00001 newton	1 pie = 0.3048 metros	

EJEMPLO 1 Masa sobre la superficie de la Tierra

Encuentre la masa (en slugs) de un objeto cuyo peso al nivel del mar es de 1 libra.

Solución Use 32 pies por segundo cuadrado como la aceleración debida a la gravedad.

$$\begin{aligned} \text{Masa} &= \frac{\text{fuerza}}{\text{aceleración}}; & \text{Fuerza} &= (\text{masa})(\text{aceleración}) \\ &= \frac{1 \text{ libra}}{32 \text{ pies por segundo cuadrado}} \\ &= 0.03125 \frac{\text{libras}}{\text{pies por segundo cuadrado}} \\ &= 0.03125 \text{ slug} \end{aligned}$$

Debido a que muchas aplicaciones relacionadas con la masa se producen en la superficie de la Tierra, esta cantidad de masa recibe el nombre de **libra masa**. ■

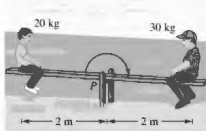
Centro de masa en un sistema unidimensional

Ahora estudiará dos tipos de momentos de masa, el **momento respecto a un punto** y el **momento respecto a una recta**. Para definir estos dos momentos, considere una situación idealizada en la que una masa m se concentra en un punto. Si x es la distancia entre esta masa puntual y otro punto P , entonces el **momento de m respecto al punto P** es

$$\text{Momento} = mx$$

y x es la **longitud del brazo de momento**.

El concepto de momento se puede demostrar simplemente por un sube y baja, como se muestra en la figura 3.53. Un niño de 20 kg de masa se encuentra 2 metros a la izquierda del punto de apoyo P y un niño más grande de 30 kilogramos de masa se sienta 2 metros a la derecha de P . Por experiencia, se sabe que el sube y baja comenzará a girar hacia la derecha, moviendo al niño más grande hacia abajo. Esta rotación se debe a que el momento producido por el niño de la izquierda es menor que el momento producido por el niño a la derecha.



El sube y baja equilibrará cuando los momentos izquierdo y derecho sean iguales.

Figura 3.53

$$\text{Momento lado izquierdo} = (20)(2) = 40 \text{ kilogramos-metros}$$

$$\text{Momento lado derecho} = (30)(2) = 60 \text{ kilogramos-metros}$$

Para equilibrar el sube y baja, los dos momentos deben ser iguales. Por ejemplo, si el niño mayor se trasladó a una posición a $\frac{4}{3}$ metros del punto de apoyo, entonces el sube y baja se equilibraría, porque cada niño produciría un momento de 40 kilogramos-metros.

Para generalizar esto, se puede introducir una recta coordenada en la que el origen corresponde al punto de apoyo, como se muestra en la figura 3.54. En el eje x se encuentran varias masas puntuales. La medida de la tendencia de este sistema para girar alrededor del origen es el **momento respecto al origen**, y se define como la suma de los n productos $m_i x_i$. El momento respecto al origen se denota por M_0 y se puede escribir como

$$M_0 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n.$$

Si M_0 es 0, entonces se dice que el sistema está en **equilibrio**.



Si $m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n = 0$, entonces el sistema está en equilibrio.

Figura 3.54

Para un sistema que no está en equilibrio, el **centro de masa** se define como el punto \bar{x} en el que el punto de apoyo podría ser reubicado para alcanzar el equilibrio. Si el sistema se traduce a unidades x , entonces, cada coordenada se convertiría

$$(x_i - \bar{x})$$

y como el momento del sistema traducido es 0, se tiene

$$\sum_{i=1}^n m_i (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n m_i x_i - \sum_{i=1}^n m_i \bar{x} = 0.$$

Despejando \bar{x} se produce

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\text{momento del sistema alrededor del origen}}{\text{masa total del sistema}}$$

Cuando $m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n = 0$, el sistema está en equilibrio.

Momentos y centro de masa: sistema unidimensional

Sean los puntos de masa m_1, m_2, \dots, m_n que se encuentran en x_1, x_2, \dots, x_n .

1. El momento alrededor del origen es

$$M_0 = m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n.$$

2. El centro de masa es

$$\bar{x} = \frac{M_0}{m}$$

donde $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ es la **masa total** del sistema.

EJEMPLO 2 Centro de masa de un sistema lineal

Encuentre el centro de masa del sistema lineal mostrado en la figura 3.55.



Figura 3.55

Solución En el momento alrededor del origen es

$$\begin{aligned} M_0 &= m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 \\ &= 10(-5) + 15(0) + 5(4) + 10(7) \\ &= -50 + 0 + 20 + 70 \\ &= 40. \end{aligned}$$

Debido a que la masa total del sistema es

$$m = 10 + 15 + 5 + 10 = 40$$

el centro de masa es

$$\bar{x} = \frac{M_0}{m} = \frac{40}{40} = 1.$$

Observe que las masas puntuales estarán en equilibrio cuando el punto de apoyo se encuentre en $x = 1$. ■

En lugar de definir el momento de una masa, se podría definir el momento de una fuerza. En este contexto, el centro de masa se denomina el centro de gravedad. Considere un sistema de masas puntuales m_1, m_2, \dots, m_n que se encuentra en x_1, x_2, \dots, x_n . Entonces, ya que

$$\text{fuerza} = (\text{masa})(\text{aceleración})$$

la fuerza total del sistema es

$$F = m_1a + m_2a + \dots + m_na = ma.$$

El **torque** (momento) respecto al origen es

$$T_0 = (m_1a)x_1 + (m_2a)x_2 + \dots + (m_na)x_n = M_0a$$

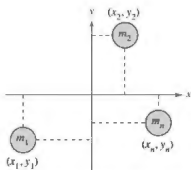
y el **centro de gravedad** es

$$\frac{T_0}{F} = \frac{M_0a}{ma} = \frac{M_0}{m} = \bar{x}.$$

Por lo que el centro de gravedad y el centro de masa tienen la misma ubicación.

Centro de masa en un sistema de dos dimensiones

Se puede extender el concepto de momento para dos dimensiones, considerando un sistema de masas localizadas en el plano xy en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, como se muestra en la figura 3.56. En lugar de definir un solo momento (respecto al origen), dos momentos se definen uno respecto al eje x y uno respecto al eje y .



En un sistema de dos dimensiones, hay un momento respecto al eje y y un momento respecto al eje x .

Figura 3.56

Momento y centro de masa: sistema en dos dimensiones

Sean los puntos de masa m_1, m_2, \dots, m_n que se encuentran en $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

1. El momento alrededor del eje y es

$$M_y = m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n$$

2. El momento alrededor del eje x es

$$M_x = m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n$$

3. El centro de masa (\bar{x}, \bar{y}) (o centro de gravedad) es

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

donde

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

es la masa total del sistema.

El momento de un sistema de masas en el plano se puede tomar alrededor de cualquier recta horizontal o vertical. En general, el momento alrededor de una recta es la suma del producto de las masas y las distancias dirigidas desde los puntos a la recta.

$$\text{Momento} = m_1(y_1 - b) + m_2(y_2 - b) + \dots + m_n(y_n - b) \quad \text{Recta horizontal } y = b$$

$$\text{Momento} = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - a) + \dots + m_n(x_n - a) \quad \text{Recta vertical } x = a$$

EJEMPLO 3 Centro de masa de un sistema en dos dimensiones

Encuentre el centro de masa de un sistema de masas puntuales $m_1 = 6$, $m_2 = 3$, $m_3 = 2$ y $m_4 = 9$ situado en

$$(3, -2), (0, 0), (-5, 3) \text{ y } (4, 2)$$

como se muestra en la figura 3.57.

Solución

$$m = 6 + 3 + 2 + 9 = 20 \quad \text{Masa}$$

$$M_y = 6(3) + 3(0) + 2(-5) + 9(4) = 44 \quad \text{Momento alrededor del eje } y$$

$$M_x = 6(-2) + 3(0) + 2(3) + 9(2) = 12 \quad \text{Momento alrededor del eje } x$$

Por tanto

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{44}{20} = \frac{11}{5}$$

y

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

El centro de masa está en $(\frac{11}{5}, \frac{3}{5})$.

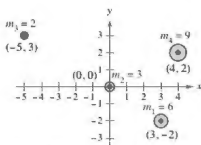


Figura 3.57

EJEMPLO 4

Centro de masa de una lámina plana

Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre el centro de masa de la lámina de densidad uniforme ρ acotada por la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ y el eje x .

Solución Debido a que el centro de masa se encuentra sobre el eje de simetría, sabe que $\bar{x} = 0$. Por otra parte, la masa de la lámina es

$$\begin{aligned} m &= \rho \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx \\ &= \rho \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{32\rho}{3}. \end{aligned}$$

Para encontrar el momento alrededor del eje x , coloque un rectángulo representativo en la región, como se muestra en la figura de la derecha. La distancia desde el eje x hasta el centro de este rectángulo es

$$y_i = \frac{f(x)}{2} = \frac{4 - x^2}{2}.$$

Debido a que la masa del rectángulo representativo es

$$\rho f(x) \Delta x = \rho(4 - x^2) \Delta x$$

se tiene

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_{-2}^2 \frac{4 - x^2}{2} (4 - x^2) dx \\ &= \frac{\rho}{2} \int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx \\ &= \frac{\rho}{2} \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{256\rho}{15} \end{aligned}$$

y \bar{y} es

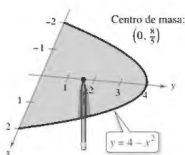
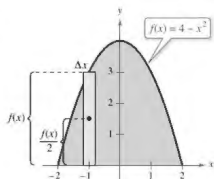
$$y = \frac{M_x}{m} = \frac{256\rho/15}{32\rho/3} = \frac{8}{5}.$$

Por lo que el centro de masa (el punto de equilibrio) de la lámina está en $(0, \frac{8}{5})$, como se muestra en la figura 3.60.

La densidad ρ en el ejemplo 4 es un factor común de ambos momentos y la masa, y como tal se saca de los cocientes que representan las coordenadas del centro de masa. Así, el centro de masa de una lámina de densidad *uniforme* solo depende de la forma de la lámina y no de su densidad. Por esta razón, el punto

(\bar{x}, \bar{y}) Centro de masa o centroide

en ocasiones se denomina centro de masa de una *región* en el plano, o **centroide** de la región. En otras palabras, para encontrar el centroide de una región en el plano, simplemente suponga que la región tiene una densidad constante de $\rho = 1$ y calcule el centro de masa correspondiente.



El centro de masa es el punto de equilibrio.

Figura 3.60

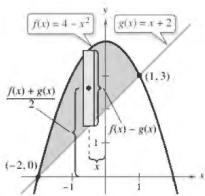


Figura 3.61

EJEMPLO 5 Centroide de una región plana

Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x + 2$.

Solución Las dos gráficas se intersecan en los puntos $(-2, 0)$ y $(1, 3)$, como se muestra en la figura 3.61. Así, el área de la región es

$$A = \int_{-2}^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = \frac{9}{2}.$$

El centroide (\bar{x}, \bar{y}) de la región tiene las siguientes coordenadas.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{A} \int_{-2}^1 x[(4 - x^2) - (x + 2)] dx \\ &= \frac{2}{9} \int_{-2}^1 (-x^3 - x^2 + 2x) dx \\ &= \frac{2}{9} \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-2}^1 \\ &= -\frac{1}{2} \\ \bar{y} &= \frac{1}{A} \int_{-2}^1 \left[\frac{(4 - x^2) + (x + 2)}{2} \right] [(4 - x^2) - (x + 2)] dx \\ &= \frac{2}{9} \left(\frac{1}{2} \right) \int_{-2}^1 (-x^2 + x + 6)(-x^2 - x + 2) dx \\ &= \frac{1}{9} \int_{-2}^1 (x^4 - 9x^2 - 4x + 12) dx \\ &= \frac{1}{9} \left[\frac{x^5}{5} - 3x^3 - 2x^2 + 12x \right]_{-2}^1 \\ &= \frac{12}{5}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el centroide de la región es $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{12}{5}\right)$. ■

Para regiones planas simples, se pueden encontrar los centroides sin recurrir a la integración.

EJEMPLO 6 Centroide de una región plana simple

Encuentre el centroide de la región mostrada en la figura 3.62(a).

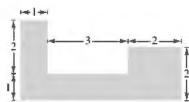
Solución Mediante la superposición de un sistema de coordenadas en la región, como se muestra en la figura 3.62(b), se pueden localizar los centroides de los tres rectángulos en

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ y } (5, 1).$$

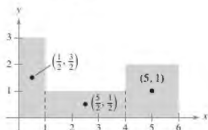
Usando estos tres puntos, puede encontrar el centroide de la región

$$\begin{aligned}A &= \text{área de la región} = 3 + 3 + 4 = 10 \\ \bar{x} &= \frac{(1/2)(3) + (5/2)(3) + (5)(4)}{10} = \frac{29}{10} = 2.9 \\ \bar{y} &= \frac{(3/2)(3) + (1/2)(3) + (1)(4)}{10} = \frac{10}{10} = 1\end{aligned}$$

Por lo tanto, el centroide de la región es $(2.9, 1)$. Observe que $(2.9, 1)$ no es el "promedio" de $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $(5, 1)$. ■



(a) Región original



(b) Centroides de los tres rectángulos

Figura 3.62

Teorema de Pappus

El último tema de esta sección es un teorema útil acreditado a Pappus de Alejandría (aproximadamente 300 d.C.), un matemático griego cuya *Mathematical Collection* en ocho volúmenes es un registro de gran parte de las matemáticas griegas clásicas.



El volumen V es $2\pi rA$, donde A es el área de la región R .

Figura 3.63

TEOREMA 3.1 El teorema de Pappus

Sea R una región en un plano y sea L una recta en el mismo plano tal que no interseca el interior de R como se muestra en la figura 3.63. Si r es la distancia entre el centro de R y la recta, entonces el volumen V del sólido de revolución formado por la rotación de R respecto a la recta es

$$V = 2\pi rA$$

donde A es el área de R . (Observe que $2\pi r$ es la distancia recorrida por el centro de R a medida que la región se hace girar alrededor de la recta.)

El teorema de Pappus se puede utilizar para encontrar el volumen de un toro, como se muestra en el siguiente ejemplo. Recordemos que un toro es un sólido con forma de rosquilla formado por una región circular que gira alrededor de una recta que se encuentra en el mismo plano que el círculo (pero no corta al círculo).

EJEMPLO 7

Encontrar un volumen por medio del teorema de Pappus

Encuentre el volumen del toro mostrado en la figura 3.64(a), que se formó por el giro de la región circular acotada por

$$(x - 2)^2 + y^2 = 1$$

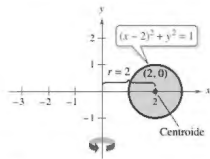
alrededor del eje y , como se muestra en la figura 3.64(b).



Toro

(a)

Figura 3.64



(b)

Exploración

Utilice el método de las capas para demostrar que el volumen del toro en el ejemplo 7 es

$$V = \int_1^3 4\pi x \sqrt{1 - (x-2)^2} dx.$$

Evalúe esta integral usando una herramienta de graficación. ¿Su respuesta concuerda con la del ejemplo 7?

Solución En la figura 3.67(b), se puede ver que el centro de la región circular es $(2, 0)$. Así, la distancia entre el centro de la región y el eje de revolución es

$$r = 2.$$

Debido a que el área de la región circular es $A = \pi$, el volumen del toro es

$$\begin{aligned} V &= 2\pi rA \\ &= 2\pi(2)(\pi) \\ &= 4\pi^2 \\ &\approx 39.5. \end{aligned}$$

3.6 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Centro de masa de un sistema lineal En los ejercicios 1-4, encuentre el centro de masa de las masas puntuales situadas en el eje x .

1. $m_1 = 7, m_2 = 3, m_3 = 5$

$x_1 = -5, x_2 = 0, x_3 = 3$

2. $m_1 = 7, m_2 = 4, m_3 = 3, m_4 = 8$

$x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = 5, x_4 = 4$

3. $m_1 = 1, m_2 = 3, m_3 = 2, m_4 = 9, m_5 = 5$

$x_1 = 6, x_2 = 10, x_3 = 3, x_4 = 2, x_5 = 4$

4. $m_1 = 8, m_2 = 5, m_3 = 5, m_4 = 12, m_5 = 2$

$x_1 = -2, x_2 = 6, x_3 = 0, x_4 = 3, x_5 = -5$

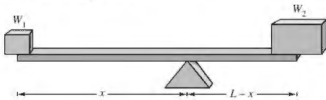
5. Razonamiento gráfico

(a) Mueva cada masa puntual en el ejercicio 3 a la derecha cuatro unidades y determine el centro de la masa resultante.

(b) Mueva cada masa puntual en el ejercicio 4 dos unidades a la izquierda y determine el centro de la masa resultante.

6. **Conjetura** Utilice el resultado del ejercicio 5 para hacer una conjetura acerca del cambio en el centro de la masa que se produce cuando cada masa puntual se mueve k unidades horizontalmente.

Problemas de estática En los ejercicios 7 y 8, considere una viga de longitud L con un punto de apoyo situado a x pies de un extremo (vea la figura). Hay objetos con pesos W_1 y W_2 colocados en extremos opuestos de la viga. Encuentre x tal que el sistema esté en equilibrio.



7. Dos niños que pesan 48 y 72 libras respectivamente, se van a jugar en un sube y baja que mide 10 pies de largo.

8. Con el propósito de mover una roca 600 libras, una persona que pesa 200 libras quiere equilibrarla sobre una viga que mide 5 pies de largo.

Centro de masa de un sistema de dos dimensiones En los ejercicios 9-12, encuentre el centro de masa del sistema de masas puntuales dado.

m_i	5	1	3
(x_i, y_i)	(2, 2)	(-3, 1)	(1, -4)

m_i	10	2	5
(x_i, y_i)	(1, -1)	(5, 5)	(-4, 0)

m_i	12	6	4.5	15
(x_i, y_i)	(2, 3)	(-1, 5)	(6, 8)	(2, -2)

m_i	3	4	2	1	6
(x_i, y_i)	(-2, -3)	(5, 5)	(7, 1)	(0, 0)	(-3, 0)

Centro de masa de una lámina plana En los ejercicios 13-26, encuentre M_x, M_y y (\bar{x}, \bar{y}) para las láminas de densidad uniforme ρ acotada por las gráficas de las ecuaciones.

13. $y = \frac{1}{2}x, y = 0, x = 2$

14. $y = 6 - x, y = 0, x = 0$

15. $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 4$

16. $y = \frac{1}{2}x^2, y = 0, x = 2$

17. $y = x^2, y = x^3$

18. $y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{2}x$

19. $y = -x^2 + 4x + 2, y = x + 2$

20. $y = \sqrt{x} + 1, y = \frac{1}{2}x + 1$

21. $y = x^{2/3}, y = 0, x = 8$

22. $y = x^{2/3}, y = 4$

23. $x = 4 - y^2, x = 0$

24. $x = 3y - y^2, x = 0$

25. $x = -y, x = 2y - y^2$

26. $x = y + 2, x = y^2$

Aproximar un centroide En los ejercicios 27-30, utilice una herramienta de graficación para trazar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones. Utilice las capacidades de integración de la herramienta de graficación para aproximar el centroide de la región.

27. $y = 10x\sqrt{125 - x^2}, y = 0$

28. $y = xe^{-1/2}, y = 0, x = 0, x = 4$

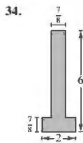
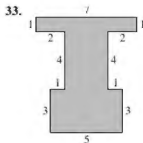
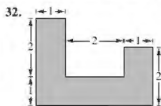
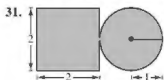
29. **Sección final prefabricada de un edificio**

$y = 5\sqrt[4]{400 - x^3}, y = 0$

30. **Bruja de Agnesi**

$y = \frac{8}{x^2 + 4}, y = 0, x = -2, x = 2$

Encontrar el centro de masa En los ejercicios 31-34, introduzca el sistema de coordenadas apropiado y encuentre las coordenadas del centro de masa de la lámina plana. (La respuesta depende de la posición del sistema de coordenadas.)



35. Encontrar el centro de masa Encuentre el centro de masa de la lámina en el ejercicio 31 cuando la parte circular de esta tiene dos veces la densidad de la parte cuadrada de la lámina.
36. Encontrar el centro de masa Encuentre el centro de masa de la lámina en el ejercicio 31 cuando la parte cuadrada de esta tiene dos veces la densidad de la porción circular de la lámina.

Encontrar un volumen por el teorema de Pappus En los ejercicios 37-40, utilice el teorema de Pappus para encontrar el volumen del sólido de revolución.

37. El toro formado por el giro del círculo

$$(x - 5)^2 + y^2 = 16$$

respecto al eje y .

38. El toro formado por el giro del círculo

$$x^2 + (y - 3)^2 = 4$$

alrededor del eje x .

39. El sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x$, $y = 4$ y $x = 0$ respecto al eje x .

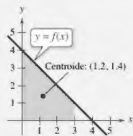
40. El sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = 2\sqrt{x - 2}$, $y = 0$ y $x = 6$ respecto al eje y .

DESARROLLO DE CONCEPTOS

41. Centro de masa Sean las masas puntuales m_1, m_2, \dots, m_n que se encuentran en $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Defina el centro de masa (\bar{x}, \bar{y}) .
42. Lámina plana ¿Qué es una lámina plana? Describa lo que se entiende por el centro de masa (\bar{x}, \bar{y}) de una lámina plana.
43. Teorema de Pappus Escriba el teorema de Pappus.



44. **¿CÓMO LO VE?** El centroide de la región plana acotada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$ es $(1.2, 1.4)$. ¿Es posible encontrar el centro de gravedad de cada una de las regiones delimitadas por las gráficas de los siguientes conjuntos de ecuaciones? Si es así, identifique el centroide y explique su respuesta.



- (a) $y = f(x) + 2$, $y = 2$, $x = 0$ y $x = 3$
 (b) $y = f(x - 2)$, $y = 0$, $x = 2$ y $x = 5$
 (c) $y = -f(x)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$
 (d) $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 2$ y $x = 4$

Centroide de una región común En los ejercicios 45-50, encuentre y/o verifique el centroide de la región común utilizada en ingeniería.

45. Triángulo Demuestre que el centro de gravedad del triángulo con vértices $(-a, 0)$, $(a, 0)$ y (b, c) es el punto de intersección de las medianas (vea la figura).

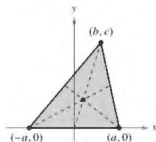


Figura para 45

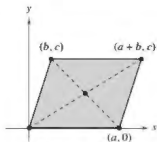


Figura para 46

46. Paralelogramo Demuestre que el centroide del paralelogramo con vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, (b, c) y $(a + b, c)$ es el punto de intersección de las diagonales (vea la figura).

47. Trapezoide Encuentre el centroide del trapezoide con vértices $(0, 0)$, $(0, a)$, (c, b) y $(c, 0)$. Demuestre que es la intersección de la recta que conecta los puntos medios de los lados paralelos y la recta que conecta los lados paralelos extendidos, como se muestra en la figura.

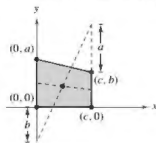


Figura para 47

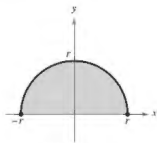


Figura para 48

48. Semicírculo Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $y = 0$ (vea la figura).

49. Semi-elipse Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ y $y = 0$ (vea la figura).

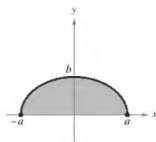


Figura para 49

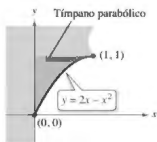


Figura para 50

50. Tímpano parabólico Encuentre el centroide del tímpano parabólico que se muestra en la figura.

51. **Razonamiento gráfico** Considere la región acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = b$, donde $b > 0$.

- Dibuje una gráfica de la región.
- Utilice la gráfica en el inciso (a) para determinar \bar{x} . Explique.
- Establezca la integral para encontrar M_y . Debido a la forma del integrando, el valor de la integral se puede conseguir sin integrar. ¿Cuál es la forma del integrando? ¿Cuál es el valor de la integral? Compare con el resultado del inciso (b).
- Utilice la gráfica del inciso (a) para determinar $\bar{y} > \frac{b}{2}$ o $\bar{y} < \frac{b}{2}$. Explique.
- Use integración para comprobar su respuesta al inciso (d).

52. **Razonamiento gráfico y numérico** Considere la región acotada por las gráficas de $y = x^{2n}$ y $y = b$, donde $b > 0$ y n es un entero positivo.

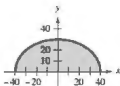
- Dibuje una gráfica de la región.
- Establezca la integral para encontrar M_y . Debido a la forma del integrando, el valor de la integral se puede obtener sin la integración. ¿Cuál es la forma del integrando? ¿Cuál es el valor de la integral y cuál es el valor de \bar{x} ?
- Utilice la gráfica del inciso (a) para determinar si $\bar{y} > \frac{b}{2}$ o $\bar{y} < \frac{b}{2}$. Explique.
- Utilice la integración para encontrar \bar{y} como una función de n .
- Utilice el resultado del inciso (d) para completar la tabla.

\bar{x}	1	2	3	4
\bar{y}				

- Encuentre $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{y}$.
- Proporcione una explicación geométrica del resultado en el inciso (f).

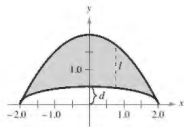
53. **Modelar datos** El fabricante de vidrio para una ventana en la conversión de una furgoneta tiene que aproximarse a su centro de masa. Se superpone un sistema de coordenadas a su prototipo del vidrio (vea la figura). Las mediciones (en centímetros) para la mitad derecha de la pieza simétrica de vidrio se enumeran en la tabla.

x	0	10	20	30	40
y	30	29	26	20	0



- Use la regla de Simpson para aproximar el centro de masa del vidrio.
- Utilice la capacidad de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo polinomial de cuarto grado para los datos.
- Utilice las capacidades de integración de una herramienta de graficación y el modelo para aproximar el centro de masa del vidrio. Compare con el resultado del inciso (a).

54. **Modelar datos** El fabricante de un barco necesita aproximar el centro de masa de una sección del casco. Se superpone un sistema de coordenadas a un prototipo (vea la figura). Las mediciones (en pies) para la mitad derecha del prototipo simétrico se enumeran en la tabla.



x	0	0.5	1.0	1.5	2
l	1.50	1.45	1.30	0.99	0
d	0.50	0.48	0.43	0.33	0

- Use la regla de Simpson para aproximar el centro de masa de la sección de casco.
- Utilice la capacidad de regresión de una herramienta de graficación para encontrar modelos polinómicos de cuarto grado de las dos curvas que se muestran en la figura. Represente gráficamente los datos y grafique los modelos.
- Utilice las capacidades de integración de una herramienta de graficación y los modelos para aproximar el centro de masa de la sección del casco. Compare con el resultado del inciso (a).

Segundo teorema de Pappus En los ejercicios 55 y 56, utilice el *segundo teorema de Pappus*, que se enuncia de la siguiente manera: Si un segmento de una curva plana C se hace girar alrededor de un eje que no interseca la curva (excepto, posiblemente, en sus puntos extremos), el área S de la superficie de revolución resultante es igual al producto de la longitud de C por la distancia d recorrida por el centroide de C .

- Se forma una esfera mediante el giro de la gráfica de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ respecto al eje x . Use la fórmula para el área de una superficie, $S = 4\pi r^2$, para encontrar el centroide del semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.
- Se forma un toro al hacer girar la gráfica de $(x-1)^2 + y^2 = 1$ respecto al eje y . Encuentre el área de la superficie del toro.
- Encuentre un centroide. Sea $n \geq 1$ constante, y considere la región acotada por $f(x) = x^n$, el eje x y $x = 1$. Encuentre el centroide de esta región. Cuando $n \rightarrow \infty$, ¿a qué se parece la región y donde se encuentra su centroide?

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

58. Sea V la región en el plano cartesiano consistente en todos los puntos (x, y) que satisfacen las condiciones simultáneas $|x| \leq y \leq |x| + 3$ y $y \leq 4$. Encuentre el centroide (\bar{x}, \bar{y}) de V .

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.
© The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

3.7 Presión y fuerza de un fluido

- Encontrar la presión del fluido y la fuerza de fluido.

Presión y fuerza de un fluido

Los nadadores saben que entre más profundo se sumerge un objeto dentro de un fluido, mayor será la presión sobre el objeto. La **presión** se define como la fuerza por unidad de área sobre la superficie de un cuerpo. Por ejemplo, debido a que una columna de agua de 10 pies de altura y 1 pulgada cuadrada pesa 4.3 libras, la *presión del fluido* a una profundidad de 10 pies de agua es de 4.3 libras por pulgada cuadrada.* A los 20 pies, esta aumentaría a 8.6 libras por pulgada cuadrada, y en general la presión es proporcional a la profundidad del objeto en el fluido.



BLAISE PASCAL (1623-1662)

Pascal es bien conocido por su trabajo en muchas áreas de las matemáticas y la física, y también por su influencia en Leibniz. Aunque gran parte de la obra de Pascal en el cálculo era intuitiva y carecía del rigor de las matemáticas modernas, no obstante, anticipó muchos resultados importantes.

Consulte LarsonCalculus.com para leer más de esta biografía.

Definición de presión del fluido

La **presión** sobre un objeto en la profundidad h en un líquido es

$$\text{Presión} = P = wh$$

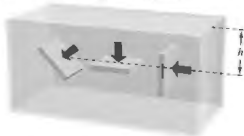
donde w es la densidad específica del líquido por unidad de volumen.

A continuación se presentan algunas densidades específicas de fluidos en libras por pie cúbico.

Alcohol etílico	49.4
Gasolina	41.0-43.0
Glicerina	78.6
Keroseno	51.2
Mercurio	849.0
Agua de mar	64.0
Agua	62.4

En el cálculo de la presión del fluido, se puede utilizar una ley física importante (y sorprendente) que recibe el nombre de **principio de Pascal**, llamada así en honor del matemático francés Blaise Pascal. El principio de Pascal establece que la presión ejercida por un fluido a una profundidad h se transmite igualmente *en todas direcciones*. Por ejemplo, en la figura 3.65, la presión en la profundidad indicada es la misma para los tres objetos. Debido a que la presión del fluido se da en términos de fuerza por unidad de área ($P = F/A$), la fuerza del fluido sobre una superficie *horizontal sumergida* de área A es

$$\text{Fuerza del fluido} = F = PA = (\text{presión})(\text{área}).$$



La presión a h es la misma para todos los objetos.

Figura 3.65

* La presión total sobre un objeto en 10 pies de agua también incluiría la presión debida a la atmósfera terrestre. A nivel del mar, la presión atmosférica es aproximadamente 14.7 libras por pulgada cuadrada.



La fuerza del fluido sobre una hoja de metal horizontal es igual a la presión del fluido por el área.

Figura 3.66

EJEMPLO 1 Fuerza de un fluido sobre una hoja de metal sumergida

Encuentre la fuerza del fluido sobre una hoja de metal rectangular que mide 3 por 4 pies que se sumerge en 6 pies de agua, como se muestra en la figura 3.66.

Solución Debido a que la densidad del agua es 62.4 libras por pie cúbico y la lámina se sumerge en 6 pies de agua, la presión del fluido es

$$P = (62.4)(6) \qquad P = wh$$

$$= 374.4 \text{ libras por pie cuadrado}$$

Debido a que el área total de la lámina es $A = (3)(4)$ pies cuadrados, la fuerza del fluido es

$$F = PA$$

$$= \left(374.4 \frac{\text{libras}}{\text{pie cuadrado}} \right) (12 \text{ pies cuadrados})$$

$$= 4492.8 \text{ libras}$$

Este resultado es independiente del tamaño del cuerpo de agua. La fuerza del fluido sería la misma en una piscina o un lago. ■

En el ejemplo 1, el hecho de que la hoja es rectangular y horizontal significa que no necesita métodos de cálculo para resolver el problema. Considere una superficie que se sumerge verticalmente en un fluido. Este problema es más difícil debido a que la presión no es constante a lo largo de la superficie.

Considere una placa vertical que se sumerge en un fluido de peso específico w (peso por unidad de volumen), como se muestra en la figura 3.67. Para determinar la fuerza total sobre un *ludo* de la región desde la profundidad c hasta la profundidad d se puede subdividir el intervalo $[c, d]$ en n subintervalos, cada uno de ancho Δy . A continuación, considere el rectángulo representativo de ancho Δy y longitud $L(y_i)$ donde y_i es el i -ésimo subintervalo. La fuerza sobre este rectángulo representativo es

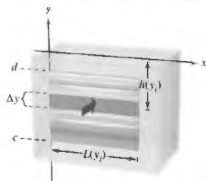
$$\Delta F_i = w(\text{profundidad})(\text{área})$$

$$= wh(y_i)L(y_i) \Delta y.$$

La fuerza sobre estos n rectángulos es

$$\sum_{i=1}^n \Delta F_i = w \sum_{i=1}^n h(y_i)L(y_i) \Delta y.$$

Observe que se considera que w es constante y se factoriza de la suma. Por lo tanto, tomando el límite cuando $\|\Delta\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) se sugiere la siguiente definición.



Se deben utilizar métodos de cálculo para encontrar la fuerza del fluido sobre una placa metálica vertical.

Figura 3.67

Definición de fuerza ejercida por un fluido

La fuerza F ejercida por un fluido de peso específico w constante (peso por unidad de volumen) sobre una región plana vertical sumergida desde $y = c$ hasta $y = d$ es

$$F = w \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n h(y_i)L(y_i) \Delta y$$

$$= w \int_c^d h(y)L(y) dy$$

donde $h(y)$ es la profundidad del fluido en y y $L(y)$ es la longitud horizontal de la región en y .

EJEMPLO 2

Fuerza de un fluido sobre una superficie vertical

Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Una puerta vertical en una presa tiene la forma de un trapecio isósceles que mide 8 pies en la parte superior y 6 pies en la parte inferior, con una altura de 5 pies, como se muestra en la figura 3.68(a). ¿Cuál es la fuerza del fluido sobre la puerta cuando la parte superior de la puerta está a 4 pies por debajo de la superficie del agua?

Solución En la creación de un modelo matemático para este problema, tiene libertad para ubicar los ejes x y y de varias maneras diferentes. Un enfoque conveniente es dejar que el eje y biseque la puerta y colocar el eje x en la superficie del agua, como se muestra en la figura 3.68(b). Así, la profundidad del agua y en pies es

$$\text{Profundidad} = h(y) = -y$$

Para encontrar la longitud $L(y)$ de la región en y , halle la ecuación de la recta que forma el lado derecho de la puerta. Debido a que esta recta pasa por los puntos $(-3, 9)$ y $(4, -4)$ su ecuación es

$$\begin{aligned} y - (-9) &= \frac{-4 - (-9)}{4 - (-3)}(x - 3) \\ y + 9 &= 5(x - 3) \\ y &= 5x - 24 \\ x &= \frac{y + 24}{5} \end{aligned}$$

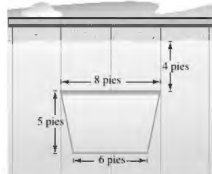
En la figura 3.68(b) se puede ver que la longitud de la región en y es

$$\text{Longitud} = 2x = \frac{2}{5}(y + 24) = L(y).$$

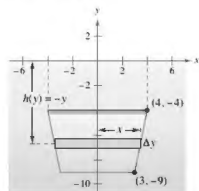
Por último, mediante la integración de $y = -9$ a $y = -4$, puede calcular la fuerza del fluido

$$\begin{aligned} F &= w \int_c^d h(y)L(y) dy \\ &= 62.4 \int_{-9}^{-4} (-y) \left(\frac{2}{5} \right) (y + 24) dy \\ &= -62.4 \left(\frac{2}{5} \right) \int_{-9}^{-4} (y^2 + 24y) dy \\ &= -62.4 \left(\frac{2}{5} \right) \left[\frac{y^3}{3} + 12y^2 \right]_{-9}^{-4} \\ &= -62.4 \left(\frac{2}{5} \right) \left(-\frac{1675}{3} \right) \\ &= 13,936 \text{ libras} \end{aligned}$$

En el ejemplo 2, el eje coincidió con la superficie del agua. Esto era conveniente, pero arbitrario. En la elección de un sistema de coordenadas para representar una situación física, se debe considerar varias posibilidades. A menudo se pueden simplificar los cálculos en un problema al localizar el sistema de coordenadas para aprovechar las características especiales del problema, tales como la simetría.



(a) Puerta de agua en una presa.



(b) Fuerza del fluido sobre la puerta.

Figura 3.68

EJEMPLO 3 Fuerza de un fluido sobre una superficie vertical

Una ventana de observación circular en un barco de investigación marina tiene un radio de 1 pie, y el centro de la ventana está a 8 pies debajo del nivel del agua, como se muestra en la figura 3.69. ¿Cuál es la fuerza del fluido sobre la ventana?

Solución Para sacar ventaja de la simetría, localice un sistema de coordenadas tal que el origen coincida con el centro de la ventana, como se muestra en la figura 3.69. La profundidad en y es entonces

$$\text{Profundidad} = h(y) = 8 - y.$$

La longitud horizontal de la ventana es $2x$ y se puede utilizar la ecuación para la circunferencia, $x^2 + y^2 = 1$, para resolver para x como se muestra.

$$\begin{aligned}\text{Longitud} &= 2x \\ &= 2\sqrt{1 - y^2} = L(y)\end{aligned}$$

Finalmente, debido a que y varía de -1 a 1 , y utilizando 64 libras por pie cúbico como la densidad del agua de mar, tiene

$$\begin{aligned}F &= w \int_c^d h(y)L(y) dy \\ &= 64 \int_{-1}^1 (8 - y)(2)\sqrt{1 - y^2} dy.\end{aligned}$$

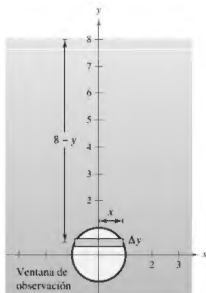
Al principio parece que esta integral sería difícil de resolver. Sin embargo, cuando se divide la integral en dos partes y se aplica la simetría, la solución es simple.

$$F = 64(16) \int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2} dy - 64(2) \int_{-1}^1 y\sqrt{1 - y^2} dy$$

La segunda integral es igual a 0 (porque el integrando es impar y los límites de integración son simétricos respecto al origen). Por otra parte, al reconocer que la primera integral representa el área de un semicírculo de radio 1, se obtiene

$$\begin{aligned}F &= 64(16)\left(\frac{\pi}{2}\right) - 64(2)(0) \\ &= 512\pi \\ &\approx 1608.5 \text{ libras}\end{aligned}$$

Por tanto, la fuerza del fluido sobre la ventana es de aproximadamente 1608.5 libras. ■



Fuerza del fluido sobre la ventana.
Figura 3.69

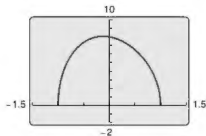
► **TECNOLOGÍA** Para confirmar el resultado obtenido en el ejemplo 3, podría haber considerado el uso de la regla de Simpson para aproximar el valor de

$$128 \int_{-1}^1 (8 - x)\sqrt{1 - x^2} dx.$$

A partir de la gráfica de

$$f(x) = (8 - x)\sqrt{1 - x^2}$$

sin embargo, puede ver que f no es diferenciable en $x = \pm 1$ (vea la figura de la derecha). Esto significa que no puede aplicar el teorema 1.6 de la sección 1.5 para determinar el error potencial en la regla de Simpson. Sin conocer el error potencial, la aproximación es de poco valor. Use una herramienta de graficación para aproximar la integral.



f no es diferenciable en $x = \pm 1$.

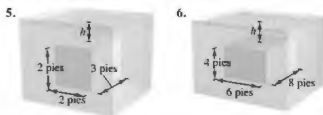
3.7 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Fuerza sobre una hoja sumergida En los ejercicios 1-4, se proporciona el área del lado superior de una hoja de metal. La hoja de metal se sumerge horizontalmente en 8 pies de agua. Encuentre la fuerza del fluido en el lado superior.

1. 3 pies cuadrados
2. 8 pies cuadrados
3. 10 pies cuadrados
4. 25 pies cuadrados

Fuerza de flotación En los ejercicios 5 y 6, encuentre la fuerza de flotación de un sólido rectangular de las dimensiones dadas sumergido en agua de modo que el lado superior es paralelo a la superficie del agua. La fuerza de flotación es la diferencia entre las fuerzas de fluido sobre los lados superior e inferior del sólido.

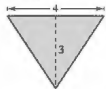


Fuerza de fluidos sobre una pared del tanque En los ejercicios 7-12, encuentre la fuerza del fluido sobre el lado vertical del tanque, donde las dimensiones están dadas en pies. Suponga que el tanque está lleno de agua.

7. Rectángulo



8. Triángulo



9. Trapezoide



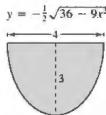
10. Semicírculo



11. Parábola,
- $y = x^2$

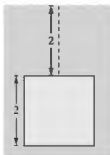


12. Semicírculo

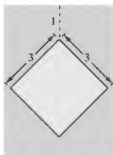


Fuerza de fluido del agua En los ejercicios 13-16, encuentre la fuerza del fluido sobre la placa vertical sumergida en el agua, donde las dimensiones están dadas en metros y la densidad del agua es 9800 newtons por metro cúbico.

13. Cuadrado



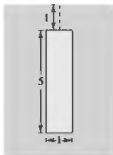
14. Cuadrado



15. Triángulo



16. Rectángulo

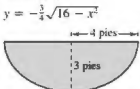


Fuerza sobre una forma de concreto En los ejercicios 17-20, la figura es el lado vertical de una forma de concreto colado que pesa 140.7 libras por pie cúbico. Determine la fuerza sobre esta parte de la forma de concreto.

17. Rectángulo



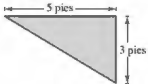
18. Semicírculo



19. Rectángulo



20. Triángulo



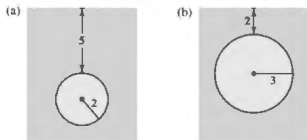
21. Fuerza de fluido de la gasolina Se coloca un tanque cilíndrico de gasolina de modo que el eje del cilindro es horizontal. Encuentre la fuerza del fluido sobre un extremo circular del tanque cuando el tanque está medio lleno, donde el diámetro es de 3 pies y la gasolina pesa 42 libras por pie cúbico.

22. **Fuerza de fluido de la gasolina** Repita el ejercicio 21 para un tanque que está lleno. (Evalue una integral mediante una fórmula geométrica y la otra observando que el integrando es una función impar.)
23. **Fuerza de fluido en una placa circular** Una placa circular de radio r pies se sumerge verticalmente en un tanque que contiene un líquido que pesa w libras por pie cúbico. El centro del círculo está a k pies debajo de la superficie del fluido, donde $k > r$. Demuestre que la fuerza del fluido sobre la superficie de la placa es

$$F = wk(\pi r^2).$$

(Evalue una integral mediante una fórmula geométrica y la otra observando que el integrando es una función impar.)

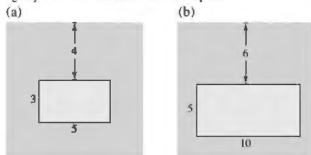
24. **Fuerza de fluido sobre una placa circular** Utilice el resultado del ejercicio 23 para encontrar la fuerza del fluido sobre la placa circular que se muestra en cada figura. Suponga que las placas están en la pared de un tanque lleno de agua y las mediciones se dan en pies.



25. **Fuerza de fluido sobre una placa rectangular** Una placa rectangular de h pies de altura y b pies de base se sumerge verticalmente en un tanque de líquido que pesa w libras por pie cúbico. El centro está a k pies debajo de la superficie del líquido, en donde $k > h/2$. Demuestre que la fuerza del fluido sobre la superficie de la placa es

$$F = wkhb$$

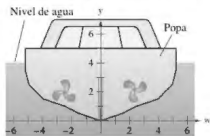
26. **Fuerza de fluido sobre una placa rectangular** Utilice el resultado del ejercicio 25 para encontrar la fuerza de fluido sobre la placa rectangular que se muestra en cada figura. Suponga que las placas están en la pared de un tanque lleno de agua y las mediciones están dadas en pies.



27. **Tronera de un submarino** Una tronera cuadrada en un lado vertical de un submarino (sumergido en el agua de mar) tiene una superficie de 1 metro cuadrado. Encuentre la fuerza de fluido sobre la tronera, suponiendo que el centro del cuadrado se encuentra a 15 pies bajo la superficie.
28. **Tronera de un submarino** Repita el ejercicio 27 para una tronera circular que tiene un diámetro de 1 pie. El centro se encuentra a 15 pies bajo la superficie.

29. **Modelar datos** En la figura se muestra la popa vertical de un barco con un sistema de coordenadas superpuesto. La tabla muestra las anchuras de la popa (en pies) para los valores indicados de y . Encuentre la fuerza del fluido sobre la popa.

y	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
w	0	3	5	8	9	10	10.25	10.5	10.5



30. **Puerta de un canal de riego** La sección transversal vertical de un canal de riego se modela como $f(x) = 5x^2/(x^2 + 4)$, donde x se mide en pies y $x = 0$ corresponde al centro del canal. Utilice las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximar la fuerza del fluido sobre una puerta vertical usada para detener el flujo de agua cuando ésta se encuentra a 3 pies de profundidad.

DESARROLLO DE CONCEPTOS

31. **Piense! Aproxime** la profundidad del agua en el tanque en el ejercicio 7 si la fuerza del fluido es tan grande como cuando el depósito está lleno. Explique por qué la respuesta no es $\frac{3}{2}$.
32. **Presión y fuerza de fluido**
 (a) Defina presión de fluido.
 (b) Defina fuerza de fluido sobre una región plana vertical sumergida.
33. **Presión de fluido** Explique por qué la presión de fluido sobre una superficie se calcula utilizando rectángulos representativos horizontales en lugar de rectángulos representativos verticales.



¿CÓMO LO VE? Dos ventanas semicirculares idénticas se sitúan a la misma profundidad sobre la pared vertical de un acuario (vea la figura). ¿Cuál se somete a la mayor fuerza de fluido? Explique.



3.8 Integrales impropias

- Evaluar una integral impropia que tiene un límite infinito de integración.
- Evaluar una integral impropia que tiene una discontinuidad infinita.

Integrales impropias con límites infinitos de integración

La definición de una integral definida

$$\int_a^b f(x) dx$$

requiere que el intervalo $[a, b]$ sea finito. Por otra parte, el teorema fundamental del cálculo, con el que se han estado evaluando las integrales definidas, requiere que f sea continua en $[a, b]$. En esta sección estudiará un procedimiento para la evaluación de las integrales que por lo general no cumplen con estos requisitos, ya sea porque uno o ambos de los límites de integración son infinitos, o porque f tiene un número finito de discontinuidades infinitas en el intervalo $[a, b]$. Las integrales que posean cualquiera de las propiedades son **integrales impropias**. Considere que una función f se dice que tiene una **discontinuidad infinita** en c cuando, desde la derecha o la izquierda,

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty.$$

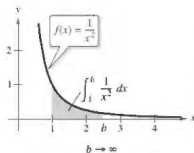
Para tener una idea de cómo evaluar una integral impropia, considere la integral

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \left. -\frac{1}{x} \right|_1^b = -\frac{1}{b} + 1 = 1 - \frac{1}{b}$$

que se puede interpretar como el área de la región sombreada que se muestra en la figura 3.70. Tomando el límite cuando $b \rightarrow \infty$ obtiene

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\int_1^b \frac{dx}{x^2} \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1.$$

Esta integral impropia se puede interpretar como el área de la región *acotada* entre la gráfica de $f(x) = 1/x^2$ y el eje x (a la derecha de $x = 1$).



La región no acotada tiene una superficie de 1.

Figura 3.70

Definición de integrales impropias con límites de integración infinitos

1. Si f es continua en el intervalo $[a, \infty)$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

2. Si f es continua en el intervalo $(-\infty, b]$, entonces

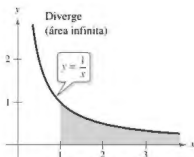
$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

3. Si f es continua en el intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

donde c es cualquier número real (vea el ejercicio 111).

En los dos primeros casos, la integral impropia **converge** cuando el límite existe, de lo contrario, la integral impropia **diverge**. En el tercer caso, la integral impropia de la izquierda diverge cuando alguna de las integrales impropias de la derecha diverge.



Esta región no acotada tiene un área infinita.

Figura 3.71

EJEMPLO 1 Divergencia de una integral impropia

Evalúe $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$.

Solución

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln x \right]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - 0) \\ &= \infty \end{aligned}$$

Tome el límite cuando $b \rightarrow \infty$.

Aplice la regla de logaritmos.

Aplice el teorema fundamental del cálculo.

Evalúe el límite.

No existe el límite. Así, se puede concluir que la integral impropia diverge. Vea la figura 3.71. ■

Trate de comparar las regiones mostradas en las figuras 3.70 y 3.71. Tienen un aspecto similar, pero la región de la figura 3.70 es un área finita de 1 y la de la figura 3.71 tiene un área infinita.

EJEMPLO 2 Convergencia de las integrales impropias

Evalúe cada una de las integrales impropias

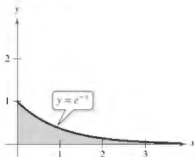
a. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$
 b. $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a. } \int_0^{\infty} e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-e^{-x} \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\arctan x \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan b \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

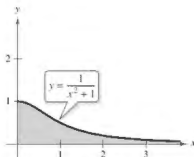
Vea la figura 3.72.



El área de la región no acotada es 1.

Figura 3.72

Vea la figura 3.73.



El área de la región no acotada es $\pi/2$.

Figura 3.73

En el siguiente ejemplo, observe cómo la regla de L'Hôpital se puede utilizar para evaluar una integral impropia.

EJEMPLO 3 Usar la regla de L'Hôpital con una integral impropia

Evalúe $\int_1^{\infty} (1-x)e^{-x} dx$.

Solución Utilice la integración por partes, con $dv = e^{-x}$ y $u = (1-x)$.

$$\begin{aligned}\int (1-x)e^{-x} dx &= -e^{-x}(1-x) - \int e^{-x} dx \\ &= -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} + C \\ &= xe^{-x} + C\end{aligned}$$

Ahora, aplique la definición de integral impropia

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} (1-x)e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[xe^{-x} \right]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{e^b} - \frac{1}{e} \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b}{e^b} - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e}\end{aligned}$$

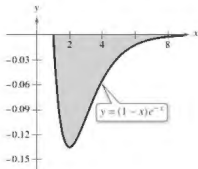
Para el primer límite, use la regla de L'Hôpital

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b}{e^b} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^b} = 0$$

Por tanto puede concluir que

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} (1-x)e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b}{e^b} - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \\ &= 0 - \frac{1}{e} \\ &= -\frac{1}{e}.\end{aligned}$$

Vea la figura 3.74.



El área de la región acotada es $-1/e$.

Figura 3.74

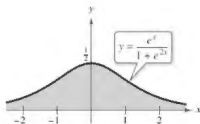
EJEMPLO 4 Límites de integración superior e inferior

Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$.

Solución Observe que el integrando es continuo en $(-\infty, \infty)$. Para evaluar la integral, puede dividirlo en dos partes, eligiendo $c = 0$ como un valor conveniente.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx + \int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \left[\arctan e^x \right]_b^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\arctan e^x \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \arctan e^b \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\arctan e^b - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Vea la figura 3.75.



El área de la región no acotada es $\pi/2$.

Figura 3.75



El trabajo necesario para mover un módulo espacial de 15 toneladas métricas a una distancia no acotada lejos de la Tierra es de unos 6.984×10^{11} pies-libras.

EJEMPLO 5 Puesta en órbita de un módulo espacial

En el ejemplo 3 en la sección 3.5, encontró que requeriría 10,000 millas-toneladas de trabajo para impulsar un módulo espacial de 15 toneladas métricas a una altura de 800 millas sobre la Tierra. ¿Cuánto trabajo se requiere para impulsar el módulo una distancia no acotada lejos de la superficie de la Tierra?

Solución Al principio podría pensar que sería necesaria una cantidad infinita de trabajo. Pero si este fuera el caso, sería imposible enviar cohetes al espacio exterior. Debido a que esto ya se ha hecho, el trabajo que se requiere debe ser finito. Puede determinar el trabajo de la manera siguiente. Use la integral del ejemplo 3, sección 3.5, reemplace el límite superior de 4800 millas por ∞ y escriba

$$\begin{aligned} W &= \int_{4000}^{\infty} \frac{240,000,000}{x^2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{240,000,000}{x} \right]_{4000}^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{240,000,000}{b} + \frac{240,000,000}{4000} \right) \\ &= 60,000 \text{ millas-toneladas} \\ &\approx 6.984 \times 10^{11} \text{ pies-libras} \end{aligned}$$

En las unidades del SI, usando un factor de conversión de

$$1 \text{ pie-libra} \approx 1.35582 \text{ joules}$$

el trabajo realizado es $W \approx 9.469 \times 10^{11}$ joules.

Integrales impropias con discontinuidades infinitas

El segundo tipo básico de integral impropia es uno que tiene una discontinuidad infinita *en o entre* los límites de integración.

Definición de integrales impropias con discontinuidades infinitas

- Si es continua en el intervalo $[a, b)$ y tiene una discontinuidad infinita en b entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx.$$

- Si es continua en el intervalo $(a, b]$ y tiene una discontinuidad infinita en a entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx.$$

- Si es continua en el intervalo $(a, b]$, excepto por alguna c en (a, b) en la que tiene una discontinuidad infinita, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

En los dos primeros casos, la integral impropia **converge** cuando el límite existe, de lo contrario, la integral impropia **diverge**. En el tercer caso, la integral impropia de la izquierda diverge cuando alguna de las integrales impropias de la derecha diverge.

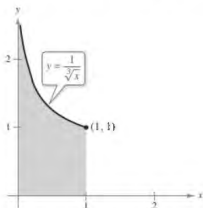
EJEMPLO 6

Integral impropia con una discontinuidad infinita

$$\text{Evalúe } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

Solución El integrando tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, como se muestra en la figura 3.76. Puede evaluar esta integral como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{-1/3} dx &= \lim_{b \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{2/3}}{2/3} \right]_b^1 \\ &= \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} (1 - b^{2/3}) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$



Discontinuidad infinita en $x = 0$.

Figura 3.76

EJEMPLO 7

Integral impropia divergente

$$\text{Evalúe } \int_0^2 \frac{dx}{x^3}.$$

Solución Como el integrando tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, puede escribir

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{x^3} &= \lim_{b \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_b^2 \\ &= \lim_{b \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2b^2} \right) \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, puede concluir que la integral impropia diverge.

EJEMPLO 8

Integral impropia con una discontinuidad interior

$$\text{Evalúe } \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3}.$$

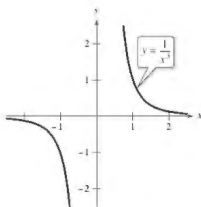
Solución Esta integral es impropia porque el integrando tiene una discontinuidad infinita en el punto interior $x = 0$, como se muestra en la figura 3.77. Por tanto, puede escribir

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3} + \int_0^2 \frac{dx}{x^3}.$$

Del ejemplo 7, sabe que la segunda integral diverge. Por tanto, la integral impropia original también diverge.

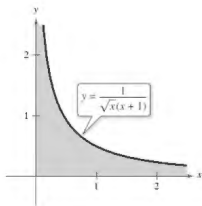
Recuerde que debe comprobar si hay discontinuidades infinitas en puntos interiores, así como en los puntos terminales para determinar si una integral es impropia. Por ejemplo, si no hubiera reconocido que la integral en el ejemplo 8 era impropia, habría obtenido el resultado *incorrecto*

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3} \stackrel{(\infty)}{=} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_{-1}^2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}. \quad \text{Evaluación incorrecta}$$



La integral impropia $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3}$ diverge.

Figura 3.77



El área de la región acotada es π .
Figura 3.78

La integral en el siguiente ejemplo es inadecuada por *dos* razones. Uno de los límites de la integración es infinito, y el integrando tiene una discontinuidad infinita en el límite exterior de la integración.

EJEMPLO 9 Integral doblemente impropia

...► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

$$\text{Evalúe } \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}.$$

Solución Para evaluar esta integral, divídala en un punto conveniente (por ejemplo, $x = 1$) y escriba

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \\ &= \lim_{b \rightarrow 0^+} \left[2 \arctan \sqrt{x} \right]_b^1 + \lim_{c \rightarrow \infty} \left[2 \arctan \sqrt{x} \right]_1^c \\ &= \lim_{b \rightarrow 0^+} (2 \arctan 1 - 2 \arctan \sqrt{b}) + \lim_{c \rightarrow \infty} (2 \arctan \sqrt{c} - 2 \arctan 1) \\ &= 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0 + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Vea la figura 3.78.

EJEMPLO 10 Aplicación que implica la longitud de arco

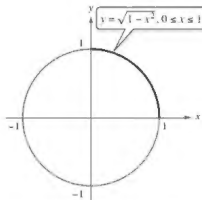
Utilice la fórmula para la longitud de arco para mostrar que la circunferencia del círculo $x^2 + y^2 = 1$ es 2π .

Solución Para simplificar el trabajo, considere el cuarto de círculo dado por $y = \sqrt{1 - x^2}$, donde $0 \leq x \leq 1$. La función y es derivable para cualquier x en este intervalo, excepto $x = 1$. Por lo tanto, la longitud de arco del cuarto de círculo está dada por la integral impropia

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Esta integral es impropia, ya que tiene una discontinuidad infinita en $x = 1$. Por lo tanto, puede escribir

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \left[\arcsen x \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^-} (\arcsen b - \arcsen 0) \\ &= \frac{\pi}{2} - 0 \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



La circunferencia del círculo es 2π .
Figura 3.79

Finalmente, multiplicando por 4, puede concluir que la circunferencia del círculo es $4s = 2\pi$ como se muestra en la figura 3.79. ■

Esta sección concluye con un teorema útil para describir la convergencia o divergencia de un tipo común de integral impropia. La demostración de este teorema se deja como ejercicio (vea el ejercicio 49).

TEOREMA 3.2 Un tipo especial de integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \text{diverge}, & p \leq 1 \end{cases}$$

EJEMPLO 11 Una aplicación que implica un sólido de revolución

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL**
Para más investigación adicional de los sólidos que tienen volúmenes finitos y superficies infinitas, consulte el artículo "Supersolids: Solids Having Finite Volume and Infinite Surfaces", de William P. Love, en *Mathematics Teacher*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

El sólido formado al girar (alrededor del eje x) la región *no acotada* que se extiende entre la gráfica de $f(x) = 1/x$ y el eje x ($x \geq 1$) recibe el nombre de **cuerno de Gabriel**. (Vea la figura 3.80.) Demuestre que este sólido tiene un volumen finito y una superficie infinita.

Solución Utilizando el método de disco y el teorema 3.2, puede determinar que el volumen es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx && \text{Teorema 3.2, } p = 2 > 1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{2-1}\right) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

El área de superficie está dada por

$$S = 2\pi \int_1^{\infty} f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx.$$

Ya que

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} > 1$$

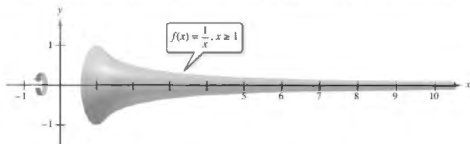
en el intervalo $[1, \infty)$ y la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

diverge, puede concluir que la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

también diverge. (Vea el ejercicio 52.) Por tanto, el área de superficie es infinita.



El cuerno de Gabriel tiene un volumen finito y una superficie infinita.

Figura 3.80

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL**
Para aprender sobre otra función que tiene un volumen finito y una superficie infinita, consulte el artículo "Gabriel's Wedding Cake", de Julian F. Floron, en *The College Mathematics Journal*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

3.8 Ejercicios

Consulte CalcChat.COM para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Determinar si una integral es impropia En los ejercicios 1-8, debe decidir si la integral es impropia. Explique su razonamiento.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{5x-3}$

2. $\int_1^2 \frac{dx}{x^3}$

3. $\int_0^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx$

4. $\int_1^{\infty} \ln(x^2) dx$

5. $\int_0^2 e^{-x} dx$

6. $\int_0^{\infty} \cos x dx$

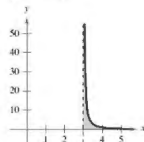
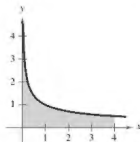
7. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sec x}{4+x^2} dx$

8. $\int_0^{\pi/2} \csc x dx$

Evaluar una integral impropia En los ejercicios 9-12, explique por qué la integral es impropia y determine si diverge o converge. Evalúe la integral si converge.

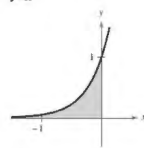
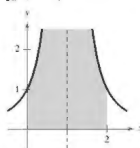
9. $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

10. $\int_1^4 \frac{1}{(x-3)^{3/2}} dx$



11. $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx$

12. $\int_{-\infty}^0 e^{3x} dx$



Escritura En los ejercicios 13-16, explique por qué la evaluación de la integral es incorrecta. Utilice las capacidades de integración de una herramienta de graficación para intentar evaluar la integral. Determine si la utilidad da la respuesta correcta.

13. ~~$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -2$~~

14. ~~$\int_{-1}^2 \frac{2}{(x-1)^2} dx = \frac{8}{9}$~~

15. ~~$\int_{-1}^1 e^{-x} dx = 0$~~

16. ~~$\int_{-1}^1 \sec^{-1} x dx = 0$~~

Evaluar una integral impropia En los ejercicios 17-32, determine si la integral impropia diverge o converge. Evalúe la integral si converge.

17. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$

18. $\int_1^{\infty} \frac{6}{x} dx$

19. $\int_1^{\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} dx$

20. $\int_1^{\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{x}} dx$

21. $\int_{-\infty}^0 xe^{-4x} dx$

22. $\int_0^{\infty} xe^{-x/3} dx$

23. $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$

24. $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x dx$

25. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

26. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

27. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{16+x^2} dx$

28. $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{(x^2+1)^2} dx$

29. $\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$

30. $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+e^x} dx$

31. $\int_0^{\infty} \cos \pi x dx$

32. $\int_0^{\infty} \sin \frac{x}{2} dx$

Evaluar una integral impropia En los ejercicios 33-48, determine si la integral impropia diverge o converge. Evalúe la integral si converge, y compruebe sus resultados con los resultados obtenidos mediante el uso de las capacidades de integración de una herramienta de graficación.

33. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$

34. $\int_0^5 \frac{10}{x} dx$

35. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$

36. $\int_0^8 \frac{3}{\sqrt{8-x}} dx$

37. $\int_0^1 x \ln x dx$

38. $\int_0^e \ln x^2 dx$

39. $\int_0^{\pi/2} \tan \theta d\theta$

40. $\int_0^{\pi/2} \sec \theta d\theta$

41. $\int_2^4 \frac{2}{x\sqrt{x^2-4}} dx$

42. $\int_3^6 \frac{1}{\sqrt{36-x^2}} dx$

43. $\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} dx$

44. $\int_0^5 \frac{1}{25-x^2} dx$

45. $\int_3^5 \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}} dx$

46. $\int_3^5 \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^2} dx$

47. $\int_0^{\infty} \frac{4}{\sqrt{x}(x+6)} dx$

48. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

Encontrar valores En los ejercicios 49 y 50, determine todos los valores de p para que la integral impropia converja.

49. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$

50. $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$

51. **Inducción matemática** Use inducción matemática para verificar que la siguiente integral converge para cualquier entero positivo n

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

52. **Prueba de comparación para integrales impropias** En algunos casos, es imposible encontrar el valor exacto de una integral impropia, pero es importante para determinar si la integral converge o diverge. Suponga que las funciones f y g son continuas y $0 \leq g(x) \leq f(x)$ en el intervalo $[a, \infty)$. Se puede demostrar que si $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge, entonces $\int_a^{\infty} g(x) dx$ también converge, y si $\int_a^{\infty} g(x) dx$ diverge, entonces $\int_a^{\infty} f(x) dx$ también diverge. Esto se conoce como el criterio de comparación para integrales impropias.

- (a) Utilice la prueba de comparación para determinar si $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ converge o diverge. (*Sugerencia:* Utilice el hecho de que $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ para $x \geq 1$.)
- (b) Utilice la prueba de comparación para determinar si $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$ converge o diverge. (*Sugerencia:* Utilice el hecho de que $\frac{1}{x^3+1} \leq \frac{1}{x^3}$ para $x \geq 1$.)

Convergencia o divergencia En los ejercicios 53-62, utilice los resultados de los ejercicios 49-52 para determinar si la integral impropia converge o diverge.

53. $\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx$
54. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
55. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$
56. $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$
57. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+5} dx$
58. $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$
59. $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}} dx$
60. $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} dx$
61. $\int_1^{\infty} \frac{1 - \sin x}{x^2} dx$
62. $\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x + x} dx$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

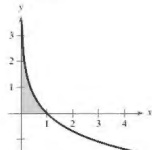
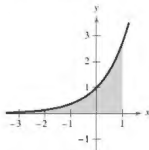
63. **Integrales impropias** Describa los diferentes tipos de integrales impropias.
64. **Integrales impropias** Defina los términos *convergente* y *divergente* cuando se trabaja con integrales impropias.
65. **Integral impropia** Explique por qué $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \neq 0$.
66. **Integral impropia** Considere la integral

$$\int_0^3 \frac{10}{x^2 - 2x} dx.$$

Para determinar la convergencia o divergencia de la integral, ¿cuántas integrales impropias deben ser analizadas? ¿Qué debe ser verdad de cada una de estas integrales si la integral dada converge?

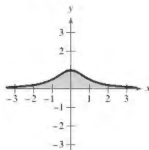
Área En los ejercicios 67-70, encuentre el área de la región sombreada sin límites.

67. $y = e^x$, $-\infty < x \leq 1$
68. $y = -\ln x$



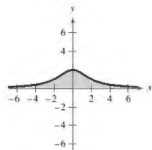
69. **Bruja de Agnesi:**

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}$$



70. **Bruja de Agnesi:**

$$y = \frac{8}{x^2 + 4}$$



Área y volumen En los ejercicios 71 y 72, considere la región que satisface las desigualdades. (a) Encuentre el área de la región. (b) Determine el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje x . (c) Halle el volumen del sólido generado al girar la región sobre el eje y .

71. $y \leq e^{-x}$, $y \geq 0$, $x \geq 0$

72. $y \leq \frac{1}{x^2}$, $y \geq 0$, $x \geq 1$

73. **Longitud de arco** Trace la gráfica de la hipocicloide de cuatro cúspides $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ y encuentre su perímetro.

74. **Longitud de arco** Encuentre la longitud del arco de la gráfica de $y = \sqrt{16 - x^2}$ en el intervalo $[0, 4]$.

75. **Superficie** La región acotada por $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ gira respecto al eje y para formar un toro. Encuentre el área de la superficie del toro.

76. **Superficie** Encuentre el área de la superficie formada al girar la gráfica de $y = 2e^{-x}$ sobre el intervalo $[0, \infty)$ alrededor del eje x .

Propulsión En los ejercicios 77 y 78, utilice el peso del cohete para responder cada pregunta. (Use 4000 millas como el radio de la Tierra e ignore el efecto de resistencia del aire.)

- (a) ¿Cuánto trabajo se requiere para impulsar el cohete una distancia no acotada lejos de la superficie de la Tierra?
- (b) ¿Qué distancia ha recorrido el cohete cuando se ha producido la mitad del total de trabajo?

77. Cohete de 5 toneladas

78. Cohete de 10 toneladas

Probabilidad Una función f no negativa se llama *función de densidad de probabilidad* si

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1.$$

La probabilidad de que x se encuentre entre a y b está dada por

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(t) dt.$$

El valor esperado de x está dado por

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt.$$

En los ejercicios 79 y 80, (a) demuestre que la función no negativa es una función de densidad de probabilidad, (b) encuentre $P(0 \leq x \leq 4)$ y (c) encuentre $E(x)$

$$79. f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t/2}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad 80. f(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}e^{-2t/5}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Costo capitalizado En los ejercicios 81 y 82, encuentre el costo C capitalizado de un activo (a) para $n = 5$ años, (b) para $n = 10$ años y (c) para siempre. El costo capitalizado se da por

$$C = C_0 + \int_0^n c(t)e^{-rt} dt$$

donde C_0 es la inversión inicial, t es el tiempo en años, r es la tasa anual de interés compuesto continuamente y $c(t)$ es el costo anual de mantenimiento.

$$81. C_0 = \$650,000 \quad 82. C_0 = \$650,000 \\ c(t) = \$25,000 \quad c(t) = \$25,000(1 + 0.08t) \\ r = 0.06 \quad r = 0.06$$

83. **Teoría electromagnética** El potencial magnético en un punto en el eje de una bobina circular está dado por

$$P = \frac{2\pi N I r}{k} \int_c^{\infty} \frac{1}{(r^2 + x^2)^{3/2}} dx$$

donde N , I , r , k y c son constantes. Encuentre P .

84. **Fuerza de gravedad** Una varilla uniforme "semi-infinita" ocupa el eje x no negativo. La varilla tiene una densidad lineal δ que significa que un segmento de longitud dx tiene una masa de δdx . Una partícula de masa M se encuentra en el punto $(-a, 0)$. La fuerza de gravedad F que la varilla ejerce sobre la masa está dada por

$$F = \int_0^{\infty} \frac{GM\delta}{(a+x)^2} dx$$

donde G es la constante gravitacional. Encuentre F .

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 85-88, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

85. Si f es continua sobre $[0, \infty)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, entonces $\int_0^{\infty} f(x) dx$ converge.

86. Si f es continua sobre $[0, \infty)$ y $\int_0^{\infty} f(x) dx$ diverge, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$.

87. Si f' es continua sobre $[0, \infty)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ diverge, entonces

$$\int_0^{\infty} f'(x) dx = -f(0).$$

88. Si la gráfica de f es simétrica respecto al origen o el eje y , entonces, $\int_{-a}^a f(x) dx$ converge si y solo si $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ converge.

89. **Comparar integrales**

(a) Demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$ diverge.

(b) Demuestre que $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \sin x dx = 0$.

(c) ¿Qué muestran los incisos (a) y (b) sobre la definición de integrales impropias?

90. **Hacer una integral impropia** Para cada integral, encuentre un número real no negativo b que hace que la integral sea impropia. Explique su razonamiento.

$$(a) \int_0^b \frac{1}{x^2 - 9} dx \quad (b) \int_0^b \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx$$

$$(c) \int_0^b \frac{x}{x^2 - 7x + 12} dx \quad (d) \int_b^{10} \ln x dx$$

$$(e) \int_0^b \tan 2x dx \quad (f) \int_0^b \frac{\cos x}{1 - \sin x} dx$$

91. **Redacción**

(a) Las integrales impropias

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \quad \text{y} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

divergen y convergen, respectivamente. Describa las diferencias esenciales entre los integrandos que causan que una integral converja y la otra diverja.

(b) Dibuje una gráfica de la función $y = (\sin x)/x$ en el intervalo $\{1, \infty\}$. Use su conocimiento de integral definida para hacer una inferencia acerca de si la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

converge. Justifique tu respuesta.

(c) Utilice una iteración de la integración por partes en la integral del inciso (b) para determinar su divergencia o convergencia.

92. **Exploración** Considere la integral

$$\int_0^{n/2} \frac{4}{1 + (\tan x)^n} dx$$

donde n es un entero positivo.

(a) ¿La integral es impropia? Explique.

(b) Utilice un programa de graficación para trazar el integrando para $n = 2, 4, 8$ y 12 .

(c) Use las gráficas para aproximar la integral cuando $n \rightarrow \infty$.

(d) Utilice un sistema de álgebra computacional para evaluar la integral para los valores de n del inciso (b). Haga una conjetura sobre el valor de la integral para cualquier entero positivo n . Compare sus resultados con su respuesta del inciso (c).

- 93. Probabilidad normal** La altura promedio del hombre estadounidense entre 20 y 29 años de edad es de 70 pulgadas, y la desviación estándar es de 2.85 pulgadas. Un hombre de 20 a 29 años de edad, es elegido al azar de la población. La probabilidad de que él tenga 6 pies o más de altura es

$$P(72 \leq x < \infty) = \int_{72}^{\infty} \frac{1}{2.85\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-70)^2}{6.245}} dx.$$

(Fuente: National Center for Health Statistics)

- (a) Use un programa de graficación para trazar el integrando. Utilice la herramienta de graficación de convergerse de que el área comprendida entre el eje x y el integrando es 1.
 (b) Utilice una herramienta de graficación para aproximar $P(72 \leq x < \infty)$.
 (c) Aproxime $0.5 - P(70 \leq x \leq 72)$ utilizando una herramienta de graficación. Utilice la gráfica del inciso (a) para explicar por qué este resultado es el mismo que la respuesta del inciso (b).



¿CÓMO LO VE? La gráfica muestra la función de densidad de probabilidad para una marca de automóviles que tiene una eficiencia de combustible promedio de 26 millas por galón y una desviación estándar de 2.4 millas por galón.



- (a) ¿Cuál es mayor, la probabilidad de elegir al azar un automóvil que rinda entre 26 y 28 millas por galón o la probabilidad de elegir al azar uno que rinda entre 22 y 24 millas por galón?
 (b) ¿Cuál es mayor, la probabilidad de elegir al azar un automóvil que rinda entre 20 y 22 millas por galón o la probabilidad de elegir al azar uno que rinda por lo menos 30 millas por galón?

Transformadas de Laplace Sea $f(t)$ una función definida para todos los valores positivos de t . La transformada de Laplace de $f(t)$ se define por

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

cuando existe la integral impropia. Las transformadas de Laplace se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales. En los ejercicios 95 a 102, encuentre la transformada de Laplace de la función.

95. $f(t) = 1$ 96. $f(t) = t$
 97. $f(t) = t^2$ 98. $f(t) = e^{at}$
 99. $f(t) = \cos at$ 100. $f(t) = \sin at$
 101. $f(t) = \cosh at$ 102. $f(t) = \sinh at$

- 103. Función gamma** La función gamma $\Gamma(n)$ se define como

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx, \quad n > 0.$$

- (a) Encuentre $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$ y $\Gamma(3)$
 (b) Utilice la integración por partes para demostrar que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$
 (c) Escriba $\Gamma(n)$ usando la notación factorial, donde n es un entero positivo.

- 104. Demostración** Demuestre que $I_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right) I_{n-1}$, donde

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}} dx, \quad n \geq 1.$$

Después, evalúe cada integral.

- (a) $\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^4} dx$
 (b) $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{(x^2+1)^5} dx$
 (c) $\int_0^{\infty} \frac{x^5}{(x^2+1)^6} dx$

- 105. Determinar un valor** ¿Para qué valor de c , la integral

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{c}{x+1} \right) dx$$

es convergente? Evalúe la integral para este valor de c .

- 106. Determinar un valor** ¿Para qué valor de c , la integral

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{cx}{x^2+2} - \frac{1}{3x} \right) dx$$

es convergente? Evalúe la integral para este valor de c .

- 107. Volumen** Encuentre el volumen del sólido generado al girar la región acotada por la gráfica de f alrededor del eje x .

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x, & 0 < x \leq 2 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- 108. Volumen** Encuentre el volumen del sólido generado al girar la región no acotada comprendida entre $y = -\ln x$ y el eje y ($y \geq 0$) respecto al eje x .

Sustituir u En los ejercicios 109 y 110, reescriba la integral impropia como una integral propia utilizando la sustitución u dada. Entonces, utilice la regla del trapecio con $n = 5$ para aproximar la integral.

109. $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx, \quad u = \sqrt{x}$

110. $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x}} dx, \quad u = \sqrt{1-x}$

- 111. Reescribir una integral** Sea $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ convergente y sean a y b números reales, donde $a \neq b$. Demuestre que
- $$\int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx.$$

Ejercicios de repaso

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Encontrar el área de una región En los ejercicios 1-10, dibuje la región acotada por las gráficas de las ecuaciones y encuentre el área de la región.

1. $y = 6 - \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{3}{4}x$, $x = -2$, $x = 2$

2. $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 4$, $x = 5$

3. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$

4. $x = y^2 - 2y$, $x = -1$, $y = 0$

5. $y = x$, $y = x^3$

6. $x = y^2 + 1$, $x = y + 3$

7. $y = e^x$, $y = e^2$, $x = 0$

8. $y = \csc x$, $y = 2$, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$

9. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$

10. $x = \cos y$, $x = \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{3} \leq y \leq \frac{7\pi}{3}$

Encontrar el área de una región En los ejercicios 11-14, utilice una herramienta de graficación para trazar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, y utilice las capacidades de integración de la herramienta de graficación para encontrar el área de la región.

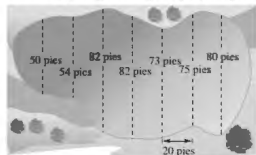
11. $y = x^2 - 8x + 3$, $y = 3 + 8x - x^2$

12. $y = x^2 - 4x + 3$, $y = x^3$, $x = 0$

13. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $y = 0$, $x = 0$

14. $y = x^4 - 2x^2$, $y = 2x^2$

15. Integración numérica Calcule la superficie de la laguna mediante (a) la regla del trapecio y (b) la regla de Simpson.



16. Ingresos Los modelos $R_1 = 6.4 + 0.2t + 0.01t^2$ y $R_2 = 8.4 + 0.35t$ proporcionan los ingresos (en miles de millones de dólares) para una gran corporación. Ambos modelos son estimaciones de los ingresos de 2015 hasta el 2020, con $t = 15$ correspondiente a 2015. ¿Qué modelo proyecta el mayor ingreso? ¿Qué modelo produce los ingresos totales mayores en el periodo de seis años?

Encontrar el volumen de un sólido En los ejercicios 17-22, utilice el método de los discos o el método de las capas para encontrar los volúmenes de los sólidos generados al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones respecto a la(s) recta(s) dada(s).

17. $y = x$, $y = 0$, $x = 3$

(a) el eje x (b) el eje y (c) la recta $x = 3$ (d) la recta $x = 6$

18. $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$

(a) el eje x (b) la recta $y = 2$ (c) el eje y (d) la recta $x = -1$

19. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

girado respecto al eje y

20. $y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$

girado alrededor del eje x

21. $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 5$

girado respecto al eje y

22. $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

girado alrededor del eje x

23. Profundidad de la gasolina en un tanque Un tanque de gasolina es un esferoide achatado generado al girar la región acotada por la gráfica de

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

alrededor del eje y , donde x y y se miden en pies. Encuentre la profundidad de la gasolina en el tanque cuando se llena a un cuarto de su capacidad.

24. Usar secciones transversales Encuentre el volumen del sólido cuya base está acotada por el círculo $x^2 + y^2 = 9$ y las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros.

Encontrar la longitud del arco En los ejercicios 25 y 26, encuentre la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo indicado.

25. $f(x) = \frac{4}{5}x^{5/4}$, $[0, 4]$

26. $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$, $[1, 3]$

27. Longitud de una catenaria El cable de un puente colgante forma una catenaria modelada por la ecuación

$$y = 300 \cosh\left(\frac{x}{2000}\right) - 280, \quad -2000 \leq x \leq 2000$$

donde x y y se miden en pies. Utilice las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud del cable.

28. **Aproximación** Determine qué valor aproxima mejor la longitud de arco representada por la integral

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{4}{x+1} \right) \right]^2} dx.$$

(Haga su selección a partir de un boceto del arco y no mediante la realización de los cálculos.)

- (a) 10 (b) -5 (c) 2 (d) 4 (e) 1
29. **Área de una superficie** Use integración para encontrar el área de la superficie lateral de un cono circular recto de altura 4 y radio 3.
30. **Área de una superficie** La región acotada por las gráficas de $y = 2\sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 3$ y $x = 8$ se hace girar alrededor del eje x . Encuentre el área de la superficie del sólido generado.

31. **Trabajo** Se necesita una fuerza de 5 libras para estirar un resorte 1 pulgada desde su posición natural. Calcule el trabajo realizado al estirar el resorte desde su longitud natural de 10 pulgadas hasta una longitud de 15 pulgadas.

32. **Trabajo** Se necesita una fuerza de 50 libras para estirar un resorte 1 pulgada desde su posición natural. Calcule el trabajo realizado al estirar el resorte desde su longitud natural de 10 pulgadas para duplicar esa longitud.

33. **Trabajo** Un pozo de agua tiene una carcasa de 8 pulgadas (diámetro) y se encuentra a 190 pies de profundidad. El agua está a 25 pies desde la parte superior del pozo. Determine la cantidad de trabajo realizado en el bombeo del pozo seco, suponiendo que el agua no entra en él mientras está siendo bombeado.

34. **Ley de Boyle** Una cantidad de gas con un volumen inicial de 2 pies cúbicos y una presión de 800 libras por pie cuadrado se expande hasta un volumen de 3 pies cúbicos. Encuentre el trabajo realizado por el gas. Suponga que la presión es inversamente proporcional al volumen.

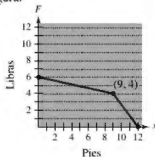
35. **Trabajo** Una cadena de 10 pies de largo pesa 4 libras por pie y se cuelga desde una plataforma a 20 pies sobre el suelo. ¿Cuánto trabajo se requiere para elevar toda la cadena hasta el nivel de 20 pies?

36. **Trabajo** Un inalacate, a 200 pies sobre el nivel del suelo en la parte superior de un edificio, utiliza un cable que pesa 5 libras por pie. Encuentre el trabajo realizado en el enrollado del cable cuando

- (a) un extremo está a nivel del suelo.
(b) hay una carga de 300 libras unida al extremo del cable.

37. **Trabajo** El trabajo realizado por una fuerza variable sobre una prensa es de 80 pies-libra. La prensa se mueve una distancia de 4 pies, y la fuerza es de la forma cuadrática $F = ax^2$. Encuentre a .

38. **Trabajo** Encuentre el trabajo realizado por la fuerza F mostrada en la figura.



39. **Centro de masa de un sistema lineal** Encuentre el centro de masa de las masas puntuales situadas en el eje x .

$$m_1 = 8, \quad m_2 = 12, \quad m_3 = 6, \quad m_4 = 14$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = 7$$

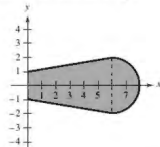
40. **Centro de masa de un sistema de dos dimensiones** Encuentre el centro de masa del sistema de masas puntuales dado.

m_i	3	2	6	9
(x_i, y_i)	(2, 1)	(-3, 2)	(4, -1)	(6, 5)

- Encuentre un centroide En los ejercicios 41 y 42, encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

41. $y = x^2$, $y = 2x + 3$ 42. $y = x^{2/3}$, $y = \frac{1}{2}x$

43. **Centroide** Una hoja de un ventilador industrial tiene la configuración de un semicírculo conectado a un trapecio (vea la figura). Encuentre el centroide de la hoja.



44. **Encuentra un volumen** Utilice el teorema de Pappus para encontrar el volumen del toro formado girando el círculo $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ respecto al eje y .

45. **Fuerza de fluido del agua de mar** Encuentre la fuerza de fluido sobre la placa vertical sumergida en agua de mar (vea la figura).

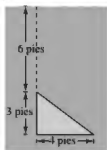


Figura para 45

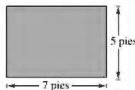


Figura para 46

46. **Fuerza sobre un forma de concreto** La figura es el lado vertical de una forma de concreto colado que pesa 140.7 libras por pie cúbico. Determine la fuerza sobre esta parte de la forma de concreto.

47. **Fuerza de fluido** Una piscina tiene 5 pies de profundidad en un extremo y 10 pies de profundidad en el otro, y el fondo es un plano inclinado. La longitud y el ancho de la piscina es de 40 pies y 20 pies, respectivamente. Si la piscina está llena de agua, ¿cuál es la fuerza del fluido sobre cada una de las paredes verticales?

Solución de problemas

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

1. **Obtención de un límite** Sea R el área de la región en el primer cuadrante acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = cx$, $c > 0$. Sea T el área del triángulo AOB . Calcule el límite

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{T}{R}$$

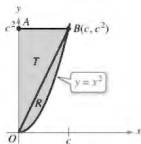


Figura para 1

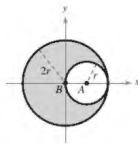
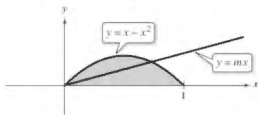


Figura para 2

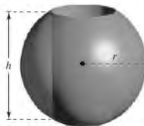
2. **Centro de masa de una lámina** Sea L una lámina de densidad uniforme $\rho = 1$ que se obtiene eliminando el círculo A de radio r del círculo B de radio $2r$ (vea la figura).

- Demuestre que $M_x = 0$ para L .
- Demuestre que M_y para L es igual a $(M_y \text{ para } B) - (M_y \text{ para } A)$.
- Encuentre M_x para B y M_y para A . A continuación, utilice el inciso (b) para calcular M_y para L .
- ¿Cuál es el centro de masa de L ?

3. **Dividir una región** Sea R la región acotada por la parábola $y = x - x^2$ y el eje x . Encuentre la ecuación de la recta que divide esta región en dos regiones de igual área.



4. **Volumen** Se perfora un agujero a través del centro de una esfera de radio r (vea la figura). La altura del anillo esférico restante es h . Encuentre el volumen del anillo y demuestre que es independiente del radio de la esfera.



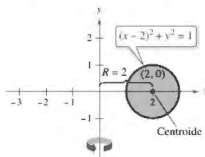
5. **Área de una superficie** Grafique la curva

$$8y^2 = x^2(1 - x^2)$$

Utilice un sistema de álgebra computacional para encontrar el área de la superficie del sólido de revolución obtenido al hacer girar la curva alrededor del eje y .

6. **Toro**

- Un toro se forma al girar la región acotada por el círculo $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ alrededor del eje y (vea la figura). Utilice el método de los discos para calcular el volumen del toro.



- Utilice el método de los discos para encontrar el volumen del toro en general cuando el círculo tiene un radio r y su centro está a R unidades desde el eje de rotación.

7. **Volumen** Un rectángulo R de longitud ℓ y ancho w gira alrededor de la recta L (vea la figura). Determine el volumen del sólido de revolución resultante.

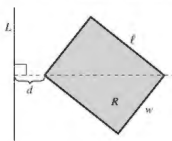


Figura para 7

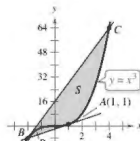


Figura para 8

8. **Comparar áreas de regiones**

- La recta tangente a la curva $y = x^3$ en el punto $A(1, 1)$ corta a la curva en otro punto B . Sea R el área de la región acotada por la curva y la recta tangente. La recta tangente en B corta a la curva en otro punto C (vea la figura). Sea S el área de la región acotada por la curva y esta segunda recta tangente. ¿Cómo se relacionan las áreas R y S ?
- Repita la construcción en el inciso (a) mediante la selección de un punto arbitrario A de la curva $y = x^3$. Demuestre que las dos áreas R y S están siempre relacionadas de la misma manera.

9. Usar la longitud de arco La gráfica de $y = f(x)$ pasa por el origen. La longitud de arco de la curva de $(0, 0)$ a $(x, f(x))$ está dada por

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + e^t} dt.$$

Identifique la función f .

10. Usar una función Sea f rectificable en el intervalo $[a, b]$ y sea

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt.$$

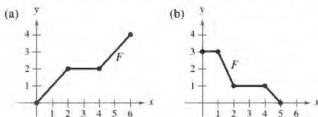
- (a) Encuentre $\frac{ds}{dx}$.
 (b) Encuentre ds y $(ds)^2$.
 (c) Encuentre $s(x)$ en $[1, 3]$, donde $f(t) = t^{3/2}$.
 (d) Utilice la función y el intervalo en el inciso (c) para calcular $s(2)$ y describa lo que significa.

11. Principio de Arquímedes El principio de Arquímedes establece que la fuerza ascendente o de flotación sobre un objeto dentro de un fluido es igual al peso del líquido que desplaza el objeto. Para un objeto parcialmente sumergido, se puede obtener información acerca de las densidades relativas del objeto flotante y el fluido mediante la observación de cuánto del objeto está por encima y por debajo de la superficie. También se puede determinar el tamaño de un objeto flotante si se conoce la cantidad que está por encima de la superficie y las densidades relativas. Se puede ver la parte superior de un iceberg flotando (vea la figura). La densidad del agua del mar es 1.03×10^3 kilogramos por metro cúbico, y la del hielo es 0.92×10^3 kilogramos por metro cúbico. ¿Qué porcentaje total del iceberg está por debajo de la superficie?

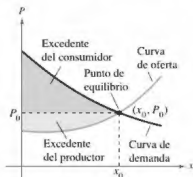


12. Determinar un centroide Dibuje la región acotada por la izquierda por $x = 1$, acotada arriba por $y = 1/x^3$ y acotada abajo por $y = -1/x^3$.
 (a) Encuentre el centroide de la región para $1 \leq x \leq 6$.
 (b) Encuentre el centroide de la región para $1 \leq x \leq b$.
 (c) ¿Dónde está el centroide cuando $b \rightarrow \infty$?
13. Determinar un centroide Dibuje la región a la derecha del eje, acotada arriba por $y = 1/x^3$ y acotada abajo por $y = -1/x^3$.
 (a) Encuentre el centroide de la región para $1 \leq x \leq 6$.
 (b) Encuentre el centroide de la región para $1 \leq x \leq b$.
 (c) ¿Dónde está el centroide cuando $b \rightarrow \infty$?

14. Trabajo Encuentre el trabajo realizado por cada fuerza F .



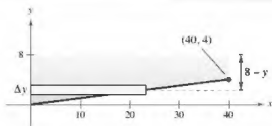
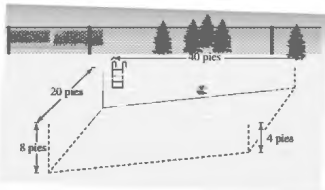
- Excedente del consumidor y productor En los ejercicios 15 y 16, encuentre el excedente del consumidor y el excedente del productor para las curvas de demanda $[p_1(x)]$ y la oferta $[p_2(x)]$ dadas. El excedente del consumidor y el excedente del productor están representados por las zonas que se muestran en la figura.



15. $p_1(x) = 50 - 0.5x$, $p_2(x) = 0.125x$

16. $p_1(x) = 1000 - 0.4x^2$, $p_2(x) = 42x$

17. Fuerza del fluido Una piscina es de 20 pies de ancho, 40 pies de largo, 4 pies de profundidad en un extremo y 8 pies de profundidad en el otro extremo (ver figuras). La parte inferior es un plano inclinado. Encuentre la fuerza del fluido en cada pared vertical.



Evaluar una integral impropia En los ejercicios 18 a 24, determine si la integral impropia diverge o converge. Evalúe la integral si converge.

18. $\int_0^2 \frac{7}{x-2} dx$

19. $\int_1^{\infty} x^2 \ln x dx$

20. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx$

21. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$

22. $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

23. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx$

24. $\int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{x}(x+4)} dx$

25. Encontrar los límites Utilice una herramienta de graficación para estimar cada límite. Luego calcule cada límite usando la regla de L'Hôpital. ¿Qué puede concluir acerca de la forma $0 \cdot \infty$?

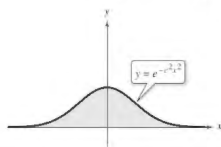
(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\cot x + \frac{1}{x} \right)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(\cot x + \frac{1}{x} \right) \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) \right]$

26. Centroide Encuentre el centroide de la región arriba del eje x , y acotado superiormente por la curva $y = e^{-x^2}$, donde c es una constante positiva (vea la figura).

(Sugerencia: Demuestre que $\int_0^{\infty} e^{-c-x^2} dx = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.)



27. Aproximar una integral Usando la desigualdad

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^{10}} + \frac{1}{x^{15}} < \frac{1}{x^3 - 1} < \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^{10}} + \frac{2}{x^{15}}$$

para $x \geq 2$, aproxime $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3 - 1} dx$.

28. Volumen Considere la región sombreada entre la gráfica de $y = \sin x$, donde $0 \leq x \leq \pi$, y la recta $y = c$, donde $0 \leq c \leq 1$ (vea la figura). Se forma un sólido mediante la revolución de la región sobre la recta $y = c$.

- (a) ¿Para qué valor de c el sólido no tiene volumen mínimo?
 (b) ¿Para qué valor de c el sólido no tiene volumen máximo?



Sucesiones y series

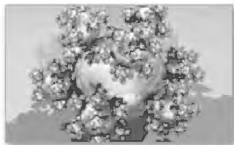
- 4.1 Sucesiones
- 4.2 Series y convergencia
- 4.3 Criterio de la integral y series p
- 4.4 Comparación de series
- 4.5 Series alternantes
- 4.6 El criterio del cociente y de la raíz
- 4.7 Polinomios de Taylor y aproximaciones
- 4.8 Series de potencias
- 4.9 Representación de funciones por series de potencias
- 4.10 Series de Taylor y Maclaurin



Método de la solera



Movimiento de proyectiles



Copo esférico



Efecto multiplicador



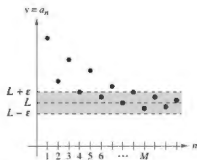
Interés compuesto

Límite de una sucesión

El enfoque principal de este capítulo se refiere a sucesiones cuyos términos se aproximan a valores límite. Se dice que estas sucesiones convergen. Por ejemplo, la sucesión $\{1/2^n\}$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

converge a 0, como se indica en la siguiente definición.



Para $n > M$, los términos de la sucesión se encuentran dentro de las unidades ϵ de L .

Figura 4.1

Definición del límite de una sucesión

Sea L un número real. El **límite** de una sucesión $\{a_n\}$ es L , escrito como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

si para cada $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que $|a_n - L| < \epsilon$ cuando $n > M$. Si existe el límite L de una sucesión, la sucesión **converge** a L . Si no existe el límite de una sucesión, entonces la sucesión **diverge**.

Gráficamente, esta definición dice que eventualmente (para $n > M$ y $\epsilon > 0$), los términos de una sucesión que converge a L se encuentran dentro de la banda entre las rectas $y = L + \epsilon$ y $y = L - \epsilon$ como se muestra en la figura 4.1.

Si una sucesión $\{a_n\}$ concuerda con una función f en cada entero positivo, y si $f(x)$ se aproxima a un límite L cuando $x \rightarrow \infty$, entonces la sucesión debe converger con el mismo límite de L .

..... ▷
 ••• **COMENTARIO** El recíproco del teorema 4.1 no es verdad (vea el ejercicio 84).

TEOREMA 4.1 Límite de una sucesión

Sea L un número real. Sea f una función de una variable real tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L.$$

Si $\{a_n\}$ es una sucesión tal que $f(n) = a_n$ para cada entero positivo n , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

EJEMPLO 2

Encontrar el límite de una sucesión

Encuentre el límite de la sucesión cuyo n -ésimo término es $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Solución

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Por tanto, puede aplicar el teorema 4.1 para concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Hay diferentes maneras en las que una sucesión puede fallar al no tener un límite. Una manera es que los términos de la sucesión aumentan o disminuyen sin límite. Estos casos se han escrito simbólicamente, como se muestra a continuación.

$$\text{Los términos aumentan sin límite: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$\text{Los términos disminuyen sin límite: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

Las propiedades de los límites de sucesiones enumeradas en el siguiente teorema paralelo están dadas para los límites de funciones de una variable real.

TEOREMA 4.2 Propiedades de límites de sucesiones

Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = K$.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = L \pm K$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = cL, \text{ } c \text{ es cualquier número real}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = LK$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{K}, \text{ } b_n \neq 0 \text{ y } K \neq 0$$

EJEMPLO 3 Determinar la convergencia o divergencia

... ▶ Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

a. Debido a que la sucesión $\{a_n\} = \{3 + (-1)^n\}$ tiene términos

$$2, 4, 2, 4, \dots$$

Vea el ejemplo 1(a), página 248.

que alternan entre 2 y 4, el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

no existe. Por lo tanto, la sucesión diverge.

b. Para $\{b_n\} = \left\{ \frac{n}{1-2n} \right\}$, divida el numerador y el denominador entre n para obtener

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1-2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1/n) - 2} = -\frac{1}{2}$$

Vea el ejemplo 1(b), página 248.

lo que implica que la sucesión converge a $-\frac{1}{2}$.

EJEMPLO 4 Usar la regla de L'Hôpital para determinar la convergencia

Demuestre que la sucesión cuyo n -ésimo término es $a_n = \frac{n^2}{2^n - 1}$ converge.

Solución Considere la función de una variable real

$$f(x) = \frac{x^2}{2^x - 1}.$$

Aplique la regla de L'Hôpital dos veces para obtener

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{(\ln 2)2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{(\ln 2)^2 2^x} = 0.$$

Debido a que $f(n) = a_n$ para cada entero positivo, se puede aplicar el teorema 4.1 para concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n - 1} = 0.$$

Vea el ejemplo 1(c), página 248.

Por lo tanto, la sucesión converge a 0.

► **TECNOLOGÍA** Utilice una herramienta de graficación para representar gráficamente la función en el ejemplo 4. Observe que como x tiende a infinito, el valor de la función se acerca más y más a 0. Si tiene acceso a una herramienta de graficación que puede generar los términos de una sucesión, trate de usarla para calcular los primeros 20 términos de la sucesión en el ejemplo 4. A continuación, revise los términos para comprobar numéricamente que la sucesión converge a 0.

El símbolo $n!$ (léase “ n factorial”) se utiliza para simplificar algunas de las fórmulas desarrolladas en este capítulo. Sea n un entero positivo; entonces n factorial se define como

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Como un caso especial, **cero factorial** se define como $0! = 1$. A partir de esta definición, se puede ver que $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, y así sucesivamente. Los factoriales siguen las mismas convenciones para el orden de operaciones como exponentes. Es decir, así como $2x^3$ y $2(x)^3$ implican diferentes órdenes de operaciones, $2n!$ y $(2n)!$ implica los órdenes

$$2n! = 2(n!) = 2(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n)$$

y

$$(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n \cdot (n+1) \cdot \cdots \cdot 2n$$

respectivamente.

Otro teorema del límite útil que puede ser reescrito para las sucesiones es el teorema del emparedado.

TEOREMA 4.3 Teorema del emparedado para sucesiones

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ y existe un entero N tal que $a_n \leq c_n \leq b_n$ para todo $n > N$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$.

EJEMPLO 5 Usar el teorema del emparedado

Demuestre que la sucesión $\{c_n\} = \left\{(-1)^n \frac{1}{n!}\right\}$ converge y encuentre su límite.

Solución Para aplicar el teorema del emparedado, debe encontrar dos sucesiones convergentes que pueden estar relacionadas con $\{c_n\}$. Dos posibilidades son $a_n = -1/2^n$ y $b_n = 1/2^n$ las cuales convergen a 0. Al comparar el término $n!$ con 2^n puede ver que

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot n = 24 \cdot \underbrace{5 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot n}_{n-4 \text{ factores}} \quad (n \geq 4)$$

y

$$2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 = 16 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}_{n-4 \text{ factores}} \quad (n \geq 4)$$

Esto implica que para $n \geq 4$, $2^n < n!$, y tiene

$$-\frac{1}{2^n} \leq (-1)^n \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n}, \quad n \geq 4$$

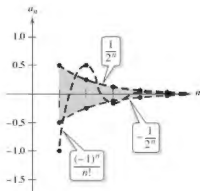
como se muestra en la figura 4.2. Por lo tanto, por el teorema del emparedado, puede deducir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n!} = 0.$$

El ejemplo 5 sugiere algo acerca de la velocidad a la que aumenta $n!$ a medida que $n \rightarrow \infty$. Como sugiere la figura 4.2, tanto $1/2^n$ y $1/n!$ se aproximan a 0 cuando $n \rightarrow \infty$. Sin embargo, $1/n!$ se aproxima a 0 mucho más rápido que $1/2^n$ haciendo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n!}{1/2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

De hecho, se puede demostrar que para cualquier número k fijo, $\lim_{n \rightarrow \infty} (k^n/n!) = 0$. Esto significa que *la función factorial crece más rápido que cualquier función exponencial.*



Para $n \geq 4$, $(-1)^n/n!$ está comprendido entre $-1/2^n$ y $1/2^n$.

Figura 4.2

En el ejemplo 5, la sucesión $\{c_n\}$ tiene tanto términos positivos como negativos. Para esta sucesión, sucede que la secuencia de valores absolutos, $\{|c_n|\}$, también converge a 0. Se puede demostrar esto mediante el teorema del emparejado usando la desigualdad

$$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n}, \quad n \geq 4.$$

En estos casos, a menudo es conveniente considerar la secuencia de valores absolutos y luego aplicar el teorema 4.4, que establece que si el valor absoluto de la sucesión converge a 0, entonces la sucesión original suscrita también converge a 0.

TEOREMA 4.4 Teorema del valor absoluto

Para la sucesión $\{a_n\}$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \quad \text{entonces} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Demostración Considere las dos sucesiones $\{|a_n|\}$ y $\{-|a_n|\}$. Ya que ambas sucesiones convergen a 0 y

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

puede utilizar el teorema del emparejado para concluir que $\{a_n\}$ converge a 0.

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

Reconocimiento de un patrón de sucesiones

A veces los términos de una sucesión se generan por una regla que no identifica explícitamente el n -ésimo término de la secuencia. En estos casos, se puede tener que descubrir un patrón en la sucesión y describir el n -ésimo término. Una vez especificado el n -ésimo término, se puede investigar la convergencia o divergencia de la sucesión.

EJEMPLO 6 Encontrar el n -ésimo término de una sucesión

Encuentre una sucesión $\{a_n\}$ cuyos cinco primeros términos son

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{8}{5}, \frac{16}{7}, \frac{32}{9}, \dots$$

y luego determine si la sucesión que ha elegido converge o diverge.

Solución En primer lugar, observe que los numeradores son sucesivas potencias de 2, y los denominadores forman la secuencia de enteros positivos impares. Al comparar a_n con n se tiene el siguiente patrón.

$$\frac{2^1}{1}, \frac{2^2}{3}, \frac{2^3}{5}, \frac{2^4}{7}, \frac{2^5}{9}, \dots, \frac{2^n}{2n-1}, \dots$$

Considere la función de una variable real $f(x) = 2^x/(2x-1)$. Aplicando la regla de L'Hôpital obtiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x(\ln 2)}{2} = \infty.$$

A continuación, aplique el teorema 4.1 para concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2n-1} = \infty.$$

Por lo tanto, la sucesión diverge. ■

Sin una regla específica para la generación de los términos de una sucesión o algún conocimiento del contexto en el que se obtienen los términos de esta, no es posible determinar la convergencia o divergencia de la sucesión solamente con algunos de sus primeros términos. Por ejemplo, aunque los tres primeros términos de las siguientes cuatro sucesiones son idénticos, las dos primeras sucesiones convergen a 0, la tercera sucesión converge a $\frac{1}{9}$, y la cuarta sucesión diverge.

$$\begin{aligned} \{a_n\} &: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \\ \{b_n\} &: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{15}, \dots, \frac{6}{(n+1)(n^2-n+6)}, \dots \\ \{c_n\} &: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{62}, \dots, \frac{n^2-3n+3}{9n^2-25n+18}, \dots \\ \{d_n\} &: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 0, \dots, \frac{-n(n+1)(n-4)}{6(n^2+3n-2)}, \dots \end{aligned}$$

El proceso de determinación del n -ésimo término del patrón observado en los primeros términos de una sucesión es un ejemplo de razonamiento inductivo.

EJEMPLO 7**Encontrar el n -ésimo término de una sucesión**

Determine el n -ésimo término de una sucesión cuyos cinco primeros términos son

$$-\frac{2}{1}, \frac{8}{2}, -\frac{26}{6}, \frac{80}{24}, -\frac{242}{120}, \dots$$

y luego decida si la sucesión converge o diverge.

Solución Observe que los numeradores son 1 menos que 3^n .

$$3^1 - 1 = 2 \quad 3^2 - 1 = 8 \quad 3^3 - 1 = 26 \quad 3^4 - 1 = 80 \quad 3^5 - 1 = 242$$

Por lo tanto, se puede pensar que los numeradores están dados por la regla

$$3^n - 1$$

Factorizar los denominadores produce

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2 &= 1 \cdot 2 \\ 6 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \\ 24 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \end{aligned}$$

y

$$120 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

Esto sugiere que los denominadores están representados por $n!$. Por último, debido a que los signos se alternan, puede escribir el n -ésimo término como

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{3^n - 1}{n!} \right).$$

A partir de la discusión acerca del crecimiento de $n!$ se deduce que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 1}{n!} = 0.$$

Aplicando el teorema 4.4, puede concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{a_n\}$ converge a 0. ■

Sucesiones monótonas y sucesiones acotadas

Hasta ahora, se ha determinado la convergencia de una sucesión encontrando su límite. Ahora cuando no se puede determinar el límite de una sucesión particular, todavía puede ser útil saber si la sucesión converge. El teorema 4.5 (en la página siguiente) proporciona una demostración para la convergencia de las sucesiones sin determinar el límite. Antes, se dan algunas definiciones preliminares.

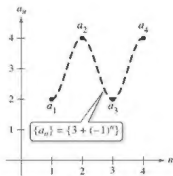
Definición de sucesión monótona

Una sucesión $\{a_n\}$ es **monótona** cuando sus términos son no decrecientes

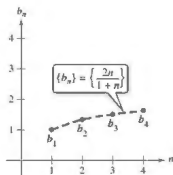
$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$$

o cuando sus términos son no crecientes

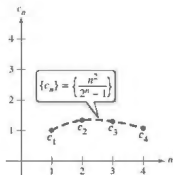
$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$$



(a) No es monótona



(b) Monótona



(c) No es monótona

Figura 4.3

EJEMPLO 8 Determinar si una sucesión es monótona

Determine si cada sucesión que tiene el n -ésimo término dado es monótona.

a. $a_n = 3 + (-1)^n$

b. $b_n = \frac{2n}{1+n}$

c. $c_n = \frac{n^2}{2^n - 1}$

Solución

a. Esta sucesión alterna entre 2 y 4. Por lo tanto, no es monótona.

b. Esta sucesión es monótona porque cada término sucesivo es mayor que su predecesor. Para ver esto, compare los términos b_n y b_{n+1} . [Observe que, debido a que n es positivo, se puede multiplicar cada lado de la desigualdad por $(1+n)$ y $(2+n)$ sin invertir el signo de desigualdad.]

$$b_n = \frac{2n}{1+n} \stackrel{?}{<} \frac{2(n+1)}{1+(n+1)} = b_{n+1}$$

$$2n(2+n) \stackrel{?}{<} (1+n)(2n+2)$$

$$4n + 2n^2 \stackrel{?}{<} 2 + 4n + 2n^2$$

$$0 < 2$$

A partir de la desigualdad final, que es válida, puede revertir los pasos para concluir que la desigualdad original es también válida.

c. Esta sucesión no es monótona, debido a que el segundo término es mayor que el primer término, y mayor que el tercero. (Observe que cuando omita el primer término, la sucesión restante c_2, c_3, c_4, \dots es monótona.)

La figura 4.3 ilustra gráficamente estas tres sucesiones. ■

En el ejemplo 8(b), otra forma de ver que la sucesión es monótona es argumentar que la derivada de la función derivable correspondiente

$$f(x) = \frac{2x}{1+x}$$

es positiva para toda x . Esto implica que f es creciente, lo que a su vez implica que $\{b_n\}$ está aumentando.

Definición de sucesión acotada

1. Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada por arriba** cuando existe un número real M tal que $a_n \leq M$ para todo n . El número M recibe el nombre de **cota superior** de la sucesión.
2. Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada por debajo** cuando existe un número real N tal que $N \leq a_n$ para todo n . El número N recibe el nombre de **cota inferior** de la sucesión.
3. Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada** cuando está limitada por arriba y por abajo.

Observe que las tres sucesiones en el ejemplo 3 (y que se muestran en la figura 4.3) están acotadas. Para ver esto, observe que

$$2 \leq a_n \leq 4, \quad 1 \leq b_n \leq 2 \quad \text{y} \quad 0 \leq c_n \leq \frac{4}{3}.$$

Una propiedad importante de los números reales es que están **completos**. Informalmente, esto significa que no hay agujeros o brechas en la recta numérica real. (El conjunto de los números racionales no tiene la propiedad de completitud.) El axioma de completitud para los números reales se puede utilizar para concluir que si una sucesión tiene un límite superior, entonces debe tener un **límite superior mínimo** (un límite superior que es menor que todos los otros límites superiores para la sucesión). Por ejemplo, el extremo superior de la sucesión $\{a_n\} = \{n/(n+1)\}$,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

es I. El axioma de completitud se utiliza en la demostración del teorema 4.5.

TEOREMA 4.5 Sucesiones monótonas acotadas

Si una sucesión $\{a_n\}$ es acotada y monótona, entonces converge.

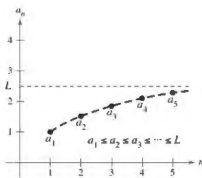
Demostración Suponga que la sucesión es no decreciente, como se muestra en la figura 4.4. En aras de la simplicidad, también suponga que cada término de la sucesión es positivo. Debido a que la sucesión está acotada, debe existir un límite superior M de tal forma que

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq M.$$

Del axioma de completitud, se deduce que hay un límite superior L de tal manera que

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq L.$$

Para $\epsilon > 0$ se tiene que $L - \epsilon > L - \epsilon$, por tanto $L - \epsilon$ no puede ser un límite superior para la sucesión. En consecuencia, al menos un término de $\{a_n\}$ es mayor que $L - \epsilon$. Es decir, $L - \epsilon < a_N$ para algún entero positivo N . Debido a que los términos de $\{a_n\}$ son no decrecientes, se deduce que $a_N \leq a_n$ para $n > N$. Ahora se sabe que $L - \epsilon < a_N \leq a_n \leq L < L + \epsilon$, para cada $n > N$. Por lo que $|a_n - L| < \epsilon$ para $n > N$, lo que por definición significa que $\{a_n\}$ converge a L . La demostración para una sucesión no creciente es similar (vea el ejercicio 91). Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■



Toda sucesión acotada no decreciente converge.

Figura 4.4

EJEMPLO 9 Sucesiones monótonas acotadas

- a. La sucesión $\{a_n\} = \{1/n\}$ es a la vez acotada y monótona, por lo tanto, por el teorema 4.5, debe converger.
- b. La sucesión divergente $\{b_n\} = \{n^2/(n+1)\}$ es monótona, pero no acotada. (Está acotada por abajo.)
- c. La sucesión divergente $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ está acotada, pero no es monótona. ■

4.1 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

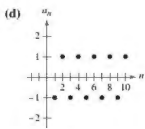
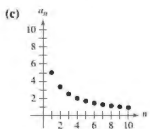
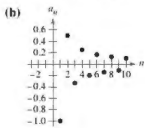
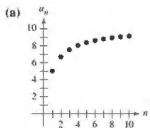
Listar los términos de una sucesión En los ejercicios 1-6, escriba los primeros cinco términos de la sucesión.

1. $a_n = 3^n$ 2. $a_n = \left(-\frac{2}{5}\right)^n$
 3. $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ 4. $a_n = \frac{3n}{n+4}$
 5. $a_n = (-1)^n + \left(\frac{2}{n}\right)$ 6. $a_n = 2 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}$

Listar los términos de una sucesión En los ejercicios 7 y 8, escriba los primeros cinco términos de la sucesión definida recursivamente.

7. $a_1 = 3, a_{k+1} = 2(a_k - 1)$ 8. $a_1 = 6, a_{k+1} = \frac{1}{3a_k^2}$

Relacionar En los ejercicios 9-12, relacione la sucesión con su gráfica. [Las gráficas están etiquetadas (a), (b), (c) y (d).]



9. $a_n = \frac{10}{n+1}$

10. $a_n = \frac{10n}{n+1}$

11. $a_n = (-1)^n$

12. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Escribir términos En los ejercicios 13-16, escriba los siguientes dos términos aparentes de la sucesión. Describa el patrón que utilizó para encontrar estos términos.

13. 2, 5, 8, 11, ... 14. 8, 13, 18, 23, 28, ...

15. 5, 10, 20, 40, ... 16. 6, -2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, ...

Simplificar factoriales En los ejercicios 17-20, simplifique la razón de los factoriales.

17. $\frac{(n+1)!}{n!}$

18. $\frac{n!}{(n+2)!}$

19. $\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$

20. $\frac{(2n+2)!}{(2n)!}$

Encontrar el límite de una sucesión En los ejercicios 21-24, encuentre el límite (si es posible) de la sucesión.

21. $a_n = \frac{5n^2}{n^2+2}$ 22. $a_n = 6 + \frac{2}{n^2}$

23. $a_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$ 24. $a_n = \cos \frac{2}{n}$

Encontrar el límite de una sucesión En los ejercicios 25-28, utilice una herramienta de graficación para trazar los primeros 10 términos de la sucesión. Use la gráfica para hacer una inferencia acerca de la convergencia o divergencia de la sucesión. Verifique su inferencia analíticamente, y si la sucesión converge, encuentre su límite.

25. $a_n = \frac{4n+1}{n}$ 26. $a_n = \frac{1}{n^{3/2}}$

27. $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ 28. $a_n = 2 - \frac{1}{4^n}$

Determinar convergencia o divergencia En los ejercicios 29-44, determine la convergencia o divergencia de la sucesión dado el término n -ésimo. Si la sucesión converge, encuentre su límite.

29. $a_n = \frac{5}{n+2}$ 30. $a_n = 8 + \frac{5}{n}$

31. $a_n = (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)$ 32. $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n^2}$

33. $a_n = \frac{10n^2+3n+7}{2n^2-6}$ 34. $a_n = \frac{3/n}{\sqrt[3]{n}+1}$

35. $a_n = \frac{\ln(n^3)}{2n}$ 36. $a_n = \frac{5^n}{3^n}$

37. $a_n = \frac{(n+1)!}{n!}$ 38. $a_n = \frac{(n-2)!}{n!}$

39. $a_n = \frac{n^p}{e^n}, p > 0$ 40. $a_n = n \sin \frac{1}{n}$

41. $a_n = 2^{1/n}$ 42. $a_n = -3^{-n}$

43. $a_n = \frac{\sin n}{n}$ 44. $a_n = \frac{\cos n\pi}{n^2}$

Encontrar el término n -ésimo de una sucesión En los ejercicios 45-52, escriba una expresión para el n -ésimo término de la sucesión. (Hay más de una respuesta correcta.)

45. 2, 8, 14, 20, ... 46. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \dots$

47. -2, 1, 6, 13, 22, ... 48. $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \dots$

49. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

50. 2, 24, 720, 40,320, 3,628,800, ...

51. $2, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{5}, \dots$

52. $\frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{2}{3 \cdot 4}, \frac{3}{4 \cdot 5}, \frac{4}{5 \cdot 6}, \dots$

Encontrar una sucesión monótona y acotada En los ejercicios 53-60, determine si la sucesión con el término n -ésimo dado es monótona y si está acotada. Use una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

53. $a_n = 4 - \frac{1}{n}$

54. $a_n = \frac{3n}{n+2}$

55. $a_n = ne^{-n/2}$


56. $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

57. $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

58. $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

59. $a_n = \sin \frac{n\pi}{6}$

60. $a_n = \frac{\cos n}{n}$

 Usar un teorema En los ejercicios 61-64, (a) utilice el teorema 4.5 para demostrar que la sucesión con el término n -ésimo dado converge y (b) use una herramienta de graficación para trazar los primeros 10 términos de la sucesión y encuentre su límite.

61. $a_n = 7 + \frac{1}{n}$

62. $a_n = 5 - \frac{2}{n}$

63. $a_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$

64. $a_n = 2 + \frac{1}{5^n}$

65. Sucesión creciente Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente tal que $2 \leq a_n \leq 4$. Explique por qué $\{a_n\}$ tiene un límite. ¿Qué puede concluir sobre este límite?

66. Sucesión monótona Sea $\{a_n\}$ una sucesión monótona tal que $a_n \leq 1$. Analice la convergencia de $\{a_n\}$ conerge. ¿qué puede concluir acerca de su límite?

•• 67. Interés compuesto •••••

• Considere la sucesión $\{A_n\}$ cuyo n -ésimo término está dado por

$$A_n = P \left(1 + \frac{r}{12}\right)^n$$

• donde P es el capital,

• A_n es el saldo de la

• cuenta después de n

• meses y r es la tasa de interés compuesto anual.

• (a) ¿ $\{A_n\}$ es una sucesión convergente? Explique.

• (b) Encuentre los primeros 10 términos de la sucesión cuando

$$P = \$10,000 \text{ y } r = 0.055.$$



68. Interés compuesto A principios de cada mes se realiza un depósito de \$100 en una cuenta a una tasa de interés anual del 3% compuesto mensualmente. El saldo de la cuenta después de n meses es $A_n = 100(401)(1.0025)^n - 1$

(a) Calcule los seis primeros términos de la sucesión $\{A_n\}$.

(b) Determine el saldo de la cuenta después de 5 años calculando el término 60 de la sucesión.

(c) Encuentre el saldo en la cuenta después de 20 años calculando el término 240 de la sucesión.

DESARROLLO DE CONCEPTOS

69. Sucesión ¿Es posible que una sucesión converja a dos números diferentes? Si es así, dé un ejemplo. Si no, explique por qué no.

70. Definir términos Con sus propias palabras, defina cada uno de los siguientes.

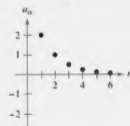
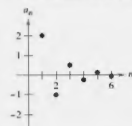
- (a) Sucesión (c) Sucesión monótona
 (b) Convergencia de una sucesión (d) Sucesión acotada

71. Escribir una sucesión Dé un ejemplo de una sucesión que satisfaga la condición o explique por qué no existe dicha sucesión. (Los ejemplos no son únicos.)

- (a) Una sucesión monótona creciente que converja a 10.
 (b) Una sucesión acotada monótona creciente que no converge.
 (c) Una sucesión que converja a $\frac{3}{4}$.
 (d) Una sucesión no acotada que converja a 100.



¿CÓMO LO VE? En las figuras se muestran las gráficas de las dos sucesiones. ¿Cuál gráfica representa la sucesión de signos alternantes? Explique.



73. Gastos del gobierno Un programa gubernamental que actualmente cuesta a los contribuyentes \$4.5 miles de millones por año se redujo en un 20 por ciento por año.

(a) Escriba una expresión para la cantidad presupuestada para este programa después de n años.

(b) Calcule los presupuestos para los primeros 4 años.

(c) Determine la convergencia o divergencia de la sucesión de los presupuestos reducidos. Si la sucesión converge, encuentre su límite.

74. Inflación Cuando la tasa de inflación es de $4\frac{1}{2}\%$ anual y el precio promedio de un automóvil es de \$25,000, el precio promedio después de n años es $P_n = \$25,000(1.045)^n$. Calcule los precios promedio para los próximos 5 años.

75. Usar una sucesión Calcule los seis primeros términos de la sucesión $\{a_n\} = \{\sqrt[n]{n}\}$. Si la sucesión converge, encuentre su límite.

76. Usar una sucesión Calcule los seis primeros términos de la sucesión

$$\{a_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}.$$

Si la sucesión converge, encuentre su límite.

77. **Demostración** Demuestre que si $\{s_n\}$ converge a L y $L > 0$, entonces existe un número N tal que $s_n > 0$ para $n > N$.

78. Modelar datos Los importes de la deuda federal a_n (en billones de dólares) de Estados Unidos de 2000 hasta el 2011 se dan a continuación como pares ordenados de la forma (n, a_n) , donde n representa el año, con $n = 0$ correspondiente a 2000 (Fuente: U.S. Office of Management and Budget)

(0, 5.6), (1, 5.8), (2, 6.2), (3, 6.8), (4, 7.4), (5, 7.9), (6, 8.5), (7, 9.0), (8, 10.0), (9, 11.9), (10, 13.5), (11, 14.8)

(a) Utilice las capacidades de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma

$$a_n = bn^2 + cn + d, \quad n = 0, 1, \dots, 11$$

para los datos. Utilice la herramienta de graficación para trazar los puntos y graficar el modelo.

(b) Utilice el modelo para predecir la cantidad de deuda federal en el año 2020.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 79-82, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

79. Si $\{a_n\}$ converge a 3 y $\{b_n\}$ converge a 2, entonces $\{a_n + b_n\}$ converge a 5.
 80. Si $\{a_n\}$ converge, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n+1}) = 0$.
 81. Si $\{a_n\}$ converge, entonces $\{a_n/n\}$ converge a 0.
 82. Si $\{a_n\}$ diverge y $\{b_n\}$ diverge, entonces $\{a_n + b_n\}$ diverge.

83. **Sucesión de Fibonacci** En un estudio de la progenie de los conejos, Fibonacci (1170-1240 d.C.) se encontró con la sucesión que ahora lleva su nombre. La sucesión se define de forma recursiva como $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, donde $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$.

- (a) Escriba los primeros 12 términos de la sucesión.
 (b) Escriba los primeros 10 términos de la sucesión definida por

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad n \geq 1.$$

(c) Utilizando la definición del inciso (b), demuestre que

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}.$$

(d) La **proporción dorada** ρ puede ser definida por $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \rho$. Demuestre que

$$\rho = 1 + \frac{1}{\rho}$$

y resuelva esta ecuación para ρ .

84. **Usar un teorema** Demuestre que el recíproco del teorema 4.1 no es cierto. [Sugerencia: Encuentre una función $f(x)$ tal que $f(n) = a_n$ converge, pero $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ no existe.]

85. **Usar una sucesión** Considere la sucesión

$$\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$$

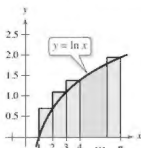
- (a) Calcule los cinco primeros términos de esta sucesión.
 (b) Escriba una fórmula de recurrencia para a_n , con $n \geq 2$.
 (c) Encuentre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

86. **Usar una sucesión** Considere la sucesión $\{a_n\}$ donde $a_1 = \sqrt{k}$, $a_{n+1} = \sqrt{k + a_n} + k > 0$

- (a) Demuestre que $\{a_n\}$ es creciente y acotada.
 (b) Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existe.
 (c) Encuentre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

87. **Teorema del emparedado**

(a) Demuestre que $\int_n^{n+1} \ln x \, dx < \ln(n!)$ para $n \geq 2$.



(b) Dibuje una gráfica similar a la mostrada arriba

$$\ln(n!) < \int_1^{n+1} \ln x \, dx.$$

(c) Utilice los resultados de los incisos (a) y (b) para demostrar que

$$\frac{n^n}{e^{n+1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}, \quad \text{para } n > 1.$$

(d) Utilice el teorema del emparedado para las sucesiones y el resultado del inciso (c) para demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{e}{n})^{1/n} = 1/e$.

(e) Pruebe el resultado del inciso (d) para $n = 20, 50$ y 100.

88. **Demostración** Demuestre, usando la definición del límite de una sucesión, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0.$$

89. **Demostración** Demuestre, usando la definición del límite de una sucesión, que $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ para $-1 < r < 1$.

90. **Usar una sucesión** Encuentre una sucesión divergente $\{a_n\}$ tal que $\{a_{2n}\}$ converja.

91. **Demostración** Demuestre el teorema 4.5 para una sucesión no creciente.

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

92. Sea $\{x_n\}$, $n \geq 0$, una sucesión de números reales no nulos tales que $x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1} = 1$ para $n = 1, 2, 3, \dots$. Demuestre que existe un número real a tal que $x_{n+1} = ax_n - x_{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

93. Sea $T_0 = 2$, $T_1 = 3$, $T_2 = 6$ y para $n \geq 3$,

$$T_n = (n+4)T_{n-1} - 4nT_{n-2} + (4n-8)T_{n-3}.$$

Los primeros términos son

$$2, 3, 6, 14, 40, 152, 784, 5168, 40576$$

Encuentre, con la prueba, una fórmula para T_n de la forma $T_n = A_n + B_n$, donde $\{A_n\}$ y $\{B_n\}$ son sucesiones conocidas.

Estos problemas fueron preparados por el Comité on Prize Putnam Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

4.2 Series y convergencia

- Comprender la definición de una serie infinita convergente.
- Utilizar las propiedades de la serie geométrica infinita.
- Utilizar la prueba del término n -ésimo para la divergencia de una serie infinita.

Serie infinita

Una aplicación importante de las sucesiones infinitas es en la representación de "sumas infinitas". Informalmente, si $\{a_n\}$ es una sucesión infinita, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Series infinitas

COMENTARIO Al estudiar este capítulo, es importante distinguir entre una serie infinita y una sucesión. Una sucesión es una colección ordenada de números

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

mientras que una serie es una suma infinita de términos de una sucesión

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

es una **serie infinita** (o simplemente una **serie**). Los números a_1, a_2, a_3 y así sucesivamente son los términos de la serie. Para algunas series, es conveniente empezar el índice en $n = 0$ (o algún otro número entero). Como convención de composición tipográfica, es común representar una serie infinita como $\sum a_n$. En tales casos, el valor inicial para el índice debe ser tomado a partir del contexto del enunciado.

Para encontrar la suma de una serie infinita, considere la **sucesión de sumas parciales** indicadas a continuación.

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Si esta sucesión de sumas parciales converge, entonces se dice que la serie es convergente y tiene la suma indicada en la siguiente definición.

SERIE INFINITA

El estudio de las series infinitas se consideró una novedad en el siglo XIV. El lógico Richard Suiseth, cuyo apodo era Calculadora, resolvió este problema.

Si durante la primera mitad de un intervalo de tiempo dada una variación continúa a una cierta intensidad, durante el siguiente cuarto del intervalo al doble de la intensidad, durante el siguiente octavo al triple de la intensidad y así ad infinitum; entonces la intensidad media para todo el intervalo será la intensidad de la variación durante el segundo subintervalo (a el doble de la intensidad).

Esto es lo mismo que decir que la suma de la serie infinita

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots$$

es 2.

Definiciones de serie convergente y divergente

Para la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, la **suma parcial n -ésima** es

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Si la secuencia de sumas parciales $\{S_n\}$ converge a S entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge**. El límite S se denomina **suma de la serie**.

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Si $\{S_n\}$ diverge, entonces la serie **diverge**.

Al estudiar este capítulo, usted verá que hay dos preguntas básicas que implican series infinitas.

- ¿Una serie converge o diverge?
- Cuando una serie converge, ¿cuál es su suma?

Estas preguntas no siempre son fáciles de responder, especialmente la segunda.

▶ **TECNOLOGÍA** La figura 4.5 muestra las primeras 15 sumas parciales de la serie infinita en el ejemplo 1(a). Observe cómo los valores parecen acercarse a la recta de $y = 1$.

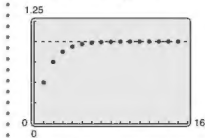


Figura 4.5



Se pueden determinar las sumas parciales de la serie en el ejemplo 1(a) usando esta figura geométrica.

Figura 4.6

EJEMPLO 1 Series convergente y divergente

a. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

tiene las sumas parciales que se indican a continuación. (También se pueden determinar las sumas parciales de la serie geométrica, como se muestra en la figura 4.6.)

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

⋮

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

Yn que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1$$

se deduce que la serie converge y su suma es 1.

b. La suma parcial n -ésima de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots$$

es

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Debido a que el límite de S_n es 1, la serie converge y su suma es 1.

c. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$$

diverge porque $S_n = n$ y la sucesión de sumas parciales diverge. ■

La serie en el ejemplo 1(b) es una **serie telescópica** de la forma

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + (b_4 - b_5) + \cdots$$

Serie telescópica

Observe que b_2 es cancelada por el segundo término, b_3 es cancelada por el tercero, y así sucesivamente. Debido a que la suma parcial n -ésima de esta serie es

$$S_n = b_1 - b_{n+1}$$

se deduce que una serie telescópica convergerá si y solo si b_n se aproxima a un número finito cuando $n \rightarrow \infty$. Por otra parte, si la serie converge, entonces su suma es

$$S = b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1}.$$

■ PARA INFORMACIÓN ADICIONAL

Para aprender más acerca de las sumas parciales de series infinitas, consulte el artículo "Six Ways to Sum a Series", de Dan Kalman, en *The College Mathematics Journal*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

EJEMPLO 2

Escribir una serie en forma telescópica

Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1}$.

Solución

Usando fracciones parciales, puede escribir

$$a_n = \frac{2}{4n^2 - 1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

A partir de esta forma telescópica, puede observar que la n -ésima suma parcial es

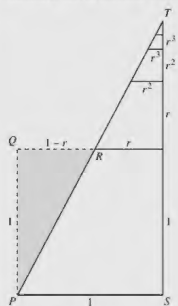
$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n+1}$$

Por tanto, la serie converge y su suma es 1. Esto es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = 1.$$

Exploración

En "Proof Without Words", por Benjamin G. Klein e Irl C. Bivens, los autores presentan el siguiente diagrama. Explique por qué la segunda expresión después del diagrama es válida. ¿Cómo se relaciona este resultado con el teorema 4.6?



$\Delta PQR \sim \Delta TSP$

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}$$

Ejercicio tomado de "Proof Without Words", por Benjamin G. Klein e Irl C. Bivens, *Mathematics Magazine*, 61, No. 4, octubre 1988, p. 219, con el permiso de los autores.

Serie geométrica

La serie en el ejemplo 1(a) es una **serie geométrica**. En general, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots, \quad a \neq 0$$

Serie geométrica

es una **serie geométrica** con razón r , $r \neq 0$.

TEOREMA 4.6 Convergencia de una serie geométrica

Una serie geométrica con razón r diverge cuando $|r| \geq 1$. Si $0 < |r| < 1$, entonces la serie converge a la suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \quad 0 < |r| < 1.$$

Demostración Es fácil ver que la serie diverge cuando $r = \pm 1$. Si $r \neq \pm 1$ entonces,

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}.$$

Multiplicando por r se obtiene

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n.$$

Restando la segunda ecuación de la primera produce $S_n - rS_n = a - ar^n$. Por lo tanto, $S_n(1-r) = a(1-r^n)$, y la suma parcial n -ésima es

$$S_n = \frac{a}{1-r}(1-r^n).$$

Cuando $0 < |r| < 1$ se deduce que $r^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a}{1-r}(1-r^n) \right] = \frac{a}{1-r} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (1-r^n) \right] = \frac{a}{1-r}$$

lo que significa que la serie converge y su suma es $a/(1-r)$. Se le deja al lector demostrar que la serie diverge cuando $|r| > 1$.

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

- **TECNOLOGÍA** Intente utilizar una herramienta de graficación para calcular la suma de los 20 primeros términos de la sucesión en el ejemplo 3(a). Debe obtener una suma aproximada de 5.999994.

EJEMPLO 3 Series geométricas convergente y divergente

a. La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = 3(1) + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots$$

tiene una razón $r = \frac{1}{2}$ con $a = 3$. Ya que $0 < |r| < 1$, la serie converge y su suma es

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-(1/2)} = 6.$$

b. La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \dots$$

tiene una razón $r = \frac{3}{2}$. Ya que $|r| \geq 1$, la serie diverge. ■

La fórmula para la suma de una serie geométrica se puede utilizar para escribir un decimal periódico como la relación de dos números enteros, como se demuestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Una serie geométrica para un decimal repetido

...► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Use una serie geométrica para escribir $0.\overline{08}$ como el cociente de dos enteros.

Solución Para el decimal repetido $0.\overline{08}$, puede escribir

$$\begin{aligned} 0.080808 \dots &= \frac{8}{10^2} + \frac{8}{10^4} + \frac{8}{10^6} + \frac{8}{10^8} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{10^2}\right)\left(\frac{1}{10^2}\right)^n. \end{aligned}$$

Para esta serie, tiene $a = 8/10^2$ y $r = 1/10^2$, por tanto

$$0.080808 \dots = \frac{a}{1-r} = \frac{8/10^2}{1-(1/10^2)} = \frac{8}{99}.$$

Pruebe dividir 8 entre 99 en una calculadora, para ver que el resultado es $0.\overline{08}$. ■

La convergencia de una serie no se ve afectada por la eliminación de un número finito de términos desde el principio de la serie. Por ejemplo, las series geométricas

$$\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

convergen. Además, como la suma de la segunda serie es

$$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(1/2)} = 2$$

se puede concluir que la suma de la primera serie es

$$\begin{aligned} S &= 2 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] \\ &= 2 - \frac{15}{8} \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Las propiedades en el siguiente teorema son consecuencias directas de las propiedades correspondientes de límites de sucesiones.

TEOREMA 4.7 Propiedades de las series infinitas

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series convergentes, y sean A , B y c números reales. Si $\sum a_n = A$ y $\sum b_n = B$, entonces las siguientes series convergen a las sumas indicadas.

- $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c A$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = A - B$

Criterio del término n -ésimo para la convergencia

El siguiente teorema establece que cuando una serie converge, el límite de su término n -ésimo debe ser 0.

TEOREMA 4.8 Límite del término n -ésimo de una serie convergente

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Demostración Suponga que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L.$$

Entonces, ya que $S_n = S_{n-1} + a_n$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = L$$

se deduce que

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n-1} + a_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ &= L + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \end{aligned}$$

lo que implica que $\{a_n\}$ converge a 0.

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. 

La contraposición del teorema 4.8 proporciona una prueba útil para la *divergencia*. Este criterio del **término n -ésimo para la divergencia** establece que si el límite del término de una serie no converge a 0, la serie debe divergir.

TEOREMA 4.9 Criterio del término n -ésimo para la divergencia

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

.....▷
 ••COMENTARIO Asegúrese de ver que el recíproco del teorema 4.8 en general no es cierto. Es decir, si la sucesión $\{a_n\}$ converge a 0, entonces la serie $\sum a_n$ puede ser convergente o divergente.

EJEMPLO 5 Usar el criterio del término n -ésimo para la divergencia

- a. Para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty.$$

Por tanto, el límite del término n -ésimo no es 0 y la serie diverge.

- b. Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n! + 1}$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{2n! + 1} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, el límite del término n -ésimo no es 0 y la serie diverge.

- c. Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, se tiene que

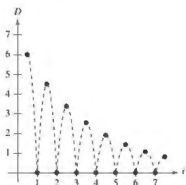
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Debido a que el límite del término n -ésimo es 0, el criterio del término n -ésimo para la divergencia *no* es aplicable y no se puede sacar ninguna conclusión acerca de la convergencia o divergencia. (En la siguiente sección, verá que esta serie en particular diverge.)

.....▶
 *COMENTARIO La serie en el ejemplo 5(c) jugará un papel importante en este capítulo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Verá que esta serie diverge a pesar de que el término n -ésimo se aproxima a 0 cuando n se aproxima a ∞ .



La altura de cada rebote es tres cuartas partes de la altura del rebote anterior.

Figura 4.7

EJEMPLO 6 Problema de la pelota que rebota

Se deja caer una pelota desde una altura de 6 pies y comienza a rebotar, como se muestra en la figura 4.7. La altura de cada rebote es tres cuartas partes de la altura del rebote anterior. Encuentre la distancia vertical total recorrida por la pelota.

Solución Cuando la pelota toca el suelo por primera vez, ha recorrido una distancia de $D_1 = 6$ pies. Para rebotes subsiguientes, sea D_n la distancia recorrida hacia arriba y hacia abajo. Por ejemplo, D_2 y D_3 son

$$D_2 = \underbrace{6\left(\frac{3}{4}\right)}_{\text{Arriba}} + \underbrace{6\left(\frac{3}{4}\right)}_{\text{Abajo}} = 12\left(\frac{3}{4}\right)$$

y

$$D_3 = \underbrace{6\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)}_{\text{Arriba}} + \underbrace{6\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)}_{\text{Abajo}} = 12\left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

Al continuar este proceso, se puede determinar que la distancia vertical total es

$$\begin{aligned} D &= 6 + 12\left(\frac{3}{4}\right) + 12\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 12\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots \\ &= 6 + 12 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \\ &= 6 + 12\left(\frac{3}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ &= 6 + 9 \left[\frac{1}{1 - (3/4)} \right] \\ &= 6 + 9(4) \\ &= 42 \text{ pies.} \end{aligned}$$

4.2 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Encontrar sumas parciales En los ejercicios 1-6, encuentre la sucesión de sumas parciales S_1, S_2, S_3, S_4 y S_5 .

1. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$

2. $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 6} + \frac{5}{6 \cdot 7} + \dots$

3. $3 - \frac{2}{3} + \frac{27}{4} - \frac{81}{5} + \frac{243}{16} - \dots$

4. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$

Verificar divergencia En los ejercicios 7-14, compruebe que la serie infinita diverge.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{6}\right)^n$

8. $\sum_{n=0}^{\infty} 4(-1.05)^n$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+3}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

Verificar convergencia En los ejercicios 15-20, compruebe que la serie infinita converge.

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} (0.9)^n = 1 + 0.9 + 0.81 + 0.729 + \dots$

18. $\sum_{n=0}^{\infty} (-0.6)^n = 1 - 0.6 + 0.36 - 0.216 + \dots$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (Sugerencia: Utilice fracciones parciales)

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ (Sugerencia: Utilice fracciones parciales)

Análisis numérico, gráfico y analítico En los ejercicios 21-24, (a) halle la suma de la serie, (b) utilice una herramienta de graficación para hallar la suma parcial S_n indicada y complete la tabla, (c) use una herramienta de graficación para representar gráficamente los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales y una recta horizontal que represente la suma, y (d) explique la relación entre las magnitudes de los términos de la serie y la velocidad a la que la sucesión de sumas parciales se aproxima a la suma de la serie.

n	5	10	20	50	100
S_n					

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n(n+3)}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+4)}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} 2(0.9)^{n-1}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} 10\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

Encontrar la suma de una serie convergente En los ejercicios 25-34, encuentre la suma de la serie convergente.

25. $\sum_{n=0}^{\infty} 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$

26. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

29. $8 + 6 + \frac{3}{2} + \frac{37}{8} + \dots$

30. $9 - 3 + 1 - \frac{1}{3} + \dots$

31. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

32. $\sum_{n=0}^{\infty} [(0.3)^n + (0.8)^n]$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sec 1)^n$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 3n - 2}$

Usar una serie geométrica En los ejercicios 35-40, (a) escriba el decimal periódico como una serie geométrica, y (b) escriba su suma como el cociente de dos números enteros.

35. $0.\bar{4}$

36. $0.\overline{36}$

37. $0.\overline{81}$

38. $0.\overline{01}$

39. $0.07\overline{5}$

40. $0.2\overline{15}$

Determinar convergencia o divergencia En los ejercicios 41-54, determine la convergencia o divergencia de la serie.

41. $\sum_{n=0}^{\infty} (1.075)^n$

42. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{1000}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+10}{10n+1}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{3n-1}$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$

48. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{5^n}$

49. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n}$

50. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1}{n}$

51. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$

52. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$

54. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

55. Series Escriba las definiciones de series convergentes y divergentes.

56. Sucesiones y series Describa la diferencia entre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$.

DESARROLLO DE CONCEPTOS (continúa)

57. **Serie geométrica** Defina una serie geométrica, explique cuándo converge, y dé la fórmula para la suma de una serie geométrica convergente.

58. **Criterio del término n -ésimo para la divergencia** Escriba el criterio del término n -ésimo para la divergencia.

59. **Comparar series** Explique las diferencias entre las siguientes series.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} a_k$$

60. Usar una serie

(a) Si elimina un número finito de términos de una serie divergente, ¿La nueva serie aún diverge? Explique su razonamiento.

(b) Si agrega un número finito de términos a una serie convergente, ¿La nueva serie aún converge? Explique su razonamiento.

Hacer que una serie converja En los ejercicios 61-66, encuentre todos los valores de x para los cuales la serie converge. Para estos valores de x , escriba la suma de la serie como una función de x .

61. $\sum_{n=1}^{\infty} (3x)^n$

62. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{x}\right)^n$

63. $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n$

64. $\sum_{n=0}^{\infty} 5\left(\frac{x-2}{3}\right)^n$

65. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

66. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

Usar una serie geométrica En los ejercicios 67 y 68, (a) encuentre la razón común de la serie geométrica, (b) escriba la función que resulta de la suma de la serie, y (c) use una herramienta de graficación para trazar la función y las sumas parciales S_3 y S_5 . ¿Qué observa?

67. $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ 68. $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \dots$

Redacción En los ejercicios 69 y 70, utilice una herramienta de graficación para determinar el primer término que es inferior a 0.0001 en cada una de las series convergentes. Observe que las respuestas son muy diferentes. Explique cómo afectará esto la velocidad a la que la serie converge.

69. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n$ 70. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (0.01)^n$

71. **Marketing** Un fabricante de juegos electrónicos produce un nuevo producto y calcula que las ventas anuales serán de 8000 unidades. Cada año, el 5% de las unidades que se han vendido se convertirá en inoperante. De este manera, 8000 unidades estarán en uso después de 1 año, $[8000 + 0.95(8000)]$ unidades estarán en uso después de 2 años, y así sucesivamente. ¿Cuántas unidades estarán en uso después de n años?

72. **Depreciación** Una empresa compra una máquina de \$475,000 que se deprecia a una tasa del 30% anual. Encuentre una fórmula para el valor de la máquina después de n años. ¿Cuál es su valor después de 5 años?

73. Efecto multiplicador

El gasto anual total de los turistas en una ciudad turística es de \$200 millones. Aproximadamente el 75% de esos ingresos se gasta de nuevo en la ciudad turística, y de esa cantidad, aproximadamente el 75% se vuelve a gastar en la misma ciudad, y así sucesivamente. Escriba la serie geométrica que da la cantidad total de gasto generado por los \$200 millones y encuentre la suma de la serie.



74. **Efecto multiplicador** Repita el ejercicio 73, cuando el porcentaje de los ingresos que se vuelven a gastar en la ciudad disminuye a 60%.

75. **Distancia** Se deja caer una pelota desde una altura de 16 pies. Cada vez que cae h pies, rebota 0.81 h pies. Encuentre la distancia total recorrida por la pelota.

76. **Tiempo** La pelota en el ejercicio 75 tiene los siguientes tiempos para cada caída.

$$\begin{aligned} s_1 &= -16t^2 + 16, & s_1 &= 0 \text{ cuando } t = 1 \\ s_2 &= -16t^2 + 16(0.81), & s_2 &= 0 \text{ cuando } t = 0.9 \\ s_3 &= -16t^2 + 16(0.81)^2, & s_3 &= 0 \text{ cuando } t = (0.9)^2 \\ s_4 &= -16t^2 + 16(0.81)^3, & s_4 &= 0 \text{ cuando } t = (0.9)^3 \\ &\vdots & &\vdots \\ s_n &= -16t^2 + 16(0.81)^{n-1}, & s_n &= 0 \text{ cuando } t = (0.9)^{n-1} \end{aligned}$$

Comenzando con s_2 , a la pelota le toma la misma cantidad de tiempo rebotar hacia arriba que caer, por lo que el tiempo total transcurrido antes del reposo está dado por

$$t = 1 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (0.9)^n.$$

Encuentre este tiempo total.

Probabilidad En los ejercicios 77 y 78 la variable aleatoria representa el número de unidades de un producto vendido por día en una tienda. La distribución de probabilidad de n está dada por $P(n)$. Encuentre la probabilidad de que dos unidades se vendan en un día determinado $[P(2)]$ y demuestre que $P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + \dots = 1$.

77. $P(n) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 78. $P(n) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

79. **Probabilidad** Una moneda es lanzada en varias ocasiones. La probabilidad de que la primera cara se produzca en el n -ésimo lanzamiento está dada por $P(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, cuando $n \geq 1$.

(a) Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$.

(b) El número esperado de lanzamientos que se requiere hasta que se produce la primera cara en el experimento está dado por

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

¿Esta serie es geométrica?

(c) Utilice un sistema de álgebra computacional para hallar la suma del inciso (b).

80. **Probabilidad** En un experimento, tres personas lanzan una moneda de uno en uno hasta que uno de ellos arroja una cara. Determine, para cada persona, la probabilidad de que él o ella lance la primera cara. Compruebe que la suma de las tres probabilidades es 1.
81. **Área** Los lados de un cuadrado miden 16 pulgadas de largo. Un nuevo cuadrado se forma conectando los puntos medios de los lados del cuadrado original, y dos de los triángulos fuera del segundo cuadrado están sombreados (vea la figura). Determine el área de las regiones sombreadas (a) cuando este proceso se continúa cinco veces más, y (b) cuando este patrón de sombreado se continúa indefinidamente.

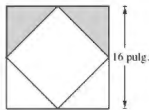


Figura para 81

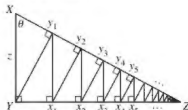


Figura para 82

82. **Longitud** Un triángulo rectángulo XYZ se muestra por encima de donde $|XY| = z$ y $\angle X = \theta$. Los segmentos de recta se dibujan continuamente perpendiculares al triángulo, como se muestra en la figura.
- (a) Halle la longitud total de los segmentos de recta perpendiculares $|y_1y_1| + |x_1y_1| + |x_2y_2| + \dots$ en términos de z y θ .
- (b) Encuentre la longitud total de los segmentos de recta perpendiculares cuando $z = 1$ y $\theta = \pi/6$.

Usar una serie geométrica En los ejercicios 83-86, utilice la fórmula para la suma parcial n -ésima de una serie geométrica

$$\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

83. **Valor presente** Al ganador de un sorteo de 2,000,000 de dólares le pagarán \$100,000 por año durante 20 años. El dinero gana intereses del 6% anual. El valor presente del premio es $\sum_{n=1}^{20} 100,000 \left(\frac{1}{1.06} \right)^n$. Calcule el valor presente e interprete su significado.
84. **Anualidades** Cuando un empleado recibe su cheque de pago al final de cada mes, invierte P dólares en una cuenta de jubilación. Estos depósitos se realizan cada mes para t años y la cuenta gana intereses a la tasa anual r . Como el interés se capitaliza mensualmente, la cantidad A en la cuenta al final de t años es

$$\begin{aligned} A &= P + P \left(1 + \frac{r}{12} \right) + \dots + P \left(1 + \frac{r}{12} \right)^{12t-1} \\ &= P \left(\frac{12}{r} \right) \left[\left(1 + \frac{r}{12} \right)^{12t} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Cuando el interés es compuesto continuamente, la cantidad A en la cuenta después de t años es

$$\begin{aligned} A &= P + P e^{r/12} + P e^{2r/12} + P e^{(12t-1)r/12} \\ &= \frac{P(e^{rt} - 1)}{e^{r/12} - 1}. \end{aligned}$$

Verifique las fórmulas para las sumas dadas anteriormente.

Cortesía de Eric Haines

85. **Sueldo** Suponga que se trabaja en una empresa que paga \$0.01 para el primer día, \$0.02 para el segundo día, \$0.04 para el tercer día, y así sucesivamente. Si el salario se duplica diariamente, ¿cuál sería su ingreso total por trabajar (a) 29 días, (b) 30 días, y (c) 31 días?

86. **Copo esférico**
- El copo esférico que se muestra a continuación es un fractal generado por computadora que fue creado por Eric Haines. El radio de la esfera grande es 1. Para la esfera grande, se unen nueve esferas de radio $\frac{1}{2}$. Para cada una de estas, se unen nueve esferas de radio $\frac{1}{4}$. Este proceso continúa infinitamente. Demuestre que el copo esférico tiene una superficie infinita.



Anualidades En los ejercicios 87-90, considere hacer depósitos mensuales de P dólares en una cuenta de ahorros a una tasa de interés anual r . Utilice los resultados del ejercicio 84 para encontrar el saldo A después de t años, cuando el interés es compuesto (a) mensualmente y (b) de forma continua.

87. $P = \$45$, $r = 3\%$, $t = 20$ años

88. $P = \$75$, $r = 5.5\%$, $t = 25$ años

89. $P = \$100$, $r = 4\%$, $t = 35$ años

90. $P = \$30$, $r = 6\%$, $t = 50$ años

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 91-96, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

91. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

92. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L + a_0$.

93. Si $|r| < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$.

94. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000(n+1)}$ diverge.

95. $0.75 = 0.749999 \dots$

96. Cada decimal con un patrón de repetición de dígitos es un número racional.

97. Usar series divergentes Encuentre dos series divergentes $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tal que $\sum(a_n + b_n)$ converja.
98. Demostración Dadas dos series infinitas $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tal que $\sum a_n$ converge y $\sum b_n$ diverge, demuestre que $\sum(a_n + b_n)$ diverge.
99. Sucesión de Fibonacci La sucesión de Fibonacci se define de forma recursiva por $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, donde $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$.

(a) Demuestre que $\frac{1}{a_{n+1} a_{n+3}} = \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}} - \frac{1}{a_{n+2} a_{n+3}}$.

(b) Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1} a_{n+3}} = 1$.

100. Residuo Sea $\sum a_n$ una serie convergente, y sea

$$R_N = a_{N+1} + a_{N+2} + \dots$$

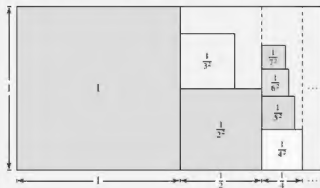
el residuo de la serie después de los primeros N términos. Demuestre que $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0$.

101. Demostración Demuestre que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \dots = \frac{1}{r-1}$, para $|r| > 1$.



102. ¿CÓMO LO VE? La siguiente figura representa una manera informal de demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$.

Explique cómo la figura implica esta conclusión.



■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para más información sobre este ejercicio, consulte el artículo "Convergence with Pictures", por P. J. Rippon, en *American Mathematical Monthly*.

DESAÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

103. Expresar $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{6^i}{(3^{i+1} - 2^{i+1})(3^i - 2^i)}$ como un número racional.
104. Sea $f(n)$ la suma de los primeros n términos de la sucesión 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, ... donde el n -ésimo está dado por

$$a_n = \begin{cases} n/2, & \text{si } n \text{ es par} \\ (n-1)/2, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Mostrar que si x y y son enteros positivos y $x > y$, entonces

$$xy = f(x+y) - f(x-y).$$

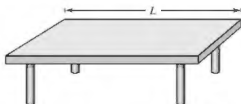
Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

PROYECTO DE TRABAJO

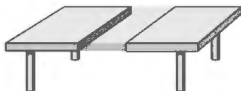
La mesa que desaparece de Cantor

El procedimiento siguiente muestra cómo hacer desaparecer una mesa quitando solo la mitad de la mesa.

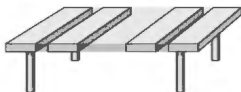
- (a) La mesa original tiene una longitud de L .



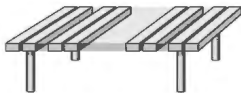
- (b) Se elimina $\frac{1}{4}$ de la mesa con centro en el punto medio. Cada pieza restante tiene una longitud que es menor que $\frac{1}{2}L$.



- (c) Se elimina $\frac{1}{8}$ de la mesa tomando secciones de longitud $\frac{1}{16}L$ de los centros de cada una de las dos piezas restantes. Ahora se ha eliminado $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ de la mesa. Cada pieza restante tiene una longitud que es menor que $\frac{3}{8}L$.



- (d) Se elimina $\frac{1}{16}$ de la mesa tomando secciones de longitud $\frac{1}{32}L$ de los centros de cada una de las cuatro piezas restantes. Ahora se ha eliminado $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ de la mesa. Cada pieza restante tiene una longitud que es menor que $\frac{7}{16}L$.



Continuar con este proceso hará que la mesa desaparezca, ¿a pesar de que solo se ha quitado la mitad de la mesa? ¿Por qué?

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Lea el artículo "Cantor's Disappearing Table", de Larry E. Knop, en *The College Mathematics Journal*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

4.3 Criterio de la integral y series p

- Utilizar el criterio de la integral para determinar si una serie infinita converge o diverge.
- Utilizar las propiedades de la serie p y la serie armónica.

Criterio de la integral

En esta y en la siguiente sección, se estudiarán varios criterios de convergencia que se aplican a series con términos positivos.

TEOREMA 4.10 El criterio de la integral

Si f es positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$ y $a_n = f(n)$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \int_1^{\infty} f(x) dx$$

ya sea ambas convergen o ambas divergen.

Demostración Comience dividiendo el intervalo $[1, n]$ en intervalos unitarios $(n-1)$, como se muestra en la figura 4.8. La superficie total de los rectángulos inscritos y los rectángulos circunscritos es

$$\sum_{i=2}^n f(i) = f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \quad \text{Área inscrita}$$

y

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1). \quad \text{Área circunscrita}$$

El área exacta debajo de la gráfica de f de $x=1$ a $x=n$ se encuentra entre las áreas inscritas y circunscritas.

$$\sum_{i=2}^n f(i) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

Usando la suma parcial n -ésima, $S_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$, se puede escribir esta desigualdad como

$$S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq S_{n-1}.$$

Ahora, suponiendo que $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge a L , se puede deducir que para $n \geq 1$

$$S_n - f(1) \leq L \quad \Rightarrow \quad S_n \leq L + f(1).$$

En consecuencia, $\{S_n\}$ es acotada y monótona, y por el teorema 4.5 converge. Por tanto, $\sum a_n$ converge. Para la otra dirección de la prueba, suponga que la integral impropia diverge. Entonces $\int_1^n f(x) dx$ tiende a infinito cuando $n \rightarrow \infty$ y la desigualdad $S_{n-1} \geq \int_1^n f(x) dx$ implica que $\{S_n\}$ diverge. Por tanto, $\sum a_n$ diverge.

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

Recuerde que la convergencia o divergencia de $\sum a_n$ no se ve afectada por la supresión de los N primeros términos. Del mismo modo, cuando las condiciones para el criterio de la integral están satisfechos para todo $x \geq N > 1$, se puede simplemente usar la integral $\int_N^{\infty} f(x) dx$ para probar la convergencia o divergencia. (Esto se ilustra en el ejemplo 4.)

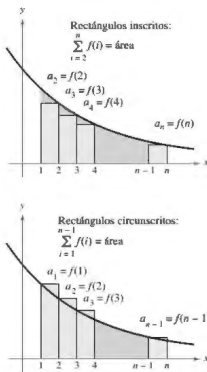


Figura 4.8

EJEMPLO 1 Usar el criterio de la integral

Aplice el criterio de la integral a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$.

Solución La función $f(x) = x/(x^2 + 1)$ es positiva y continua para $x \geq 1$. Para determinar si f es decreciente, encuentre la derivada.

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)(1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

Por tanto, $f'(x) < 0$ para $x > 1$ y se tiene que f satisface las condiciones para el criterio de la integral. Se puede integrar para obtener

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln(x^2 + 1) \right]_1^b \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(b^2 + 1) - \ln 2] \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, la serie *diverge*.

EJEMPLO 2 Usar el criterio de la integral

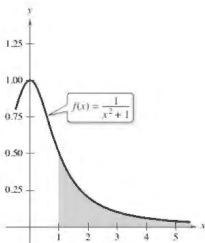
•••► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Aplice el criterio de la integral a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

Solución Debido a que $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ satisface las condiciones para el criterio de la integral (verifique esto), se puede integrar para obtener

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\arctan x \right]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan b - \arctan 1) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Por tanto, la serie *converge* (vea la figura 4.9).



Debido a que la integral impropia converge, la serie infinita converge también.

Figura 4.9

En el ejemplo 2, el hecho de que la integral impropia converge a $\pi/4$ no implica que la serie infinita converga a $\pi/4$. Para aproximar la suma de la serie, se puede utilizar la desigualdad

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2 + 1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2 + 1} + \int_N^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx.$$

(Vea el ejercicio 54.) Cuanto mayor sea el valor de N , mejor será la aproximación. Por ejemplo, utilizando $N = 200$ se obtiene $1.072 \leq \sum 1/(n^2 + 1) \leq 1.077$.

SERIE ARMÓNICA

Pitágoras y sus estudiantes prestaron mucha atención al desarrollo de la música como una ciencia abstracta. Esto condujo al descubrimiento de la relación entre el tono y la longitud de una cuerda vibrante. Se observó que las más bellas armonías musicales corresponden a las proporciones más simples de números enteros. Matemáticos posteriores desarrollaron esta idea en la serie armónica, donde las condiciones en las series armónicas corresponden a los nodos de una cuerda vibrante que producen múltiplos de la frecuencia fundamental. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ es dos veces la frecuencia fundamental, $\frac{1}{3}$ es tres veces la frecuencia fundamental, y así sucesivamente.

Serie p y serie armónica

En el resto de esta sección, se investigará un segundo tipo de serie que tiene una prueba de aritmética simple para la convergencia o divergencia. Una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots \quad \text{Serie-}p$$

es una **serie p** , donde p es una constante positiva. Para $p = 1$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \quad \text{Serie armónica}$$

es la serie **armónica**. Una serie **armónica general** es de la forma $\sum 1/(an + b)$. En la música, cuerdas del mismo material, diámetro y tensión, y cuyas longitudes forman una serie armónica, producen tonos armónicos.

El criterio de la integral es conveniente para el establecimiento de la convergencia o divergencia de series. Esto se muestra en la demostración del teorema 4.11.

TEOREMA 4.11 Convergencia de una serie p

La serie p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

converge para $p > 1$, y diverge para $0 < p \leq 1$.

Demostración La demostración se sigue del criterio de la integral y del teorema 2.5, que establece que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

converge para $p > 1$ y diverge para $0 < p \leq 1$.

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

EJEMPLO 3 Convergencia y divergencia de una serie p

Analicé la convergencia o divergencia de (a) la serie armónica y (b) la serie p con $p = 2$.

Solución

a. Del teorema 4.11, se deduce que la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \quad p = 1$$

diverge.

b. Del teorema 4.11, se deduce que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \quad p = 2$$

converge. ■

La suma de la serie en el ejemplo 3(b) se puede demostrar que es $\pi^2/6$. (Esto fue demostrado por Leonhard Euler, pero la demostración es demasiado difícil para presentarla aquí.) Asegúrese de ver que el criterio de la integral no le indica que la suma de la serie es igual al valor de la integral. Por ejemplo, la suma de la serie en el ejemplo 3(b) es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$$

mientras que el valor de la integral impropia correspondiente es

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

EJEMPLO 4 Prueba de la convergencia de una serie

Determine si la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

converge o diverge.

Solución Esta serie es similar a la serie armónica divergente. Si sus términos fueran mayores que los de la serie armónica, se puede esperar que diverja. Sin embargo, debido a que sus términos son menores que los de la serie armónica, no se sabe qué esperar. La función

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

es positiva y continua para $x \geq 2$. Para determinar si f es decreciente, primero escriba f como

$$f(x) = (x \ln x)^{-1}$$

y después encuentre su derivada.

$$f'(x) = (-1)(x \ln x)^{-2}(1 + \ln x) = -\frac{1 + \ln x}{x^2(\ln x)^2}$$

Así, $f'(x) < 0$ para $x > 2$ y se deduce que satisface las condiciones para el criterio de la integral.

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx &= \int_2^{\infty} \frac{1/x}{\ln x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln(\ln x) \right]_2^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)] \\ &= \infty \end{aligned}$$

La serie diverge. ■

Observe que la serie infinita en el ejemplo 4 diverge muy lentamente. Por ejemplo, como se muestra en la tabla, la suma de los primeros 10 términos es de aproximadamente 1.6878196, mientras que la suma de los primeros 100 términos es solo ligeramente mayor: 2.3250871. De hecho, la suma de los primeros 10,000 términos es aproximadamente 3.0150217. Se puede ver que aunque la serie infinita “se suma al infinito”, lo hace muy lentamente.

n	11	101	1001	10,001	100,001
S_n	1.6878	2.3251	2.7275	3.0150	3.2382

4.3 Ejercicios

Consulta CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Usar el criterio de la integral En los ejercicios 1-22, confirme el criterio de la integral puede ser aplicado a la serie. Luego utilice el criterio de la integral para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n+5}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n/2}$
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{26} + \dots$
- $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \dots$
- $\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \frac{\ln 5}{5} + \frac{\ln 6}{6} + \dots$
- $\frac{\ln 2}{\sqrt{2}} + \frac{\ln 3}{\sqrt{3}} + \frac{\ln 4}{\sqrt{4}} + \frac{\ln 5}{\sqrt{5}} + \frac{\ln 6}{\sqrt{6}} + \dots$
- $\frac{1}{\sqrt{1(\sqrt{1}+1)}} + \frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}} + \frac{1}{\sqrt{3(\sqrt{3}+1)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(\sqrt{n}+1)}} + \dots$
- $\frac{1}{4} + \frac{2}{7} + \frac{3}{12} + \dots + \frac{n}{n^2+3} + \dots$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^3}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{2n^2+1}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+2n^2+1}$

Usar el criterio de la integral En los ejercicios 23 y 24, utilice el criterio de la integral para determinar la convergencia o divergencia de la serie, donde k es un entero positivo.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n^k+c}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} n^k e^{-n}$

Requisitos del criterio de la integral En los ejercicios 25-28, explique por qué el criterio de la integral no se aplica a la serie.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \cos n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin n}{n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2$

Usar el criterio de la integral En los ejercicios 29-32, utilice el criterio de la integral para determinar la convergencia o divergencia de la serie p .

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

Usar una serie p En los ejercicios 33-38, utilice el teorema 4.11 para determinar la convergencia o divergencia de la serie p .

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^{5/3}}$
- $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \dots$
- $1 + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{9}} + \frac{1}{\sqrt{16}} + \frac{1}{\sqrt[4]{25}} + \dots$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.04}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi}}$

39. Análisis numérico y gráfico Use una herramienta de graficación para encontrar la suma parcial S_n indicada y complete la tabla. Después, utilice una herramienta de graficación para trazar los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales. Para cada serie, compare la velocidad a la que la sucesión de sumas parciales se aproxima a la suma de la serie.

n	5	10	20	50	100
S_n					

- $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{15}{4}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

40. Razonamiento numérico Debido a que la serie armónica diverge, se deduce que para cualquier número real positivo M , existe un número entero positivo N tal que la suma parcial

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} > M.$$

- Utilice una herramienta de graficación para completar la tabla.

M	2	4	6	8
N				

- A medida que el número real M aumenta en incrementos iguales, ¿el número N aumenta en incrementos iguales? Explique.

DESARROLLO DE CONCEPTOS

41. **Criterio de la integral** Escriba el criterio de la integral y dé un ejemplo de su uso.

42. **Serie p** Defina una serie p e indique los requisitos para su convergencia.

43. **Usar una serie** Un compañero en su clase de cálculo le indica que la siguiente serie converge porque los términos son muy pequeños y se aproxima a 0 rápidamente. ¿Su compañero está en lo correcto? Explique.

$$\frac{1}{10,000} + \frac{1}{10,001} + \frac{1}{10,002} + \dots$$

44. **Usar una función** Sea f una función positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$, tal que $a_n = f(n)$. Use una gráfica para clasificar las siguientes cantidades en orden decreciente. Explique su razonamiento.

$$(a) \sum_{n=2}^7 a_n \quad (b) \int_1^7 f(x) dx \quad (c) \sum_{n=1}^6 a_n$$

45. **Usar una serie** Utilice una gráfica para demostrar que la desigualdad es verdadera. ¿Qué puede concluir acerca de la convergencia o divergencia de la serie? Explique.

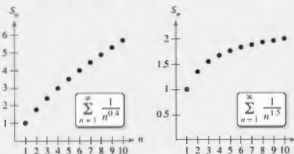
$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} > \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$



46. **¿CÓMO LO VE?** Las gráficas muestran las sucesiones de sumas parciales de la serie p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.4}} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.3}}$$

Usando el teorema 4.11, la primera serie diverge y la segunda serie converge. Explique cómo las gráficas muestran esto.



Encontrar valores En los ejercicios 47-52, encuentre los valores positivos de p para los que la serie converge.

47. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

48. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

49. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+n^2)^p}$

50. $\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$

51. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{p}\right)^n$

52. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^p}$

53. **Demostración** Sea f una función positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$, tal que $a_n = f(n)$. Demuestre que si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge a S , entonces el residuo $R_N = S - S_N$ está acotado por

$$0 \leq R_N \leq \int_N^{\infty} f(x) dx.$$

54. **Usar un residuo** Demuestre que el resultado del ejercicio 53 se puede escribir como

$$\sum_{n=1}^N a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^N a_n + \int_N^{\infty} f(x) dx.$$

Aproximar una suma En los ejercicios 55-60, utilice el resultado del ejercicio 53 para aproximar la suma de la serie convergente con el número indicado de términos. Incluya una estimación del error máximo para su aproximación.

55. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, cinco términos

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, seis términos

57. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$, diez términos

58. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)[\ln(n+1)]^2}$, diez términos

59. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$, cuatro términos

60. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$, cuatro términos

Encontrar un valor En los ejercicios 61-64, utilice el resultado del ejercicio 53 para encontrar N tal que $R_N \leq 0.001$ para la serie convergente.

61. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/2}}$

63. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n/2}$

64. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$

65. **Comparar series**

(a) Demuestre que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1}}$ converge y $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

(b) Compare los cinco primeros términos de cada serie en el inciso (a).

(c) Encuentre $n > 3$ tal que $\frac{1}{n^{1.1}} < \frac{1}{n \ln n}$.

66. **Usar una serie p** Se utilizan diez términos para aproximar una serie p convergente. Por lo tanto, el residuo es una función de p y es

$$0 \leq R_{10}(p) \leq \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^p} dx, \quad p > 1.$$

(a) Realice la integración en la desigualdad.

(b) Utilice una herramienta de graficación para representar la desigualdad.

(c) Identifique las asíntotas de la función de error e interprete su significado.

67. Constante de Euler Sea

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

- (a) Demuestre que $\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$.
 (b) Demuestre que la sucesión $\{a_n\} = \{S_n - \ln n\}$ es acotada.
 (c) Demuestre que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.
 (d) Demuestre que a_n converge a un límite γ (llamado constante de Euler).
 (e) Aproxime γ usando a_{100} .

68. Hallar una suma Encuentre la suma de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

69. Usar una serie Considere la serie $\sum_{n=2}^{\infty} x^{\ln n}$.

- (a) Determine la convergencia o divergencia de la serie para $x = 1$.
 (b) Determine la convergencia o divergencia de la serie para $x = 1/e$.
 (c) Encuentre los valores positivos de x para los cuales la serie converge.

70. Función zeta de Riemann La función zeta de Riemann para los números reales se define para todos los x para los cuales la serie

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$$

converge. Encuentre el dominio de la función.

Repaso En los ejercicios 71-82, determine la convergencia o divergencia de la serie.

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$

72. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

73. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$

74. $3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.95}}$

75. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

76. $\sum_{n=0}^{\infty} (1.042)^n$

77. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

78. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)$

79. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

80. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln n$

81. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

82. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

PROYECTO DE TRABAJO

La serie armónica

La serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

es una de las series más importantes en este capítulo. A pesar de que sus términos tienden a cero cuando n crece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

la serie armónica diverge. En otras palabras, a pesar de que las condiciones son cada vez más y más pequeñas, la suma "suma al infinito".

(a) Una manera de demostrar que la serie armónica diverge se atribuye a James Bernoulli. Los términos de la serie armónica se agrupan de la siguiente manera:

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{> \frac{1}{2}} + \cdots$$

$$\underbrace{\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32}}_{> \frac{1}{2}} + \cdots$$

Escriba un breve párrafo explicando cómo se puede utilizar este agrupamiento para demostrar que la serie armónica diverge.

(b) Utilice el criterio de la integral, teorema 4.10, para demostrar que

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln n.$$

(c) Use el inciso (b) para determinar la cantidad de términos M que se necesita para que

$$\sum_{n=1}^M \frac{1}{n} > 50.$$

(d) Demuestre que la suma del primer millón de términos de la serie armónica es menor que 15.

(e) Demuestre que las siguientes desigualdades son válidas.

$$\ln \frac{21}{10} \leq \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{20} \leq \ln \frac{20}{9}$$

$$\ln \frac{201}{100} \leq \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \cdots + \frac{1}{200} \leq \ln \frac{200}{99}$$

(f) Utilice las desigualdades en el inciso (e) para encontrar el límite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{2m} \frac{1}{n}$$

4.4 Comparación de series

- Utilizar el criterio de comparación directa para determinar si una serie converge o diverge.
- Utilizar el criterio de comparación del límite para determinar si una serie converge o diverge.

Criterio de comparación directa

Para los criterios de convergencia desarrollados hasta ahora, los términos de la serie tienen que ser bastante simples y la serie debe tener características especiales para que los criterios de convergencia puedan aplicarse. Una ligera desviación de estas características especiales puede hacer un criterio no aplicable. Por ejemplo, en los pares que se indican a continuación, la segunda serie no puede ser probada por el mismo criterio de convergencia como la primera serie, a pesar de que es similar a la primera.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es geométrica, pero $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ no lo es.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es una serie p , pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ no lo es.
3. $a_n = \frac{n}{(n^2 + 3)^2}$ se puede integrar fácilmente, pero $b_n = \frac{n^2}{(n^2 + 3)^2}$ no.

En esta sección se estudiarán dos criterios adicionales para la serie de términos positivos. Estos dos criterios amplían la variedad de series en las que se puede analizar la convergencia o divergencia. Estos criterios le permiten *comparar* una serie con términos complicados con una serie simple cuya convergencia o divergencia se conoce.

.....▶
 * * * COMENTARIO Como se dijo, el criterio de comparación directa requiere que $0 < a_n \leq b_n$ para todo n . Como la convergencia de una serie no depende de sus primeros términos, se podría modificar la prueba para que solo fuera necesario que $0 < a_n \leq b_n$ para todo n mayor que algún número entero N .

TEOREMA 4.12 Prueba de comparación directa

Sea $0 < a_n \leq b_n$ para todo n .

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Demostración Para demostrar la primera propiedad, sea $L = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y sea $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Ya que $0 < a_n \leq b_n$ la sucesión S_1, S_2, S_3, \dots es no decreciente y acotada por arriba por L ; entonces, debe converger. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

se deduce que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. La segunda propiedad es lógicamente equivalente a la primera.

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de Bruce Edwards de esta prueba.

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** ¿El criterio de comparación directa es solo para la serie no negativa? Para leer acerca de la generalización de este criterio para series reales, vea el artículo "The Comparison Test—Not Just for Nonnegative Series", por Michele Longo y Vincenzo Valori, en *Mathematics Magazine*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

EJEMPLO 1**Usar el criterio de comparación directa**

Determine la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 + 3^n}.$$

Solución Esta serie se parece a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \quad \text{Serie geométrica convergente}$$

Comparando término a término obtiene

$$a_n = \frac{1}{2 + 3^n} < \frac{1}{3^n} = b_n, \quad n \geq 1.$$

Así, por el criterio de comparación directa, la serie converge.

EJEMPLO 2**Usar el criterio de comparación directa**

Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Determine la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 + \sqrt{n}}.$$

Solución Esta serie se parece a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}. \quad \text{Serie } p \text{ divergente}$$

Comparando término a término obtiene

$$\frac{1}{2 + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1$$

que *no* cumple con los requisitos para la divergencia. (Recuerde que cuando la comparación término a término revela una serie que es menor que una serie divergente, el criterio de comparación directa no le dice nada.) Todavía esperando que la serie diverja, puede comparar la serie con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \quad \text{Serie armónica divergente}$$

En este caso, la comparación término a término produce

$$a_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2 + \sqrt{n}} = b_n, \quad n \geq 4$$

y, por el criterio de comparación directa, la serie dada diverge. Para verificar la última desigualdad, intente demostrar que

$$2 + \sqrt{n} \leq n$$

siempre que $n \geq 4$

Recuerde que las dos partes del criterio de comparación directa requieren que $0 < a_n \leq b_n$. Informalmente, el criterio dice lo siguiente acerca de las dos series de términos no negativos.

1. Si la serie "más grande" converge, entonces la serie "más pequeña" también debe converger.
2. Si la serie "más pequeña" diverge, entonces la serie "más grande" debe también divergir.

Criterio de comparación del límite

En ocasiones, una serie se parece mucho a una serie p o una serie geométrica; sin embargo, no se puede establecer la comparación término a término necesaria para aplicar el criterio de comparación directa. Bajo estas circunstancias, es posible que se pueda aplicar un segundo criterio de comparación, llamado **criterio de comparación del límite**.

TEOREMA 4.13 Criterio de comparación del límite

Si $a_n > 0$, $b_n > 0$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

donde L es finito y positivo, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ambas convergen o divergen.

Demostración Como $a_n > 0$, $b_n > 0$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

existe $N > 0$ tal que

$$0 < \frac{a_n}{b_n} < L + 1, \quad \text{para } n \geq N.$$

Esto implica que

$$0 < a_n < (L + 1)b_n.$$

Así, por el criterio de comparación directa, la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$. Del mismo modo, el hecho de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{L}$$

que puede ser utilizado para demostrar que la convergencia de $\sum a_n$ implica la convergencia de $\sum b_n$.

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

EJEMPLO 3 Usar el criterio de comparación del límite

Demuestre que la siguiente serie armónica general diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an + b}, \quad a > 0, \quad b > 0$$

Solución Por comparación

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{Serie armónica divergente}$$

tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(an + b)}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{an + b} = \frac{1}{a}.$$

Debido a que este límite es mayor que 0, puede concluir a partir del criterio de comparación del límite que la serie diverge. ■

.....▶
 ..•••••
COMENTARIO Al igual que con el criterio de comparación directa, el criterio de comparación del límite podría modificarse para requerir que solo a_n y b_n sean positivos para todo n mayor que algún número entero N .

El criterio de comparación del límite funciona bien para la comparación de una “desordenada” serie algebraica con una serie p . En la elección de una serie p apropiada, se debe elegir una con un término de la misma magnitud que el término n -ésimo de la serie dada.

Serie dada	Serie de comparación	Conclusión
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - 4n + 5}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$	Ambas series convergen.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$	Ambas series divergen.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 10}{4n^5 + n^3}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$	Ambas series convergen.

En otras palabras, al momento de elegir una serie de comparación, puede descartar todas, excepto las potencias más altas de n en el numerador y el denominador.

EJEMPLO 4 Usar el criterio de comparación del límite

Determine la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}.$$

Solución Descarte todas, excepto las potencias más altas de n en el numerador y el denominador, puede comparar la serie con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}. \quad \text{Serie } p \text{ convergente}$$

Debido a que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} \right) \left(\frac{n^{3/2}}{1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

puede concluir por el criterio de comparación del límite, que la serie converge.

EJEMPLO 5 Usar el criterio de comparación del límite

Demuestre que la siguiente serie armónica general diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{4n^3 + 1}.$$

Solución Una comparación razonable será comparar con las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}. \quad \text{Serie armónica divergente}$$

Observe que estas series divergen según el criterio del término n -ésimo. Del límite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n2^n}{4n^3 + 1} \right) \left(\frac{n^2}{2^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4 + (1/n^3)} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

puede concluir que la serie diverge. ■

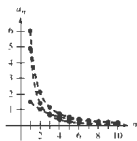
4.4 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

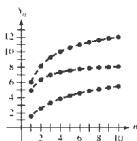
1. **Análisis gráfico** Las figuras muestran las gráficas de los 10 primeros términos, y las gráficas de los 10 primeros términos de la sucesión de sumas parciales, de cada serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^{2/3}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^{3/2} + 3} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n\sqrt{n^2 + 0.5}}$$

- (a) Identifique la serie en cada figura.
 (b) ¿Qué serie es una serie p ? ¿Es convergente o divergente?
 (c) Para las series que no son una serie p , ¿cómo se comparan las magnitudes de los términos con las magnitudes de los términos de la serie p ? ¿Qué conclusión se puede obtener acerca de la convergencia o divergencia de la serie?
 (d) Explique la relación entre las magnitudes de los términos de la serie y las magnitudes de los términos de las sumas parciales.



Gráficas de términos

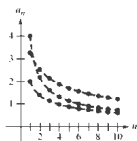


Gráficas de las sumas

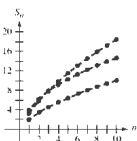
2. **Análisis gráfico** Las figuras muestran las gráficas de los 10 primeros términos, y las gráficas de los 10 primeros términos de la sucesión de sumas parciales, de cada serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n} - 0.5} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{n} + 0.5}$$

- (a) Identifique la serie en cada figura.
 (b) ¿Qué serie es una serie p ? ¿Es convergente o divergente?
 (c) Para las series que no son una serie p , ¿cómo se comparan las magnitudes de los términos con las magnitudes de los términos de la serie p ? ¿Qué conclusión puede obtener sobre la convergencia o divergencia de la serie?
 (d) Explique la relación entre las magnitudes de los términos de la serie y las magnitudes de los términos de las sumas parciales.



Gráficas de términos



Gráficas de las sumas parciales

Usar el criterio de comparación directa En los ejercicios 3-12, utilice el criterio de comparación directa para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

$$\begin{array}{ll} 3. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n-1} & 4. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3n^2+2} \\ 5. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1} & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n+3} \\ 7. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n+1} & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \\ 9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} & 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt{n}-1} \\ 11. \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} & 12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n-1} \end{array}$$

Usar el criterio de comparación del límite En los ejercicios 13-22, utilice el criterio de comparación del límite para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

$$\begin{array}{ll} 13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} & 14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4^n+1} \\ 15. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} & 16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{5^n+1} \\ 17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{3n^2+2n+1} & 18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2+3)} \\ 19. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}} & 20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^{n-1}} \\ 21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n^k+1}, \quad k > 2 & 22. \sum_{n=1}^{\infty} \sec \frac{1}{n} \end{array}$$

Determinar convergencia o divergencia En los ejercicios 23-30, pruebe la convergencia o divergencia, utilizando cada criterio al menos una vez. Identifique el criterio que utilizó.

- (a) Criterio del término n -ésimo (b) Criterio de la serie geométrica
 (c) Criterio de la serie p (d) Criterio de la serie telescópica
 (e) Criterio de la integral (f) Criterio de comparación directa
 (g) Criterio de comparación del límite

$$\begin{array}{ll} 23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n} & 24. \sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(-\frac{4}{3} \right)^n \\ 25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n+1} & 26. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-8} \\ 27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n-2} & 28. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ 29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^2} & 30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)} \end{array}$$

31. **Usar el criterio de comparación del límite** Use el criterio de comparación del límite con la serie armónica para demostrar que la serie $\sum a_n$ (donde $0 < a_n < a_{n+1}$) diverge cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ es finito y distinto de cero.

32. **Demostración** Demuestre que si $P(n)$ y $Q(n)$ son polinomios de grado j y k , respectivamente, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$$

converge si $j < k - 1$ y diverge si $j \geq k - 1$.

Determinar convergencia o divergencia En los ejercicios 33-36, utilice el criterio del polinomio dado en el ejercicio 32 para determinar si lo serie converge o diverge.

33. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + \frac{5}{26} + \dots$

34. $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{13} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \dots$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$

Comprobar divergencia En los ejercicios 37 y 38, utilice el criterio de la divergencia dado en el ejercicio 31 para demostrar que la serie diverge.

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5n^4 + 3}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 1}{4n^3 + 2}$

Determinar convergencia o divergencia En los ejercicios 39-42, determine la convergencia o divergencia de la serie.

39. $\frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \frac{1}{600} + \frac{1}{800} + \dots$

40. $\frac{1}{200} + \frac{1}{210} + \frac{1}{220} + \frac{1}{230} + \dots$

41. $\frac{1}{201} + \frac{1}{204} + \frac{1}{209} + \frac{1}{216} + \dots$

42. $\frac{1}{201} + \frac{1}{208} + \frac{1}{227} + \frac{1}{264} + \dots$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

43. **Usar series** Revise los resultados de los ejercicios 39 a 42. Explique por qué se requiere un análisis cuidadoso para determinar la convergencia o divergencia de una serie y por qué solo considerar las magnitudes de los términos de una serie podría ser engañoso.
44. **Criterio de comparación directa** Escriba el criterio de comparación directa y dé un ejemplo de su uso.
45. **Criterio de comparación de límite** Escriba el criterio de comparación del límite y dé un ejemplo de su uso.
46. **Comparación de series** Parece que los términos de la serie

$$\frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \dots$$

son menores que los términos correspondientes de la serie convergente

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

Si la afirmación anterior es correcta, entonces la primera serie converge. ¿Es esto correcto? ¿Por qué sí o por qué no? Escriba un enunciado sobre cómo se ve afectada la divergencia o convergencia de una serie por la inclusión o exclusión del primer número finito de términos.

47. **Usar una serie** Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

- (a) Verifique que la serie converge.
 (b) Utilice una herramienta de graficación para completar la tabla.

n	5	10	20	50	100
S_n					

- (c) La suma de la serie es $\pi^2/8$. Encuentre la suma de la serie

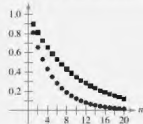
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

- (d) Utilice una herramienta de graficación para hallar la suma de la serie

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$



¿CÓMO LO VE? La figura muestra los 20 primeros términos de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y los 20 primeros términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Identifique las dos series y explique su razonamiento en la selección.



¿Verdadero o falso? En los ejercicios 49-54, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

49. Si $0 < a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.
50. Si $0 < a_{n+10} \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
51. Si $a_n + b_n \leq c_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ambos convergen. (Suponga que los términos de las tres series son positivos.)
52. Si $a_n \leq b_n + c_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ambas divergen. (Suponga que los términos de las tres series son positivos.)
53. Si $0 < a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.
54. Si $0 < a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

- 55.
- Demostración**
- Demuestre que si las series no negativas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

convergen, entonces, lo mismo ocurre con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

- 56.
- Demostración**
- Utilice el resultado del ejercicio 55 para demostrar que si la serie no negativa
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
- converge, entonces también lo hace la serie
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$
- .

- 57.
- Encontrar una serie**
- Encuentre dos series que demuestren el resultado del ejercicio 55.

- 58.
- Encontrar una serie**
- Encuentre dos series que demuestren el resultado del ejercicio 56.

- 59.
- Demostración**
- Suponga que
- $\sum a_n$
- y
- $\sum b_n$
- son series con términos positivos. Demuestre que si
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
- y
- $\sum b_n$
- converge,
- $\sum a_n$
- también converge.

- 60.
- Demostración**
- Suponga que
- $\sum a_n$
- y
- $\sum b_n$
- son series con términos positivos. Demuestre que si
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$
- y
- $\sum b_n$
- diverge,
- $\sum a_n$
- también diverge.

- 61.
- Verificar convergencia**
- Utilice el resultado del ejercicio 59 para demostrar que cada serie converge.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} n^{\pi}}$$

- 62.
- Verificar convergencia**
- Utilice el resultado del ejercicio 60 para demostrar que cada serie diverge.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$(b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

- 63.
- Demostración**
- Suponga que
- $\sum a_n$
- es una serie de términos positivos. Demuestre que si
- $\sum a_n$
- converge, entonces
- $\sum \sin a_n$
- también converge.

- 64.
- Demostración**
- Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$$

converge.

- 65.
- Comparar series**
- Demuestre que
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n \sqrt{n}}$
- converge en comparación con
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}}$
- .

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

66. ¿La serie infinita
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^n}$
- es convergente? Demuestre su respuesta.

67. Demuestre que si
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
- es una serie convergente de números reales positivos, entonces también lo es
- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^{n/(n+1)}$
- .

Estos problemas fueron preparados por el Committee on Prize Putnam Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

PROYECTO DE TRABAJO

Método de la solera

La mayoría de los vinos se produce con uvas cultivadas en un solo año. Sin embargo, Sherry, es una mezcla compleja de vinos mayores con nuevos vinos. Esto se hace con una secuencia de barriles (llamados solera) apilados uno sobre otro, como se muestra en la foto.



El vino más antiguo está en los barriles del nivel inferior, y el más reciente está en el nivel superior. Cada año, la mitad de cada barril en el nivel inferior se embotella como vino de Jerez. Los barriles inferiores son luego rellenados con el vino de las barricas del nivel superior. Este proceso se repite en toda la solera, con vino nuevo que se añade a los barriles superiores.

Un modelo matemático para la cantidad de vino de n años de edad, que se retira de una solera (con k niveles) cada año, es

$$f(n, k) = \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad k \leq n.$$

- (a) Considere una solera que tiene cinco niveles, numerados 2, 3, 4 y 5. En 1995 ($n = 0$), la mitad de cada barril en el nivel superior (nivel 1) se vuelve a llenar con vino nuevo. ¿Cuánto de este vino fue retirado de la solera en 1996? ¿En el año 1997? ¿En el año 1998? ... ¿En el año 2010? ¿Durante qué año(s) fue retirada de la solera la mayor cantidad de vino de 1995?

- (b) En el inciso (a), sea a_n la cantidad de vino de 1995 que se retira de la solera en el año n . Evalúe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL.** Consulte el artículo "Finding Vintage Concentrations in a Sherry Solera", por Rhodes Peele y John T. MacQueen, en *UMAP Modules*.

Shutterstock.com

4.5 Series alternantes

- Utilizar el criterio de la serie alternante para determinar si una serie infinita converge.
- Utilizar el residuo de la serie alternante para aproximar la suma de una serie alternante.
- Clasificar una serie convergente como absolutamente o condicionalmente convergente.
- Reordenar una serie infinita para obtener una suma diferente.

Serie alternante

Hasta ahora, la mayoría de series con las que se ha tratado ha tenido términos positivos. En esta sección y la siguiente estudiará la serie que contiene términos positivos y negativos. La más simple de estas series es la **serie alternante**, cuyos términos alternan en signo. Por ejemplo, la serie geométrica

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots\end{aligned}$$

es una *serie geométrica alternante* con $r = -\frac{1}{2}$. Las series alternantes se presentan de dos maneras: con los términos impares negativos o los términos pares negativos.

TEOREMA 4.14 Criterio de la serie alternante

Sea $a_n > 0$. Las series alternantes

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

convergen cuando se cumplen las dos condiciones que se enumeran a continuación.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
2. $a_{n+1} \leq a_n$ para todo n

.....▶
 ••••• **COMENTARIO** La segunda condición en el criterio de la serie alternante puede ser modificada para requerir solo que $0 < a_{n+1} \leq a_n$ para todo n mayor que algún número entero N .

Demostración Considere la serie alternante $\sum (-1)^{n+1} a_n$. Para esta serie, la suma parcial (donde $2n$ es par)

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

tiene todos los términos no negativos, y por lo tanto $\{S_{2n}\}$ es una sucesión no decreciente. Pero también se puede escribir

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

lo que implica que $S_{2n} \leq a_1$ para todo entero n . Así, $\{S_{2n}\}$ es una sucesión no decreciente acotada que converge a un valor L . Como $S_{2n-1} - a_{2n} = S_{2n}$ y $a_{2n} \rightarrow 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} \\ &= L + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} \\ &= L.\end{aligned}$$

Debido a que tanto S_{2n} como S_{2n-1} convergen al mismo límite L , se tiene que $\{S_n\}$ también converge a L . Por consiguiente, la serie alternante dada converge.

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

EJEMPLO 1 Usar el criterio de la serie alternante

Determine la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Solución Observe que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Por lo tanto, la primera condición del teorema 4.14 se cumple. También advierta que la segunda condición del teorema 4.14 se cumple porque

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = a_n$$

para todo n . Así, con la aplicación del criterio de la serie alternante, puede concluir que la serie converge.

EJEMPLO 2 Usar la prueba de la serie alternante

Determine la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^{n-1}}.$$

Solución Para aplicar el criterio de la serie alternante, observe que, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \frac{n}{n+1} \\ \frac{2^{n-1}}{2^n} &\leq \frac{n}{n+1} \\ (n+1)2^{n-1} &\leq n2^n \\ \frac{n+1}{2^n} &\leq \frac{n}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Así, $a_{n+1} = (n+1)/2^n \leq n/2^{n-1} = a_n$ para todo n . Por otra parte, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{x-1}(\ln 2)} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 0.$$

Por lo tanto, por el criterio de la serie alternante, la serie converge.

EJEMPLO 3 Cuando la prueba de la serie alternante no se puede aplicar

a. La serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n} = \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \dots$$

cumple la segunda condición del criterio de la serie alternante porque $a_{n+1} \leq a_n$ para toda n . Sin embargo, no puede aplicar el criterio de la serie alternante, porque la serie no cumple la primera condición. De hecho, la serie diverge.

b. La serie alternante

$$\frac{2}{1} - \frac{1}{1} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \dots$$

cumple la primera condición, porque a_n se acerca a 0 cuando $n \rightarrow \infty$. Sin embargo, no puede aplicar el criterio de la serie alternante, porque la serie no cumple la segunda condición. Para concluir que la serie diverge, puede argumentar que S_{2N} es igual a la N -ésima suma parcial de la serie armónica divergente. Esto implica que la secuencia de sumas parciales diverge. Por tanto, la serie diverge. ■

••••• **COMENTARIO** La serie en el ejemplo 1 se llama *serie armónica alternante*. Se hablará más sobre esta serie en el ejemplo 8.

••••• **COMENTARIO** En el ejemplo 3(a), recuerde que cada vez que una serie no cumple la primera condición del criterio de la serie alternante, puede utilizar el criterio del término n -ésimo para la divergencia para concluir que la serie diverge.

Residuo de la serie alternante

Para una serie convergente alternante, la suma parcial S_N puede ser una aproximación útil para la suma S de la serie. El error involucrado en el uso de $S \approx S_N$ es el residuo $R_N = S - S_N$.

TEOREMA 4.15 Residuo de la serie alternante

Si una serie convergente alternante satisface la condición $a_{n+1} \leq a_n$, entonces el valor absoluto del residuo R_N involucrado en la aproximación de la suma S por S_N es menor que (o igual a) el primer término ignorado. Es decir,

$$|S - S_N| = |R_N| \leq a_{N+1}.$$

En el apéndice A se presenta una demostración de este teorema.

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

EJEMPLO 4 Aproximar la suma de una serie alternante

Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Calcule la suma de la serie por sus primeros seis términos.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \dots$$

Solución La serie converge por el criterio de la serie alternante porque

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n!} \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0.$$

La suma de los seis primeros términos es

$$S_6 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} = \frac{91}{144} \approx 0.63194$$

y, por el residuo de la serie alternante, tiene

$$|S - S_6| = |R_6| \leq a_7 = \frac{1}{5040} \approx 0.0002.$$

Así, la suma S se encuentra entre $0.16394 - 0.0002$ y $0.16394 + 0.0002$ y tiene $0.63174 \leq S \leq 0.63214$.

EJEMPLO 5 Encontrar un número de términos

Determine el número de términos requeridos para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0.001.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$$

Solución Por el teorema 4.15, se sabe que

$$|R_N| \leq a_{N+1} = \frac{1}{(N+1)^4}.$$

Para un error menor que 0.001, N debe satisfacer la desigualdad $1/(N+1)^4 < 0.001$.

$$\frac{1}{(N+1)^4} < 0.001 \quad \Rightarrow \quad (N+1)^4 > 1000 \quad \Rightarrow \quad N > \sqrt[4]{1000} - 1 \approx 4.6$$

Por lo tanto, se necesitarán por lo menos 5 términos. El uso de 5 términos, la suma es $S \approx S_5 \approx 0.94754$, que tiene un error menor que 0.001. ■

► **TECNOLOGÍA** Más adelante, utilizando las técnicas en la sección 4.10, será capaz de demostrar que la serie en el ejemplo 4 converge a

$$\frac{e-1}{e} \approx 0.63212.$$

(Consulte la sección 4.10, ejercicio 58.) Por ahora, trate de usar una herramienta de graficación para obtener una aproximación de la suma de la serie. ¿Cuántos términos se necesitan para obtener una aproximación que esté dentro de 0.00001 unidades de la suma real?

Convergencia absoluta y condicional

Ocasionalmente, una serie puede tener términos tanto positivos como negativos y no ser una serie alternante. Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} = \frac{\operatorname{sen} 1}{1} + \frac{\operatorname{sen} 2}{4} + \frac{\operatorname{sen} 3}{9} + \dots$$

tiene términos tanto positivos como negativos; sin embargo, no es una serie alternante. Una manera de obtener alguna información acerca de la convergencia de esta serie es investigar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} \right|.$$

Por comparación directa, tiene $|\operatorname{sen} n| \leq 1$ para todo n , por lo que

$$\left| \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

Por lo tanto, por el criterio de comparación directa, la serie $\sum \left| \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} \right|$ converge. El siguiente teorema dice que la serie original también converge.

TEOREMA 4.16 Convergencia absoluta

Si la serie $\sum |a_n|$ converge, entonces la serie $\sum a_n$ también converge.

Demostración Debido a que $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ para toda n , la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$$

converge por comparación con la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|.$$

Además, como $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$, se puede escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

donde las dos series de la derecha convergen. Por tanto, se tiene que $\sum a_n$ converge.

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

El recíproco del teorema 4.16 no es cierto. Por ejemplo, la **serie armónica alternante**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

converge por la prueba de la serie alternante. Sin embargo, la serie armónica diverge. Este tipo de convergencia se llama **condicional**.

Definiciones de convergencia absoluta y condicional

1. La serie $\sum a_n$ es **absolutamente convergente** cuando $\sum |a_n|$ converge.
2. La serie $\sum a_n$ es **condicionalmente convergente** cuando $\sum a_n$ converge pero $\sum |a_n|$ diverge.

EJEMPLO 6

Convergencia condicional y absoluta

Determine si cada una de las series es convergente o divergente. Clasifique cualquier serie convergente como absolutamente o condicionalmente convergente.

$$a. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2^n} = \frac{0!}{2^0} - \frac{1!}{2^1} + \frac{2!}{2^2} - \frac{3!}{2^3} + \dots$$

$$b. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = -\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \dots$$

Solución

a. Esta es una serie alternante, pero el criterio de la serie alternante no puede aplicarse porque el límite del término n -ésimo no es cero. Sin embargo, por el criterio del término n -ésimo para la divergencia, se puede concluir que esta serie diverge.

b. Puede demostrarse que esta serie es convergente por el criterio de la serie alternante.

Por otra parte, debido a que la serie p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

diverge, la serie dada es *condicionalmente* convergente.

EJEMPLO 7

Convergencia condicional y absoluta

Determine si cada una de las series es convergente o divergente. Clasifique cualquier serie convergente como absolutamente o condicionalmente convergente.

$$a. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{3^n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \dots$$

$$b. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)} = -\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 5} - \dots$$

Solución

a. Esta *no* es una serie alternante (los signos cambian en pares). Sin embargo, observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{3^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

es una serie geométrica convergente, con

$$r = \frac{1}{3}.$$

En consecuencia, según el teorema 4.16, se puede concluir que la serie dada es *absolutamente* convergente (y por lo tanto convergente).

b. En este caso, el criterio de la serie alternante indica que la serie converge. Sin embargo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)} \right| = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots$$

diverge por comparación directa con los términos de la serie armónica. Por lo tanto, la serie dada es *condicionalmente* convergente. ■

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para leer más sobre la convergencia de la serie armónica alternante, consulte el artículo "Almost Alternating Harmonic Series", por Curtis Feist y Ramim Naimi, en *The College Mathematics Journal*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

Reordenamiento de una serie

Una suma finita, como

$$1 + 3 - 2 + 5 - 4$$

se puede reordenar sin cambiar el valor de la suma. Esto no es necesariamente cierto de una serie infinita, que depende de si la serie es absolutamente convergente o condicionalmente convergente.

1. Si una serie es *absolutamente convergente*, entonces sus términos pueden ser reacomodados en cualquier orden sin cambiar la suma de la serie.
2. Si una serie es *condicionalmente convergente*, entonces sus términos pueden ser reordenados para dar una suma diferente.

El segundo caso se ilustra en el ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Reordenar una serie

La serie armónica alternante converge a $\ln 2$. Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2. \quad (\text{Vea el ejercicio 55, sección 4.10.})$$

Reorganice la serie para producir una suma diferente.

Solución Considere el reordenamiento siguiente.

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \cdots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots\right) \\ &= \frac{1}{2} (\ln 2) \end{aligned}$$

Al reordenar los términos, se obtiene una suma que es la mitad de la suma original. ■

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) demostró que si $\sum a_n$ es condicionalmente convergente y S es cualquier número real, entonces los términos de la serie se pueden reorganizar para converger a S . Para más información sobre este tema, consulte el artículo "Riemann's Rearrangement Theorem", por Stewart Galanor, en *Mathematics Teacher*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

Exploración

En el ejemplo 8, aprendió que la serie armónica alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

converge a $\ln 2 \approx 0.693$. El reordenamiento de los términos de la serie produce una suma diferente, $\frac{1}{2} \ln 2 \approx 0.347$.

En esta exploración, reordene los términos de la serie armónica alternante de tal manera que dos términos positivos aparezcan después de un término negativo. Es decir,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \cdots$$

Ahora calcule las sumas parciales S_4 , S_7 , S_{10} , S_{13} , S_{16} y S_{19} . Luego calcule la suma de esta serie con tres cifras decimales.

4.5 Ejercicios

Consulte CalcChat.COM para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

AN Análisis numérico y gráfico En los ejercicios 1-4, explore el residuo de la serie alternante.

- (a) Utilice una herramienta de graficación para hallar la suma parcial que se indica y completar la tabla.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_n										

- (b) Utilice un programa de graficación para trazar los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales y una recta horizontal que represente la suma.
- (c) ¿Qué patrón existe entre la trama de los puntos sucesivos en el inciso (b) respecto a la recta horizontal que representa la suma de la serie? ¿Las distancias entre los puntos sucesivos y la recta horizontal aumentan o disminuyen?
- (d) Analice la relación entre las respuestas en el inciso (c) y el residuo de la serie alternante como se da en el teorema 4.15.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{e}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} = \text{sen } 1$$

Determinar convergencia o divergencia En los ejercicios 5-26, determine la convergencia o divergencia de la serie.

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{3n+2}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(5n-1)}{4n+1}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+5}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\ln(n+1)}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n^2}{n^2+4}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{\ln(n+1)}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln(n+1)}{n+1}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\pi$$

$$19. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$20. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{n+2}$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{e^n - e^{-n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \text{csch } n$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{e^n + e^{-n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \text{sech } n$$

Aproximar la suma de una serie alternada En los ejercicios 27-30, aproxime la suma de la serie mediante el uso de los primeros seis términos. (Vea el ejemplo 4.)

$$27. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{n!}$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4}{\ln(n+1)}$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2}{n^3}$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{3^n}$$

Hallar el número de términos En los ejercicios 31-36, utilice el teorema 4.15 para determinar el número de términos necesarios para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0.001.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$33. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^3 - 1}$$

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$$

$$35. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$36. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

Determinar convergencia absoluta y condicional En los ejercicios 37-54, determine si la serie converge absolutamente, condicionalmente, o diverge.

$$37. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$$

$$38. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$39. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$40. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+3}$$

$$41. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

$$42. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$$

$$43. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n^2}{(n+1)^2}$$

$$44. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)}{n+10}$$

$$45. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$$

$$46. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2}$$

$$47. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3 - 5}$$

$$48. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}$$

$$49. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

$$50. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+4}}$$

$$51. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n+1}$$

$$52. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \arctan n$$

$$53. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2}$$

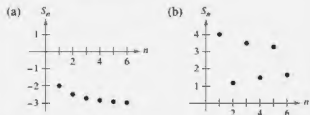
$$54. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[(2n-1)\pi/2]}{n}$$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

55. **Serie alternante** Defina una serie alternante.
56. **Criterio de la serie alternante** Escriba el criterio de la serie alternante.
57. **Residuo de una serie alternante** Dé el residuo después de N términos de una serie alternante convergente.
58. **Convergencia absoluta y condicional** En sus propias palabras, establezca la diferencia entre la convergencia absoluta y condicional de una serie alternada.
59. **Piénselo** ¿Está de acuerdo con las siguientes afirmaciones? ¿Por qué sí o por qué no?
- (a) Si tanto $\sum a_n$ como $\sum (-a_n)$ convergen, entonces $\sum |a_n|$ converge.
- (b) Si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum |a_n|$ diverge.



60. ¿CÓMO LO VE? En las figuras se muestran las gráficas de las sucesiones de las sumas parciales de dos series. ¿Cuál gráfica representa las sumas parciales de una serie alternante? Explique.



¿Verdadero o falso? En los ejercicios 61 y 62, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

61. Para la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

la suma parcial S_{100} es una sobreestimación de la suma de la serie.

62. Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen, entonces $\sum a_n b_n$ converge.

Encontrar valores En los ejercicios 63 y 64, encuentre los valores de p para los cuales la serie converge.

63. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^p}\right)$ 64. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+p}\right)$

65. **Demostración** Demuestre que si $\sum |a_n|$ converge, entonces $\sum a_n^2$ converge. ¿Es cierto lo contrario? Si no es así, dé un ejemplo que demuestre que es falso.

66. **Encontrar una serie** Use el resultado del ejercicio 63 para dar un ejemplo de una serie alternante que converge, pero cuya serie p correspondiente diverja.

67. **Encontrar una serie** Dé un ejemplo de una serie que demuestre el enunciado que ya demostró en el ejercicio 65.

68. **Encontrar valores** Encuentre todos los valores de x para los cuales la serie $\sum (x^n/n)$ (a) converge absolutamente y (b) converge condicionalmente.

Usar una serie En los ejercicios 69 y 70, utilice la serie dada.

- (a) ¿La serie cumple con las condiciones del teorema 4.14? Explique por qué sí o por qué no.

- (b) ¿Las series convergen? Si es así, ¿cuál es la suma?

$$69. \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \cdots$$

$$70. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{n^3} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Repaso En los ejercicios 71-80, pruebe la convergencia o divergencia e identifique el criterio utilizado.

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^{3/2}}$

72. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 + 5}$

73. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$

74. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$

75. $\sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(\frac{7}{8}\right)^n$

76. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{2n^2 + 1}$

77. $\sum_{n=1}^{\infty} 100e^{-n/2}$

78. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+4}$

79. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4}{3n^2 - 1}$

80. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

81. **Describir un error** El siguiente argumento, $0 = 1$, es incorrecto. Describa el error.

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \\ &= 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + \cdots \\ &= 1 \end{aligned}$$

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

82. Suponga que conoce el hecho (verdadero) de que la serie armónica alternante

$$(1) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

es convergente, y denote su suma por s . Reordene la serie (1) como sigue:

$$(2) 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Suponga que conoce el hecho (verdadero) de que la serie (2) también es convergente, y denote su suma por S . Denote por s_k , S_k la k -ésima suma parcial de la serie (1) y (2), respectivamente. Demuestre las siguientes expresiones.

(i) $S_{2n} = s_{2n} + \frac{1}{2}S_{2n}$, (ii) $S \neq s$

Este problema fue preparado por el Committee on Prize Putnam Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

4.6 El criterio del cociente y de la raíz

- Utilizar el criterio del cociente para determinar si una serie converge o diverge.
- Utilizar el criterio de la raíz para determinar si una serie converge o diverge.
- Revisar los criterios de convergencia y divergencia de una serie infinita.

El criterio del cociente

Esta sección comienza con un criterio de convergencia absoluta, el **criterio del cociente**.

TEOREMA 4.17 El criterio del cociente

Sea $\sum a_n$ una serie con términos no nulos.

1. La serie $\sum a_n$ converge absolutamente cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$.
2. La serie $\sum a_n$ diverge cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ o $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$.
3. El criterio del cociente no es concluyente cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$.

Demostración Para demostrar la propiedad 1, suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r < 1$$

y elija R tal que $0 \leq r < R < 1$. Por la definición del límite de una sucesión, no existe algún $N > 0$, tal que $|a_{n+1}/a_n| < R$ para todo $n > N$. Por lo tanto, se puede escribir las siguientes desigualdades.

$$\begin{aligned} |a_{N+1}| &< |a_N|R \\ |a_{N+2}| &< |a_{N+1}|R < |a_N|R^2 \\ |a_{N+3}| &< |a_{N+2}|R < |a_{N+1}|R^2 < |a_N|R^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

La serie geométrica $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|R^n = |a_N|R + |a_N|R^2 + \cdots + |a_N|R^n + \cdots$ converge,

y así, por el criterio de comparación directa, la serie

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_{N+n}| = |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots + |a_{N+n}| + \cdots$$

también converge. Esto a su vez implica que la serie $\sum |a_n|$ converge, porque al descartar un número finito de términos ($n = N - 1$) no afecta a la convergencia. En consecuencia, según el teorema 4.16, la serie $\sum a_n$ converge absolutamente. La demostración de la propiedad 2 es similar y se deja como ejercicio (vea el ejercicio 99).

Consulte *LarsonCalculus.com* para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. 

El hecho de que el criterio del cociente no es concluyente cuando $|a_{n+1}/a_n| \rightarrow 1$ puede verse comparando las dos series $\sum(1/n)$ y $\sum(1/n^2)$. La primera serie diverge y la segunda converge, pero en ambos casos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1.$$

Aunque el criterio del cociente no es una cura para todos los males relacionados con los criterios de convergencia, es particularmente útil para las series que convergen rápidamente. Con frecuencia las series que implican factoriales o exponenciales son de este tipo.

EJEMPLO 1 Usar el criterio del cociente

Determine la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

Solución Ya que

$$a_n = \frac{2^n}{n!}$$

puede escribir lo siguiente

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} \\ &= 0 < 1 \end{aligned}$$

Esta serie converge pues el límite de $|a_{n+1}/a_n|$ es menor que 1.

EJEMPLO 2 Usar el criterio del cociente

Determine la convergencia o divergencia de cada serie

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 2^{n+1}}{3^n}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Solución

a. Esta serie converge pues el límite de $|a_{n+1}/a_n|$ es menor que 1.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(n+1)^2 \left(\frac{2^{n+2}}{3^{n+1}} \right) \left(\frac{3^n}{n^2 2^{n+1}} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^2}{3n^2} \\ &= \frac{2}{3} < 1 \end{aligned}$$

b. Esta serie diverge pues el límite de $|a_{n+1}/a_n|$ es mayor que 1.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{n!}{n^n} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)} \left(\frac{1}{n^n} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \\ &= e > 1 \end{aligned}$$

.....▶
 *COMENTARIO Un paso utilizado con frecuencia en aplicaciones del criterio del cociente implica simplificar cocientes de factoriales. Para ver esto, en el ejemplo 1, observe que

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}$$

EJEMPLO 3 Falta del criterio del cociente

Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Determine la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

Solución El límite de $|a_{n+1}/a_n|$ es igual a 1.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \right) \left(\frac{n+1}{\sqrt{n}} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{n+1}{n+2} \right) \right] \\ &= \sqrt{1}(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el criterio del cociente no es concluyente. Para determinar si la serie converge, hay que probar un criterio diferente. En este caso, se puede aplicar el criterio de la serie alternante. Para demostrar que $a_{n+1} \leq a_n$, sea

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}.$$

Entonces, la derivada es

$$f'(x) = \frac{-x+1}{2\sqrt{x}(x+1)^2}.$$

Debido a que la derivada es negativa para $x > 1$, se sabe que f es una función decreciente. También, por la regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/(2\sqrt{x})}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el criterio de la serie alternante, la serie converge. ■

La serie en el ejemplo 3 es *condicionalmente convergente*. Esto se deduce del hecho de que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

diverge por el criterio de comparación del límite con $\sum 1/\sqrt{n}$, pero la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge.

► **TECNOLOGÍA** Una herramienta de graficación puede reforzar la conclusión de que la serie en el ejemplo 3 converge *condicionalmente*. Mediante la suma de los 100 primeros términos de la serie, se obtiene una suma aproximada de -0.2 (La suma de los 100 primeros términos de la serie $\sum |a_n|$ es alrededor de 17.)

Criterio de la raíz

El siguiente criterio para la convergencia o divergencia de una serie funciona especialmente bien para las series que implican potencias n -ésimas. La demostración de este teorema es similar a la proporcionada por el criterio del cociente, y se deja como ejercicio (vea el ejercicio 100).

.....▶
 **COMENTARIO El criterio de la raíz es siempre no concluyente para cualquier serie p .

TEOREMA 4.18 Criterio de la raíz

1. La serie $\sum a_n$ converge absolutamente cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$.
2. La serie $\sum a_n$ diverge cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ o $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$.
3. El análisis de cociente no es concluyente cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

EJEMPLO 4 Usar el criterio de la raíz

Determine la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n}.$$

Solución Puede aplicar el criterio de la raíz de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{n^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n/n}}{n^{n/n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^2}{n} \\ &= 0 < 1 \end{aligned}$$

Debido a que este límite es inferior a 1, puede concluir que la serie converge absolutamente (y por lo tanto converge). ■

Para ver la utilidad del criterio de la raíz para la serie en el ejemplo 4, intente aplicar el criterio del cociente de esa serie. Al hacer esto, obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{2(n+1)}}{(n+1)^{n+1}} \div \frac{e^{2n}}{n^n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{2(n+1)}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{e^{2n}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^2 n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \left(\frac{1}{n+1} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Observe que este límite no se evalúa tan fácilmente como el límite obtenido por el criterio de la raíz en el ejemplo 4.

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para más información sobre la utilidad del criterio de la raíz, consulte el artículo "N! and the Root Test", por Charles C. Mumma II, en *The American Mathematical Monthly*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

Estrategias para probar series

Ya ha estudiado 10 criterios para determinar la convergencia o divergencia de una serie infinita. (Consulte el resumen de la tabla de la página siguiente.) La habilidad para escoger y aplicar los diferentes criterios vendrá solo con la práctica. A continuación se muestra un conjunto de directrices para la elección de un criterio adecuado.

DIRECTRICES PARA LOS CRITERIOS DE CONVERGENCIA O DIVERGENCIA DE UNA SERIE

1. ¿El término n -ésimo se aproxima a 0? Si no, la serie diverge.
2. ¿La serie es de uno de los tipos especiales, geométrica, serie p , telescópica o alternante?
3. ¿Puede aplicarse el criterio de la integral, el de la raíz o el del cociente?
4. ¿La serie puede compararse favorablemente con uno de los tipos especiales?

En algunos casos más de un criterio es aplicable. Sin embargo, su objetivo debe ser aprender a elegir el criterio más eficiente.

EJEMPLO 5

Aplicar las estrategias para probar series

Determine la convergencia o divergencia de cada una de las series.

- a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n+1}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{6}\right)^n$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$
 d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ e. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{4n+1}$ f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$
 g. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$

Solución

- a. Para esta serie, el límite del término n -ésimo no es 0 ($a_n \rightarrow \frac{1}{3}$ cuando $n \rightarrow \infty$). Así, por el criterio del término n -ésimo, la serie diverge.
- b. Esta serie es geométrica. Además, debido a que la relación de los términos

$$r = \frac{\pi}{6}$$

es menor que 1 en valor absoluto, se puede concluir que la serie converge.

- c. Dado que la función

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

se integra fácilmente, se puede utilizar el criterio de la integral para llegar a la conclusión de que la serie converge.

- d. El término n -ésimo de esta serie se puede comparar con el término n -ésimo de la serie armónica. Después de usar el criterio de comparación del límite, puede concluir que la serie diverge.
- e. Se trata de una serie alternante cuyo término n -ésimo tiende a 0. Debido a que $a_{n+1} \leq a_n$, se puede utilizar el criterio de la serie alternante para llegar a la conclusión de que la serie converge.
- f. El término n -ésimo de esta serie consiste en un factorial, lo que indica que el criterio del cociente puede funcionar bien. Después de aplicar el criterio del cociente, puede concluir que la serie diverge.
- g. El término n -ésimo de esta serie incluye una variable que se eleva a la potencia n -ésima, que indica que el criterio de la raíz puede funcionar bien. Después de aplicar el criterio de la raíz, puede concluir que la serie converge. ■

RESUMEN DE CRITERIOS DE LA SERIE

Criterio	Serie	Condición(es) de convergencia	Condición(es) de divergencia	Comentario
Término n -ésimo	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$		$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$	Este criterio no puede ser utilizado para mostrar la convergencia.
Serie geométrica	$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$	$0 < r < 1$	$ r \geq 1$	Suma: $S = \frac{a}{1-r}$
Serie telescópica	$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$	$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$		Suma: $S = b_1 - L$
Serie p	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	$p > 1$	$0 < p \leq 1$	
Serie alternante	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$	$0 < a_{n+1} \leq a_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$		Residuo: $ R_N \leq a_{N+1}$
Integral (f es continua, positiva y decreciente)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = f(n) \geq 0$	$\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge	$\int_1^{\infty} f(x) dx$ diverge	Residuo: $0 < R_N < \int_N^{\infty} f(x) dx$
Raíz	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n } < 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n } > 1$ o $= \infty$	El criterio es concluyente cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n } = 1$.
Cociente	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right < 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right > 1$ o $= \infty$	El criterio es concluyente cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right = 1$.
Comparación directa ($a_n, b_n > 0$)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$0 < a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge	$0 < b_n \leq a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge	
Comparación del límite ($a_n, b_n > 0$)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge	

4.6 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Verificación de una fórmula En los ejercicios 1-4, verifique la fórmula.

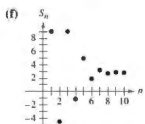
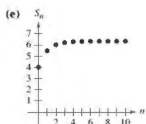
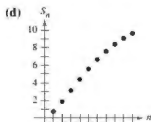
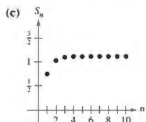
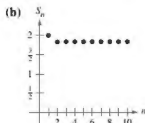
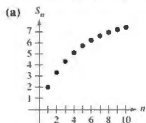
$$1. \frac{(n+1)!}{(n-2)!} = (n+1)(n)(n-1)$$

$$2. \frac{(2k-2)!}{(2k)!} = \frac{1}{(2k)(2k-1)}$$

$$3. 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) = \frac{(2k)!}{2^k k!}$$

$$4. \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-5)} = \frac{2^k k! (2k-3)(2k-1)}{(2k)!}, \quad k \geq 3$$

Relacionar En los ejercicios 5-10, relacione la serie con la gráfica de su sucesión de sumas parciales. (Las gráficas están etiquetadas (a), (b), (c), (d), (e) y (f).)



$$5. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{1}{n!}\right)$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{n!}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4}{(2n)!}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{5n-3}\right)^n$$

$$10. \sum_{n=0}^{\infty} 4e^{-n}$$

Análisis numérico, gráfico y analítico En los ejercicios 11 y 12, (a) verifique que la serie converge, (b) utilice una herramienta de graficación para hallar la suma parcial S_n indicada y completar la tabla, (c) use una herramienta de graficación para trazar los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales, (d) utilice la tabla para calcular la suma de la serie, y (e) explique la relación entre las magnitudes de los términos de la serie y la velocidad a la que la sucesión de sumas parciales se aproxima a la suma de la serie.

n	5	10	15	20	25
S_n					

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n!}$$

Usar el criterio del cociente En los ejercicios 13-34, utilice el criterio del cociente para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{6}{5}\right)^n$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{7}{8}\right)^n$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^4}$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{n(n+1)}$$

$$23. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(3/2)^n}{n^2}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n3^n}$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^3}$$

$$27. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$29. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{(n+1)^2}$$

$$30. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3n)!}$$

$$31. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{2n+1}$$

$$32. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{4n}}{(2n+1)!}$$

$$33. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)]}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$$

Usar el criterio de la raíz En los ejercicios 35-50, utilice el criterio de la raíz para determinar la divergencia o convergencia de la serie.

35.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$$

36.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

37.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

38.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n+1} \right)^n$$

39.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{n+3} \right)^n$$

40.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{5n+1} \right)^n$$

41.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^n}$$

42.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-3n}{2n+1} \right)^{3n}$$

43.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (2\sqrt[n]{n} + 1)^n$$

44.
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-3n}$$

45.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{50^n}$$

46.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{300} \right)^n$$

47.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)^n$$

48.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^n$$

49.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$$

50.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^n)^2}$$

Determinar la convergencia o divergencia En los ejercicios 51-68, determine la convergencia o divergencia de la serie usando cualquier criterio apropiado de este capítulo. Identifique el criterio utilizado.

51.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 5}{n}$$

52.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{n}$$

53.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n\sqrt{n}}$$

54.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{3} \right)^n$$

55.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{2n-1}$$

56.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+1}$$

57.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n-2}}{2^n}$$

58.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{3\sqrt{n}}$$

59.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+3}{n2^n}$$

60.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4n^2-1}$$

61.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{3^n}$$

62.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$$

63.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n7^n}$$

64.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

65.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n-1}}{n!}$$

66.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n2^n}$$

67.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$$

68.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{18^n (2n-1)n!}$$

Identificar una serie En los ejercicios 69-72, identifique las dos series que son iguales.

69. (a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{n!}$$

70. (a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

(b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n5^n}{(n+1)!}$$

(b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

(c)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)5^{n+1}}{(n+1)!}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$$

71. (a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

72. (a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)2^{n-1}}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$$


(c)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!}$$

(c)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)2^n}$$

Escribir una serie equivalente En los ejercicios 73 y 74, escriba una serie equivalente con el índice de la suma que comienza en $n=0$.

73.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7^n}$$

74.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{9^n}{(n-2)!}$$

 Hallar el número de términos En los ejercicios 75 y 76, (a) determine el número de términos necesarios para aproximar la suma de la serie con un error inferior a 0.0001, y (b) use una graficadora para aproximar la suma de la serie con un error de menos de 0.0001.

75.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{2^k k!}$$

76.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}$$

Usar una serie definida recursivamente En los ejercicios 77-82, los términos de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se definen de forma recursiva. Determine la convergencia o divergencia de la serie. Explique su razonamiento.

77.
$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{4n-1}{3n+2} a_n$$

78.
$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{2n+1}{5n-4} a_n$$

79.
$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{\sin n + 1}{\sqrt{n}} a_n$$

80.
$$a_1 = \frac{1}{5}, a_{n+1} = \frac{\cos n + 1}{n} a_n$$

81.
$$a_1 = \frac{1}{3}, a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n} \right) a_n$$

82.
$$a_1 = \frac{1}{4}, a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n}$$

Usar el criterio del cociente o de la raíz En los ejercicios 83-86, utilice el criterio del cociente o de la raíz para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

83.
$$1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots$$

84.
$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \frac{6}{3^5} + \cdots$$

85.
$$\frac{1}{(\ln 3)^3} + \frac{1}{(\ln 4)^4} + \frac{1}{(\ln 5)^5} + \frac{1}{(\ln 6)^6} + \cdots$$

86.
$$1 + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots$$

Encontrar valores En los ejercicios 87-92, encuentre los valores de x para los cuales la serie converge.

87.
$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{x}{3}\right)^n$$

88.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{5}\right)^n$$

89.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+1)^n}{n}$$

90.
$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(x-4)^n$$

91.
$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

92.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

93. Criterio del cociente Explique el criterio del cociente.

94. Criterio de la raíz Explique el criterio de la raíz.

95. Piénselo Le dicen que los términos de una serie positiva parecen aproximarse a cero rápidamente a medida que n se acerca al infinito. De hecho, $a_n \leq 0.0001$. Teniendo en cuenta que no hay ninguna otra información, ¿esto implica que la serie converge? Apoye su conclusión con ejemplos.

96. Piénselo ¿Qué puede concluir acerca de la convergencia o divergencia de $\sum a_n$ para cada una de las siguientes condiciones? Explique su razonamiento.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{3}{2}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e$

97. Usar una serie alternante Utilizando el criterio del cociente, se determina que una serie alternante converge. ¿La serie converge condicional o absolutamente? Explique.

99. Demostración Demuestre la propiedad 2 del teorema 4.17.

100. Demostración Demuestre el teorema 4.18. (*Sugerencia para la Propiedad 1:* Si el límite es igual a $r < 1$, elija un número real tal que $r < R < 1$. Por las definiciones del límite, no existe algún $N > 0$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < R$ para $n > N$.)

Verificar un criterio concluyente En los ejercicios 101-104, compruebe que el criterio del cociente no es concluyente para la serie p .

101.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p/2}}$$

102.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

103.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

104.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

105. Verificar un criterio concluyente Demuestre que el criterio de la raíz no es concluyente para la serie p .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

106. Verificar criterios no concluyentes Demuestre que el criterio del cociente y el criterio de la raíz son concluyentes para la serie p logarítmica.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

107. Usar valores Determine la convergencia o divergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(n^n)!}$$

cuando (a) $x = 1$, (b) $x = 2$, (c) $x = 3$ y (d) x es un entero positivo.

108. Usar una serie Demuestre que si

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es absolutamente convergente, entonces

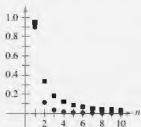
$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

98.

¿CÓMO LO VE? La figura muestra los 10 primeros términos de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y los 10

primeros términos de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$.

Identifique las dos series y explique su razonamiento al hacer la selección.



DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

109. Demuestre que si la serie

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

converge, entonces la serie

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} + \cdots$$

converge también.

110. ¿La siguiente serie es convergente o divergente?

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{7} + \frac{2!}{3^2} \left(\frac{19}{7}\right)^2 + \frac{3!}{4^3} \left(\frac{19}{7}\right)^3 + \frac{4!}{5^4} \left(\frac{19}{7}\right)^4 + \cdots$$

Estos problemas fueron preparados por el Committee on Prize Putnam Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

4.7 Polinomios de Taylor y aproximaciones

- Encontrar aproximaciones polinómicas de funciones elementales y compararlas con las funciones elementales.
- Encontrar aproximaciones polinómicas de Taylor y Maclaurin para funciones elementales.
- Utilizar el residuo de un polinomio de Taylor.

Aproximaciones polinómicas de funciones elementales

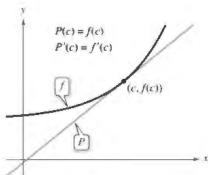
El objetivo de esta sección es mostrar cómo se pueden utilizar las funciones polinómicas como aproximaciones para otras funciones elementales. Para encontrar una función polinómica P que se aproxima a otra función f comience por elegir un número c en el dominio de f en el que f y P tienen el mismo valor. Es decir,

$$P(c) = f(c). \quad \text{Las gráficas de } f \text{ y } P \text{ pasan por } (c, f(c)).$$

Se dice que el polinomio de aproximación está **desarrollado alrededor de c** o **centrado en c** . Geométricamente, el requisito de que $P(c) = f(c)$ significa que la gráfica pasa por el punto $(c, f(c))$. Por supuesto, hay muchos polinomios cuyas gráficas pasan por el punto $(c, f(c))$. Su tarea es encontrar un polinomio cuya gráfica se parezca a la gráfica de f cerca de este punto. Una forma de hacer esto es imponer el requisito adicional de que la pendiente de la función polinómica sea la misma que la pendiente de la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$.

$$P'(c) = f'(c) \quad \text{Las gráficas de } f \text{ y } P \text{ tienen la misma pendiente en } (c, f(c)).$$

Con estos dos requisitos, se puede obtener una aproximación lineal simple de f , como se muestra en la figura 4.10.



Cerca de $(c, f(c))$, la gráfica de P se puede utilizar para aproximar la gráfica de f .

Figura 4.10

EJEMPLO 1 Aproximar $f(x) = e^x$ con un polinomio de primer grado

Para la función $f(x) = e^x$ encuentre una función polinómica de primer grado $P_1(x) = a_0 + a_1x$ cuyo valor y pendiente coincidan con el valor y la pendiente de $x = 0$.

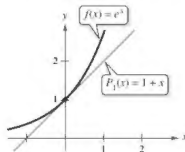
Solución Como $f(x) = e^x$ y $f'(x) = e^x$, el valor y la pendiente de f en $x = 0$ son

$$f(0) = e^0 = 1 \quad \text{Valor de } f \text{ en } x = 0$$

y

$$f'(0) = e^0 = 1. \quad \text{Pendiente de } f \text{ en } x = 0$$

Como $P_1(x) = a_0 + a_1x$, se puede utilizar la condición de que $P_1(0) = f(0)$ para concluir que $a_0 = 1$. Por otra parte, debido a que $P_1'(x) = a_1$, se puede utilizar la condición $P_1'(0) = f'(0)$, para llegar a la conclusión de que $a_1 = 1$. Por lo tanto, $P_1(x) = 1 + x$. La figura 4.11 muestra las gráficas de $P_1(x) = 1 + x$ y $f(x) = e^x$.



P_1 es el polinomio de aproximación de primer grado de $f(x) = e^x$.

Figura 4.11

.....▶
 *COMENTARIO En el ejemplo 1 no es la primera vez que usted utiliza una función lineal para aproximar otra función. El mismo procedimiento se utiliza como la base para el método de Newton.

En la figura 4.12 se puede ver que en los puntos cerca de $(0, 1)$ la gráfica de la función polinómica de primer grado

$$P_1(x) = 1 + x \quad \text{Aproximación de primer grado}$$

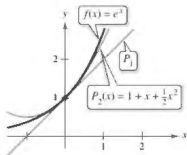
es razonablemente cerca de la gráfica de $f(x) = e^x$. A medida que se aleja de $(0, 1)$, sin embargo, las gráficas se mueven cada vez más lejos una de otra y la precisión de la aproximación disminuye. Para mejorar la aproximación, se puede imponer otro requisito, que los valores de las segundas derivadas de P y f coincidan cuando $x = 0$. El polinomio, P_2 , de menor grado que satisface los tres requisitos $P_2(0) = f(0)$, $P_2'(0) = f'(0)$ y $P_2''(0) = f''(0)$ se puede demostrar que es

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2. \quad \text{Aproximación de segundo grado}$$

Por otra parte, en la figura 4.12 se puede ver que P_2 es una mejor aproximación de f que P_1 . Al exigir que los valores de $P_n(x)$ y sus primeras n derivadas coincidan con los de $f(x) = e^x$ en $x = 0$, se obtiene la aproximación de grado n -ésimo que se muestra a continuación.

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \quad \text{Aproximación de grado } n\text{-ésimo}$$

$$\approx e^x$$



P_2 es la aproximación polinómica de segundo grado para $f(x) = e^x$.

Figura 4.12

EJEMPLO 2

Aproximar $f(x) = e^x$ con un polinomio de tercer grado

Construya una tabla que compare los valores del polinomio

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \quad \text{Aproximación de 3er. grado}$$

con $f(x) = e^x$ para varios valores cercanos a 0.

Solución Usando una calculadora o una computadora, puede obtener los resultados que se muestran en la tabla. Observe que para $x = 0$ las dos funciones tienen el mismo valor, pero a medida que se aleja de 0, la precisión del polinomio de aproximación $P_3(x)$ disminuye.

x	-1.0	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	1.0
e^x	0.3679	0.81873	0.904837	1	1.105171	1.22140	2.7183
$P_3(x)$	0.3333	0.81867	0.904833	1	1.105167	1.22133	2.6667

▶ **TECNOLOGÍA** Se puede usar una herramienta de graficación para comparar la gráfica del polinomio de aproximación con la gráfica de la función f . Por ejemplo, en la figura 4.13, la gráfica de

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \quad \text{Aproximación de 3er. grado}$$

se compara con la gráfica de $f(x) = e^x$. Si usted tiene acceso a una herramienta de graficación, trate de comparar las gráficas de

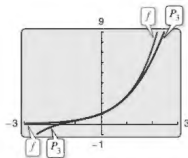
$$P_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \quad \text{Aproximación de 4o. grado}$$

$$P_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 \quad \text{Aproximación de 5o. grado}$$

y

$$P_6(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 \quad \text{Aproximación de 6o. grado}$$

con la gráfica de f . ¿Qué observa?



P_3 es la aproximación polinómica de tercer grado para $f(x) = e^x$.

Figura 4.13



BROOK TAYLOR (1685-1731)

Aunque Taylor no fue el primero en buscar aproximaciones polinómicas de funciones trascendentes, su trabajo publicado en 1715 fue una de las primeras obras completas sobre el tema.

Consulte *LarsonCalculus.com* para leer más de esta biografía.

Polinomios de Taylor y de Maclaurin

La aproximación polinómica de

$$f(x) = e^x$$

en el ejemplo 2 se desarrolla alrededor de $c = 0$. Para expansiones sobre un valor arbitrario de c es conveniente escribir el polinomio en la forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 + \cdots + a_n(x - c)^n.$$

Así, la derivación repetida produce

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - c) + 3a_3(x - c)^2 + \cdots + na_n(x - c)^{n-1}$$

$$P_n''(x) = 2a_2 + 2(3a_3)(x - c) + \cdots + n(n - 1)a_n(x - c)^{n-2}$$

$$P_n'''(x) = 2(3a_3) + \cdots + n(n - 1)(n - 2)a_n(x - c)^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$P_n^{(n)}(x) = n(n - 1)(n - 2) \cdots (2)(1)a_n.$$

Haciendo que $x = c$, entonces se obtiene

$$P_n(c) = a_0, \quad P_n'(c) = a_1, \quad P_n''(c) = 2a_2, \dots, \quad P_n^{(n)}(c) = n!a_n$$

y debido a que los valores de f y sus primeras n derivadas deben coincidir con los valores de P_n y sus primeras n derivadas en $x = c$, se deduce que

$$f(c) = a_0, \quad f'(c) = a_1, \quad \frac{f''(c)}{2!} = a_2, \dots, \quad \frac{f^{(n)}(c)}{n!} = a_n.$$

Con estos coeficientes, se puede obtener la siguiente definición de los **polinomios de Taylor**. Llamados así en honor al matemático inglés Brook Taylor, y los **polinomios de Maclaurin**, llamados así en honor al matemático inglés Colin Maclaurin (1698-1746).

Definiciones de polinomio n -ésimo de Taylor y polinomio n -ésimo de Maclaurin

Si f tiene n derivadas en c , entonces el polinomio

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

se llama polinomio **n -ésimo de Taylor de f en c** . Si $c = 0$, entonces

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

también se llama el polinomio **n -ésimo de Maclaurin de f** .

•••COMENTARIO Los polinomios de Maclaurin son tipos especiales de los polinomios de Taylor para los que $c = 0$.

EJEMPLO 3 Polinomio de Maclaurin para $f(x) = e^x$

Encuentre el polinomio n -ésimo de Maclaurin para

$$f(x) = e^x$$

Solución Del análisis de la página anterior, el n -ésimo polinomio de Maclaurin para

$$f(x) = e^x$$

es

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para ver cómo utilizar series en la obtención de otras aproximaciones de e , vea el artículo de John Knox y Harlan J. Brothers, "Novel Series based Approximations to e " en *The College Mathematics Journal*. Para ver este artículo, visite *MathArticles.com*.

EJEMPLO 4

Encontrar los polinomios de Taylor para $\ln x$

Encuentre los polinomios de Taylor P_0 , P_1 , P_2 , P_3 y P_4 para

$$f(x) = \ln x$$

centrados en $c = 1$.

Solución Desarrollando alrededor de $c = 1$, se obtiene lo siguiente.

$$f(x) = \ln x$$

$$f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2!}{x^3}$$

$$f'''(1) = \frac{2!}{1^3} = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{x^4}$$

$$f^{(4)}(1) = -\frac{3!}{1^4} = -6$$

Por tanto, los polinomios de Taylor son los siguientes

$$P_0(x) = f(1) = 0$$

$$P_1(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = (x - 1)$$

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2$$

$$= (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2$$

$$P_3(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x - 1)^3$$

$$= (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3$$

$$P_4(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x - 1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x - 1)^4$$

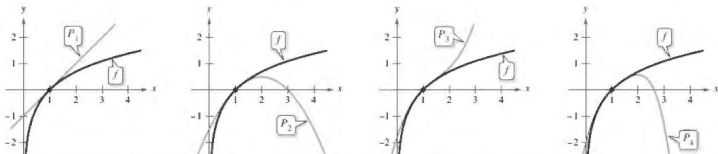
$$= (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4$$

La figura 4.14 compara las gráficas de P_1 , P_2 , P_3 y P_4 con la gráfica de $f(x) = \ln x$. Observe que cerca de $x = 1$, las gráficas son casi indistinguibles. Por ejemplo,

$$P_4(1.1) \approx 0.0953083$$

y

$$\ln(1.1) \approx 0.0953102.$$



Conforme n aumenta, la gráfica de P_n se convierte en una mejor aproximación de la gráfica de $f(x) = \ln x$ cerca de $x = 1$.

Figura 4.14

EJEMPLO 5 Encontrar los polinomios de Maclaurin para $\cos x$

Encuentre los polinomios de Maclaurin P_0 , P_2 , P_4 y P_6 para $f(x) = \cos x$. Use $P_6(x)$ para aproximar el valor de $\cos(0.1)$.

Solución Desarrollando alrededor de $c = 1$, obtiene lo siguiente.

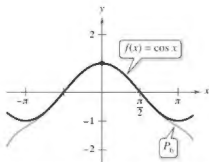
$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & f(0) &= \cos 0 = 1 \\ f'(x) &= -\operatorname{sen} x & f'(0) &= -\operatorname{sen} 0 = 0 \\ f''(x) &= -\cos x & f''(0) &= -\cos 0 = -1 \\ f'''(x) &= \operatorname{sen} x & f'''(0) &= \operatorname{sen} 0 = 0 \end{aligned}$$

A través de derivación repetida, puede ver que el patrón 1, 0, -1, 0 continúa, y se obtienen los polinomios de Maclaurin

$$P_0(x) = 1, \quad P_2(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2, \quad P_4(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$

y

$$P_6(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6.$$



Cerca de $(0, 1)$ la gráfica de P_6 se puede utilizar para aproximar la gráfica de $f(x) = \cos x$.

Figura 4.15

Usando $P_6(x)$, obtiene la aproximación $\cos(0.1) \approx 0.995004165$ que coincide con el valor de calculadora para nueve cifras decimales. La figura 4.15 compara las gráficas de $f(x) = \cos x$ y P_6 .

Observe en el ejemplo 5 que los polinomios de Maclaurin para $\cos x$ solo tienen potencias pares de x . De la misma manera, los polinomios de Maclaurin de $\operatorname{sen} x$ solo tienen potencias impares (vea el ejercicio 17). En general, esto no es cierto en los polinomios de Taylor para el seno x y coseno x desarrollados alrededor de $c \neq 0$, como verá en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Encontrar un polinomio de Taylor para $\operatorname{sen} x$

• • • ▶ Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

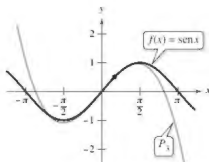
Encuentre el tercer polinomio de Taylor para $f(x) = \operatorname{sen} x$, desarrollado alrededor de $c = \pi/6$.

Solución Desarrollando alrededor de $c = \pi/6$, obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x & f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ f'(x) &= \cos x & f'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, el tercer polinomio de Taylor para $f(x) = \operatorname{sen} x$, desarrollado alrededor de $c = \pi/6$, es

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2(2!)}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2(3!)}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3. \end{aligned}$$



Cerca de $(\pi/6, 1/2)$, la gráfica de P_3 se puede utilizar para aproximar la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Figura 4.16

La figura 4.16 compara las gráficas de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y P_3 .

Los polinomios de Taylor y los polinomios de Maclaurin se pueden utilizar para aproximar el valor de una función en un punto específico. Por ejemplo, para aproximar el valor de $\ln(1.1)$, se pueden utilizar los polinomios de Taylor de $f(x) = \ln x$ desarrollados alrededor de $c = 1$, como se muestra en el ejemplo 4, o se pueden utilizar polinomios de Maclaurin, como se muestra en el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Aproximar utilizando polinomios de Maclaurin

Use el cuarto polinomio de Maclaurin para aproximar el valor de $\ln(1.1)$.

Solución Debido a que 1.1 está más cerca de 1 que de 0, debe considerar polinomios de Maclaurin para la función $g(x) = \ln(1 + x)$.

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(1 + x) & g(0) &= \ln(1 + 0) = 0 \\ g'(x) &= (1 + x)^{-1} & g'(0) &= (1 + 0)^{-1} = 1 \\ g''(x) &= -(1 + x)^{-2} & g''(0) &= -(1 + 0)^{-2} = -1 \\ g'''(x) &= 2(1 + x)^{-3} & g'''(0) &= 2(1 + 0)^{-3} = 2 \\ g^{(4)}(x) &= -6(1 + x)^{-4} & g^{(4)}(0) &= -6(1 + 0)^{-4} = -6 \end{aligned}$$

Observe que obtiene los mismos coeficientes que en el ejemplo 4. Por lo tanto, el cuarto polinomio de Maclaurin para $g(x) = \ln(1 + x)$ es

$$\begin{aligned} P_4(x) &= g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 + \frac{g^{(4)}(0)}{4!}x^4 \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\ln(1.1) = \ln(1 + 0.1) \approx P_4(0.1) \approx 0.0953083.$$

La siguiente tabla ilustra la precisión de la aproximación polinómica de Maclaurin del valor de calculadora de $\ln(1.1)$. Se puede ver que cuando n aumenta, $P_n(0.1)$ se acerca al valor de la calculadora de 0.0953102.

Polinomios de Maclaurin y aproximaciones de $\ln(1 + x)$ en $x = 0.1$

n	1	2	3	4
$P_n(0.1)$	0.1000000	0.0950000	0.0953333	0.0953083

Por otro lado, la tabla siguiente muestra que a medida que se aleja del punto de expansión $c = 0$, la precisión de la aproximación disminuye.

Cuarta aproximación polinómica de Maclaurin de $\ln(1 + x)$

x	0	0.1	0.5	0.75	1.0
$\ln(1 + x)$	0	0.0953102	0.4054651	0.5596158	0.6931472
$P_4(x)$	0	0.0953083	0.4010417	0.5302734	0.5833333

Estas dos tablas ilustran dos puntos muy importantes acerca de la precisión de los polinomios de Taylor (o de Maclaurin) para su uso en aproximaciones.

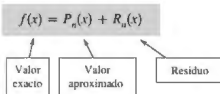
1. La aproximación es generalmente mejor para un polinomio de Taylor de mayor grado (o de Maclaurin) que para los polinomios de grado inferior.
2. La aproximación es generalmente mejor para valores de x cercanos a c que para valores de x alejados de c .

Exploración

Compruebe que el cuarto polinomio de Taylor (del ejemplo 4), evaluado en $x = 1.1$, da el mismo resultado que el cuarto polinomio de Maclaurin en el ejemplo 7.

Residuo de un polinomio de Taylor

Una técnica de aproximación es de poco valor sin una idea de su precisión. Para medir la precisión de la aproximación de un valor de la función $f(x)$ mediante el polinomio de Taylor $P_n(x)$ se puede utilizar el concepto del **residuo** $R_n(x)$, que se define de la siguiente manera.



Así, $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. El valor absoluto de $R_n(x)$ recibe el nombre de **error** asociado con la aproximación. Es decir,

$$\text{Error} = |R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|.$$

El siguiente teorema presenta un procedimiento general para estimar el residuo asociado con un polinomio de Taylor. Este importante teorema se llama **teorema de Taylor**, y el residuo dado en el teorema se llama **forma de Lagrange del residuo**.

TEOREMA 4.19 Teorema de Taylor

Si una función f es derivable hasta el orden $n + 1$ en un intervalo I que contiene a c , entonces, para cada x en I , existe z entre x y c tal que

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_n(x)$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - c)^{n+1}.$$

En el apéndice A se presenta una demostración de este teorema.

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

Una consecuencia útil del teorema de Taylor es que

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x - c|^{n+1}}{(n+1)!} \max |f^{(n+1)}(z)|$$

donde $\max |f^{(n+1)}(z)|$ es el valor máximo de $f^{(n+1)}(z)$ entre x y c .

Para $n = 0$ el teorema de Taylor, que afirma que si f es diferenciable en un intervalo I que contiene a c , entonces, para cada x en I , existe z entre x y c tal que

$$f(x) = f(c) + f'(z)(x - c) \quad \text{o} \quad f'(z) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

¿Reconoce este caso especial del teorema de Taylor? (Es el teorema del valor medio.)

Al aplicar el teorema de Taylor, no se debe esperar poder encontrar el valor exacto de z . (Si se puede hacer esto, no sería necesaria una aproximación.) Por el contrario, se está tratando de encontrar los límites para $f^{(n+1)}(z)$ de los que se puede decir qué tan grande es el residuo $R_n(x)$.

EJEMPLO 8

Determinar la precisión de una aproximación

El tercer polinomio de Maclaurin para $\text{sen } x$ es

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

Utilice el teorema de Taylor para aproximar $\text{sen}(0.1)$ por $P_3(0.1)$ y determine la precisión de la aproximación.

Solución Usando el teorema de Taylor, tiene

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + R_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(z)}{4!} x^4$$

donde $0 < z < 0.1$. Por lo tanto,

$$\text{sen}(0.1) \approx 0.1 - \frac{(0.1)^3}{3!} \approx 0.1 - 0.000167 = 0.099833.$$

Debido a que $f^{(4)}(z) = \text{sen } z$, se deduce que el error $|R_3(0.1)|$ puede estar delimitado como sigue.

$$0 < R_3(0.1) = \frac{\text{sen } z}{4!} (0.1)^4 < \frac{0.0001}{4!} \approx 0.000004$$

Esto implica que

$$0.099833 < \text{sen}(0.1) = 0.099833 + R_3(0.1) < 0.099833 + 0.000004$$

o

$$0.099833 < \text{sen}(0.1) < 0.099837.$$

...COMENTARIO Observe que cuando utiliza una calculadora,

$$\text{sen}(0.1) \approx 0.0998334$$

EJEMPLO 9

Aproximar un valor a la precisión deseada

Determine el grado del polinomio de Taylor $P_n(x)$ desarrollado alrededor de $c = 1$ que se debe utilizar para aproximar $\ln(1.2)$ de modo que el error es menor que 0.001.

Solución Siguiendo la pauta del ejemplo 4, puede ver que la derivada $(n+1)$ de $f(x) = \ln x$ es

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Usando el teorema de Taylor, ya sabe que el error $|R_n(1.2)|$ es

$$\begin{aligned} |R_n(1.2)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (1.2 - 1)^{n+1} \right| \\ &= \frac{n!}{z^{n+1}} \left[\frac{1}{(n+1)!} \right] (0.2)^{n+1} \\ &= \frac{(0.2)^{n+1}}{z^{n+1}(n+1)} \end{aligned}$$

donde $1 < z < 1.2$. En este intervalo, $(0.2)^{n+1}/[z^{n+1}(n+1)]$ es menor que $(0.2)^{n+1}/(n+1)$. Por lo tanto, se está buscando un valor tal que

$$\frac{(0.2)^{n+1}}{(n+1)} < 0.001 \Rightarrow 1000 < (n+1)5^{n+1}.$$

Por ensayo y error, puede determinar que el menor valor de n que satisface esta desigualdad es $n = 3$. Por lo tanto, necesita el tercer polinomio de Taylor para lograr la precisión deseada en la aproximación $\ln(1.2)$. ■

...COMENTARIO Observe que cuando utiliza una calculadora,

$$P_3(1.2) \approx 0.1827$$

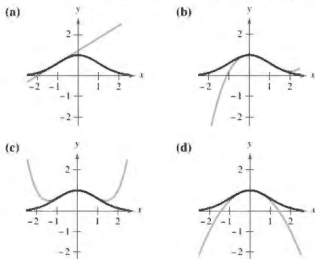
y

$$\ln(1.2) \approx 0.1823.$$

4.7 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Relacionar En los ejercicios 1-4, relacione el polinomio de aproximación de Taylor de la función $f(x) = e^{-x^2/2}$ con la gráfica correspondiente. [Las gráficas están etiquetadas (a), (b), (c) y (d).]



- $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$
- $g(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$
- $g(x) = e^{-1/2}[(x+1) + 1]$
- $g(x) = e^{-1/2}[\frac{1}{3}(x-1)^3 - (x-1) + 1]$

Gr Encontrar polinomios de aproximación de primer grado En los ejercicios 5-8, encuentre un polinomio de primer grado de la función P_1 cuyo valor y la pendiente coincidan con el valor y la pendiente de f en $x = c$. Use un programa de graficación para trazar f y P_1 . ¿A qué se llama P_1 ?

- $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{4}$, $c = 4$
- $f(x) = \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$, $c = 8$
- $f(x) = \sec x$, $c = \frac{\pi}{4}$
- $f(x) = \tan x$, $c = \frac{\pi}{4}$

Gr Análisis gráfico y numérico En los ejercicios 9 y 10, use una herramienta de graficación para trazar f y su polinomio de aproximación P_2 de segundo grado en $x = c$. Complete el cuadro comparativo de los valores de f y P_2 .

- $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$, $c = 1$
 $P_2(x) = 4 - 2(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2$

x	0	0.8	0.9	1	1.1	1.2	2
$f(x)$							
$P_2(x)$							

- $f(x) = \sec x$, $c = \frac{\pi}{4}$

$$P_2(x) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2}\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

x	-2.15	0.585	0.685	$\frac{\pi}{4}$	0.885	0.985	1.785
$f(x)$							
$P_2(x)$							

- Conjetura** Considere la función $f(x) = \cos x$ y sus polinomios de Maclaurin P_2 , P_4 y P_6 (vea el ejemplo 5).

- Use una herramienta de graficación para trazar f y las aproximaciones polinómicas indicadas.
- Evalúe y compare los valores de $f^{(n)}(0)$ y $P_n^{(n)}(0)$ para $n = 2, 4$ y 6 .
- Utilice los resultados en el inciso (b) para hacer una conjetura sobre $P_n^{(n)}(0)$.

- Conjetura** Considere la función $f(x) = x^2e^x$.

- Encuentre los polinomios de Maclaurin P_2 , P_3 y P_4 para f .
- Utilice un programa de graficación para trazar f , y P_2 , P_3 y P_4 .
- Evalúe y compare los valores de $f^{(n)}(0)$ y $P_n^{(n)}(0)$ para $n = 2, 3$ y 4 .
- Utilice los resultados en el inciso (c) para hacer una conjetura sobre $f^{(n)}(0)$ y $P_n^{(n)}(0)$.

Encontrar un polinomio de Maclaurin En los ejercicios 13-24, encuentre el polinomio de Maclaurin n -ésimo para la función.

- $f(x) = e^{2x}$, $n = 4$
- $f(x) = e^{-x}$, $n = 5$
- $f(x) = e^{-x/2}$, $n = 4$
- $f(x) = \cos \pi x$, $n = 4$
- $f(x) = \sin x$, $n = 5$
- $f(x) = \cos \pi x$, $n = 4$
- $f(x) = xe^x$, $n = 4$
- $f(x) = x^2e^{-x}$, $n = 4$
- $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $n = 5$
- $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $n = 4$
- $f(x) = \sec x$, $n = 2$
- $f(x) = \tan x$, $n = 3$

Encontrar un polinomio de Taylor En los ejercicios 25-30, encuentre el polinomio de Taylor n -ésimo con centro en c .

- $f(x) = \frac{2}{x}$, $n = 3$, $c = 1$
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $n = 4$, $c = 2$
- $f(x) = \sqrt{x}$, $n = 3$, $c = 4$
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $n = 3$, $c = 8$
- $f(x) = \ln x$, $n = 4$, $c = 2$
- $f(x) = x^2 \cos x$, $n = 2$, $c = \pi$

47 Encontrar polinomios de Taylor usando tecnología En los ejercicios 31 y 32, utilice un sistema de álgebra computacional para encontrar los polinomios de Taylor indicados para la función f . Represente gráficamente la función y los polinomios de Taylor.

31. $f(x) = \tan \pi x$ 32. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$
 (a) $n = 3, c = 0$ (a) $n = 4, c = 0$
 (b) $n = 3, c = 1/4$ (b) $n = 4, c = 1$

33. Aproximaciones numéricas y gráficas

- (a) Complete la tabla utilizando los polinomios de Maclaurin $P_1(x)$, $P_3(x)$ y $P_5(x)$ para $f(x) = \sin x$.

x	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$\sin x$	0	0.2474	0.4794	0.6816	0.8415
$P_1(x)$					
$P_3(x)$					
$P_5(x)$					

- 48** (b) Utilice una herramienta de graficación para trazar $f(x) = \sin x$ y los polinomios de Maclaurin en el inciso (a).
 (c) Describa el cambio en la precisión de una aproximación polinómica cuando aumenta la distancia desde el punto donde el polinomio está centrado.

34. Aproximaciones numéricas y gráficas

- (a) Complete la tabla utilizando los polinomios de Taylor $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_4(x)$ para $f(x) = e^x$ centrados en $c = 1$.

x	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
e^x	e	3.4903	4.4817	5.7546	7.3891
$P_1(x)$					
$P_2(x)$					
$P_4(x)$					

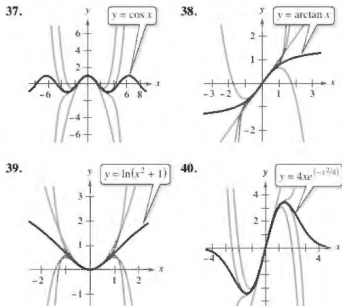
- 49** (b) Utilice una herramienta de graficación para trazar $f(x) = e^x$ y los polinomios de Taylor en el inciso (a).
 (c) Describa el cambio en la precisión de las aproximaciones polinómicas cuando el grado aumenta.

Aproximaciones numéricas y gráficas En los ejercicios 35 y 36, (a) encuentre el polinomio de Maclaurin $P_3(x)$ para $f(x)$, y (b) complete la tabla para $f(x)$ y $P_3(x)$ y (c) trace las gráficas de $f(x)$ y $P_3(x)$ sobre el mismo conjunto de ejes coordenados.

x	-0.75	-0.50	-0.25	0	0.25	0.50	0.75
$f(x)$							
$P_3(x)$							

35. $f(x) = \arcsen x$ 36. $f(x) = \arctan x$

Identificar polinomios de Maclaurin En los ejercicios 37-40, se muestra la gráfica de $y = f(x)$ con cuatro de sus polinomios de Maclaurin. Identifique los polinomios de Maclaurin y use una herramienta de graficación para confirmar sus resultados.



Aproximar el valor de una función En los ejercicios 41-44, aproxime la función en el valor dado de x utilizando el polinomio encontrado en el ejercicio indicado.

41. $f(x) = e^{4x}$, $f\left(\frac{1}{4}\right)$, Ejercicio 13
 42. $f(x) = x^2 e^{-x}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, Ejercicio 20
 43. $f(x) = \ln x$, $f(2.1)$, Ejercicio 29
 44. $f(x) = x^2 \cos x$, $f\left(\frac{7\pi}{8}\right)$, Ejercicio 30

Usar el teorema de Taylor En los ejercicios 45-48, use el teorema de Taylor para obtener una cota superior para el error de la aproximación. A continuación, calcule el valor exacto del error.

45. $\cos(0.3) = 1 - \frac{(0.3)^2}{2!} + \frac{(0.3)^4}{4!}$
 46. $e \approx 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!}$
 47. $\arcsen(0.4) \approx 0.4 + \frac{(0.4)^3}{2 \cdot 3}$
 48. $\arctan(0.4) \approx 0.4 - \frac{(0.4)^3}{3}$

Encontrar un grado En los ejercicios 49-52, determine el grado del polinomio de Maclaurin requerido para que el error en la aproximación de la función en el valor indicado sea menor que 0.001.

49. $\sen(0.3)$
 50. $\cos(0.1)$
 51. $e^{0.6}$
 52. $\ln(1.25)$

64. Encontrar un grado utilizando tecnología En los ejercicios 53 y 54, determine el grado del polinomio de Maclaurin requerido para que el error en la aproximación de la función en el valor indicado de x sea menor que 0.001. Utilice un sistema de álgebra computacional para obtener y evaluar la derivada requerida.

53. $f(x) = \ln(x + 1)$, aproximada $f(0.5)$.

54. $f(x) = e^{-ax}$, aproximada $f(1.3)$.

Encontrar valores En los ejercicios 55-58, determine los valores de x para los que la función puede ser reemplazada por el polinomio de Taylor si el error no puede exceder de 0.001.

55. $f(x) = e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$, $x < 0$

56. $f(x) = \sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$

57. $f(x) = \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

58. $f(x) = e^{-2x} \approx 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

59. Aproximación polinómica Una función elemental se aproxima por un polinomio. Con sus propias palabras, describa lo que significa decir que el polinomio se desarrolla alrededor de c o está centrado en c .

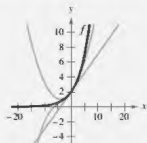
60. Aproximación polinómica Cuando una función elemental f se aproxima por un polinomio P_2 de segundo grado centrado en c , ¿qué es lo que se conoce acerca de f y P_2 en c ? Explique su razonamiento.

61. Polinomio de Taylor Escriba la definición de un polinomio de Taylor de grado n -ésimo de f centrado en c .

62. Precisión de un polinomio de Taylor Describa la precisión del polinomio de Taylor de n -ésimo grado de f centrado en c cuando la distancia entre c y x aumenta.

63. Precisión de un polinomio de Taylor En general, ¿cómo cambia la precisión de un polinomio de Taylor cuando aumenta el grado de los polinomios? Explique su razonamiento.

64. ¿CÓMO LO VE? Las gráficas muestran las aproximaciones polinómicas P_1 , P_2 y P_3 de primero, segundo y tercer grado de una función f . Etiquete las gráficas de P_1 , P_2 y P_3 . Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite MathGraphs.com.



65. Comparar polinomios de Maclaurin

(a) Compare los polinomios de Maclaurin de grado 4 y 5, respectivamente, para las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = xe^x$. ¿Cuál es la relación entre ellos?

(b) Utilice el resultado en el inciso (a) y el polinomio de Maclaurin de grado 5 para $f(x) = \sin x$ para encontrar un polinomio de Maclaurin de grado 6 para la función $g(x) = x \sin x$.

(c) Use el resultado del inciso (a) y el polinomio de Maclaurin de grado 5 para $f(x) = \sin x$ para encontrar un polinomio de Maclaurin de grado 4 para la función $g(x) = (\sin x)/x$.

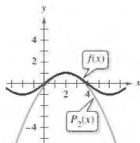
66. Derivar polinomios de Maclaurin

(a) Derive el polinomio de Maclaurin de grado 5 para $f(x) = \sin x$ y compare el resultado con el polinomio de Maclaurin de grado 4 para $g(x) = \cos x$.

(b) Derive el polinomio de Maclaurin de grado 6 para $f(x) = \cos x$ y compare el resultado con el polinomio de Maclaurin de grado 5 de $g(x) = \sin x$.

(c) Derive el polinomio de Maclaurin de grado 4 para $f(x) = e^x$. Describa la relación entre las dos series.

67. Razonamiento gráfico La figura muestra las gráficas de la función $f(x) = \sin(\pi x/4)$ y el polinomio de Taylor de segundo grado $P_2(x) = 1 - (\pi^2/32)(x - 2)^2$ centrado en $x = 2$.



(a) Utilice la simetría de la gráfica de escribir el polinomio de Taylor de segundo grado para $Q_2(x)$ centrado en $x = -2$.

(b) Utilice una traslación horizontal del resultado en el inciso (a) para encontrar el polinomio de Taylor de segundo grado para $R_2(x)$ centrado en $x = 6$.

(c) ¿Es posible utilizar una traslación horizontal del resultado en el inciso (a) para escribir un polinomio de Taylor de segundo grado de f centrado en $x = 4$? Explique.

68. Demostración Demuestre que si f es una función impar, entonces su n -ésimo polinomio de Maclaurin contiene solo términos con potencias impares de x .

69. Demostración Demuestre que si f es una función par, entonces su n -ésimo polinomio de Maclaurin contiene solo términos con potencias pares de x .

70. Demostración Sea $P_n(x)$ el polinomio de Taylor n -ésimo de f en c . Demuestre que $P_n(c) = f(c)$ y $P_n^{(k)}(c) = f^{(k)}(c)$ para $1 \leq k \leq n$. (Vea los ejercicios 9 y 10.)

71. Redacción La demostración en el ejercicio 70 garantiza que el polinomio de Taylor y sus derivadas coinciden con la función y sus derivadas en $x = c$. Utilice las gráficas y las tablas de los ejercicios 33 a 36 para analizar lo que ocurre con la precisión del polinomio de Taylor conforme se aleja de $x = c$.

4.8 Series de potencias

- Comprender la definición de una serie de potencias.
- Encontrar el radio y el intervalo de convergencia de una serie de potencias.
- Determinar la convergencia del punto terminal de una serie de potencias.
- Derivar e integrar una serie de potencias.

Series de potencias

En la sección 4.7 se detalló el concepto de aproximación de funciones por polinomios de Taylor. Por ejemplo, la función $f(x) = e^x$ se puede *aproximar* por su polinomio de Maclaurin de tercer grado

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

En esa sección, se vio que cuanto mayor es el grado del polinomio de aproximación, mejor será la aproximación que se hace.

En esta y en las siguientes dos secciones, verá que varios tipos importantes de funciones, incluyendo $f(x) = e^x$, se pueden representar *exactamente* por una serie infinita llamada **serie de potencias**. Por ejemplo, la representación en serie de potencias para e^x es

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

Para cada número real x , se puede demostrar que la serie infinita a la derecha converge al número e^x . Sin embargo, antes de hacer esto se analizarán algunos resultados preliminares relacionados con series de potencias, comenzando con la siguiente definición.

Definición de serie de potencias

Si x es una variable, entonces una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

se llama **serie de potencias**. En términos más generales, una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n = a_0 + a_1 (x - c) + a_2 (x - c)^2 + \cdots + a_n (x - c)^n + \cdots$$

se llama **serie de potencias centrada en c** , donde c es una constante.

EJEMPLO 1

Serie de potencias

- a. La siguiente serie de potencias está centrada en 0.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

- b. La siguiente serie de potencias está centrada en -1 .

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x + 1)^n = 1 - (x + 1) + (x + 1)^2 - (x + 1)^3 + \cdots$$

- c. La siguiente serie de potencias está centrada en 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x - 1)^n = (x - 1) + \frac{1}{2} (x - 1)^2 + \frac{1}{3} (x - 1)^3 + \cdots$$

Exploración

Razonamiento gráfico Utilice una herramienta de graficación para aproximar la gráfica de cada serie de potencias cerca de $x = 0$. (Utilice los primeros términos de cada serie.) Cada serie representa una función conocida. ¿Cuál es la función?

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

c. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

d. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

e. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$

.....▶
 ••••• **COMENTARIO** Para simplificar la notación para las series de potencias, suponga que $(x - c)^0 = 1$, incluso cuando $x = c$.

Radio e intervalo de convergencia

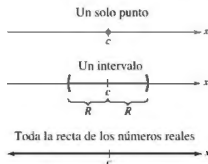
Una serie de potencias en x se puede ver como una función de x

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$$

donde el *dominio de f* es el conjunto de todos los x para los que la serie de potencias converge. La determinación del dominio de una serie de potencias es la principal preocupación en esta sección. Por supuesto, cada serie de potencias converge en el centro c porque

$$\begin{aligned} f(c) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(c - c)^n \\ &= a_0(1) + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots \\ &= a_0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, c radica siempre en el dominio de f . El teorema 4.20 (ver a continuación) establece que el dominio de una serie de potencias puede tomar tres formas básicas: un solo punto, un intervalo centrado en c o toda la recta de los números reales, como se muestra en la figura 4.17.



El dominio de una serie de potencias solo tiene tres formas básicas: un solo punto, un intervalo centrado en c o toda la recta real.

Figura 4.17

TEOREMA 4.20 Convergencia de una serie de potencias

Para una serie de potencias centrada en c , precisamente una de las siguientes situaciones es verdadera.

1. La serie converge solo en c .
2. Existe un número real $R > 0$ tal que la serie converge absolutamente

$$|x - c| < R$$

y diverge para

$$|x - c| > R.$$

3. La serie converge absolutamente para todo x .

El número R es el **radio de convergencia** de la serie de potencias. Si la serie converge solo en c , entonces el radio de convergencia es $R = 0$. Si la serie converge para todo x , entonces el radio de convergencia es $R = \infty$. El conjunto de todos los valores de x para los que la serie de potencias converge es el **intervalo de convergencia** de la serie de potencias.

En el apéndice A se presenta una demostración de este teorema.

Consulte *LarsonCalculus.com* para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

Para determinar el radio de convergencia de una serie de potencias, utilice el criterio del cociente, como se demuestra en los ejemplos 2, 3 y 4.

EJEMPLO 2 Encontrar el radio de convergencia

Encuentre el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

Solución Para $x = 0$, obtiene

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} n!0^n = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

Para cualquier valor fijo de x tal que $|x| > 0$, sea $u_n = n!x^n$. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, por el criterio del cociente, la serie diverge para $|x| > 0$ y converge solo en el centro, 0. Así, el radio de convergencia es $R = 0$.

EJEMPLO 3 Encontrar el radio de convergencia

Encuentre el radio de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(x-2)^n.$$

Solución Para $x \neq 2$, sea $u_n = 3(x-2)^n$. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3(x-2)^{n+1}}{3(x-2)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x-2| \\ &= |x-2|. \end{aligned}$$

Por el criterio del cociente, la serie converge para $|x-2| < 1$ y diverge para $|x-2| > 1$. Por tanto, el radio de convergencia de la serie es $R = 1$.

EJEMPLO 4 Encontrar el radio de convergencia

Encuentre el radio de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Solución Sea $u_n = (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{(-1)^n x^{2n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)}. \end{aligned}$$

Para cualquier valor fijo de x , este límite es 0. Por tanto, por el criterio del cociente, la serie converge para toda x . Así que el radio de convergencia es $R = \infty$.

Convergencia en los puntos terminales

Observe que para una serie de potencias cuyo radio de convergencia es un número finito R , el teorema 4.20 no dice nada sobre la convergencia en los puntos terminales del intervalo de convergencia. Cada extremo debe ser probado por separado para la convergencia o divergencia. Como resultado, el intervalo de convergencia de una serie de potencias puede tomar cualquiera de las seis formas mostradas en la figura 4.18.

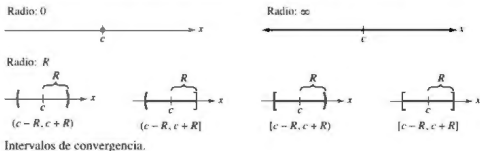


Figura 4.18

EJEMPLO 5 Encontrar el intervalo de convergencia

Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre el intervalo de convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Solución Hacer $u_n = x^n/n$ produce

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{n}{x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{nx}{n+1} \right| \\ &= |x|. \end{aligned}$$

Así, por el criterio del cociente, el radio de convergencia es $R = 1$. Además, debido a que la serie está centrada en 0, converge en el intervalo $(-1, 1)$. Sin embargo, este intervalo no es necesariamente el *intervalo de convergencia*. Para determinar esto, se debe probar la convergencia en cada punto terminal. Cuando $x = 1$, obtiene la serie armónica *divergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \quad \text{Diverge cuando } x = 1.$$

Cuando $x = -1$, obtiene la serie armónica alternante *convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots \quad \text{Converge cuando } x = -1.$$

Así, el intervalo de convergencia de la serie es $[-1, 1)$, como se muestra en la figura 4.19.

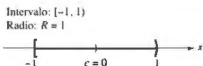


Figura 4.19

EJEMPLO 6 Encontrar el intervalo de convergencia

Encuentre el intervalo de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+1)^n}{2^n}$.

Solución Hacer $u_n = (-1)^n(x+1)^n/2^n$ produce

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(x+1)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(-1)^n(x+1)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n(x+1)}{2^{n+1}} \right| \\ &= \left| \frac{x+1}{2} \right|.\end{aligned}$$

Por el criterio del cociente, la serie converge para

$$\left| \frac{x+1}{2} \right| < 1$$

o $|x+1| < 2$. Por tanto, el radio de convergencia es $R = 2$. Debido a que la serie está centrada en $x = -1$, converge sobre el intervalo $(-3, 1)$. Además, para los puntos terminales, se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \quad \text{Diverge cuando } x = -3,$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \quad \text{Diverge cuando } x = 1.$$

ambos divergen. Por tanto, el intervalo de convergencia es $(-3, 1)$ como se muestra en la figura 4.20.



Figura 4.20

EJEMPLO 7 Encontrar el intervalo de convergencia

Encuentre el intervalo de convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Solución Hacer $u_n = x^n/n^2$ produce

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}/(n+1)^2}{x^n/n^2} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2 x}{(n+1)^2} \right| \\ &= |x|.\end{aligned}$$

Por tanto, el radio de convergencia es $R = 1$. Debido a que la serie está centrada en $x = 0$, esta converge sobre el intervalo $(-1, 1)$. Cuando $x = 1$, obtiene una serie p convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \quad \text{Converge cuando } x = 1.$$

Cuando $x = -1$, obtiene una serie alternante convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \cdots \quad \text{Converge cuando } x = -1.$$

Por tanto, el intervalo de convergencia es $[-1, 1]$.

**JAMES GREGORY (1638-1675)**

Uno de los primeros matemáticos en trabajar con series de potencias fue un escocés, James Gregory. Desarrolló un método de series de potencias para interpolar valores de la tabla, un método que fue utilizado más tarde por Brook Taylor en el desarrollo de los polinomios y series de Taylor.

Derivación e integración de series de potencias

La representación en serie de potencias de las funciones ha desempeñado un papel importante en el desarrollo del cálculo. De hecho, gran parte de la obra de Newton con la derivación y la integración se hizo en el contexto de la serie de potencias, sobre todo su trabajo con complicadas funciones algebraicas y funciones trascendentes. Euler, Lagrange, Leibniz y Bernoulli todos utilizaron ampliamente series de potencias en el cálculo.

Una vez que haya definido una función con una serie de potencias, es natural preguntarse cómo se puede determinar las características de la función. ¿Es continua? ¿Derivable? El teorema 4.21, que aparece sin demostración, responde a estas preguntas.

TEOREMA 4.21 Propiedades de las funciones definidas por series de potencias

Si la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \\ = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \dots$$

tiene un radio de convergencia de $R > 0$, entonces, en el intervalo

$$(c-R, c+R)$$

f es derivable (y por lo tanto continua). Por otra parte, la derivada y antiderivada son las siguientes.

- $$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-c)^{n-1} \\ = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \dots$$
- $$\int f(x) dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} \\ = C + a_0(x-c) + a_1 \frac{(x-c)^2}{2} + a_2 \frac{(x-c)^3}{3} + \dots$$

El *radio de convergencia* de la serie obtenida mediante la derivación o integración de una serie de potencias es el mismo que el de la serie de potencias original. Sin embargo, el *intervalo de convergencia* puede diferir como resultado del comportamiento en los puntos finales.

El teorema 4.21 establece que, en muchos sentidos, una función definida por una serie de potencias se comporta como un polinomio. Es continua en su intervalo de convergencia, y tanto su derivada y su antiderivada se pueden determinar mediante la derivación y la integración de cada término de la serie de potencias. Por ejemplo, la derivada de la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

es

$$f'(x) = 1 + (2) \frac{x}{2} + (3) \frac{x^2}{3!} + (4) \frac{x^3}{4!} + \dots \\ = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ = f(x).$$

Observe que $f'(x) = f(x)$. ¿Reconoce esta función?

EJEMPLO 8**Intervalos de convergencia para $f(x)$, $f'(x)$ y $\int f(x)dx$**

Considere la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

Encuentre el intervalo de convergencia para cada uno de los siguientes.

- a. $\int f(x) dx$ b. $f(x)$ c. $f'(x)$

Solución Por el teorema 4.21, tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \\ &= C + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \cdots \end{aligned}$$

Por el criterio del cociente, puede demostrar que cada serie tiene un radio de convergencia de $R = 1$. Considerando el intervalo $(-1, 1)$, tiene lo siguiente.

- a. Para $\int f(x) dx$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \quad \text{Intervalo de convergencia: } [-1, 1]$$

converge para $x = \pm 1$, y su intervalo de convergencia es $[-1, 1]$. Vea la figura 4.21(a).

- b. Para $f(x)$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{Intervalo de convergencia: } [-1, 1)$$

converge para $x = -1$ y diverge para $x = 1$. Por lo tanto, su intervalo de convergencia es $[-1, 1)$. Vea la figura 4.21(b).

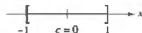
- c. Para $f'(x)$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \quad \text{Intervalo de convergencia: } (-1, 1)$$

diverge para $x = \pm 1$ y su intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. Vea la figura 4.21(c).

Intervalo: $[-1, 1]$

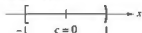
Radio: $R = 1$



(a)

Intervalo: $[-1, 1)$

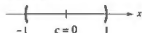
Radio: $R = 1$



(b)

Intervalo: $(-1, 1)$

Radio: $R = 1$



(c)

Figura 4.21

A partir del ejemplo 8, se observa que de las tres series, la de la derivada, $f'(x)$, es la menos probable que converja en los puntos finales. De hecho, se puede demostrar que si la serie para $f'(x)$ converge en los puntos finales

$$x = c \pm R$$

entonces la serie de $f(x)$ también convergerá allí.

4.8 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Encontrar el centro de una serie de potencias En los ejercicios 1-4, establezca en dónde está centrada la serie de potencias.

- $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^3}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-\pi)^{2n}}{(2n)!}$

Encontrar el radio de convergencia En los ejercicios 5-10, encuentre el radio de convergencia de la serie de potencias.

- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (3x)^n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n^2}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{5^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! x^{2n}}{n^4}$

Encontrar el intervalo de convergencia En los ejercicios 11-34, encuentre el intervalo de convergencia de la serie de potencias. (Asegúrese de incluir una comprobación para la convergencia en los puntos finales del intervalo.)

- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1)x^n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{5n}}{n!}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{(2n)!}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (2n)! \left(\frac{x}{3}\right)^n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)(n+2)}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{6^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!(x-5)^n}{3^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-4)^n}{n9^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^{n-1}}{n+1}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-2)^n}{n2^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n-1}}{3^{n-1}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} (-2x)^{n-1}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{5n+1}}{(3n+1)!}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(2n)!}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (n+1)x^n}{n!}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n+1)} \right] x^{2n+1}$

$$33. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (4n-1)(x-3)^n}{4^n}$$

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+1)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$$

Encontrar el radio de convergencia En los ejercicios 35 y 36, encuentre el radio de convergencia de la serie de potencias, donde $c > 0$ y k es un entero positivo.

$$35. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-c)^{n-1}}{c^{n-1}}$$

$$36. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^k x^n}{(kn)!}$$

Encontrar el intervalo de convergencia En los ejercicios 37-40, encuentre el intervalo de convergencia de la serie de potencias. (Asegúrese de incluir una comprobación para la convergencia en los extremos del intervalo.)

- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n, \quad k > 0$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-c)^n}{n e^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k+1)(k+2) \cdot \cdots \cdot (k+n-1)x^n}{n!}, \quad k \geq 1$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-c)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$

Escribir un serie equivalente En los ejercicios 41-44, escriba una serie equivalente con el índice de la suma a partir de $n = 1$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1)x^n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

Encontrar intervalos de convergencia En los ejercicios 45-48, encuentre los intervalos de convergencia de (a) $f(x)$, (b) $f'(x)$, (c) $f''(x)$ y (d) $\int f(x) dx$. Incluya una comprobación de la convergencia en los extremos del intervalo.

- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$
- $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-5)^n}{n5^n}$
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^{n+1}}{n+1}$
- $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-2)^n}{n}$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

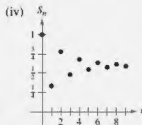
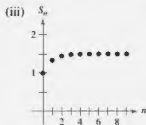
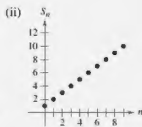
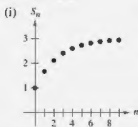
49. **Series de potencias** Defina una serie de potencias centrada en c .
50. **Radio de convergencia** Describa el radio de convergencia de una serie de potencias.
51. **Intervalo de convergencia** Describa el intervalo de convergencia de una serie de potencias.
52. **Dominió de una serie de potencias** Describa las tres formas básicas del dominio de una serie de potencias.
53. **Utilizar una serie de potencias** Describa cómo derivar e integrar una serie de potencias con un radio de convergencia R . ¿La serie resultante de las operaciones de derivación e integración tiene un radio de convergencia diferente? Explique.
54. **Convergencia condicional o absoluta** Dé ejemplos que demuestren que la convergencia de una serie de potencias en un punto extremo de su intervalo de convergencia puede ser condicional o absoluta. Explique su razonamiento.
55. **Escribir una serie de potencias** Escriba una serie de potencias que tiene el intervalo de convergencia indicado. Explique su razonamiento.
(a) $(-2, 2)$ (b) $(-1, 1)$
(c) $(-1, 0)$ (d) $[-2, 6)$

56.

¿CÓMO LO VE? Relacione la gráfica de los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales de la serie

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

con el valor indicado de la función. [Las gráficas están etiquetadas (i), (ii), (iii) y (iv).] Explique cómo hizo su elección.



- (a) $g(1)$
(c) $g(3)$

- (b) $g(2)$
(d) $g(-2)$

57. Usar una serie de potencias Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

- (a) Determine los intervalos de convergencia de f y g .
(b) Demuestre que $f'(x) = g(x)$.
(c) Demuestre que $g'(x) = -f(x)$.
(d) Identifique las funciones f y g .

58. Usar una serie de potencias Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

- (a) Determine los intervalos de convergencia de f .
(b) Demuestre que $f'(x) = f(x)$.
(c) Demuestre que $f(0) = 1$.
(d) Identifique la función f .

Ecuaciones diferenciales En los ejercicios 59-64, demuestre que la función representada por la serie de potencias es una solución de la ecuación diferencial.

59. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $y'' + y = 0$

60. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $y'' + y = 0$

61. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $y'' - y = 0$

62. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $y'' - y = 0$

63. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{2^n n!}$, $y'' - xy' - y = 0$

64. $y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{2^{2n} n! \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n-1)}$,
 $y'' + x^2 y = 0$

65. **Función de Bessel** La función de Bessel de orden 0 es

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}.$$

- (a) Demuestre que la serie converge para todo x .
(b) Demuestre que la serie es una solución de la ecuación diferencial $x^2 J_0'' + x J_0' + x^2 J_0 = 0$.
(c) Use una herramienta de graficación para trazar el polinomio compuesto por los cuatro primeros términos de J_0 .
(d) Aproxime $\int_0^1 J_0 dx$ con precisión de dos cifras decimales.

66. **Función de Bessel** La función de Bessel de orden 1 es

$$J_1(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k+1} k!(k+1)!}.$$

- (a) Demuestre que la serie converge para todo x .
(b) Demuestre que la serie es una solución de la ecuación diferencial $x^2 J_1'' + x J_1' + (x^2 - 1) J_1 = 0$.
(c) Use una herramienta de graficación para trazar el polinomio compuesto por los cuatro primeros términos de J_1 .
(d) Demuestre que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

67. Investigación El intervalo de convergencia de la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n$ es $(-4, 4)$.

- (a) Halle la suma de la serie cuando $x = \frac{5}{2}$. Use una herramienta de graficación para trazar los primeros seis términos de la sucesión de sumas parciales y la recta horizontal que representa la suma de la serie.
- (b) Repita el inciso (a) para $x = -\frac{5}{2}$.
- (c) Escriba un párrafo breve comparando la rapidez de convergencia de las sumas parciales con las sumas de las series en los incisos (a) y (b). ¿En qué difieren las gráficas de las sumas parciales, ya que convergen hacia la suma de la serie?
- (d) Dado cualquier número M real positivo, existe un número entero positivo N tal que la suma parcial

$$\sum_{n=0}^N \left(\frac{5}{4}\right)^n > M.$$

Use una herramienta de graficación para completar la tabla.

M	10	100	1000	10,000
N				

68. Investigación El intervalo de convergencia de la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$ es $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

- (a) Halle la suma de la serie cuando $x = \frac{1}{5}$. Use una herramienta de graficación para trazar los primeros seis términos de la sucesión de sumas parciales y la recta horizontal que representa la suma de la serie.
- (b) Repita el inciso (a) para $x = -\frac{1}{5}$.
- (c) Escriba un párrafo breve comparando la rapidez de convergencia de las sumas parciales con las sumas de las series en los incisos (a) y (b). ¿En qué difieren las gráficas de las sumas parciales cuando convergen hacia la suma de la serie?
- (d) Dado cualquier número M real positivo, existe un número entero positivo N tal que la suma parcial

$$\sum_{n=0}^N \left(3 \cdot \frac{2}{3}\right)^n > M.$$

Use una herramienta de graficación para completar la tabla.

M	10	100	1000	10,000
N				

Identificar una función En los ejercicios 69-72, la serie representa una función conocida. Utilice un sistema de álgebra computacional para representar gráficamente la suma parcial S_{10} e identifique la función de la gráfica.

$$69. f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$70. f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$71. f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad -1 < x < 1$$

$$72. f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 \leq x \leq 1$$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 73-76, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

73. Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $x = 2$, entonces también converge para $x = -2$.

74. Es posible encontrar una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia es $[0, \infty)$.

75. Si el intervalo de convergencia para $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es $(-1, 1)$, entonces el intervalo de convergencia para $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ es $(0, 2)$.

76. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $|x| < 2$, entonces

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}.$$

77. **Demostración** Demuestre que la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!(n+q)!} x^n$$

tiene un radio de convergencia de $R = \infty$ cuando p y q son números enteros positivos.

78. Usar una serie de potencias Sea

$$g(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + \dots$$

donde los coeficientes son $c_{2n} = 1$ y $c_{2n-1} = 2$ para $n \geq 0$.

- (a) Encuentre el intervalo de convergencia de la serie.
 (b) Encuentre una fórmula explícita para $g(x)$.

79. Usar una serie de potencias Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, donde $c_{2n+3} = c_n$ para $n \geq 0$.

- (a) Encuentre el intervalo de convergencia de la serie.
 (b) Encuentre una fórmula explícita para $f(x)$.

80. **Demostración** Demuestre que si la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n}$$

tiene un radio de convergencia de \sqrt{R} .

81. **Demostración** Para $n > 0$, sea $R > 0$ y $c_n > 0$. Demuestre que si el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

es $[x_0 - R, x_0 + R]$, entonces la serie converge condicionalmente en $x_0 - R$.

4.9 Representación de funciones por series de potencias

- Encontrar una serie de potencias geométrica que represente una función.
- Construir una serie de potencias utilizando series de operaciones.

Serie de potencias geométrica

En esta sección y en la siguiente, se estudiarán varias técnicas para encontrar una serie de potencias que represente una función. Considere la función

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

La forma de f se parece mucho a la suma de una serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \quad 0 < |r| < 1.$$

En otras palabras, cuando $a = 1$ y $r = x$, una representación en serie de potencias para $1/(1-x)$, centrada en 0, es

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} ar^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

Por supuesto, esta serie representa $f(x) = 1/(1-x)$ solo en el intervalo $(-1, 1)$, mientras que f está definida para todo $x \neq 1$, como se muestra en la figura 4.22. Para representar f en otro intervalo, debe desarrollar una serie diferente. Por ejemplo, para obtener la serie de potencias centrada en -1 , se podría escribir

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2-(x+1)} = \frac{1/2}{1-[(x+1)/2]} = \frac{a}{1-r}$$

lo que implica que $a = 1/2$ y $r = (x+1)/2$. Así, para $|x+1| < 2$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{x+1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{(x+1)}{2} + \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(x+1)^3}{8} + \cdots \right], \quad |x+1| < 2 \end{aligned}$$

que converge en el intervalo $(-3, 1)$.

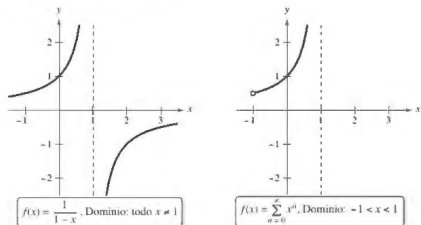


Figura 4.22

The Granger Collection



JOSEPH FOURIER (1768-1830)

Algunos de los primeros trabajos en la representación de funciones por series de potencias fueron hechos por el matemático francés Joseph Fourier. El trabajo de Fourier es importante en la historia del cálculo, en parte porque obligó a los matemáticos del siglo XVIII a cuestionar el entonces prevaiente concepto restringido de una función. Cauchy y Dirichlet estuvieron motivados por el trabajo de Fourier con series, y en 1837 Dirichlet publicó la definición general de una función que se utiliza actualmente.

EJEMPLO 1 Encontrar una serie de potencias geométrica centrada en 0

Encuentre una serie de potencias para $f(x) = \frac{4}{x+2}$, centrada en 0.

Solución Escriba $f(x)$ en la forma $a/(1-r)$ para obtener

$$\frac{4}{2+x} = \frac{2}{1 - (-x/2)} = \frac{a}{1-r}$$

lo que implica que $a = 2$ y

$$r = -\frac{x}{2}.$$

Así, la serie de potencias para $f(x)$ es

$$\begin{aligned} \frac{4}{x+2} &= \sum_{n=0}^{\infty} ar^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2 \left(-\frac{x}{2} \right)^n \\ &= 2 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \dots \right). \end{aligned}$$

Esta serie de potencias converge cuando

$$\left| -\frac{x}{2} \right| < 1$$

que implica que el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$.

Otra manera de determinar una serie de potencias de una función racional como en el ejemplo 1 es utilizar la división larga. Por ejemplo, al dividir $2+x$ entre 4 , se obtiene el resultado que se muestra a la izquierda.

División larga

$$\begin{array}{r} 2 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \dots \\ 2 + x \overline{) 4} \\ \underline{4 + 2x} \\ -2x - x^2 \\ \underline{-2x - x^2} \\ x^2 + \frac{1}{2}x^3 \\ \underline{-\frac{1}{2}x^3} \\ -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \end{array}$$

EJEMPLO 2 Encontrar una serie de potencias geométrica centrada en 1

Encuentre una serie de potencias para $f(x) = \frac{1}{x}$, centrada en 1.

Solución Escriba $f(x)$ en la forma $a/(1-r)$ para obtener

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1 - (-x+1)} = \frac{a}{1-r}$$

lo que implica que $a = 1$ y $r = 1 - x = -(x-1)$. Así, la serie de potencias para $f(x)$ es

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} ar^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [-(x-1)]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \\ &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots \end{aligned}$$

Esta serie de potencias converge cuando

$$|x-1| < 1$$

que implica que el intervalo de convergencia es $(0, 2)$.

Operaciones con series de potencias

La versatilidad de la serie de potencias geométrica se mostrará más adelante en esta sección, después de una discusión acerca de las operaciones con series de potencia. Estas operaciones, que se utilizan con la derivación y la integración, constituyen un medio para el desarrollo en series de potencias para una variedad de funciones elementales. (Por simplicidad, las operaciones se registran para una serie centrada en 0.)

Operaciones con series de potencias

$$\text{Sea } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ y } g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

$$1. f(kx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$$

$$2. f(x^N) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{nN}$$

$$3. f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

Las operaciones descritas anteriormente pueden cambiar el intervalo de convergencia de la serie resultante. Por ejemplo, en la adición que se muestra a continuación, el intervalo de convergencia de la suma es la *intersección* de los intervalos de convergencia de las dos series originales.

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{(-1, 1)} \cap \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n}_{(-2, 2)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n}_{(-1, 1)}$$

EJEMPLO 3

Sumar dos series de potencias

Encuentre una serie de potencias para

$$f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - 1}$$

centrada en 0.

Solución Usando fracciones parciales, puede escribir $f(x)$ como

$$\frac{3x - 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{x + 1} + \frac{1}{x - 1}.$$

Al sumar las dos series de potencias geométricas

$$\frac{2}{x + 1} = \frac{2}{1 - (-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

y

$$\frac{1}{x - 1} = \frac{-1}{1 - x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

obtiene la serie de potencias siguiente.

$$\begin{aligned} \frac{3x - 1}{x^2 - 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} [2(-1)^n - 1] x^n \\ &= 1 - 3x + x^2 - 3x^3 + x^4 - \dots \end{aligned}$$

El intervalo de convergencia para esta serie de potencias es $(-1, 1)$.

EJEMPLO 4 Encontrar una serie de potencias por integración

Encuentre una serie de potencias para

$$f(x) = \ln x$$

centrada en 1.

Solución Del ejemplo 2, sabe que

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n. \quad \text{Intervalo de convergencia: } (0, 2)$$

Integrando esta serie obtiene

$$\begin{aligned} \ln x &= \int \frac{1}{x} dx + C \\ &= C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Al permitir que $x = 1$, puede concluir que $C = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \ln x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{(x-1)}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots \quad \text{Intervalo de convergencia: } (0, 2) \end{aligned}$$

Advierta que la serie converge en $x = 2$. Esto es consistente con la observación de la sección anterior que la integración de una serie de potencias puede alterar la convergencia en los puntos finales del intervalo de convergencia. ■

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para leer sobre la búsqueda de una serie de potencias utilizando integración por partes, consulte el artículo "Integration by Parts and Infinite Series", por Shelby J. Kilmer, en *Mathematics Magazine*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

En la sección 4.7, ejemplo 4, el polinomio de Taylor de cuarto grado para la función logaritmo natural

$$\ln x \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$$

se utilizó para aproximar $\ln(1.1)$.

$$\begin{aligned} \ln(1.1) &\approx (0.1) - \frac{1}{2}(0.1)^2 + \frac{1}{3}(0.1)^3 - \frac{1}{4}(0.1)^4 \\ &\approx 0.0953083 \end{aligned}$$

Ahora, del ejemplo 4 en esta sección, se sabe que este polinomio representa los cuatro primeros términos de la serie de potencias para $\ln x$. Por otra parte, utilizando el residuo de la serie alternante, se puede determinar que el error en esta aproximación es menor que

$$\begin{aligned} |R_4| &\leq |a_5| \\ &= \frac{1}{5}(0.1)^5 \\ &= 0.000002. \end{aligned}$$

Durante los siglos XVII y XVIII, las tablas matemáticas para logaritmos y valores de otras funciones trascendentes fueron calculadas de esta manera. Estas técnicas numéricas están lejos de ser obsoletas, porque es precisamente con estos medios que se programan muchos dispositivos de cálculo modernos para evaluar funciones trascendentes.

EJEMPLO 5

Encontrar una serie de potencias por integración

Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.



SRINIVASA RAMANUJAN
(1887-1920)

El hecho de que se pueda utilizar una serie para aproximar π ha interesado a los matemáticos durante los últimos 300 años. Una serie increíble para la aproximación de $1/\pi$ fue descubierta en 1914 por el matemático hindú Srinivasa Ramanujan (vea el ejercicio 61). Cada término sucesivo de la serie de Ramanujan añade aproximadamente ocho cifras correctas más al valor de $1/\pi$.

Para obtener información adicional sobre el trabajo de Ramanujan, consulte el artículo "Ramanujan and π ", por Jonathan M. Borwein y Peter B. Borwein, en *Scientific American*.

Consulte LarsonCalculus.com para leer más de esta biografía.

Encuentre una serie de potencias para

$$g(x) = \arctan x$$

centrada en 0.

Solución Debido a que $D_x[\arctan x] = 1/(1+x^2)$, se puede utilizar la serie

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n. \quad \text{Intervalo de convergencia: } (-1, 1)$$

Sustituyendo x^2 para x se obtiene

$$f(x^2) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Por último, integrando se obtiene

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int \frac{1}{1+x^2} dx + C \\ &= C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{Sea } x=0, \text{ entonces } C=0. \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad \text{Intervalo de convergencia: } (-1, 1) \end{aligned}$$

Se puede demostrar que la serie de potencias desarrollada para $\arctan x$ en el ejemplo 5 también converge (a $\arctan x$) para ± 1 . Por ejemplo, cuando $x=1$, se puede escribir

$$\begin{aligned} \arctan 1 &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Sin embargo, esta serie (desarrollada por James Gregory en 1671) no nos da una forma práctica de la aproximación de π porque converge tan lentamente que cientos de términos tendrían que ser utilizados para obtener una precisión razonable. El ejemplo 6 muestra cómo usar dos series arcotangente diferentes para obtener una muy buena aproximación de π usando solo unos cuantos términos. Esta aproximación fue desarrollada por John Machin en 1706.

EJEMPLO 6

Aproximar π por medio de una serie

Utilice la identidad trigonométrica

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

para aproximar el número π [vea el ejercicio 46(b)].

Solución Mediante el uso de solo cinco términos de cada una de las series de $\arctan(1/5)$ y $\arctan(1/239)$, obtiene

$$4 \left(4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \right) \approx 3.1415926$$

que concuerda con el valor exacto de π con un error menor que 0.0000001.

■ PARA INFORMACIÓN ADICIONAL

Para leer acerca de otros métodos para aproximar π consulte el artículo "Two Methods for Approximating π ", por Chien-Lih Hwang, en *Mathematics Magazine*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

4.9 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Encontrar una serie de potencias geométrica En los ejercicios 1-4, encuentre una serie de potencias geométrica para la función, con centro en 0, (a) por la técnica mostrada en los ejemplos 1 y 2, y (b) por la división larga.

1. $f(x) = \frac{1}{4-x}$

2. $f(x) = \frac{1}{2+x}$

3. $f(x) = \frac{4}{3+x}$

4. $f(x) = \frac{2}{5-x}$

Encontrar una serie de potencias En los ejercicios 5-16, encuentre una serie de potencias de la función, con centro en c , y determine el intervalo de convergencia.

5. $f(x) = \frac{1}{3-x}$, $c = 1$

6. $f(x) = \frac{2}{6-x}$, $c = -2$

7. $f(x) = \frac{1}{1-3x}$, $c = 0$

8. $h(x) = \frac{1}{1-5x}$, $c = 0$

9. $g(x) = \frac{5}{2x-3}$, $c = -3$

10. $f(x) = \frac{3}{2x-1}$, $c = 2$

11. $f(x) = \frac{3}{3x+4}$, $c = 0$

12. $f(x) = \frac{4}{3x+2}$, $c = 3$

13. $g(x) = \frac{4x}{x^2+2x-3}$, $c = 0$

14. $g(x) = \frac{3x-8}{3x^2+5x-2}$, $c = 0$

15. $f(x) = \frac{2}{1-x^2}$, $c = 0$

16. $f(x) = \frac{5}{5+x^2}$, $c = 0$

Usar una serie de potencias En los ejercicios 17-26, utilice la serie de potencias

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

para determinar una serie de potencias, centrada en 0, para la función. Identifique el intervalo de convergencia.

17. $h(x) = \frac{-2}{x^2-1} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$

18. $h(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2(1-x)}$

19. $f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x+1} \right]$

20. $f(x) = \frac{2}{(x+1)^3} = \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{1}{x+1} \right]$

21. $f(x) = \ln(x+1) = \int \frac{1}{x+1} dx$

22. $f(x) = \ln(1-x^2) = \int \frac{1}{1+x} dx - \int \frac{1}{1-x} dx$

23. $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

24. $f(x) = \ln(x^2+1)$

25. $h(x) = \frac{1}{4x^2+1}$

26. $f(x) = \arctan 2x$

 Análisis gráfico y numérico En los ejercicios 27 y 28, sea

$$S_n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \pm \frac{x^n}{n}$$

Use una herramienta de graficación para confirmar la desigualdad gráficamente. Luego, complete la tabla para confirmar la desigualdad numéricamente.

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
S_n						
$\ln(x+1)$						
S_{n+1}						

27. $S_2 \leq \ln(x+1) \leq S_3$

28. $S_4 \leq \ln(x+1) \leq S_5$

Aproximar una suma En los ejercicios 29 y 30, (a) grafique varias sumas parciales de la serie, (b) encuentre la suma de la serie y su radio de convergencia, (c) use 50 términos de la serie para aproximar la suma cuando $x = 0.5$ y (d) determine lo que representa la aproximación y qué tan buena es la aproximación.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$

30. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Aproximar un valor En los ejercicios 31-34, utilice la serie de $f(x) = \arctan x$ para aproximar el valor, utilizando $R_N \leq 0.001$.

31. $\arctan \frac{1}{4}$

32. $\int_0^{1/2} \arctan x^2 dx$

33. $\int_0^{1/2} \frac{\arctan x^2}{x} dx$

34. $\int_0^{1/2} x^2 \arctan x dx$

Usar una serie de potencias En los ejercicios 35-38, utilice la serie de potencias

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1.$$

Encuentre la serie que representa la función y determine su intervalo de convergencia.

35. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

36. $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$

37. $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2}$

38. $f(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^2}$

39. Probabilidad Una moneda es lanzada en varias ocasiones. La probabilidad de que la primera cara ocurra en el lanzamiento n -ésimo es $P(n) = (\frac{1}{2})^n$. Cuando este juego se repite muchas veces, el número promedio de lanzamientos necesario hasta que se produce la primera cara es

$$E(n) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(n).$$

(Este valor se llama *valor esperado* de n). Utilice los resultados de los ejercicios 35-38 para encontrar $E(n)$. ¿Es la respuesta que se esperaba? ¿Por qué sí o por qué no?

40. Encontrar la suma de una serie Use los resultados de los ejercicios 35-38 para encontrar la suma de cada serie.

$$(a) \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (b) \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

Redacción En los ejercicios 41-44, explique cómo utilizaría la serie geométrica

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

para encontrar la serie para la función. No encuentre la serie.

41. $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 42. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
 43. $f(x) = \frac{5}{1+x}$ 44. $f(x) = \ln(1-x)$

45. Demostración Demstrar que

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

para $xy \neq 1$ siempre que el valor del lado izquierdo de la ecuación esté entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

46. Verificar una identidad Use el resultado del ejercicio 45 para verificar cada identidad.

$$(a) \arctan \frac{120}{119} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

$$(b) 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

[Sugerencia: Use el ejercicio 45 dos veces para encontrar $4 \arctan \frac{1}{5}$. Luego, utilice el inciso (a).]

Aproximar Pi En los ejercicios 47 y 48, (a) verifique la ecuación dada, y (b) use la ecuación y la serie para el arctangente para aproximar π con dos lugares decimales de precisión.

$$47. 2 \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$$

$$48. \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

Encontrar la suma de una serie En los ejercicios 49-54, determine la suma de la serie convergente mediante el uso de una función conocida. Identifique la función y explique cómo obtuvo la suma.

$$49. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n n} \quad 50. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n n}$$

$$51. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{5^n n} \quad 52. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

$$53. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)}$$

$$54. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3^{2n-1}(2n-1)}$$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

55. Usar una serie Una de las series de los ejercicios 49 a 54 converge a su suma mucho más lento que las otras cinco series. ¿Cuál es? Explique por qué esta serie converge muy lentamente. Use una herramienta de graficación para ilustrar la razón de convergencia.

56. Radio de convergencia El radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es 3. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$? Explique.

57. Convergencia de una serie de potencias La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $|x+1| < 4$. ¿Qué se puede concluir acerca de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$? Explique.



58. ¿CÓMO LO VE? Las gráficas muestran las aproximaciones polinómicas P_1 , P_2 y P_3 de primero, segundo y tercer grado de una función f . Etiquete las gráficas de P_1 , P_2 y P_3 . Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite MathGraphs.com.



Encontrar la suma de una serie En los ejercicios 59 y 60, encuentre la suma de la serie.

$$59. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n}(2n+1)} \quad 60. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)!}$$

61. Ramanujan y Pi Use una herramienta de graficación para demostrar que

$$\frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)396^{4n}} = \frac{1}{\pi}$$

62. Encontrar el error Describa por qué la expresión es incorrecta.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{5}\right) x^n$$

4.10 Series de Taylor y Maclaurin

- Encontrar una serie de Taylor o de Maclaurin para una función.
- Encontrar una serie binomial.
- Utilizar una lista básica de las series de Taylor para encontrar otra serie de Taylor.

Serie de Taylor y serie de Maclaurin

En la sección 4.9 se dedujeron series de potencias para varias funciones utilizando series geométricas con derivación o integración término a término. En esta sección se estudiará un procedimiento general para deducir la serie de potencias de una función que tiene derivadas de todos los órdenes. El siguiente teorema presenta la forma que *cada* serie de potencias convergente debe tomar.

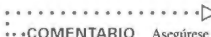
TEOREMA 4.22 Forma de una serie de potencias convergente

Si f es representada por una serie de potencias $f(x) = \sum a_n(x - c)^n$ para todo x en un intervalo abierto I que contiene c , entonces

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

y

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \cdots$$



•••COMENTARIO Asegúrese de entender el teorema 4.22. El teorema dice que si una serie de potencias converge a $f(x)$, entonces la serie debe ser una serie de Taylor. El teorema *no* dice que cada serie formada con los coeficientes de Taylor $a_n = f^{(n)}(c)/n!$ convergerá a $f(x)$.

Demostración Considere una serie de potencias $\sum a_n(x - c)^n$ que tiene un radio de convergencia R . Entonces, por el teorema 4.21, se sabe que existe la n -ésima derivada de f para $|x - c| < R$ y por derivación sucesiva se obtiene lo siguiente.

$$f^{(0)}(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 + a_4(x - c)^4 + \cdots$$

$$f^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2(x - c) + 3a_3(x - c)^2 + 4a_4(x - c)^3 + \cdots$$

$$f^{(2)}(x) = 2a_2 + 3!a_3(x - c) + 4 \cdot 3a_4(x - c)^2 + \cdots$$

$$f^{(3)}(x) = 3!a_3 + 4!a_4(x - c) + \cdots$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n + 1)!a_{n+1}(x - c) + \cdots$$

Con la evaluación de cada una de estas derivadas se obtiene

$$f^{(0)}(c) = 0!a_0$$

$$f^{(1)}(c) = 1!a_1$$

$$f^{(2)}(c) = 2!a_2$$

$$f^{(3)}(c) = 3!a_3$$

y, en general, $f^{(n)}(c) = n!a_n$. Al resolver para a_n se encuentra que los coeficientes de la representación en serie de potencias de $f(x)$ es

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

Observe que los coeficientes de la serie de potencias en el teorema 4.22 son, precisamente, los coeficientes de los polinomios de Taylor de $f(x)$ en c , como se define en la sección 4.7. Por esta razón, la serie se llama **serie de Taylor** para $f(x)$ en c .



COLIN MACLAURIN (1698-1746)

El desarrollo de las series de potencias para representar funciones se le atribuye al trabajo combinado de muchos matemáticos de los siglos XVII y XVIII. Gregory, Newton, John y James Bernoulli, Leibniz, Euler, Lagrange, Wallis y Fourier contribuyeron a este trabajo. Sin embargo, los dos nombres que son más comúnmente asociados con las series de potencias son Brook Taylor (1685-1731) y Colin Maclaurin. Consulte LarsonCalculus.com para leer más de esta biografía.

Definición de serie de Taylor y serie de Maclaurin

Si una función f tiene derivadas de todos los órdenes en $x = c$, entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n = f(c) + f'(c)(x - c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n + \cdots$$

se llama **serie de Taylor para $f(x)$ en c** . Además, si $c = 0$, entonces la serie es la **serie de Maclaurin para f** .

Cuando se conoce el patrón de los coeficientes de los polinomios de Taylor de una función, se puede ampliar el modelo fácilmente para formar la serie de Taylor correspondiente. Este caso se presenta, en el ejemplo 4 de la sección 4.7, donde se encontró que el cuarto polinomio de Taylor para $\ln x$ centrado en 1 es

$$P_4(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4.$$

A partir de este modelo, se puede obtener la serie de Taylor para $\ln x$ centrada en $c = 1$.

$$(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x - 1)^n + \cdots$$

EJEMPLO 1**Formar una serie de potencias**

Utilice la función

$$f(x) = \sin x$$

para formar la serie de Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4 + \cdots$$

y determinar el intervalo de convergencia.

Solución La derivación sucesiva de $f(x)$ produce

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & f(0) = \sin 0 = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = \cos 0 = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = -\sin 0 = 0 \\ f^{(3)}(x) = -\cos x & f^{(3)}(0) = -\cos 0 = -1 \\ f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0 \\ f^{(5)}(x) = \cos x & f^{(5)}(0) = \cos 0 = 1 \end{array}$$

y así sucesivamente. El patrón se repite después de la tercera derivada. Por tanto, la serie de potencias es la siguiente.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4 + \cdots \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} &= 0 + (1)x + \frac{0}{2!} x^2 + \frac{(-1)}{3!} x^3 + \frac{0}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5 + \frac{0}{6!} x^6 \\ &\quad + \frac{(-1)}{7!} x^7 + \cdots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \end{aligned}$$

Por el criterio del cociente, puede concluir que la serie converge para todo x .

Observe que en el ejemplo 1 no se puede concluir que la serie de potencias converge a $\text{sen } x$ para todo x . Se puede simplemente concluir que la serie de potencias converge a alguna función, pero no se tiene seguridad de cuál es la función. Se trata de un punto sutil, pero importante, al tratar con la serie de Taylor o la serie de Maclaurin. Para convencerse a sí mismo de que la serie

$$f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

podría converger a una función distinta de f , recuerde que las derivadas se están evaluando en un solo punto. Puede suceder fácilmente que otra función coincidiría con los valores de $f^{(n)}(x)$ cuando $x = c$ y no lo hará en otros valores de x . Por ejemplo, la serie de potencias (con centro en 0) para la función f mostrada en la figura 4.23 es la misma serie que la del ejemplo 1. Se sabe que la serie converge para todo x , y sin embargo, obviamente, no puede converger a $f(x)$ y a $\text{sen } x$ para todo x .

Si f tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto I centrado en c . La serie de Taylor para f puede no converger para algún x en I . O, aun cuando converja, puede no tener $f(x)$ como su suma. Sin embargo, el teorema 4.19 dice que para cada n

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x)$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

Observe que en esta fórmula del residuo, el valor particular que la hace verdadera depende de los valores de x y n . Si $R_n \rightarrow 0$ entonces el siguiente teorema nos dice que la serie de Taylor de f en realidad converge a $f(x)$ para todo x en I .

TEOREMA 4.23 Convergencia de la serie de Taylor

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ para todo x en el intervalo I , entonces la serie de Taylor de f converge y es igual a $f(x)$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Demostración Para una serie de Taylor, la suma parcial coincide con el polinomio de Taylor n -ésimo. Es decir, $S_n(x) = P_n(x)$. Además, debido a que

$$P_n(x) = f(x) - R_n(x)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - R_n(x)] \\ &= f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x). \end{aligned}$$

Así, para una x dada, la serie de Taylor (la sucesión de sumas parciales) converge a $f(x)$ si y solo si $R_n(x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Consulte LaysonCalculus.com para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. 

Dicho de otra manera, el teorema 4.23 dice que una serie de potencias formada con coeficientes de Taylor $a_n = f^{(n)}(c)/n!$ converge a la función de la que se deriva precisamente en aquellos valores para los que el residuo se aproxima a 0 cuando $n \rightarrow \infty$.

En el ejemplo 1 se desarrolló la serie de potencias de la función seno y también se concluyó que la serie converge a alguna función en toda la recta real. En el ejemplo 2 se verá que la serie realmente converge a $\sin x$. La observación clave es que aunque no se conoce el valor de z , es posible obtener una cota superior para

$$|f^{(n+1)}(z)|.$$

EJEMPLO 2 Serie de Maclaurin convergente

Demuestre que la serie de Maclaurin para

$$f(x) = \sin x$$

converge a $\sin x$ para todo x .

Solución Utilizando el resultado en el ejemplo 1, se necesita demostrar que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

es verdadera para todo x . Debido a que

$$f^{(n+1)}(x) = \pm \sin x$$

o

$$f^{(n+1)}(x) = \pm \cos x$$

se sabe que $|f^{(n+1)}(z)| \leq 1$ para cada número z real. Por lo tanto, para cualquier x fijo se puede aplicar el teorema de Taylor (teorema 4.19) para concluir que

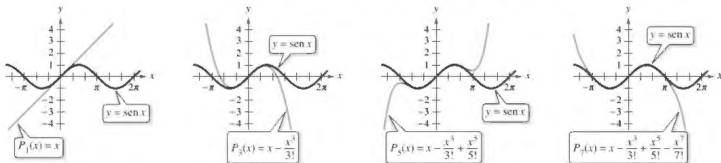
$$0 \leq |R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Del análisis de la sección 4.1 con respecto a las razones de convergencia de sucesiones exponenciales y factoriales, se deduce que para un x fijo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Por último, del teorema del emparedado, se deduce que para todo x , $R_n(x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Así, según el teorema 4.23, la serie de Maclaurin para el seno converge a $\sin x$ para todo x . ■

La figura 4.23 ilustra la convergencia de la serie de Maclaurin para $\sin x$ mediante la comparación de las gráficas de los polinomios de Maclaurin $P_1(x)$, $P_3(x)$, $P_5(x)$ y $P_7(x)$ con la gráfica de la función seno. Observe que a medida que aumenta el grado de los polinomios, su gráfica se parece más a la de la función seno.



Conforme n aumenta, la gráfica de P_n se parece más a la función seno.

Figura 4.23

Las directrices para encontrar una serie de Taylor de $f(x)$ en c se resumen a continuación.

DIRECTRICES PARA ENCONTRAR UNA SERIE DE TAYLOR

1. Derivar $f(x)$ varias veces y evaluar cada derivada en

$$f(c), f'(c), f''(c), f'''(c), \dots, f^{(n)}(c), \dots$$

Tratar de reconocer un patrón en estos números.

2. Utilizar la secuencia desarrollada en el primer paso para formar los coeficientes de Taylor $a_n = f^{(n)}(c)/n!$, y determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencias resultante

$$f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \dots$$

3. Dentro de este intervalo de convergencia, determinar si la serie converge a $f(x)$.

.....▶
 *COMENTARIO Cuando tenga dificultad para reconocer un patrón, recuerde que puede utilizar el teorema 4.22 para encontrar la serie de Taylor. También puede intentar usar los coeficientes de una serie de Taylor o Maclaurin conocida, como se muestra en el ejemplo 3.

La determinación directa de los coeficientes de Taylor o de Maclaurin utilizando derivación sucesiva puede ser difícil, y el siguiente ejemplo ilustra un atajo para encontrar los coeficientes indirectamente utilizando los coeficientes de una serie de Taylor o de Maclaurin conocida.

EJEMPLO 3 Serie de Maclaurin para una función compuesta

Encuentre la serie de Maclaurin para

$$f(x) = \sin x^2$$

Solución Para hallar los coeficientes de esta serie de Maclaurin directamente, debe calcular las derivadas sucesivas de $f(x) = \sin x^2$. Mediante el cálculo de solo las dos primeras,

$$f'(x) = 2x \cos x^2$$

y

$$f''(x) = -4x^2 \sin x^2 + 2 \cos x^2$$

puede ver que esta tarea sería muy engorrosa. Afortunadamente, hay una alternativa. En primer lugar, considere la serie de Maclaurin para $\sin x$ que encontró en el ejemplo 1.

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin x \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Ahora, ya que $\sin x^2 = g(x^2)$, puede sustituir x^2 por x en la serie de $\sin x$ para obtener

$$\begin{aligned} \sin x^2 &= g(x^2) \\ &= x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Asegúrese de entender el punto ilustrado en el ejemplo 3. Debido a que el cálculo directo de los coeficientes de Taylor o de Maclaurin puede ser tedioso, la forma más práctica de desarrollar una serie de Taylor o Maclaurin es desarrollar series de potencias para una lista básica de las funciones elementales. A partir de esta lista, se puede determinar las series de potencias para otras funciones de las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, derivación, integración y composición con una serie de potencias conocida.

Series binomiales

Antes de presentar la lista básica de funciones elementales, se desarrollará una serie más, para una función de la forma $f(x) = (1+x)^k$. Esto produce la **serie binomial**.

EJEMPLO 4 Serie binomial

Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x) = (1+x)^k$ y determine su radio de convergencia. Supongamos que no es un entero positivo y $k \neq 0$.

Solución Por derivación sucesiva, tiene

$$\begin{array}{ll} f(x) = (1+x)^k & f(0) = 1 \\ f'(x) = k(1+x)^{k-1} & f'(0) = k \\ f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2} & f''(0) = k(k-1) \\ f'''(x) = k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} & f'''(0) = k(k-1)(k-2) \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = k \cdot \dots \cdot (k-n+1)(1+x)^{k-n} & f^{(n)}(0) = k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1) \end{array}$$

que produce la serie

$$1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2} + \dots + \frac{k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1)x^n}{n!} + \dots$$

Debido a que $a_{n+1}/a_n \rightarrow 1$, puede aplicar el criterio del cociente para concluir que el radio de convergencia es $R = 1$. Por lo tanto, la serie converge a una función en el intervalo $(-1, 1)$.

Observe que el ejemplo 4 muestra que la serie de Taylor para $(1+x)^k$ converge a alguna función en el intervalo $(-1, 1)$. Sin embargo, el ejemplo no muestra que la serie realmente converge a $(1+x)^k$. Para hacer esto, podría demostrar que el residuo $R_n(x)$ converge a 0, como se ilustra en el ejemplo 2. Ahora se tiene suficiente información para encontrar una serie binomial para una función, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Encontrar una serie binomial

Encuentre la serie de potencias para $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$.

Solución Utilice la serie binomial

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!} + \dots$$

sea $k = \frac{1}{3}$ y escriba

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{3^2 \cdot 2!} + \frac{2 \cdot 5x^3}{3^3 \cdot 3!} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8x^4}{3^4 \cdot 4!} + \dots$$

que converge para $-1 \leq x \leq 1$.

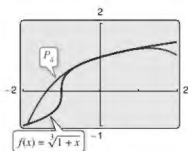


Figura 4.24

► **TECNOLOGÍA** Use una herramienta de graficación para confirmar el resultado en el ejemplo 5. Al graficar las funciones

$$f(x) = (1+x)^{1/3}$$

y

$$P_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$$

en la misma ventana de visualización, debe obtener el resultado que se muestra en la figura 4.24.

Deducción de la serie de Taylor a partir de una lista básica

La siguiente lista muestra la serie de potencias para varias funciones elementales con los intervalos de convergencia correspondientes.

SERIES DE POTENCIAS PARA FUNCIONES ELEMENTALES

Función

Intervalo de convergencia

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - \dots + (-1)^n(x-1)^n + \dots$$

$$0 < x < 2$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

$$-1 < x < 1$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + \dots$$

$$0 < x \leq 2$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{cos} x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{(2n)!x^{2n+1}}{(2^n n!)^2(2n+1)} + \dots$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)x^4}{4!} + \dots$$

$$-1 < x < 1^*$$

* La convergencia en $x = \pm 1$ depende del valor de k .

Observe que la serie binomial es válida para valores no enteros de k . Además, cuando k es un entero positivo, la serie binomial se reduce a una simple expansión binomial.

EJEMPLO 6

Deducir una serie de potencias a partir de una lista básica

Encuentre la serie de potencias para

$$f(x) = \cos \sqrt{x}.$$

Solución Utilice la serie de potencias

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

puede sustituir x por

$$\sqrt{x}$$

para obtener la serie

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} - \dots$$

Esta serie converge para todo valor de x en el dominio de $\cos \sqrt{x}$, es decir, para $x \geq 0$.

La serie de potencias se puede multiplicar y dividir como polinomios. Después de encontrar los primeros términos del producto (o cociente), se puede reconocer un patrón.

EJEMPLO 7 Multiplicar series de potencias

Encuentre los primeros tres términos diferentes de cero en la serie de Maclaurin $e^x \arctan x$.

Solución De la tabla, utilice la serie de Maclaurin para e^x y $\arctan x$ para obtener

$$e^x \arctan x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right).$$

Multiplique estas expresiones y agrupe términos semejantes, tal como lo haría en la multiplicación de polinomios.

$$\begin{array}{r} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots \\ x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots \\ \hline x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^5 + \cdots \\ - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 - \cdots \\ \hline x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots \end{array}$$

Por tanto, $e^x \arctan x = x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$.

EJEMPLO 8 Dividir series de potencias

Encuentre los primeros tres términos diferentes de cero en la serie de Maclaurin $\tan x$.

Solución De la tabla, utilice la serie de Maclaurin para $\sin x$ y $\cos x$ para obtener

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots}.$$

Divida utilizando la división larga

$$\begin{array}{r} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\ 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots \overline{) x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots} \\ \underline{x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 - \cdots} \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \\ \underline{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \cdots} \\ \frac{2}{15}x^5 + \cdots \end{array}$$

Por lo tanto, $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$.

EJEMPLO 9 Serie de potencias para $\sin^2 x$

Encuentre la serie de potencias para

$$f(x) = \sin^2 x.$$

Solución Reescriba $\sin^2 x$ como

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

Ahora, utilice la serie para $\cos x$:

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \\ \cos 2x &= 1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \frac{2^6}{6!}x^6 + \frac{2^8}{8!}x^8 - \dots \\ -\frac{1}{2}\cos 2x &= -\frac{1}{2} + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \dots \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \dots \end{aligned}$$

Por tanto, la serie para $f(x) = \sin^2 x$ es

$$\sin^2 x = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \dots$$

Esta serie es convergente para $-\infty < x < \infty$.

Como se ha mencionado en la sección anterior, las series de potencias se pueden utilizar para obtener tablas de valores de funciones trascendentales. También son útiles para la estimación de los valores de las integrales definidas para los que no se pueden encontrar antiderivadas. El siguiente ejemplo demuestra este uso.

EJEMPLO 10 Series de potencias para aproximar una integral definida

... > Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Utilice una serie de potencias para aproximar

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

con un error de menos de 0.01.

Solución Reemplace x con $-x^2$ en la serie de e^u para obtener lo siguiente.

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots \\ \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \dots \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \dots \end{aligned}$$

Sumando los cuatro primeros términos, tiene

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0.74$$

lo que, por el criterio de la serie alternante, tiene un error de menos de $\frac{1}{216} \approx 0.005$.

4.10 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Encontrar una serie de Taylor En los ejercicios 1-12, utilice la definición de serie de Taylor para encontrar la serie de Taylor, con centro en la función.

1. $f(x) = e^{2x}$, $c = 0$

2. $f(x) = e^{-4x}$, $c = 0$

3. $f(x) = \cos x$, $c = \frac{\pi}{4}$

4. $f(x) = \sin x$, $c = \frac{\pi}{4}$

5. $f(x) = \frac{1}{x}$, $c = 1$

6. $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $c = 2$

7. $f(x) = \ln x$, $c = 1$

8. $f(x) = e^x$, $c = 1$

9. $f(x) = \sin 3x$, $c = 0$

10. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $c = 0$

11. $f(x) = \sec x$, $c = 0$ (primeros tres términos diferentes de cero)

12. $f(x) = \tan x$, $c = 0$ (primeros tres términos diferentes de cero)

Demostración En los ejercicios 13-16, demuestre que la serie de Maclaurin para la función converge a la función para todo x .

13. $f(x) = \cos x$

14. $f(x) = e^{-2x}$

15. $f(x) = \sinh x$

16. $f(x) = \cosh x$

Usar una serie binomial En los ejercicios 17-26, utilice la serie binomial para encontrar la serie de Maclaurin para la función.

17. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

18. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^4}$

19. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

20. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

21. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x}}$

22. $f(x) = \frac{1}{(2+x)^3}$

23. $f(x) = \sqrt{1+x}$

24. $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$

25. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

26. $f(x) = \sqrt{1+x^3}$

Encontrar una serie de Maclaurin En los ejercicios 27-40, encuentre la serie de Maclaurin para la función. Utilice la tabla de serie de potencias para las funciones elementales en la página 334.

27. $f(x) = e^{x^2/2}$

28. $g(x) = e^{-3x}$

29. $f(x) = \ln(1+x)$

30. $f(x) = \ln(1+x^2)$

31. $g(x) = \sin 3x$

32. $f(x) = \sin \pi x$

33. $f(x) = \cos 4x$

34. $f(x) = \cos \pi x$

35. $f(x) = \cos x^{3/2}$

36. $g(x) = 2 \sin x^3$

37. $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$

38. $f(x) = e^x + e^{-x} = 2 \cosh x$

39. $f(x) = \cos^2 x$

40. $f(x) = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

(Sugerencia: Integre la serie para $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$)

Encontrar una serie de Maclaurin En los ejercicios 41-44, encuentre la serie de Maclaurin para la función. (Vea los ejemplos 7 y 8.)

41. $f(x) = x \sin x$

42. $h(x) = x \cos x$

43. $g(x) = \begin{cases} \frac{\arcsen x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsen x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

Verificar una fórmula En los ejercicios 45 y 46, utilice una serie de potencias y el hecho de que $i^2 = -1$ para comprobar la fórmula.

45. $g(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \sin x$

46. $g(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \cos x$

Encontrar los términos de una serie de Maclaurin En los ejercicios 47-52, encuentre los cuatro primeros términos no nulos de la serie de Maclaurin para la función de multiplicar o dividir la serie de potencias adecuada. Utilice la tabla de serie de potencias para las funciones elementales en la página 334. Utilice una herramienta de graficación para trazar la función y su correspondiente aproximación polinómica.

47. $f(x) = e^x \sin x$

48. $g(x) = e^x \cos x$

49. $h(x) = \cos x \ln(1+x)$

50. $f(x) = e^x \ln(1+x)$

51. $g(x) = \frac{\sen x}{1+x}$

52. $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$

Encontrar una serie de Maclaurin En los ejercicios 53 y 54, encuentre una serie de Maclaurin para $f(x)$.

53. $f(x) = \int_0^x (e^{-t^2} - 1) dt$

54. $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$

Verificar una suma En los ejercicios 55-58, verifique la suma. A continuación, utilice una herramienta de graficación para aproximar la suma con un error de menos de 0.0001.

55. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2$

56. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(2n+1)!} \right] = \sen 1$

57. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$

58. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n!} \right) = \frac{e-1}{e}$

Obtener un límite En los ejercicios 59-62, utilice las series de representación de la función f para encontrar $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (si existe).

59. $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$

60. $f(x) = \frac{\sen x}{x}$

61. $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

62. $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$

Aproximar de una integral En los ejercicios 63-70, utilice una serie de potencias para aproximar el valor de la integral con un error de menos de 0.0001. (En los ejercicios 65 y 67, suponga que el integrando se define como 1 cuando $x = 0$.)

63.
$$\int_0^1 e^{-x^3} dx$$

64.
$$\int_0^{1/4} x \ln(x+1) dx$$

65.
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

66.
$$\int_0^1 \cos x^2 dx$$

67.
$$\int_0^{1/2} \frac{\arctan x}{x} dx$$

68.
$$\int_0^{1/2} \arctan x^2 dx$$

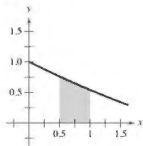
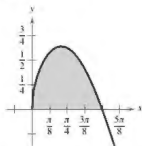
69.
$$\int_{0.1}^{0.3} \sqrt{1+x^3} dx$$

70.
$$\int_0^{0.2} \sqrt{1+x^2} dx$$

Área En los ejercicios 71 y 72, utilice una serie de potencias para aproximar el área de la región. Use una herramienta de graficación para verificar el resultado.

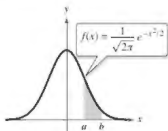
71.
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{x} \cos x dx$$

72.
$$\int_{0.5}^1 \cos \sqrt{x} dx$$



Probabilidad En los ejercicios 73 y 74, aproxime la probabilidad normal con un error de menos de 0.0001, donde la probabilidad está dada por

$$P(a < x < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx.$$



73. $P(0 < x < 1)$

74. $P(1 < x < 2)$



Encontrar un polinomio de Taylor usando tecnología En los ejercicios 75-78, utilice un sistema de álgebra computacional para encontrar el polinomio de Taylor de quinto grado, con centro en c para la función. Represente gráficamente la función y el polinomio. Use la gráfica para determinar el intervalo más grande en el que el polinomio es una aproximación razonable de la función.

75. $f(x) = x \cos 2x, \quad c = 0$

76. $f(x) = \sin \frac{x}{2} \ln(1+x), \quad c = 0$

77. $g(x) = \sqrt{x} \ln x, \quad c = 1$

78. $h(x) = \sqrt[3]{x} \arctan x, \quad c = 1$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

79. Series de Taylor Escriba las directrices para encontrar una serie de Taylor.

80. Serie binomial Defina la serie binomial. ¿Cuál es su radio de convergencia?

81. Encontrar una serie Explique cómo utilizar la serie

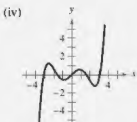
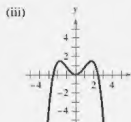
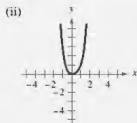
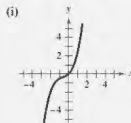
$$g(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para encontrar la serie para cada función. No encuentre la serie.

(a) $f(x) = e^{-x}$ (b) $f(x) = e^{3x}$ (c) $f(x) = xe^x$



¿CÓMO LO VE? Relacione el polinomio con su gráfica. Las gráficas están etiquetadas (i), (ii), (iii) y (iv). Factorice un factor común de cada polinomio e identifique la función de la aproximación que realiza el residuo del polinomio de Taylor.



(a) $y = x^2 - \frac{x^4}{3!}$

(b) $y = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!}$

(c) $y = x + x^2 + \frac{x^3}{2!}$

(d) $y = x^2 - x^3 + x^4$

83. **Movimiento de proyectiles** Un proyectil disparado desde el suelo sigue la trayectoria dada por

$$y = \left(\tan \theta - \frac{g}{kv_0 \cos \theta} \right) x - \frac{g}{2kv_0^2 \cos^2 \theta} \ln \left(1 - \frac{kx}{v_0 \cos \theta} \right)$$

donde v_0 es la velocidad inicial, θ es el ángulo de proyección, g es la aceleración debida a la gravedad y k es el factor de fricción causada por la resistencia del aire. Use la representación en serie de potencias

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

para verificar que la trayectoria puede ser reescrita como

$$y = (\tan \theta)x + \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} + \frac{k^2 gx^3}{3v_0^3 \cos^3 \theta} + \frac{k^3 gx^4}{4v_0^4 \cos^4 \theta} + \cdots$$

- • 84. **Movimiento de proyectiles** • • • • •

- Utilice el resultado
- del ejercicio 83 para
- determinar la serie
- de la trayectoria de
- un proyectil lanzado
- desde el suelo en un
- ángulo $\theta = 60^\circ$, con
- una velocidad inicial
- de $v_0 = 64$ pies por
- segundo y un factor de
- arrastre de $k = \frac{1}{10}$.



85. **Investigación** Considere la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- Dibuje una gráfica de la función.
- Utilice la variante de la definición de la derivada para demostrar que $f'(0) = 0$ [Al continuar este proceso, se puede demostrar que $f^{(n)}(0) = 0$ para $n > 1$.]
- Utilizando el resultado en el inciso (b), encuentre la serie de Maclaurin para f . ¿La serie converge a f ?

86. **Investigación**

- Encuentre la serie de potencias centrada en 0 para la función

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}.$$

- Utilice una herramienta de graficación para trazar f y el polinomio de Taylor de octavo grado de $P_8(x)$ para f .
- Complete la tabla, donde

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(t^2 + 1)}{t^2} dt \quad \text{y} \quad G(x) = \int_0^x P_8(t) dt.$$

x	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00
$F(x)$						
$G(x)$						

- Describa la relación entre las gráficas de f y P_8 y los resultados en la tabla en el inciso (c).

87. **Demostración** Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ para cualquier real x .

88. **Encontrar una serie de Maclaurin** Encuentre la serie de Maclaurin para

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

y determine su radio de convergencia. Utilice los cuatro primeros términos de la serie para aproximar $\ln 3$.

Evaluar un coeficiente binomial En los ejercicios 89-92, evalúe el coeficiente binomial utilizando la fórmula

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)(k-3) \cdots (k-n+1)}{n!}$$

donde k es un número real, n es un número entero positivo, y

$$\binom{k}{0} = 1.$$

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| 89. $\binom{5}{3}$ | 90. $\binom{-2}{2}$ |
| 91. $\binom{0.5}{4}$ | 92. $\binom{-1/3}{5}$ |

93. **Escribir una serie de potencias** Escriba la serie de potencias de $(1+x)^x$ en términos de coeficientes binomiales.

94. **Demostración** Demuestre que e es irracional. [Sugerencia: Suponga que $e = p/q$ es racional (p y q son números enteros) y considere

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots]$$

95. **Usar los números de Fibonacci** Demuestre que la serie de Maclaurin para la función

$$g(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

es

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$$

donde F_n es el n -ésimo número de Fibonacci con $F_1 = F_2 = 1$ y $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, para $n \geq 3$.

(Sugerencia: Escriba

$$\frac{x}{1-x-x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

y multiplique cada lado de esta ecuación por $1-x-x^2$.)

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

96. Suponga que $|f(x)| \leq 1$ y $|f'(x)| \leq 1$ para todo x sobre un intervalo de longitud de al menos 2. Demuestre que $|f'(x)| \leq 2$ sobre el intervalo.

Este problema fue preparado por el Committee on Prize Putnam Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

Ejercicios de repaso

Consulta CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Listar los términos de una sucesión En los ejercicios 1-4, escriba los primeros cinco términos de la sucesión.

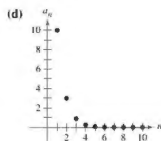
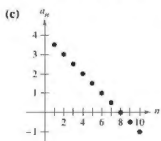
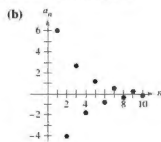
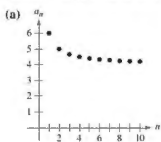
1. $a_n = 5^n$

2. $a_n = \frac{3^n}{n!}$

3. $a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n$

4. $a_n = \frac{2n}{n+5}$

Relacionar En los ejercicios 5-8, relacione la sucesión con su gráfica. [Las gráficas están etiquetadas (a), (b), (c) y (d).]



5. $a_n = 4 + \frac{2}{n}$

6. $a_n = 4 - \frac{1}{2}n$

7. $a_n = 10(0.3)^{n-1}$

8. $a_n = 6\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

Encontrar el límite de una sucesión En los ejercicios 9 y 10, utilice una herramienta de graficación para trazar los primeros 10 términos de la sucesión. Use la gráfica para hacer una inferencia sobre la convergencia o divergencia de la sucesión. Verifique su inferencia analítica y, si la sucesión converge, encuentre su límite.

9. $a_n = \frac{5n+2}{n}$

10. $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$

Determinar convergencia o divergencia En los ejercicios 11-18, determine la convergencia o divergencia de la sucesión con el n -ésimo término dado. Si la sucesión converge, encuentre su límite.

11. $a_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$

12. $a_n = 3 - \frac{2}{n^2 - 1}$

13. $a_n = \frac{n^2 + 1}{n^2}$

14. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

15. $a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$

16. $a_n = \frac{\ln n}{n}$

17. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

18. $a_n = \frac{\sec \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

Encontrar el término general de una sucesión En los ejercicios 19-22, escriba una expresión para el término n -ésimo de la sucesión. (Hay más de una respuesta correcta.)

19. 3, 8, 13, 18, 23, ...

20. -5, -2, 3, 10, 19, ...

21. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{25}, \frac{1}{121}, \dots$

22. $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \dots$

23. Interés compuesto Se depositan \$8000 en una cuenta que gana 5% de interés compuesto trimestralmente. El saldo de la cuenta después de n trimestres es

$$A_n = 8000 \left(1 + \frac{0.05}{4}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(a) Calcule los ocho primeros términos de la sucesión $\{A_n\}$.

(b) Determine el saldo de la cuenta después de 10 años calculando el término 40 de la sucesión.

24. Depreciación Una empresa compra una máquina por \$175,000. Durante los próximos 5 años, la máquina se depreciará a una tasa del 30% anual. (Esto es, al final de cada año, el valor depreciado será el 70% de lo que era a principios de año.)

(a) Encuentre una fórmula para el n -ésimo término de la sucesión que da el valor V de la máquina t años completos después de que fue comprada.

(b) Encuentre el valor depreciado de la máquina al final de 5 años completos.

Encontrar sumas parciales En los ejercicios 25 y 26, encuentre la sucesión de sumas parciales S_1, S_2, S_3, S_4 y S_5 .

25. $3 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \dots$

26. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$

Analisis numérico, gráfico y analítico En los ejercicios 27-30, (a) utilice una herramienta de graficación para hallar la suma parcial S_n indicada y completar la tabla, y (b) use una herramienta de graficación para trazar los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales.

n	5	10	15	20	25
S_n					

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Encontrar la suma de una serie convergente En los ejercicios 31-34, encuentre la suma de la serie convergente.

31. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$

32. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{7^n}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} [(0.6)^n + (0.8)^n]$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$

Usar una serie geométrica En los ejercicios 35 y 36, (a) escriba el decimal periódico como una serie geométrica, y (b) escriba su suma como el cociente de dos números enteros.

35. $0.\overline{09}$

36. $0.\overline{64}$

Usar una serie geométrica o el criterio del término n -ésimo En los ejercicios 37-40, utilice una serie geométrica o el criterio del término n -ésimo para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

37. $\sum_{n=0}^{\infty} (1.67)^n$

38. $\sum_{n=0}^{\infty} (0.36)^n$

39. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\ln n}$

40. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$

41. Distancia Se deja caer una pelota desde una altura de 8 metros. Cada vez que cae h metros, rebota $0.7h$ metros. Encuentre la distancia total recorrida por la pelota.

42. Interés compuesto Durante 10 años, al final de cada mes, se realiza un depósito de \$125 en una cuenta que paga intereses al 3.5%, compuesto mensualmente. Determine el saldo de la cuenta al final de 10 años. (Sugerencia: Utilice el resultado de la sección 4.2, ejercicio 84.)

Usar el criterio de la integral o una serie p En los ejercicios 43-48, utilice el criterio de la integral o una serie p para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{6n+1}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \right)$

48. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

Usar el criterio de comparación directa o el criterio de comparación del límite En los ejercicios 49-54, utilice el criterio de comparación directa o el criterio de comparación del límite para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

49. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}-1}$

50. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+3n}}$

51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$

52. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$

54. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - 5}$

Usar el criterio de la serie alternante En los ejercicios 55-60, utilice el criterio de la serie alternante, si aplica, para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

55. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^5}$

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n^2+1}$

57. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2-3}$

58. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$

59. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-3}$

60. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

Usar el criterio del cociente o el criterio de la raíz En los ejercicios 61-66, utilice el criterio del cociente o el criterio de la raíz para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

61. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{2n+5} \right)^n$


62. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{7n-1} \right)^n$

63. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$

64. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$

65. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$

66. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$

 **Análisis numérico, gráfico y analítico** En los ejercicios 67 y 68, (a) verifique que la serie converge, (b) utilice una herramienta de graficación para hallar la suma parcial S_n indicada y complete la tabla, (c) use una herramienta de graficación para trazar los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales, y (d) utilice la tabla para calcular la suma de la serie.

n	5	10	15	20	25
S_n					

67. $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3}{5} \right)^n$

68. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^3+5}$

Encontrar un polinomio de Maclaurin En los ejercicios 69 y 70, encuentre el polinomio n -ésimo de Maclaurin para la función.

69. $f(x) = e^{-2x}$, $n = 3$

70. $f(x) = \cos \pi x$, $n = 4$

Encontrar un polinomio de Taylor En los ejercicios 71 y 72, encuentre el polinomio de Taylor de tercer grado centrado en c .

71. $f(x) = e^{-3x}$, $c = 0$

72. $f(x) = \tan x$, $c = -\frac{\pi}{4}$

Encontrar el grado En los ejercicios 73 y 74, determine el grado del polinomio de Maclaurin requerido para que el error en la aproximación de la función para el valor indicado de x sea menor que 0.001.

73. $\cos(0.75)$

74. $e^{-0.25}$

Encontrar el intervalo de convergencia En los ejercicios 75-80, encuentre el intervalo de convergencia de la serie de potencias. (Asegúrese de incluir una verificación de la convergencia en los puntos terminales del intervalo.)

75.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{10}\right)^n$$

76.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (5x)^n$$

77.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-2)^n}{(n+1)^2}$$

78.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-2)^n}{n}$$

79.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-2)^n$$

80.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$$

Encontrar intervalos de convergencia En los ejercicios 81 y 82, encuentre los intervalos de convergencia de (a) $f(x)$, (b) $f'(x)$, (c) $f''(x)$ y (d) $\int f(x) dx$. Incluya una verificación de la convergencia en los puntos terminales del intervalo.

81.
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n$$

82.
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-4)^n}{n}$$

Ecuaciones diferenciales En los ejercicios 83 y 84, demuestre que la función representada por la serie de potencias es una solución de la ecuación diferencial.

83.
$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n(n!)^2}$$

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$$

84.
$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^{2n}}{2^n n!}$$

$$y'' + 3xy' + 3y = 0$$

Encontrar una serie de potencias geométrica En los ejercicios 85 y 86, encuentre una serie de potencias geométrica, centrada en 0, para la función.

85.
$$g(x) = \frac{2}{3-x}$$

86.
$$h(x) = \frac{3}{2+x}$$

Encontrar una serie de potencias En los ejercicios 87 y 88, encuentre una serie de potencias de la función, con centro en c , y determine el intervalo de convergencia.

87.
$$f(x) = \frac{6}{4-x}, \quad c = 1$$

88.
$$f(x) = \frac{1}{3-2x}, \quad c = 0$$

Encontrar la suma de una serie En los ejercicios 89-94, halle la suma de la serie convergente mediante el uso de una función conocida. Identifique la función y explique cómo obtuvo la suma.

89.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{4^n n}$$

90.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{5^n n}$$

91.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}$$

92.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n n!}$$

93.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{3^{2n}(2n)!}$$

94.
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^{2n+1}(2n+1)!}$$

Encontrar una serie de Taylor En los ejercicios 95-102, utilice la definición de series de Taylor para encontrar la serie de Taylor, con centro en c para la función.

95. $f(x) = \sin x, \quad c = \frac{3\pi}{4}$

96. $f(x) = \cos x, \quad c = -\frac{\pi}{4}$

97. $f(x) = 3^x, \quad c = 0$

98. $f(x) = \csc x, \quad c = \frac{\pi}{2}$ (primeros tres términos)

99. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad c = -1$

100. $f(x) = \sqrt{x}, \quad c = 4$

101. $g(x) = \sqrt[3]{1+x}, \quad c = 0$

102. $h(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad c = 0$

103. Formar la serie de Maclaurin Determine los cuatro primeros términos de la serie de Maclaurin para e^{2x} .

(a) mediante el uso de la definición de la serie de Maclaurin y la fórmula para el coeficiente del término n -ésimo, $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

(b) sustituyendo x por $2x$ en la serie para e^x .

(c) multiplicando la serie para e^x por sí misma, ya que $e^{2x} = e^x \cdot e^x$.

104. Formar la serie de Maclaurin Determine los cuatro primeros términos de la serie de Maclaurin para $\sin 2x$.

(a) mediante el uso de la definición de la serie de Maclaurin y la fórmula para el coeficiente del término n -ésimo, $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

(b) sustituyendo x por $2x$ en la serie para $\sin x$.

(c) multiplicando por 2 la serie de $\sin x$ por la serie para $\cos x$, ya que $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

Encontrar una serie de Maclaurin En los ejercicios 105-108, encuentre la serie de Maclaurin para la función. Utilice la tabla de la serie de potencias para las funciones elementales en la página 334.

105. $f(x) = e^{6x}$

106. $f(x) = \ln(x-1)$

107. $f(x) = \sin 2x$

108. $f(x) = \cos 3x$

Obtener un límite En los ejercicios 109 y 110, utilice la representación de las series de la función f para encontrar $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (si existe).

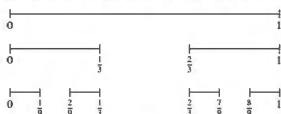
109. $f(x) = \frac{\arctan x}{\sqrt{x}}$

110. $f(x) = \frac{\arcsen x}{x}$

Solución de problemas

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

- 1. Conjunto de Cantor** El conjunto de Cantor (Georg Cantor, 1845-1918) es un subconjunto del intervalo unitario $[0, 1]$. Para construir el conjunto de Cantor, quite primero el tercio medio $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ del intervalo, dejando dos segmentos de recta. Para la segunda etapa, elimine el tercio medio de cada uno de los dos segmentos restantes, dejando cuatro segmentos de recta. Este procedimiento continúa indefinidamente, como se muestra en la figura. El conjunto de Cantor consiste en todos los números en el intervalo unitario $[0, 1]$ que aún se conservan.



- Encuentre la longitud total de todos los segmentos de recta que se eliminan.
- Escriba tres números que se encuentren en el conjunto de Cantor.
- Deje que C_n denote la longitud total de los segmentos de recta que queda después de n pasos. Encuentre $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$.

2. Usar una sucesión

- Dado que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = L$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = L$, demuestre que $\{a_n\}$ es convergente y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

- Sea $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}$. Escriba los ocho primeros términos de $\{a_n\}$. Use el inciso (a) para demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$.

Esto produce el desarrollo en fracción continua

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}$$

- 3. Usar una serie** Se puede demostrar que

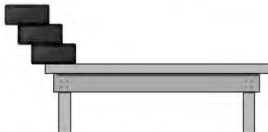
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad [\text{vea la sección 4.3, página 272}].$$

Utilice este hecho para demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

- 4. Obtener un límite** Sea T un triángulo equilátero con lados de longitud 1. Sea a_n el número de círculos que pueden ser empacados estrechamente en n filas dentro del triángulo. Por ejemplo, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ y $a_3 = 6$, como se muestra en la figura. Sea A_n un área combinada de los círculos a_n . Encuentre $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.



- 5. Usar el centro de gravedad** Bloques idénticos de longitud unitaria se apilan uno encima de otro en el borde de una mesa. El centro de gravedad del bloque superior debe estar sobre el bloque por debajo de él, el centro de gravedad de los dos primeros bloques debe estar sobre el bloque por debajo de ellos, y así sucesivamente (vea la figura).



- Cuando hay tres bloques, demuestre que es posible apilarlos de manera que el borde izquierdo del bloque superior se extienda más allá del borde de la mesa.
- ¿Es posible apilar los bloques de manera que el borde derecho del bloque superior se extienda más allá del borde de la mesa?
- ¿A qué distancia más allá de la mesa se pueden apilar los bloques?

6. Usar series de potencias

- Considere la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + 2x + 3x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + x^6 + \dots$$

en la que los coeficientes $a_n = 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \dots$ son periódicos de periodo $p = 3$. Encuentre el radio de convergencia y la suma de esta serie de potencias.

- Considere la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

en la que los coeficientes son periódicos, $(a_{n+p} = a_n)$ y $a_n > 0$. Encuentre el radio de convergencia y la suma de esta serie de potencias.

7. Hallar las sumas de la serie

- Determine una serie de potencias para la función

$$f(x) = xe^x$$

centrada en 0. Utilice esta representación para encontrar la suma de la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$$

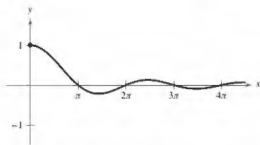
- Derive la serie de potencias de $f(x) = e^x$. Utilice el resultado para hallar la suma de la serie infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$$

8. Usar el criterio de la serie alternante La gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

se muestra a continuación. Utilice el criterio de la serie alternante para demostrar que la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge.



9. Convergencia condicional y absoluta ¿Para qué valores de las constantes positivas a y b las siguientes series convergen absolutamente? ¿Para qué valores convergen condicionalmente?

$$a - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{4} + \frac{a}{5} - \frac{b}{6} + \frac{a}{7} - \frac{b}{8} + \dots$$

10. Demostración

- (a) Considere la sucesión de números definidos de forma recursiva.

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= \sqrt{3} \\ a_3 &= \sqrt{3 + \sqrt{3}} \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= \sqrt{3 + a_n} \end{aligned}$$

Escriba las aproximaciones decimales de los seis primeros términos de esta sucesión. Demuestre que la sucesión converge, y encuentre su límite.

- (b) Considere la siguiente secuencia definida de forma recursiva por $a_1 = \sqrt{a}$ y $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$, donde $a > 2$.

$$\sqrt{a}, \sqrt{a + \sqrt{a}}, \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \dots$$

Demuestre que esta sucesión converge, y encuentre su límite.

11. Demostración

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos que satisfice $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/n} = L < \frac{1}{r}$, $r > 0$. Demuestre

que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ converge.

12. Usar una serie

Considere la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$.

- (a) Encuentre los cinco primeros términos de la sucesión de sumas parciales.
 (b) Demuestre que el criterio del cociente no es concluyente para esta serie.
 (c) Utilice el criterio de la raíz para probar la convergencia o divergencia de esta serie.

13. Deducir identidades Deduzca cada identidad usando la serie geométrica adecuada.

(a) $\frac{1}{0.99} = 1.01010101 \dots$

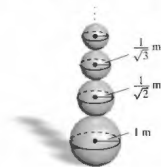
(b) $\frac{1}{0.98} = 1.0204081632 \dots$

14. Población Considere una población idealizada con la característica de que cada miembro de la población produce una cría al final de cada periodo. Cada miembro tiene una vida útil de tres periodos y la población comienza con 10 miembros nacidos. La siguiente tabla muestra la población durante los primeros cinco periodos.

Edad de la cría	Periodo				
	1	2	3	4	5
0-1	10	10	20	40	70
1-2		10	10	20	40
2-3			10	10	20
Total	10	20	40	70	130

La sucesión para la población total tiene la propiedad de que $S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}$, $n > 3$. Encuentre la población total en cada uno de los próximos cinco periodos.

15. Esferas Imagínesse que está apilando un número infinito de esferas de radios decrecientes una encima de otra, como se muestra en la figura. Los radios de las esferas son 1 metro, $1/\sqrt{2}$ metros, $1/\sqrt{3}$ metros, y así sucesivamente. Las esferas están hechas de un material que pesa 1 newton por metro cúbico.
- (a) ¿Qué tan alta es esta pila infinita de esferas?
 (b) ¿Cuál es la superficie total de todas las esferas de la pila?
 (c) Demuestre que el peso de la pila es finito.



16. Determinar convergencia o divergencia

- (a) Determine la convergencia o divergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

- (b) Determine la convergencia o divergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{2n} - \operatorname{sen} \frac{1}{2n+1} \right)$$

FORMULARIOS BÁSICOS Y TABLAS DE INTEGRACIÓN

ÁLGEBRA

Ceros y factores de un polinomio

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomio. Si $p(a) = 0$, entonces a es un *cero* del polinomio y una solución de la ecuación $p(x) = 0$. Además, $(x - a)$ es un *factor* del polinomio.

Teorema fundamental del álgebra

Un polinomio de grado n tiene n ceros (no necesariamente distintos). Aunque todos estos ceros pueden ser imaginarios, un polinomio real de grado impar tendrá por lo menos un cero real.

Fórmula cuadrática

Si $p(x) = ax^2 + bx + c$ y $0 \leq b^2 - 4ac$, entonces los ceros reales de p son $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$.

Factores especiales

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$$

$$x^4 - a^4 = (x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$$

Teorema del binomio

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x - y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \dots + nxy^{n-1} + y^n$$

$$(x - y)^n = x^n - nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 - \dots \pm nxy^{n-1} \mp y^n$$

Teorema del cero racional

Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros, entonces todo *cero racional* de p es de la forma $x = r/s$, donde r es un factor de a_0 y s es un factor de a_n .

Factorización por agrupamiento

$$acx^3 + adx^2 + bcx + bd = ax^2(cx + d) + b(cx + d) = (ax^2 + b)(cx + d)$$

Operaciones aritméticas

$$ab + ac = a(b + c)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{c}\right) = \frac{a}{bc}$$

$$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{ac}{b}$$

$$a\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{a - b}{c - d} = \frac{b - a}{d - c}$$

$$\frac{ab + ac}{a} = b + c$$

Exponentes y radicales

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0 \quad (ab)^x = a^x b^x \quad a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\sqrt{a} = a^{1/2}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$







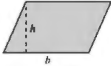

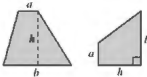





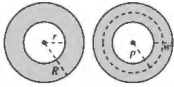

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

<p>Triángulo $h = a \operatorname{sen} \theta$ $\text{Área} = \frac{1}{2}bh$ (Ley de los cosenos) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$</p> 	<p>Sector de un anillo circular (p = radio promedio, w = ancho del anillo, θ en radianes) $\text{Área} = \theta pw$</p> 
<p>Triángulo rectángulo (Teorema de Pitágoras) $c^2 = a^2 + b^2$</p> 	<p>Elipse $\text{Área} = \pi ab$ $\text{Circunferencia} \approx 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$</p> 
<p>Triángulo equilátero $h = \frac{\sqrt{3}s}{2}$ $\text{Área} = \frac{\sqrt{3}s^2}{4}$</p> 	<p>Cono (A = área de la base) $\text{Volumen} = \frac{Ah}{3}$</p> 
<p>Paralelogramo $\text{Área} = bh$</p> 	<p>Cono circular recto $\text{Volumen} = \frac{\pi r^2 h}{3}$ $\text{Área de la superficie lateral} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$</p> 
<p>Trapezoide $\text{Área} = \frac{h}{2}(a + b)$</p> 	<p>Tronco de un cono circular recto $\text{Volumen} = \frac{\pi(r^2 + rR + R^2)h}{3}$ $\text{Área de la superficie lateral} = \pi s(R + r)$</p> 
<p>Círculo $\text{Área} = \pi r^2$ $\text{Circunferencia} = 2\pi r$</p> 	<p>Cilindro circular recto $\text{Volumen} = \pi r^2 h$ $\text{Área de la superficie lateral} = 2\pi rh$</p> 
<p>Sector circular (θ en radianes) $\text{Área} = \frac{\theta r^2}{2}$ $s = r\theta$</p> 	<p>Esfera $\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\text{Área de la superficie} = 4\pi r^2$</p> 
<p>Anillo circular (p = radio promedio, w = ancho del anillo) $\text{Área} = \pi(R^2 - r^2)$ $= 2\pi pw$</p> 	<p>Cuña (A = área de la cara superior, B = área de la base) $A = B \sec \theta$</p> 

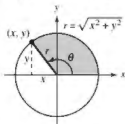
Definiciones de las seis funciones trigonométricas

Definiciones para un triángulo rectángulo, donde $0 < \theta < \pi/2$.

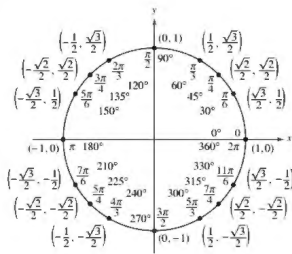


$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\text{op}}{\text{hip}} & \csc \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{op}} \\ \cos \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}} & \sec \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} \\ \tan \theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} & \cot \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}} \end{aligned}$$

Definiciones de las funciones circulares, donde θ es cualquier ángulo.



$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{r} & \csc \theta &= \frac{r}{y} \\ \cos \theta &= \frac{x}{r} & \sec \theta &= \frac{r}{x} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} & \cot \theta &= \frac{x}{y} \end{aligned}$$



Identidades recíprocas

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{1}{\csc x} & \sec x &= \frac{1}{\cos x} & \tan x &= \frac{1}{\cot x} \\ \csc x &= \frac{1}{\sin x} & \cos x &= \frac{1}{\sec x} & \cot x &= \frac{1}{\tan x} \end{aligned}$$

Identidades para la tangente y la cotangente

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Identidades pitagóricas

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ 1 + \tan^2 x &= \sec^2 x & 1 + \cot^2 x &= \csc^2 x \end{aligned}$$

Identidades para cofunciones

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sec x & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cot x \\ \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \csc x & \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \tan x \end{aligned}$$

Fórmulas de reducción

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x & \cos(-x) &= \cos x \\ \csc(-x) &= -\csc x & \tan(-x) &= -\tan x \\ \sec(-x) &= \sec x & \cot(-x) &= -\cot x \end{aligned}$$

Fórmulas para la suma y la diferencia

$$\begin{aligned} \sin(u \pm v) &= \sin u \cos v \pm \cos u \sin v \\ \cos(u \pm v) &= \cos u \cos v \mp \sin u \sin v \\ \tan(u \pm v) &= \frac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \tan v} \end{aligned}$$

Fórmulas para ángulos dobles

$$\begin{aligned} \sin 2u &= 2 \sin u \cos u \\ \cos 2u &= \cos^2 u - \sin^2 u = 2 \cos^2 u - 1 = 1 - 2 \sin^2 u \\ \tan 2u &= \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u} \end{aligned}$$

Fórmulas para la reducción de potencias

$$\begin{aligned} \sin^2 u &= \frac{1 - \cos 2u}{2} \\ \cos^2 u &= \frac{1 + \cos 2u}{2} \\ \tan^2 u &= \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u} \end{aligned}$$

Fórmulas suma a producto

$$\begin{aligned} \sin u + \sin v &= 2 \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \cos\left(\frac{u-v}{2}\right) \\ \sin u - \sin v &= 2 \cos\left(\frac{u+v}{2}\right) \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \\ \cos u + \cos v &= 2 \cos\left(\frac{u+v}{2}\right) \cos\left(\frac{u-v}{2}\right) \\ \cos u - \cos v &= -2 \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \end{aligned}$$

Fórmulas producto a suma

$$\begin{aligned} \sin u \sin v &= \frac{1}{2} [\cos(u-v) - \cos(u+v)] \\ \cos u \cos v &= \frac{1}{2} [\cos(u-v) + \cos(u+v)] \\ \sin u \cos v &= \frac{1}{2} [\sin(u+v) + \sin(u-v)] \\ \cos u \sin v &= \frac{1}{2} [\sin(u+v) - \sin(u-v)] \end{aligned}$$

Reglas básicas de diferenciación

- $\frac{d}{dx}[cu] = cu'$
- $\frac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$
- $\frac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$
- $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{vu' - uv'}{v^2}$
- $\frac{d}{dx}[c] = 0$
- $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$
- $\frac{d}{dx}[x] = 1$
- $\frac{d}{dx}[|u|] = \frac{u}{|u|}(u')$, $u \neq 0$
- $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u u'$
- $\frac{d}{dx}[\log_a u] = \frac{u'}{(\ln a)u}$
- $\frac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u u'$
- $\frac{d}{dx}[\sin u] = (\cos u)u'$
- $\frac{d}{dx}[\cos u] = -(\sin u)u'$
- $\frac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)u'$
- $\frac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u)u'$
- $\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \tan u)u'$
- $\frac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u \cot u)u'$
- $\frac{d}{dx}[\arcsin u] = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $\frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $\frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{u'}{1+u^2}$
- $\frac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsch} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcosh} u] = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}[\operatorname{artanh} u] = \frac{u'}{1-u^2}$
- $\frac{d}{dx}[\operatorname{artcsch} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1+u^2}}$
- $\frac{d}{dx}[\operatorname{artcosh} u] = \frac{u'}{u\sqrt{1+u^2}}$

Fórmulas básicas de integración

- $\int kf(u) du = k \int f(u) du$
- $\int [f(u) \pm g(u)] du = \int f(u) du \pm \int g(u) du$
- $\int du = u + C$
- $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
- $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
- $\int e^u du = e^u + C$
- $\int a^u du = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^u + C$
- $\int \sin u du = -\cos u + C$
- $\int \cos u du = \sin u + C$
- $\int \tan u du = -\ln|\cos u| + C$
- $\int \sec u du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
- $\int \sec^2 u du = \tan u + C$
- $\int \csc u du = \ln|\csc u + \cot u| + C$
- $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$
- $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$
- $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$
- $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$
- $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C$

Formas que implican u^n

$$1. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$2. \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$$

Formas que implican $a + bu$

$$3. \int \frac{u}{a + bu} du = \frac{1}{b^2}(bu - a \ln|a + bu|) + C$$

$$4. \int \frac{u}{(a + bu)^2} du = \frac{1}{b^2} \left(\frac{a}{a + bu} + \ln|a + bu| \right) + C$$

$$5. \int \frac{u}{(a + bu)^n} du = \frac{1}{b^2} \left[\frac{-1}{(n-2)(a + bu)^{n-2}} + \frac{a}{(n-1)(a + bu)^{n-1}} \right] + C, n \neq 1, 2$$

$$6. \int \frac{u^2}{a + bu} du = \frac{1}{b^3} \left[\frac{bu}{2}(2a - bu) + a^2 \ln|a + bu| \right] + C$$

$$7. \int \frac{u^2}{(a + bu)^2} du = \frac{1}{b^3} \left[bu - \frac{a^2}{a + bu} - 2a \ln|a + bu| \right] + C$$

$$8. \int \frac{u^2}{(a + bu)^3} du = \frac{1}{b^3} \left[\frac{2a}{a + bu} - \frac{a^2}{2(a + bu)^2} + \ln|a + bu| \right] + C$$

$$9. \int \frac{u^2}{(a + bu)^n} du = \frac{1}{b^3} \left[\frac{-1}{(n-3)(a + bu)^{n-3}} + \frac{2a}{(n-2)(a + bu)^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)(a + bu)^{n-1}} \right] + C, n \neq 1, 2, 3$$

$$10. \int \frac{1}{u(a + bu)} du = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| + C$$

$$11. \int \frac{1}{u(a + bu)^2} du = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{a + bu} + \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| \right) + C$$

$$12. \int \frac{1}{u^2(a + bu)} du = -\frac{1}{a} \left(\frac{1}{u} + \frac{b}{a} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| \right) + C$$

$$13. \int \frac{1}{u^2(a + bu)^2} du = -\frac{1}{a^2} \left[\frac{a + 2bu}{u(a + bu)} + \frac{2b}{a} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| \right] + C$$

Formas que implican $a + bu + cu^2, b^2 \neq 4ac$

$$14. \int \frac{1}{a + bu + cu^2} du = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \frac{2cu + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C, & b^2 < 4ac \\ \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2cu + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2cu + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| + C, & b^2 > 4ac \end{cases}$$

$$15. \int \frac{u}{a + bu + cu^2} du = \frac{1}{2c} (\ln|a + bu + cu^2| - b \int \frac{1}{a + bu + cu^2} du)$$

Formas que implican $\sqrt{a + bu}$

$$16. \int u^n \sqrt{a + bu} du = \frac{2}{b(2n+3)} \left[u^n(a + bu)^{3/2} - na \int u^{n-1} \sqrt{a + bu} du \right]$$

$$17. \int \frac{1}{u \sqrt{a + bu}} du = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a + bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bu} + \sqrt{a}} \right| + C, & a > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \sqrt{\frac{a + bu}{-a}} + C, & a < 0 \end{cases}$$

$$18. \int \frac{1}{u^n \sqrt{a + bu}} du = \frac{-1}{a(n-1)} \left[\frac{\sqrt{a + bu}}{u^{n-1}} + \frac{(2n-3)b}{2} \int \frac{1}{u^{n-1} \sqrt{a + bu}} du \right], n \neq 1$$

19. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u} du = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{1}{u\sqrt{a+bu}} du$
20. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^n} du = \frac{-1}{a(n-1)} \left[\frac{(a+bu)^{3/2}}{u^{n-1}} + \frac{(2n-5)b}{2} \int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^{n-1}} du \right], n \neq 1$
21. $\int \frac{u}{\sqrt{a+bu}} du = \frac{-2(2a-bu)}{3b^2} \sqrt{a+bu} + C$
22. $\int \frac{u^n}{\sqrt{a+bu}} du = \frac{2}{(2n+1)b} \left(u^n \sqrt{a+bu} - nu \int \frac{u^{n-1}}{\sqrt{a+bu}} du \right)$

Formas que implican $a^2 \pm u^2, a > 0$

23. $\int \frac{1}{a^2 + u^2} du = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$
24. $\int \frac{1}{u^2 - a^2} du = - \int \frac{1}{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$
25. $\int \frac{1}{(a^2 \pm u^2)^n} du = \frac{1}{2a^2(n-1)} \left[\frac{u}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{1}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} du \right], n \neq 1$

Formas que implican $\sqrt{u^2 \pm a^2}, a > 0$

26. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{1}{2} (u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}|) + C$
27. $\int u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{1}{8} [u(2u^2 \pm a^2) \sqrt{u^2 \pm a^2} - a^4 \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}|] + C$
28. $\int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 + a^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right| + C$
29. $\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 - a^2} - a \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C$
30. $\int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u^2} du = \frac{-\sqrt{u^2 + a^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C$
31. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} du = \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C$
32. $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 + a^2}} du = \frac{-1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right| + C$
33. $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}} du = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C$
34. $\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2 + a^2}} du = \frac{1}{2} (u\sqrt{u^2 + a^2} \mp a^2 \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}|) + C$
35. $\int \frac{1}{u^2 \sqrt{u^2 + a^2}} du = \mp \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{a^2 u} + C$
36. $\int \frac{1}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} du = \frac{\pm u}{a^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$

Formas que implican $\sqrt{a^2 - u^2}, a > 0$

37. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2} \left(u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \arcsen \frac{u}{a} \right) + C$
38. $\int u^2 \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{1}{8} [u(2u^2 - a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + a^4 \arcsen \frac{u}{a}] + C$



$$39. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$40. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \arcsen \frac{u}{a} + C$$

$$41. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \arcsen \frac{u}{a} + C$$

$$42. \int \frac{1}{u\sqrt{a^2 - u^2}} du = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$43. \int \frac{u^2}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \frac{1}{2} \left(-u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \arcsen \frac{u}{a} \right) + C$$

$$44. \int \frac{1}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} du = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$$

$$45. \int \frac{1}{(a^2 - u^2)^{3/2}} du = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$$

Formas que implican $\sen u$ o $\cos u$

$$46. \int \sen u du = -\cos u + C$$

$$47. \int \cos u du = \sen u + C$$

$$48. \int \sen^2 u du = \frac{1}{2}(u - \sen u \cos u) + C$$

$$49. \int \cos^2 u du = \frac{1}{2}(u + \sen u \cos u) + C$$

$$50. \int \sen^n u du = -\frac{\sen^{n-1} u \cos u}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sen^{n-2} u du$$

$$51. \int \cos^n u du = \frac{\cos^{n-1} u \sen u}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u du$$

$$52. \int u \sen u du = \sen u - u \cos u + C$$

$$53. \int u \cos u du = \cos u + u \sen u + C$$

$$54. \int u^n \sen u du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u du$$

$$55. \int u^n \cos u du = u^n \sen u - n \int u^{n-1} \sen u du$$

$$56. \int \frac{1}{1 \pm \sen u} du = \tan u \mp \sec u + C$$

$$57. \int \frac{1}{1 \pm \cos u} du = -\cot u \pm \csc u + C$$

$$58. \int \frac{1}{\sen u \cos u} du = \ln|\tan u| + C$$

Formas que implican $\tan u$, $\cot u$, $\sec u$ o $\csc u$

$$59. \int \tan u du = -\ln|\cos u| + C$$

$$60. \int \cot u du = \ln|\sen u| + C$$

$$61. \int \sec u du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$62. \int \csc u du = \ln|\csc u - \cot u| + C \quad \text{o} \quad \int \csc u du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$$

$$63. \int \tan^2 u du = -u + \tan u + C$$

$$64. \int \cot^2 u du = -u - \cot u + C$$

$$65. \int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$66. \int \csc^2 u du = -\cot u + C$$

$$67. \int \tan^n u du = \frac{\tan^{n-1} u}{n-1} - \int \tan^{n-2} u du, \quad n \neq 1$$

$$68. \int \cot^n u du = -\frac{\cot^{n-1} u}{n-1} - \int (\cot^{n-2} u) du, \quad n \neq 1$$

$$69. \int \sec^n u du = \frac{\sec^{n-2} u \tan u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u du, \quad n \neq 1$$

$$70. \int \csc^n u du = -\frac{\csc^{n-2} u \cot u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u du, \quad n \neq 1$$

$$71. \int \frac{1}{1 \pm \tan u} du = \frac{1}{2} (u \pm \ln|\cos u \pm \sen u|) + C$$

$$73. \int \frac{1}{1 \pm \sec u} du = u + \cot u \mp \csc u + C$$

$$72. \int \frac{1}{1 \pm \cot u} du = \frac{1}{2} (u \mp \ln|\sen u \pm \cos u|) + C$$

$$74. \int \frac{1}{1 \pm \csc u} du = u - \tan u \pm \sec u + C$$

Formas que implican funciones trigonométricas

$$75. \int \arcsen u du = u \arcsen u + \sqrt{1-u^2} + C$$

$$77. \int \arctan u du = u \arctan u - \ln \sqrt{1+u^2} + C$$

$$79. \int \operatorname{arccsc} u du = u \operatorname{arccsc} u - \ln|u + \sqrt{u^2-1}| + C$$

$$76. \int \arccos u du = u \arccos u - \sqrt{1-u^2} + C$$

$$78. \int \operatorname{arccot} u du = u \operatorname{arccot} u + \ln \sqrt{1+u^2} + C$$

$$80. \int \operatorname{arcsec} u du = u \operatorname{arcsec} u + \ln|u + \sqrt{u^2-1}| + C$$

Formas que implican e^u

$$81. \int e^u du = e^u + C$$

$$83. \int u^n e^u du = u^n e^u - n \int u^{n-1} e^u du$$

$$85. \int e^{au} \sen bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \sen bu - b \cos bu) + C$$

$$82. \int u e^u du = (u-1)e^u + C$$

$$84. \int \frac{1}{1+e^u} du = u - \ln(1+e^u) + C$$

$$86. \int e^{au} \cos bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \cos bu + b \sen bu) + C$$

Formas que implican $\ln u$

$$87. \int \ln u du = u(-1 + \ln u) + C$$

$$89. \int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [-1 + (n+1) \ln u] + C, n \neq -1$$

$$90. \int (\ln u)^2 du = u [2 - 2 \ln u + (\ln u)^2] + C$$

$$88. \int u \ln u du = \frac{u^2}{4} (-1 + 2 \ln u) + C$$

$$91. \int (\ln u)^n du = n(\ln u)^{n-1} - n \int (\ln u)^{n-2} du$$

Formas que implican funciones hiperbólicas

$$92. \int \cosh u du = \sinh u + C$$

$$94. \int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + C$$

$$96. \int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$93. \int \sinh u du = \cosh u + C$$

$$95. \int \csc h^2 u du = -\coth u + C$$

$$97. \int \operatorname{csch} u \coth u du = -\operatorname{csch} u + C$$

Formas que implican funciones hiperbólicas inversas (en forma logarítmica)

$$98. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$99. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C$$

$$100. \int \frac{du}{u \sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{|u|} + C$$



¿Sabías qué? Los fractales son representaciones geométricas de la teoría del caos, cambiantes e impredecibles, que nos invitan a pensar en dimensiones y teorías maravillosas que solo el estudio analítico, cualitativo y cuantitativo del cálculo nos permitan entender. Es por esta razón que en esta edición de **Matemáticas** los fractales son parte fundamental de la imagen que representa esta nueva colección.

Matemáticas II. Cálculo integral forma parte de una serie de libros elaborados para cubrir de manera específica los planes de estudio de los cursos de matemáticas a nivel superior: cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo vectorial, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales.

En esta nueva edición de **Cálculo integral** podrás estudiar:

- La integral definida y el teorema fundamental del cálculo
- Métodos de integración
- Aplicaciones de la integral
- Sucesiones y series

Estos temas establecen una manera singular de abordar el cálculo mediante ejemplos, explicaciones, recursos didácticos, definiciones y demostraciones, las cuales se presentan de una manera clara, accesible y con un estilo directo y legible, lo que hacen de esta obra un clásico instantáneo.

Acompáñanos a conocer el **Cálculo integral** desde una perspectiva clara y eficaz.

