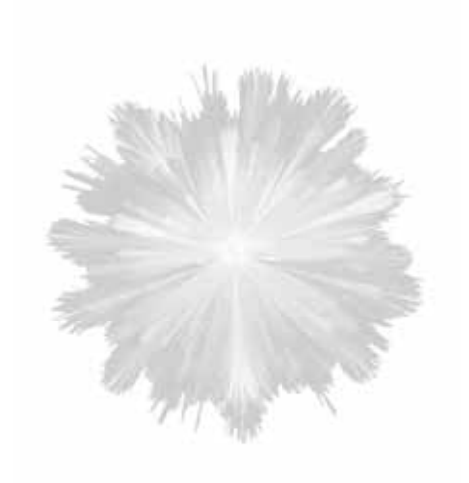


# MATEMÁTICAS I

## CÁLCULO DIFERENCIAL

---

RON LARSON • BRUCE EDWARDS



# MATEMÁTICAS I

## CALCULO DIFERENCIAL

**Ron Larson**

The Pennsylvania State University  
The Behrend College

**Bruce Edwards**

University of Florida

**Joel Ibarra Escutia**

Instituto Tecnológico de Toluca

**Traducción**

**Javier León Cárdenas**

**Revisión técnica**

Ana Elizabeth García Hernández  
Instituto Politécnico Nacional

**Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicio**  
Eduardo Enrique García

**Instituto Tecnológico de Celaya**  
Salustia Teresa Cano Ibarra

**Instituto Tecnológico de Durango**  
Luis Gustavo Reyes Martínez

**Instituto Tecnológico de Hermosillo**  
Hilario Mayboca Araujo  
Carlos Alberto Pereyda Pierre

**Instituto Tecnológico de Querétaro**  
Francisco Javier Avilés Urbiola  
María Eugenia Quintanar Pérez

**Instituto Tecnológico de San Juan del Río**  
Saulo Servín Guzmán

**Instituto Tecnológico de Toluca**  
Nelson García García

**Instituto Tecnológico José Mario Molina Pasquel  
y Henríquez, Campus Chapala**  
María de la Cruz Gómez Torres

**Instituto Tecnológico Superior de Cajeme**  
Socorro del Rivero Jiménez

**Tecnológico de Estudios Superiores de Chimalhuacán**  
Juan Bucio Esquivel

**Tecnológico de Estudios Superiores de Jilotepec**  
José Guadalupe González Escamilla

**Tecnológico de Estudios Superiores de Jocotitlán**  
Ramón Berber Palafox  
Víctor Duarte Cabrera  
Christopher Gutiérrez Luna  
Adriana Sotelo Hurtado

**Tecnológico de la Laguna**  
Ana Luisa González Valverde  
Edgar Antonio Peña Domínguez

**Universidad IUEM**

Israel Gutiérrez López



**Matemáticas I. Cálculo diferencial.**

Primera edición  
Ron Larson y Bruce Edwards

**Director Higher Education**

**Latinoamérica:**  
Renzo Casapía Valencia

**Gerente editorial Latinoamérica:**

Jesús Mares Chacón

**Editora de desarrollo:**

Abril Vega Orozco

**Coordinador de manufactura:**

Rafael Pérez González

**Diseño de portada:**

Karla Paola Benítez García

**Imagen de portada:**

© Svetlana Sokolova07 | Shutterstock

**Composición tipográfica:**

Humberto Núñez Ramos

© D.R. 2018 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc. Carretera México-Toluca núm. 5420, oficina 2301. Col. El Yaqui. Del. Cuajimalpa. C.P. 05320. Ciudad de México. Cengage Learning® es una marca registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor, podrá ser reproducida, transmitida, almacenada o utilizada en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabación en audio, distribución en internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial.

Esta es una adaptación de los libros:  
Larson, Ron y Bruce Edwards. *Cálculo*, Tomo I. Décima edición. ©2016, ISBN: 978-607-522-015-4 Traducido del libro *Calculus*. 10th Edition. Ron Larson and Bruce Edwards. Publicado en inglés por Brooks/Cole, una compañía de Cengage Learning ©2014 ISBN: 978-1-285-05709-5 Larson, Ron y Bruce Edwards *Matemáticas I. Cálculo diferencial*. ©2017 ISBN: 978-607-522-894-5

Datos para catalogación bibliográfica:  
Larson, Ron y Bruce Edwards.  
*Matemáticas I. Cálculo diferencial*. Primera edición.  
ISBN: 978-607-526-649-7

Visite nuestro sitio web en:  
<http://latinoamerica.cengage.com>

# Contenido

<b>UNIDAD 1</b>	<b>▷ Números reales</b>	<b>1</b>
1.1	Números reales y sus propiedades	2
1.2	Axiomas de los números reales	5
1.3	Desigualdades y valor absoluto	14
1.4	Introducción al álgebra	24
<b>UNIDAD 2</b>	<b>▷ Funciones</b>	<b>31</b>
2.1	Funciones y sus gráficas	32
2.2	Gráficas y modelos	44
2.3	Funciones inversas	52
<b>UNIDAD 3</b>	<b>▷ Límites y continuidad</b>	<b>59</b>
3.1	Introducción al cálculo a través del límite	60
3.2	Límite de una función	66
3.3	Propiedades de los límites y cálculo analítico de límites	77
3.4	Continuidad y límites laterales	88
3.5	Límites infinitos y asíntotas verticales	101
	<b>Proyecto de trabajo:</b> Gráficas y límites de funciones trigonométricas	108
3.6	Límites al infinito y asíntotas horizontales	109
	<b>Ejercicios de repaso</b>	<b>120</b>
	<b>Solución de problemas</b>	<b>122</b>
<b>UNIDAD 4</b>	<b>▷ La derivada</b>	<b>125</b>
4.1	La derivada y su interpretación geométrica	126
4.2	Reglas básicas de derivación y razones de cambio	136
4.3	Reglas del producto, del cociente y derivadas trigonométricas	148
4.4	La regla de la cadena	159
4.5	Derivación implícita	170
	<b>Proyecto de trabajo:</b> Ilusiones ópticas	177
4.6	Razones de cambio relacionadas	178
4.7	Derivada de la función inversa	187
4.8	Derivada de la función exponencial y de la función logaritmo natural	190
4.9	Derivada de la función exponencial de base $a$ y de la función logaritmo en base $a$	203
	<b>Proyecto de trabajo:</b> Usar utilidades gráficas para estimar la pendiente	211
4.10	Derivada de las funciones trigonométricas inversas	212

- 4.11 Derivada de las funciones hiperbólicas e hiperbólicas inversas 221  
**Proyecto de trabajo:** Arco de St. Louis 229  
**Ejercicios de repaso** 230  
**Solución de problemas** 232

## UNIDAD 5 ▷ Aplicaciones de la derivada 235

- 5.1 Extremos en un intervalo 236  
 5.2 El teorema de Rolle y el teorema del valor medio 244  
 5.3 Funciones crecientes y decrecientes y el criterio de la primera derivada 251  
**Proyecto de trabajo:** Arco iris 260  
 5.4 Concavidad, puntos de inflexión y el criterio de la segunda derivada 261  
 5.5 Análisis de gráficas de funciones 269  
 5.6 Problemas de optimización 278  
**Proyecto de trabajo:** Río Connecticut 287  
 5.7 Método de Newton 288  
 5.8 Diferenciales 294  
 5.9 Formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital 301  
**Ejercicios de repaso** 312  
**Solución de problemas** 315

## Formularios básicos y tablas de integración F1

Álgebra	F1
Fórmulas trigonométricas	F2
Trigonometría	F3
Derivadas e integrales	F4
Tablas de integración	T1

### Apéndices\*

<b>Apéndice A</b>	<b>Demostración de teoremas seleccionados</b>
<b>Apéndice B</b>	<b>Tablas de integración</b>
<b>Apéndice C</b>	<b>Repaso de precálculo</b>
	C.1 Números reales y recta numérica
	C.2 El plano cartesiano
	C.3 Repaso de funciones trigonométricas
<b>Apéndice D</b>	<b>Rotación y la ecuación general de segundo grado</b>
<b>Apéndice E</b>	<b>Números complejos</b>
<b>Formularios básicos</b>	

\* Este material se encuentra disponible en línea. Acceda a [www.cengage.com](http://www.cengage.com) e ingrese con el ISBN de la obra.

# Prefacio

Bienvenidos a esta nueva versión de **Matemáticas I. Cálculo diferencial**. Nos enorgullece ofrecerle una nueva versión revisada y mejorada de nuestros clásicos y exitosos libros de texto.

Esta obra forma parte de una serie de cinco libros elaborados para cubrir de manera específica los planes de estudio de los cursos de matemáticas a nivel superior: cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo vectorial, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales.

Al igual que en otras ediciones, hemos incorporado muchas de las útiles y atinadas sugerencias que usted, estimado lector, nos hace al utilizar esta obra en sus cursos.

En esta edición se han introducido algunas características nuevas y revisado otras. Encontrará lo que espera: un libro de texto pedagógico, matemáticamente formal y accesible.

Estamos contentos y emocionados de ofrecerle algo totalmente nuevo en esta edición, un sitio web: **LarsonCalculus.com**. Este sitio ofrece muchos recursos que le ayudarán en su estudio del cálculo. Todos estos recursos están a solo un clic de distancia. Nuestro objetivo en todas las ediciones de este libro de texto es proporcionarle las herramientas necesarias para dominar el cálculo. Esperamos que, junto con **LarsonCalculus.com**, encuentre útiles los cambios de esta edición para lograrlo.

En cada conjunto de ejercicios, asegúrese de anotar la referencia a **CalcChat.com**. En este sitio gratuito puede descargar una solución paso a paso de cualquier ejercicio impar. Además, puede hablar con un tutor, de manera gratuita, dentro del horario publicado en el sitio. Con el paso de los años, miles de estudiantes han visitado el sitio para obtener apoyo. Utilizamos toda esta información como ayuda para guiarlo en cada revisión de los ejercicios y soluciones.

## Lo nuevo en esta edición

### NUEVO **LarsonCalculus.com**

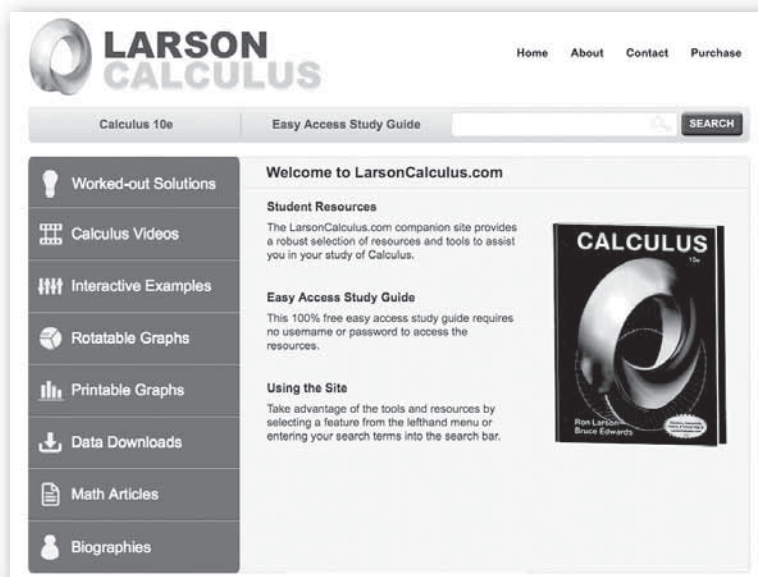
Este sitio web ofrece varias herramientas y recursos para complementar su aprendizaje. El acceso a estas herramientas es gratuito. Videos de explicaciones de conceptos o demostraciones del libro, ejemplos para explorar, vista de gráficas tridimensionales, descarga de artículos de revistas de matemáticas y mucho más.

### NUEVA **Apertura de capítulo**

En cada apertura de capítulo se resaltan aplicaciones reales utilizadas en los ejemplos y ejercicios.

### NUEVOS **Ejemplos interactivos**

Los ejemplos del libro están acompañados de ejemplos interactivos en **LarsonCalculus.com**. Estos ejemplos interactivos usan el reproductor CDF de Wolfram y permiten explorar el cálculo manejando las funciones o gráficas y observando los resultados.



### NUEVOS **Videos de demostraciones**

Vea videos del coautor Bruce Edwards, donde explica las demostraciones de los teoremas de *Cálculo*, décima edición, en **LarsonCalculus.com**.

## NUEVO ¿Cómo lo ve?

La característica ¿Cómo lo ve? en cada sección presenta un problema de la vida real que podrá resolver mediante inspección visual utilizando los conceptos aprendidos en la lección. Este ejercicio es excelente para el análisis en clase o la preparación de un examen.

## Comentario Revisado

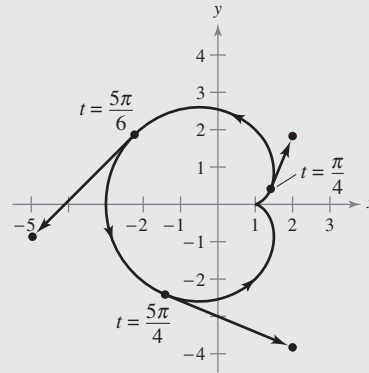
Estos consejos y sugerencias refuerzan o amplían conceptos, le ayudan a aprender cómo estudiar matemáticas, le advierten acerca de errores comunes, lo dirigen en casos especiales o le muestran los pasos alternativos o adicionales en la solución de un ejemplo.

## Conjuntos de ejercicios Revisados

Los conjuntos de ejercicios han sido amplia y cuidadosamente examinados para asegurarnos que son rigurosos e importantes y que incluyen todos los temas que nuestros usuarios han sugerido. Se han reorganizado los ejercicios y titulado para que pueda observar mejor las conexiones entre estos y los ejemplos. Los ejercicios de varios pasos son ejercicios de la vida real que refuerzan habilidades para resolver problemas y dominar los conceptos, dando a los estudiantes la oportunidad de aplicarlos en situaciones cotidianas.



**¿CÓMO LO VE?** La gráfica muestra una función vectorial  $\mathbf{r}(t)$  para  $0 \leq t \leq 2\pi$  y su derivada  $\mathbf{r}'(t)$  para diferentes valores de  $t$ .



- Para cada derivada que se muestra en la gráfica, determine si cada componente es positiva o negativa.
- ¿Es suave la curva en el intervalo  $[0, 2\pi]$ ? Explique su razonamiento.

40.  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$
41.  $\mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{k}$
42.  $\mathbf{r}(t) = -\sqrt{2}\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \sqrt{2}\sin t\mathbf{k}$

**■ Piénselo** En los ejercicios 43 y 44, use un sistema algebraico por computadora a fin de representar gráficamente la función vectorial  $\mathbf{r}(t)$ . Para cada  $u(t)$ , haga una conjetura sobre la transformación (si la hay) de la gráfica de  $\mathbf{r}(t)$ . Use un sistema algebraico por computadora para verificar su conjetura.

43.  $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$
- $u(t) = 2(\cos t - 1)\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$
  - $u(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$
  - $u(t) = 2\cos(-t)\mathbf{i} + 2\sin(-t)\mathbf{j} + \frac{1}{2}(-t)\mathbf{k}$
  - $u(t) = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 2\cos t\mathbf{k}$
  - $u(t) = 6\cos t\mathbf{i} + 6\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$
44.  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$
- $u(t) = t\mathbf{i} + (t^2 - 2t)\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$
  - $u(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$
  - $u(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \left(\frac{3}{2}t^3 + 4\right)\mathbf{k}$
  - $u(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$
  - $u(t) = (-t)\mathbf{i} + (-t^2)\mathbf{j} + \frac{1}{2}(-t^3)\mathbf{k}$

Representar una gráfica mediante una función vectorial. En los ejercicios 45 a 52, represente la curva plana por medio de una función vectorial. (Hay muchas respuestas correctas.)

45.  $y = x + 5$       46.  $2x - 3y + 5 = 0$
47.  $y = (x - 2)^2$       48.  $y = 4 - x^2$
49.  $x^2 + y^2 = 25$       50.  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$
51.  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$       52.  $\frac{z^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

Representar una gráfica mediante una función vectorial. En los ejercicios 53 a 60, dibuje la curva en el espacio representada por la intersección de las superficies. Después represente la curva por una función vectorial utilizando el parámetro dado.

- | Superficies                           | Parámetro                |
|---------------------------------------|--------------------------|
| 53. $z = x^2 + y^2, x + y = 0$        | $x = t$                  |
| 54. $z = x^2 + y^2, z = 4$            | $x = 2\cos t$            |
| 55. $x^2 + y^2 = 4, z = z^2$          | $x = 2\sin t$            |
| 56. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16, x = z^2$ | $z = t$                  |
| 57. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x + z = 2$  | $x = 1 + \sin t$         |
| 58. $x^2 + y^2 + z^2 = 10, x + y = 4$ | $x = 2 + \sin t$         |
| 59. $x^2 + z^2 = 4, y^2 + z^2 = 4$    | $x = t$ (primer octante) |
| 60. $x^2 + y^2 + z^2 = 16, xy = 4$    | $x = t$ (primer octante) |
61. Dibujar una curva. Demuestre que la función vectorial  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\cos t\mathbf{j} + 2t\sin t\mathbf{k}$  se encuentra en el cono  $4x^2 = y^2 + z^2$ . Dibuje la curva.

62. Dibujar una curva. Demuestre que la función vectorial  $\mathbf{r}(t) = e^t\cos t\mathbf{i} + e^t\sin t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$  se encuentra en el cono  $z^2 = x^2 + y^2$ . Dibuje la curva.

Determinar un límite. En los ejercicios 63 a 68, evalúe el límite (si existe).

63.  $\lim_{t \rightarrow \pi} (t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k})$
64.  $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( 3t\mathbf{i} + \frac{2}{t-1}\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k} \right)$
65.  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( t^2\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + \frac{1 - \cos t}{t}\mathbf{k} \right)$
66.  $\lim_{t \rightarrow 1} \left( \sqrt{t}\mathbf{i} + \frac{\ln t}{t^2 - 1}\mathbf{j} + \frac{1}{t - 1}\mathbf{k} \right)$
67.  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( e^t\mathbf{i} + \frac{\sin t}{t}\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k} \right)$
68.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left( e^{-t}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + \frac{1}{t^2 + 1}\mathbf{k} \right)$

Continuidad de una función vectorial. En los ejercicios 69 a 74, determine el (los) intervalo(s) en que la función vectorial es continua.

69.  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}$
70.  $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \sqrt{t-1}\mathbf{j}$
71.  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \arcsen t\mathbf{j} + (t - 1)\mathbf{k}$
72.  $\mathbf{r}(t) = 2e^{-t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \ln(t - 1)\mathbf{k}$
73.  $\mathbf{r}(t) = (e^{-t}, t^2, \tan t)$       74.  $\mathbf{r}(t) = \langle 8, \sqrt{t}, \sqrt{t} \rangle$

### DESARROLLO DE CONCEPTOS

Escribir una transformación. En los ejercicios 75 a 78, considere la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t - 3)\mathbf{j} + t\mathbf{k}.$$

Dé una función vectorial  $\mathbf{s}(t)$  que sea la transformación especificada de  $\mathbf{r}$ .

- Una traslación vertical tres unidades hacia arriba.
  - Una traslación vertical dos unidades hacia abajo.
  - Una traslación horizontal dos unidades en dirección del eje  $x$  negativo.
  - Una traslación horizontal cinco unidades en dirección del eje  $y$  positivo.
79. Continuidad de una función vectorial. Escriba la definición de continuidad para una función vectorial. Dé un ejemplo de una función vectorial que esté definida pero no sea continua en  $t = 2$ .

80. Comparar funciones. ¿Cuáles de las siguientes gráficas representa la misma gráfica?

- $\mathbf{r}(t) = (-3\cos t + 1)\mathbf{i} + (5\sin t + 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i} + (-3\cos t + 1)\mathbf{j} + (5\sin t + 2)\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = (3\cos t - 1)\mathbf{i} + (-5\sin t - 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = (-3\cos 2t + 1)\mathbf{i} + (5\sin 2t + 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

## Cambios en el contenido

El apéndice A (Demostración de teoremas seleccionados) ahora se presenta en formato de video (en inglés) en LarsonCalculus.com. Las demostraciones también se presentan en forma de texto (en inglés y con costo adicional) en CengageBrain.com.

## Características confiables

### Aplicaciones

Se han elegido con cuidado ejercicios de aplicación y ejemplos que se incluyen para dirigir el tema: “¿Cuándo usaré esto?”. Estas aplicaciones son tomadas de diversas fuentes, tales como: acontecimientos actuales, datos del mundo, tendencias de la industria y, además, están relacionadas con una amplia gama de intereses, entendiendo dónde se está utilizando (o se puede utilizar) el cálculo para fomentar una comprensión más completa del material.

### Desarrollo de conceptos

Los ejercicios escritos al final de cada sección están diseñados para poner a prueba su comprensión de los conceptos básicos en cada sección, motivándole a verbalizar y escribir las respuestas, y fomentando las habilidades de comunicación técnica que le serán invaluable en sus futuras carreras.

### Teoremas

Los teoremas proporcionan el marco conceptual del cálculo. Los teoremas se enuncian claramente y están separados del resto del libro mediante recuadros de referencia visual rápida. Las demostraciones importantes a menudo se ubican enseguida del teorema y pueden encontrarse en LarsonCalculus.com.

### Definiciones

Como con los teoremas, las definiciones se enuncian claramente usando terminología precisa, formal y están separadas del texto mediante recuadros para una referencia visual rápida.

#### Definición de diferencial total

Si  $z = f(x, y)$ , y  $\Delta x$  y  $\Delta y$  son los incrementos en  $x$  y en  $y$ , entonces las **diferenciales** de las variables independientes  $x$  y  $y$  son

$$dx = \Delta x \quad y \quad dy = \Delta y$$

y la **diferencial total** de la variable dependiente  $z$  es

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy.$$

### Exploraciones

Las exploraciones proporcionan retos únicos para estudiar conceptos que aún no se han cubierto formalmente en el libro. Le permiten aprender mediante el descubrimiento e introducir temas relacionados con los que está estudiando en ese momento. Explorar temas de esta manera le invita a pensar de manera más amplia.

### Notas históricas y biografías

Las notas históricas le proporcionan información acerca de los fundamentos del cálculo. Las biografías presentan a las personas que crearon y contribuyeron al cálculo.

### Tecnología

A través del libro, los recuadros de tecnología le enseñan a usarla para resolver problemas y explorar conceptos del cálculo. Estas sugerencias también indican algunos obstáculos del uso de la tecnología.

### Proyectos de trabajo

Los proyectos de trabajo se presentan en algunas secciones y le invitan a explorar aplicaciones relacionadas con los temas que está estudiando. Proporcionan una forma interesante y atractiva para que usted y otros estudiantes trabajen e investiguen ideas de manera conjunta.

#### PROYECTO DE TRABAJO

#### Arco de St. Louis

El arco de entrada a San Luis, Missouri, fue diseñado utilizando la función coseno hiperbólico. La ecuación utilizada para la construcción del arco fue

$$y = 693.8597 - 68.7672 \cosh 0.0100333x, \\ -299.2239 \leq x \leq 299.2239$$

donde  $x$  y  $y$  se miden en pies. Las secciones transversales del arco son triángulos equiláteros, y  $(x, y)$  traza la ruta de los centros de masa de los triángulos de la sección transversal. Para cada valor de  $x$ , el área del triángulo de la sección transversal es

$$A = 125.1406 \cosh 0.0100333x.$$

(Fuente: *Owner's Manual for the Gateway Arch, Saint Louis, MO*, por William Thayer.)

- (a) ¿A qué altura sobre el suelo está el centro del triángulo más alto? (A nivel del suelo,  $y = 0$ .)
- (b) ¿Cuál es la altura del arco? (Sugerencia: Para un triángulo equilátero,  $A = \sqrt{3}c^2$ , donde  $c$  es la mitad de la base del triángulo, y el centro de masa del triángulo está situado a dos tercios de la altura del triángulo.)
- (c) ¿Qué tan ancho es el arco al nivel del suelo?



#### Desafíos del examen Putnam

Las preguntas del examen Putnam se presentan en algunas secciones. Estas preguntas lo desafían y amplían los límites de su comprensión sobre el cálculo.

## Agradecimientos

Queremos agradecer a todos los profesores que participaron en esta obra, sus aportaciones y sugerencias fueron invaluable para el desarrollo de la misma.

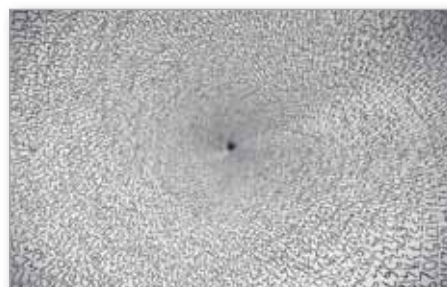


# Números reales

- 1.1 Números reales y sus propiedades
- 1.2 Axiomas de los números reales
- 1.3 Desigualdades y valor absoluto
- 1.4 Introducción al álgebra



Criptografía



Secuencias



Cometa Halley



Álgebra y aritmética

# 1.1 Números reales y sus propiedades

## Complicado entender el infinito

Existe una cantidad infinita numerable de números naturales, dentro de este conjunto, ¿qué hay más, números pares, números impares o los propios naturales? ¿Es posible demostrar que existe la misma cantidad de números pares, impares o naturales!

- Los números naturales.
- Los números enteros.
- Los racionales y los irracionales.

Hoy en día somos testigos del máximo desarrollo científico y tecnológico. Los aportes a las principales ciencias e ingenierías deben su considerable progreso a la aplicación directa del Cálculo Infinitesimal.

El estudio y solución de problemas clásicos como la velocidad de una partícula, la determinación de la recta tangente a una curva en un punto, la razón de cambio de una función, el área de una región y el volumen de un sólido han permitido el desarrollo del cálculo diferencial e integral.

En cualquier caso, el cálculo basa su desarrollo en el sistema de los números reales y por esta razón es necesario estudiar y conocer sus principales propiedades.

Iniciamos el estudio del conjunto de los números reales considerando sistemas numéricos más sencillos: los números naturales, los números enteros, los números racionales y los números irracionales.

## Los números naturales $\mathbb{N}$

Se define el conjunto de los *números naturales* como

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$$

Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo estudió en las Universidades de Berlín, Halle y Freiburg. Las materias que estudió fueron matemáticas, física y filosofía. Recibió clases de Frobenius, Planck, Schmidt y Schwarz.

Desde siempre, la necesidad de contar ha estado presente en todas las culturas, la comparación entre conjuntos permitió conocer el tamaño de alguno de ellos. Pero los números naturales proporcionaron la manera precisa y contundente de contar. Entre las propiedades de los números naturales debemos mencionar que todos los números naturales tienen un sucesor que también es un número natural y que todos excepto el 1 tienen un antecesor que también es un número natural. Es decir

1. El primer elemento de los naturales es el 1.
2. Si  $k \in \mathbb{N}$  se define su sucesor como  $k + 1$  y además  $k + 1 \in \mathbb{N}$ .
3. Si  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq 1$ , se define su antecesor como  $k - 1$  y además  $k - 1 \in \mathbb{N}$ .

En el conjunto  $\mathbb{N}$  se definen dos operaciones básicas: la suma y el producto, las cuales son cerradas, conmutativas, asociativas y distributivas, además de existir el neutro de la multiplicación, sin embargo, los números naturales carecen de elementos neutros y de inversos aditivos.

Un conjunto que contiene a los números naturales y que resuelve este inconveniente es el conjunto de los números enteros.

La letra  $\mathbb{Z}$  para denotar al conjunto de los números enteros se tomó en honor a Ernst Zermelo.

## Los números enteros $\mathbb{Z}$

Todo número natural es un número entero,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .

Se define el conjunto de los *números enteros* como

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Alguna vez, el metro se definió como una diezmillonésima parte de la longitud del meridiano terrestre a lo largo de un cuadrante, este número no es un número entero, es un racional (o como comúnmente le llamamos en la educación básica: fracción o quebrado).

El símbolo  $\mathbb{Q}$  se tomó originalmente de la palabra “Quotient”.

Todo número entero  $a$  puede expresarse como el cociente  $\frac{a}{1}$ , de manera que todo número entero es un número racional,  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ .

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

### Notación de los números decimales

El primero en utilizar una notación sistemática para expresar los números decimales fue el matemático flamenco Simon Stevin (1548-1620). No obstante, la versión actual de esta notación se debe a Willbord Suellius, quien vivió en los Países Bajos en el siglo XVII.

### El papiro de Rhind

Las fracciones ya eran conocidas por los antiguos egipcios. Así lo atestigua un papiro de 3.700 años de antigüedad en el que se leía “AH, el total y su séptima parte hacen 19”. Este importante vestigio histórico fue adquirido en 1858 en una tienda de Luxor por el anticuario escocés Henry Rhind.

En el conjunto de los números enteros también se definen las operaciones de suma y producto, que son cerradas, conmutativas, asociativas, distributivas y con elemento neutro multiplicativo. La “ventaja” sobre los naturales es la existencia del neutro aditivo y de los inversos aditivos, esto nos permite definir al “cero” y dar paso a la existencia de “números negativos”. La resta de enteros se define como la suma de un número con el inverso de otro.

No obstante, los números enteros no se pueden utilizar para describir cómo se divide la unidad en dos partes, por ejemplo. Los números racionales hacen su aparición.

## Los números racionales $\mathbb{Q}$

Se define el conjunto de los *números racionales* como

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

### EJEMPLO 1

### Algunos números racionales son

- $\frac{3}{4}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{2}, 0$
- Cualquier número natural.
- Cualquier número entero.
- Toda expansión decimal finita.
- Toda expansión decimal infinita y periódica.

Los números racionales encuentran su origen como cocientes de números enteros. En  $\mathbb{Q}$ , además de cumplirse todas las propiedades de los enteros, se agrega la existencia de inversos multiplicativos para todos los números excepto el cero. Esto da origen a la operación de división como resultado de multiplicar un número por el inverso de otro no cero.

Como el resultado de dividir un número entero por el neutro multiplicativo 1 es el mismo número, se verifica que todo número entero es un número racional. Se cumple la contención propia  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ .

Para todo número racional  $\frac{p}{q}$  es posible realizar la división aritmética de  $p$  entre  $q$ , para obtener como resultado un número decimal. El siguiente teorema presentado sin demostración expresa lo anterior.

### TEOREMA 1.1

Todo número racional puede expresarse como una expansión decimal finita o como una expansión decimal infinita y periódica.

### EJEMPLO 2

### Una expansión decimal finita es un número racional

Demostrar que la expansión decimal 0.234 es un racional.

**Solución** Sea  $x = 0.234$ , entonces

$$\begin{aligned} x &= 0.234 && \text{multiplicar por } 10^3 \\ 1000x &= 234 && \text{despejar} \\ x &= \frac{234}{1000} \end{aligned}$$

**Observación**

En general, dada la expansión decimal finita  $0.a_1a_2a_3\dots a_n$  se supone

$$\begin{aligned}
 x &= 0.a_1a_2a_3\dots a_n && \text{multiplicar por } 10^n \\
 10^n x &= a_1a_2a_3\dots a_n && \text{despejar} \\
 x &= \frac{a_1a_2a_3\dots a_n}{10^n}
 \end{aligned}$$

**EJEMPLO 3**

**Una expansión decimal infinita pero periódica es un número racional**

Demostrar que la expansión decimal  $0.369369369\dots = \overline{0.369}$  es un racional.

**Solución** Sea  $x = \overline{0.369} = 0.369369369369\dots$ , entonces

$$\begin{aligned}
 x &= 0.369369369369\dots && \text{multiplicar por } 10^3 \\
 10^3 x &= 369.369369369\dots && \text{restar expresiones} \\
 10^3 x &= 369.369369369\dots \\
 \underline{x} &= \underline{0.369369369369\dots} && \text{despejar} \\
 999 x &= 369 \\
 x &= \frac{369}{999}
 \end{aligned}$$

**Los números irracionales**

Dados dos números racionales cualesquiera, siempre es posible hallar un nuevo número racional comprendido entre los dos; por ejemplo, entre  $m$  y  $n$  está el número racional  $\frac{m+n}{2}$ . Sin embargo, los números racionales no llenan toda la recta numérica. ¿Cómo se entiende esto? Basta con imaginar algunos números que, como  $\pi$  o la raíz cuadrada de 2, no pueden expresarse como fracciones. Los números de esta clase se llaman irracionales y se “intercalan” en la recta real en los huecos que existen entre los elementos del conjunto  $\mathbb{Q}$ .

Un número primo solo es divisible por él mismo y por la unidad, los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 57, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,...

Consideremos los siguientes problemas:

1. ¿Cuál es la solución de la ecuación  $x^2 - 2 = 0$ ?
2. ¿Cuál es la razón entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro?
3. ¿Qué valor toma la función  $(x + 1)^{1/x}$  para valores de  $x$  casi cero?

Se puede verificar que las respuestas son números que no pueden expresarse como el cociente de dos números enteros, porque no son números racionales.

La necesidad de los números irracionales se presentó en problemas de geometría de la antigua Grecia, sin embargo, fue hasta el siglo XIX que se mostraron avances significativos a través de los estudios realizados por Karl Weierstrass, George Cantor y Richard Dedekind. La construcción total se dio a partir de los axiomas que estableció Giuseppe Peano en 1889.

A pesar de que entre dos números racionales siempre existe otro número racional, existen “huecos” entre dos números racionales que no pueden determinarse, estos son los números irracionales. Se puede definir que los números irracionales son todos aquellos que no pueden expresarse como el cociente de dos enteros, o bien como aquellos números que tienen una expansión decimal *infinita y no periódica*.

**Los números irracionales  $\mathbb{I}$**

Se define el conjunto de los *números irracionales*  $\mathbb{I}$  como el conjunto de todos los números que no son racionales.

**EJEMPLO 4**

**Algunos números irracionales**

1.  $e$
2.  $\pi$
3.  $\sqrt{p}$ , si  $p$  es un número primo.

4.  $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ , con  $p$  y  $q$  números primos.
5.  $a + \sqrt{p}$ , si  $a$  es un número racional y  $p$  un número primo.

## Los números reales $\mathbb{R}$

La recta numérica se completa al unir los números racionales con los números irracionales, son conjuntos disjuntos y mutuamente excluyentes. Hemos llegado a la definición de número real.

Se define el conjunto de los *números reales* como la unión de números racionales e irracionales

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Se verifican las contenciones propias  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \text{ e } \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ .

## 1.2 Axiomas de los números reales

Si existiera la división por 0...

¿En dónde está el error del siguiente desarrollo?

Supongamos que  $a$  es un número real NO cero.

Entonces sea

$$a = b \neq 0$$

Entonces

$$a^2 = ab$$

Restando  $b^2$

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

Factorizando

$$(a + b)(a - b) = b(a - b)$$

“Despejando”

$$a + b = \frac{b(a - b)}{a - b}$$

“Cancelando”

$$a + b = b$$

Y por el axioma 3, se tiene

$$a = 0 \quad \text{¿?}$$

¿Por qué?

### ■ Axiomas de los números reales, propiedades aritméticas.

### ■ Axiomas de orden.

### ■ Axioma de completitud o completitud.

El sistema de los números reales es uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas a cualquier nivel. Un estudio más profundo de este conjunto numérico queda fuera de esta obra y simplemente nos limitaremos a mencionar el conjunto de axiomas a partir de los cuales pueden derivarse las propiedades más conocidas de los números reales.

## Propiedades aritméticas de los números reales

Se enuncian los siguientes axiomas a partir de los cuales se desarrolla toda la teoría de los números reales.

### AXIOMAS DE LOS NÚMEROS REALES

Dados dos números reales cualesquiera  $a$  y  $b$  se define la suma  $a + b \in \mathbb{R}$  y el producto  $ab \in \mathbb{R}$ , que satisfacen los siguientes axiomas.

**Axioma 1.** Propiedad conmutativa de la suma

$$a + b = b + a$$

**Axioma 2.** Propiedad asociativa de la suma

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

**Axioma 3.** Existencia del neutro aditivo

Existe el  $0 \in \mathbb{R}$  tal que  $a + 0 = a$

**Axioma 4.** Existencia de inversos aditivos

Para todo número real  $a$  existe  $-a \in \mathbb{R}$ , tal que  $a + (-a) = 0$

**Axioma 5.** Propiedad conmutativa del producto

$$ab = ba$$

**Axioma 6.** Propiedad asociativa del producto  

$$a(bc) = (ab)c$$

**Axioma 7.** Existencia del neutro multiplicativo  
 Existe el  $1 \in \mathbb{R}$  tal que  $a \cdot 1 = a$

**Axioma 8.** Existencia de inversos multiplicativos  
 Para todo número real  $a \neq 0$  existe  $a^{-1} \in \mathbb{R}$ , tal que  $a \cdot a^{-1} = 1$

**Axioma 9.** Propiedad distributiva  

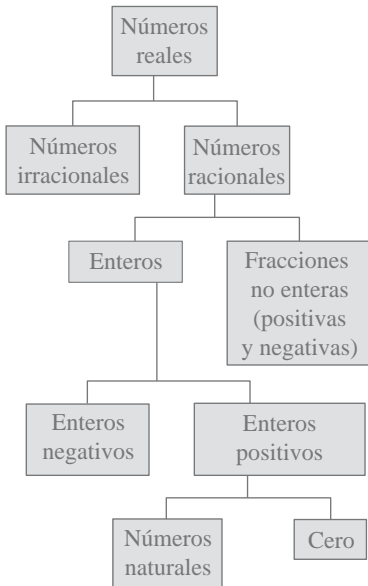
$$a(b + c) = ab + ac$$

Todas las propiedades conocidas de los números reales pueden demostrarse a partir de los anteriores axiomas, por esta razón se dice que la teoría de los números reales es una *teoría axiomática*.

**Definición de resta y división de números reales**

Se define la resta y la división de números reales como sigue

1.  $a - b = a + (-b)$
2.  $\frac{a}{b} = ab^{-1}$ , siempre que  $b \neq 0$



Subconjuntos de los números reales  
**Figura 1.1**

**EJEMPLO 1 Clasificar números reales**

Determine cuáles números del conjunto

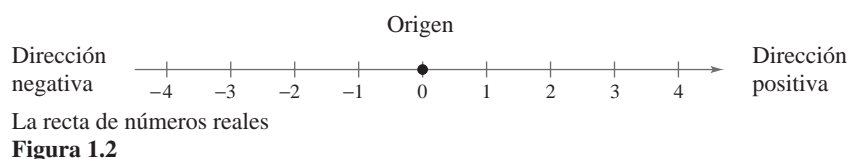
$$\left\{ -13, -\sqrt{5}, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{8}, \sqrt{2}, \pi, 7 \right\}$$

son (a) números naturales, (b) números enteros positivos, (c) números enteros, (d) números racionales y (e) números irracionales.

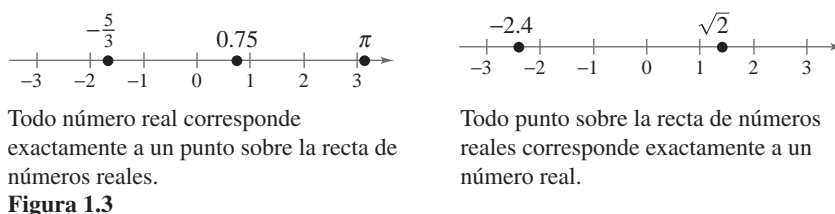
**Solución**

- a. Números naturales:  $\{7\}$
- b. Números enteros positivos:  $\{0, 7\}$
- c. Números enteros:  $\{-13, -1, 0, 7\}$
- d. Números racionales:  $\left\{ -13, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{8}, 7 \right\}$
- e. Números irracionales:  $\{-\sqrt{5}, \sqrt{2}, \pi\}$

Los números reales se representan gráficamente sobre la **recta de números reales**. Al trazar un punto sobre la recta de números reales que corresponda a un número real, estamos **graficando** el número real. El punto 0 sobre la recta de números reales es el **origen**. Los números a la derecha del 0 son positivos y a la izquierda son negativos, como se ve en la figura 1.2. El término **no negativo** describe un número que es positivo o cero.



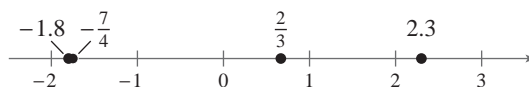
Como se ilustra en la figura 1.3, hay una correspondencia biunívoca entre números reales y puntos sobre la recta de números reales.

**EJEMPLO 2****Clasificar números reales**

Grafique los números reales sobre la recta de números reales.

- a.  $-\frac{7}{4}$
- b. 2.3
- c.  $\frac{2}{3}$
- d. -1.8

**Solución** Los cuatro puntos se muestran en la figura 1.4.



**Figura 1.4**

- a. El punto que representa al número real  $-\frac{7}{4} = -1.75$  se encuentra entre -2 y -1, pero más cercano a -2, en la recta de números reales.
- b. El punto que representa al número real 2.3 se encuentra entre 2 y 3, pero más cercano a 2, en la recta de números reales.
- c. El punto que representa al número real  $\frac{2}{3} = 0.666\dots$  se encuentra entre 0 y 1, pero más cercano a 1, en la recta de número reales
- d. El punto que representa al número real -1.8 se encuentra entre -2 y -1, pero más cercano a -2, en la recta de números reales. Observe que el punto que representa a -1.8 está ligeramente a la izquierda del punto que representa a  $-\frac{7}{4}$ . ■

**El orden en los números reales**

Si  $a$  y  $b$  son dos números reales se dice que  $a$  es menor que  $b$  si y solo si la diferencia  $b - a$  es un número real positivo, y se escribe

$$a < b \text{ si y solo si } 0 < b - a$$

De la misma manera se dice que un número  $a$  es menor o igual que  $b$  si y solo si la diferencia  $b - a$  es un número real no negativo, esto es

$$a \leq b \text{ si y solo si } 0 \leq b - a$$

En la recta real, la desigualdad  $a < b$  se representa como un número  $a$  a la izquierda de un número  $b$ .

Finalmente se dice que los números  $a$  y  $b$  son iguales si la diferencia  $a - b$  es cero, es decir

$$a = b \text{ si y solo si } b - a = 0$$

El orden natural en el conjunto de los números reales se basa en comparar a cada real con el cero y ubicarlo a la izquierda o derecha de él según corresponda. En la recta real, la desigualdad  $a < b$  implica que el número  $a$  está a la izquierda del número  $b$ .

En los números reales la relación de orden  $<$  satisface los siguientes axiomas.

### AXIOMAS DE ORDEN EN $\mathbb{R}$

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$

#### Axioma 10. Ley de tricotomía

Se cumple una y solo una de las siguientes condiciones

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

Nota:  $a > b$  significa  $b < a$

#### Axioma 11. Si $a < b$ , entonces $a + c < b + c$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$

#### Axioma 12. Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces $0 < ab$

#### Axioma 13. Propiedad de transitividad

Si  $a < b$  y  $b < c$  entonces  $a < c$

### Definición de los símbolos de desigualdad estricta $<$ y $>$

Los símbolos  $<$  y  $>$  se conocen como símbolos de desigualdad estricta y se leen “menor que” y “mayor que” respectivamente.

### Definición de los símbolos $\leq$ “menor o igual que” y $\geq$ “mayor o igual que”

Los símbolos  $\leq$  y  $\geq$  se conocen como símbolos de desigualdad no estricta y se leen “menor o igual que” y “mayor o igual que” respectivamente.

La expresión  $a \leq b$  abrevia los casos  $a < b$  o  $a = b$ .

La expresión  $b \geq a$  abrevia los casos  $b > a$  o  $b = a$ .

En el siguiente teorema se muestran otras propiedades de orden.

### TEOREMA 1.2 Otras propiedades de orden

1. Si  $a < b$  y  $0 < c$  entonces  $ac < bc$
2. Si  $a < b$  y  $c < 0$  entonces  $bc < ac$
3. Si  $0 < a$  y  $0 < b$  entonces  $0 < a + b$
4. Si  $0 < a < b$  y  $0 < c < d$  entonces  $a + c < b + d$
5. Si  $0 < a < b$  y  $0 < c < d$  entonces  $ac < bd$

**Ley de tricotomía**

Dados números reales cualesquiera uno es mayor que otro o son iguales entre sí.

Los números reales son un conjunto ordenado.

**Demostración (1)**

Si  $a < b$  entonces por el axioma 11

$a - a < b - a$  es decir  $0 < b - a$ , y si  $0 < c$  por el axioma 12 se cumple  $0 < (b - a)c$ , luego  $0 < bc - ac$ . De nueva cuenta por el axioma 11 tenemos  $ac < bc - ac + ac$ , donde finalmente  $ac < bc$

**Demostración (2)**

Si  $a < b$  y  $c < 0$  entonces  $0 < b - a$  y  $0 < -c$  por el axioma 12 se cumple

$0 < (b - a)(-c)$ , luego  $0 < -bc + ac$ . De nueva cuenta por el axioma 11 tenemos  $bc < ac$ .

**Demostración (3)**

Si  $0 < a$  y  $0 < b$  entonces por el axioma 11 si  $0 < a$  y  $0 < b + a$

Por tricotomía (axioma 10) se tiene  $0 < a + b$ .

**Demostración (4)**

Si  $0 < a < b$  y  $0 < c < d$  entonces  $0 < b - a$  y  $0 < d - c$ , por el inciso (3) de este teorema se tiene  $0 < (b - a) + (d - c)$ , luego  $0 < b + d - (a + c)$ . Finalmente  $a + c < b + d$ .

**Demostración (5)**

Si  $0 < a < b$  y  $0 < c < d$  entonces  $ac < bc$  y  $bc < bd$ . Por tricotomía se concluye la demostración.

**Ínfimo y supremo**

Antes de presentar el último axioma de los números reales consideremos las siguientes definiciones.

**Definición de cota superior y cota inferior**

Sea  $A \subset \mathbb{R}$  entonces

1. Si existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $a < x$  para todo  $a \in A$ , entonces  $x$  se llama una *cota superior* de  $A$  y que el conjunto  $A$  está *acotado por arriba*.
2. Si existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $x < a$  para todo  $a \in A$ , entonces  $x$  se llama una *cota inferior* de  $A$  y que el conjunto  $A$  está *acotado por abajo*.

El ínfimo y el supremo de un conjunto cuando existen son únicos.

**Definición de supremo de un conjunto**

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  acotado por arriba y supongamos que existe  $a \in \mathbb{R}$  que satisface las siguientes dos condiciones

1.  $a$  es una cota superior de  $A$ .
2. Si  $b \in \mathbb{R}$  es una cota superior de  $A$  entonces  $a \leq b$ .

Entonces  $a$  se dice el supremo de  $A$  y tiene la propiedad de ser "la menor cota superior".

**Definición de ínfimo de un conjunto**

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  acotado por abajo y supongamos que existe  $a \in \mathbb{R}$  que satisface las siguientes dos condiciones

1.  $a$  es una cota inferior de  $A$ .
2. Si  $c \in \mathbb{R}$  es una cota inferior de  $A$  entonces  $c \leq a$ .

Entonces  $a$  se dice el ínfimo de  $A$  y tiene la propiedad de ser "la mayor cota inferior".

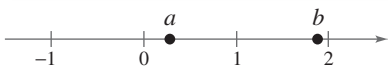
Ahora sí, estamos en condiciones de enunciar un último axioma de los números reales, conocido como el axioma de *complitud* o de *completitud*.

**Axioma 14.** Axioma de complitud o completitud

1. Todo conjunto no vacío de números reales acotado por arriba tiene un supremo.
2. Todo conjunto no vacío de números reales acotado por abajo tiene un ínfimo.

Sin importar qué tan “cerca-nos” estén dos números reales, siempre será posible encontrar otro número real entre ellos.

El conjunto de los números reales es un conjunto denso.



$a < b$  si y solo si  $a$  está a la izquierda de  $b$ .

Figura 1.5

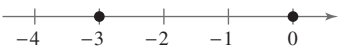


Figura 1.6

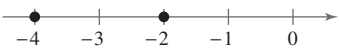


Figura 1.7

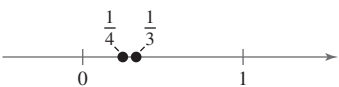


Figura 1.8

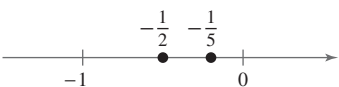


Figura 1.9

### La densidad de los números reales

Una propiedad importante de los números reales es que entre dos reales diferentes cualesquiera sin importar qué tan cercanos estén, siempre existe otro número real y como consecuencia, entre dos reales cualesquiera siempre existe una infinidad de números reales. En términos matemáticos decimos que el conjunto de los números reales es un conjunto *denso*.

Geoméricamente, se tiene que  $a < b$  si y solo si  $a$  está a la izquierda de  $b$  en la recta de números reales, como se ve en la figura 1.5

### EJEMPLO 3 Orden de los números reales

Ponga el símbolo de desigualdad apropiado ( $<$  o  $>$ ) entre el par de números reales.

- a.  $-3, 0$     b.  $-2, -4$     c.  $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$     d.  $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{2}$

#### Solución

- a. Como  $-3$  está a la izquierda de  $0$  en la recta de números reales, como se ve en la figura 1.6, se puede decir que  $-3$  es *menor que*  $0$ , y escribimos  $-3 < 0$ .
- b. Como  $-2$  está a la derecha de  $-4$  en la recta de números reales, como se ve en la figura 1.7, se puede decir que  $-2$  es *mayor que*  $-4$ , y escribimos  $-2 > -4$ .
- c. Como  $\frac{1}{4}$  está a la izquierda de  $\frac{1}{3}$  en la recta de números reales, como se ve en la figura 1.8, se puede decir que  $\frac{1}{4}$  es *menor a*  $\frac{1}{3}$ , y escribimos  $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ .
- d. Como  $-\frac{1}{5}$  está a la derecha de  $-\frac{1}{2}$  en la recta de números reales, como se ve en la figura 1.9, se puede decir que  $-\frac{1}{5}$  es *mayor que*  $-\frac{1}{2}$ , y escribimos  $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$ .

### EJEMPLO 4 Orden de los números reales

Describe el subconjunto de números reales representado por cada desigualdad.

- a.  $x \leq 2$     b.  $-2 \leq x < 3$

#### Solución

- a. La desigualdad  $x \leq 2$  denota todos los números reales menores o iguales a  $2$ , como se ve en la figura 1.10.
- b. La desigualdad  $-2 \leq x < 3$  significa que  $x \geq -2$  y  $x < 3$ . Esta “doble desigualdad” denota todos los números reales entre  $-2$  y  $3$ , incluido  $-2$  pero no  $3$ , como se muestra en la figura 1.11.

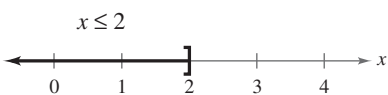


Figura 1.10

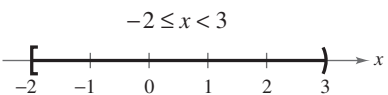


Figura 1.11

## Intervalos en $\mathbb{R}$

Se pueden usar desigualdades para describir subconjuntos de números reales llamados **intervalos**. En los intervalos acotados a continuación, los números reales  $a$  y  $b$  son los puntos extremos de cada intervalo. Los puntos extremos de un intervalo cerrado están incluidos en él, en tanto que los puntos extremos de un intervalo abierto no están incluidos en él.

### Tip de estudio

La razón por la que los cuatro tipos de intervalos de la derecha se llaman *acotados* es que cada uno tiene una longitud finita. Un intervalo que no tiene longitud finita es *no acotado* (vea abajo).

### Intervalos acotados en la recta de números reales

Notación	Tipo de intervalo	Desigualdad	Gráfica
$[a, b]$	Cerrado	$a \leq x \leq b$	
$(a, b)$	Abierto	$a < x < b$	
$[a, b)$	Mixto	$a \leq x < b$	
$(a, b]$	Mixto	$a < x \leq b$	

Los símbolos  $\infty$ , **infinito positivo**, y  $-\infty$ , **infinito negativo**, no representan números reales. Simplemente son símbolos prácticos que se utilizan para describir lo ilimitado de un intervalo como  $(1, \infty)$  o  $(-\infty, 3]$ .



### ATENCIÓN

Siempre que escribamos un intervalo que contenga  $\infty$  o  $-\infty$  usamos invariablemente un paréntesis y nunca corchetes. Esto es porque  $\infty$  y  $-\infty$  nunca son puntos extremos de un intervalo y, por tanto, no están incluidos en él.

### Intervalos no acotados (infinitos) en la recta de números reales

Notación	Tipo de intervalo	Desigualdad	Gráfica
$[a, \infty)$	Infinito	$x \geq a$	
$(a, \infty)$	Infinito	$x > a$	
$(-\infty, b]$	Infinito	$x \leq b$	
$(-\infty, b)$	Infinito	$x < b$	
$(-\infty, \infty)$	Toda la recta real	$-\infty < x < \infty$	

### EJEMPLO 5

### Usar desigualdades para representar intervalos

Use notación de desigualdades para describir cada uno de lo siguiente.

- a.  $c$  es como máximo 2.    b.  $m$  es al menos  $-3$ .    c. Toda  $x$  en el intervalo  $(-3, 5]$

### Solución

- a. El enunciado “ $c$  es a lo más 2” puede representarse con  $c \leq 2$ .  
 b. El enunciado “ $m$  es al menos  $-3$ ” puede representarse con  $m \geq -3$ .  
 c. “Toda  $x$  en el intervalo  $(-3, 5]$ ” puede representarse con  $-3 < x \leq 5$ .

**EJEMPLO 6 Interpretar intervalos**

Dé una descripción verbal de cada uno de los intervalos siguientes.

- a.  $(-1, 0)$       b.  $[2, \infty)$       c.  $(-\infty, 0)$

Algunos autores denotan los extremos de un intervalo abierto con puntos “huecos” y los extremos de un intervalo cerrado con puntos “rellenos”.

**Solución**

- a. Este intervalo está formado por todos los números reales que sean mayores a  $-1$  y menores que  $0$ .  
 b. Este intervalo está formado por todos los números reales que sean mayores o iguales a  $2$ .  
 c. Este intervalo está formado por todos los números reales negativos.

Como conjuntos de números reales, los intervalos se pueden operar con el álgebra de conjuntos estándar. Esto es, es posible realizar operaciones de unión, intersección, complemento, diferencia, etcétera.

**EJEMPLO 7 Operaciones con intervalos**

Determine el conjunto de números reales definido por  $(-1, 6] \cap [2, 10)$  y por  $(-1, 6] \cup [2, 10)$ .

**Solución**

Los intervalos son conjuntos, de manera que, utilizando operaciones de conjuntos se tiene:

$$(-1, 6] \cap [2, 10) = \{x \mid -1 < x \leq 6\} \cap \{x \mid 2 \leq x < 10\} = \{x \mid 2 \leq x \leq 6\} = [2, 6]$$

$$(-1, 6] \cup [2, 10) = \{x \mid -1 < x \leq 6\} \cup \{x \mid 2 \leq x < 10\} = \{x \mid -1 < x < 10\} = (-1, 10)$$

## 1.2 Ejercicios

Consulte [CalcChat.com](http://CalcChat.com) para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**VOCABULARIO** Llene los espacios en blanco.

- Un número real es \_\_\_\_\_ si se puede escribir como la razón  $\frac{p}{q}$  entre dos enteros, donde  $q \neq 0$ .
- Los números \_\_\_\_\_ tienen representaciones decimales no periódicas infinitas.
- El punto 0 sobre la recta de números reales se llama \_\_\_\_\_.
- La distancia entre el origen y un punto que represente un número real en la recta de números reales es el \_\_\_\_\_ de los números reales.
- Un número real que se pueda escribir como el producto de dos o más números primos se llama número \_\_\_\_\_.
- Un entero que tenga exactamente dos factores positivos, el entero mismo y 1, se llama número \_\_\_\_\_.
- Una expresión algebraica es un conjunto de letras llamadas \_\_\_\_\_ y números reales llamados \_\_\_\_\_.
- Los \_\_\_\_\_ de una expresión algebraica son aquellas partes separadas por adición.
- El factor numérico de un término variable es el \_\_\_\_\_ del término variable.
- La \_\_\_\_\_ dice que si  $ab = 0$ , entonces  $a = 0$  o  $b = 0$ .

**HABILIDADES Y APLICACIONES**

En los ejercicios 11-16, determine cuáles números del conjunto son (a) números naturales, (b) números enteros, (c) enteros (neg. y pos.), (d) números racionales y (e) números irracionales.

- $\{-9, -\frac{7}{2}, 5, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, 0, 1, -4, 2, -11\}$
- $\{\sqrt{5}, -7, -\frac{7}{3}, 0, 3.12, \frac{5}{4}, -3, 12, 5\}$
- $\{2.01, 0.666 \dots, -13, 0.010110111 \dots, 1, -6\}$

14.  $\{2.3030030003 \dots, 0.7575, -4.63, \sqrt{10}, -75, 4\}$   
 15.  $\{-\pi, -\frac{1}{3}, \frac{6}{3}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -7.5, -1, 8, -22\}$   
 16.  $\{25, -17, -\frac{12}{5}, \sqrt{9}, 3.12, \frac{1}{2}\pi, 7, -11.1, 13\}$

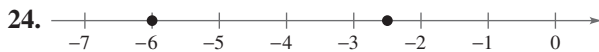
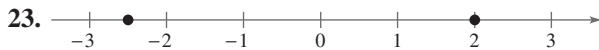
En los ejercicios 17 y 18, grafique los números reales en la recta de números reales.

17. (a) 3 (b)  $\frac{7}{2}$  (c)  $-\frac{5}{2}$  (d)  $-5.2$   
 18. (a) 8.5 (b)  $\frac{4}{3}$  (c)  $-4.75$  (d)  $-\frac{8}{3}$

En los ejercicios 19-22, use una calculadora para hallar la forma decimal del número racional. Si es un decimal no finito, escriba el patrón repetitivo o periódico.

19.  $\frac{5}{8}$  20.  $\frac{1}{3}$   
 21.  $\frac{41}{333}$  22.  $\frac{6}{11}$

En los ejercicios 23 y 24, aproxime los números y ponga el símbolo correcto (< o >) entre ellos.



En los ejercicios 25-30, localice los dos números reales en la recta de números reales. A continuación, ponga el símbolo apropiado de desigualdad (< o >) entre ellos.

25.  $-4, -8$  26.  $-3.5, 1$   
 27.  $\frac{3}{2}, 7$  28.  $1, \frac{16}{3}$   
 29.  $\frac{5}{6}, \frac{2}{3}$  30.  $-\frac{8}{7}, -\frac{3}{7}$

En los ejercicios 31-42, (a) haga una descripción verbal del subconjunto de los números reales representados por la desigualdad o el intervalo, (b) trace el subconjunto en la recta de números reales, y (c) diga si el intervalo es acotado o no acotado.

31.  $x \leq 5$  32.  $x \geq -2$   
 33.  $x < 0$  34.  $x > 3$   
 35.  $[4, \infty)$  36.  $(-\infty, 2)$   
 37.  $-2 < x < 2$  38.  $0 \leq x \leq 5$   
 39.  $-1 \leq x < 0$  40.  $0 < x \leq 6$   
 41.  $[-2, 5)$  42.  $(-1, 2]$

En los ejercicios 43-50, use notación de desigualdad y notación de intervalo para describir el conjunto.

43.  $y$  es no negativo.  
 44.  $y$  es no mayor a 25.  
 45.  $x$  es mayor a  $-2$  y a lo más 4.  
 46.  $y$  es al menos  $-6$  y menor que 0.  
 47.  $t$  es al menos 10 y a lo más 22.  
 48.  $k$  es menor que 5 pero no menor que  $-3$ .

49. El peso del perro,  $W$ , es más de 65 libras.

50. Se espera que la tasa anual de inflación,  $r$ , sea al menos 2.5% pero no mayor a 5%.

51. Demuestre que la división por cero no existe.

En los ejercicios 52-59, exprese los racionales dados en forma decimal

52.  $\frac{2}{7}$  53.  $\frac{13}{8}$   
 54.  $\frac{4}{99}$  55.  $\frac{32}{91}$   
 56.  $\frac{32}{11}$  57.  $\frac{5678}{1000}$   
 58.  $\frac{31}{16}$  59.  $\frac{11}{29}$

En los ejercicios 60-71, escriba los números decimales dados, si es posible, en forma de fracción.

60. 0.246824682468...  
 61. 3.14161592  
 62. 0.1001001001001001...  
 63. 0.718888888...  
 64. 2.2181818181  
 65.  $-1.4717171...$   
 66. 0.19999...  
 67. 0.003434343...  
 68. 12.12121212...  
 69. 0.321321321...  
 70. 0.12345678901234567890...  
 71. 4.044044044...

72. Determine el menor natural, el menor entero positivo, el menor racional positivo y el menor irracional positivo.

73. Demuestre que  $\pi$  es irracional.

74. Demuestre que  $\sqrt{2}$  es irracional.

75. Demuestre que la raíz cuadrada de un número primo es irracional.

76. Determine un racional que aproxime a  $\pi$ .

77. Demuestre que la suma de dos racionales es otro racional pero que la suma de dos irracionales no necesariamente es un irracional.

78. Demuestre que entre dos racionales diferentes cualesquiera siempre existe otro racional.

79. Demuestre que entre dos irracionales diferentes cualesquiera siempre existe otro irracional.

80. Demuestre que entre dos reales diferentes cualesquiera siempre existe otro real.

81. Dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , si  $x < y$  ordenar los números  $x, y, \sqrt{xy}, \frac{x+y}{2}$ .

En los ejercicios 82-87, determine si el resultado es un número racional o irracional.

82.  $(\sqrt{3} + 2)^2$   
 83.  $(\sqrt{5} + 5)(\sqrt{5} - 5)$   
 84.  $\sqrt{\pi}$   
 85.  $(\sqrt{\pi} + \pi)^2$   
 86.  $\pi^2$   
 87.  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^3$   
 88. Demuestre que el producto de dos números pares es par.  
 89. Demuestre que el producto de dos impares es otro impar.  
 90. Demuestre que si  $n$  es par entonces  $n^2$  es par.  
 91. Demuestre que si  $n$  es impar entonces  $n^2$  es impar.  
 92. Demuestre que el producto de un racional y un irracional es un irracional.

En los ejercicios 93-99, determine si existen, el ínfimo y el supremo para cada uno de los conjuntos dados.  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

93.  $A = \{0.2, 0.29, 0.299, \dots\}$   
 94.  $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$   
 95.  $A = \{1, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \dots\}$   
 96.  $A = \{1, 1.1, 1.11, 1.111, \dots\}$   
 97.  $A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$   
 98.  $A = \{x \mid x = (-1)^n, n \in \mathbb{Z}\}$   
 99.  $A = \{x \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}$

En los ejercicios 100-107 represente gráficamente cada uno de los intervalos dados.

100.  $(-10, 15)$   
 101.  $(-4, -50]$   
 102.  $[4, 8]$   
 103.  $[-1, 5)$   
 104.  $(-\infty, -\pi)$   
 105.  $(-\infty, 3]$   
 106.  $(1, \infty)$   
 107.  $[-6, \infty)$
- En los ejercicios 108-120, realizar las operaciones con intervalos indicadas.
108.  $(1, 7] \cup (-10, 4)$   
 109.  $(-\infty, 3] \cup (-4, 2]$   
 110.  $(-\infty, 7] \cup (-5, \infty)$   
 111.  $(-6, 7] \cap (-2, 5)$   
 112.  $[0, 4] \cap (-2, 1]^c$   
 113.  $(-\infty, 1] \cap (-3, 3)$   
 114.  $((1, 8] \cup (-3, 2)) \cap [0, 1)$   
 115.  $((1, 5] \cap (-2, 3))^c$   
 116.  $[-5, \infty) - (3, 10]$   
 117.  $\mathbb{R} - ((2, 8] \cup (-1, 5))$   
 118.  $\mathbb{R} - (-\infty, -5)$   
 119.  $((0, 5] \cup (-2, 3)) - [4, 6]$   
 120.  $((-7, 3] \cup (-5, 7)) \cap [3, 10]$

## 1.3 Desigualdades y valor absoluto

- Resolver desigualdades lineales.
- Resolver desigualdades cuadráticas.
- El valor absoluto y sus propiedades.
- Desigualdades con valor absoluto.

En esta sección estudiaremos dos conceptos fundamentales en el cálculo infinitesimal, el concepto de desigualdad (o inecuación) y el concepto de valor absoluto.

### Desigualdades

Utilizando las propiedades de orden de los números reales, iniciamos con la definición de desigualdad.

#### Definición de desigualdad en una variable

Una desigualdad en una variable es una expresión de la forma  $f(x) < 0$ , donde  $<$  es cualquiera de las relaciones de orden  $<, >, \leq$  o  $\geq$ .

Resolver una desigualdad significa determinar el conjunto de números reales que la satisfacen. Una desigualdad o inecuación tiene infinitas soluciones en forma de intervalo o unión de intervalos de números reales.

Para resolver una desigualdad se utilizan los axiomas de los números reales y el álgebra que de ellos se desarrolla, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

**EJEMPLO 1****Resolver la desigualdad  $-3x + 2 < 4x + 10$** **Solución**

$-3x + 2 - 2 < 4x + 10 - 2$	Por el axioma 11 sumar $-2$
$-3x < 4x + 8$	Simplificar
$-3x - 4x < 4x - 4x + 8$	Por el axioma 11 sumar $-4x$
$-7x < 8$	Simplificar
$-\frac{1}{7}(-7x) > -\frac{1}{7}(8)$	Teorema 1.2 inciso 2, multiplicar por $-\frac{1}{7}$
$x > -\frac{8}{7}$	Simplificar
$-\frac{8}{7} < x$	De manera equivalente
$x \in (-\frac{8}{7}, \infty)$	En forma de intervalo

**EJEMPLO 2****Resolver la desigualdad  $-x + 5 \leq -6x - 7$** **Solución**

$-x + 5 - 5 \leq -6x - 7 - 5$	Por el axioma 11 restar 5
$-x \leq -6x - 12$	Simplificar
$-x + 6x \leq -6x + 6x - 12$	Por el axioma 11 sumar $6x$
$5x \leq -12$	Simplificar
$\frac{1}{5}(5x) \leq \frac{1}{5}(-12)$	Por el Teorema 1.2 inciso 1, multiplicar por $\frac{1}{5}$
$x \leq -\frac{12}{5}$	Simplificar
$x \in (-\infty, -\frac{12}{5}]$	En forma de intervalo

**EJEMPLO 3****Resolver la desigualdad  $4 < \frac{2x - 8}{4} \leq 8$** **Solución**

$4(4) < \left(\frac{2x - 8}{4}\right)(4) \leq (8)4$	Teorema 1.2 inciso 1, multiplicar por 4
$16 < 2x - 8 \leq 32$	Simplificar
$16 + 8 < 2x - 8 + 8 \leq 32 + 8$	Por el axioma 11 sumar 8
$24 < 2x \leq 40$	Simplificar
$\frac{1}{2}(24) < \frac{1}{2}(2x) \leq \frac{1}{2}(40)$	Teorema 1.2 inciso 1, multiplicar por $\frac{1}{2}$
$12 < x \leq 20$	Simplificar
$x \in (12, 20]$	En forma de intervalo

**EJEMPLO 4****Resolver la desigualdad  $-3 < \frac{5-x}{2} \leq 7$** **Solución**

$2(-3) < 2\left(\frac{5-x}{2}\right) \leq 2(7)$	Teorema 1.2, inciso 1, multiplicar por 2
$-6 < 5 - x \leq 14$	Simplificar
$-6 - 5 < 5 - 5 - x \leq 14 - 5$	Por el axioma 11 restar 5
$-11 < -x \leq 9$	Simplificar
$-(-11) > -(-x) \geq -(9)$	Teorema 1.2, inciso 2, multiplicar por $-1$
$11 > x \geq -9$	Simplificar
$-9 \leq x < 11$	De manera equivalente
$x \in [-9, 11)$	En forma de intervalo

**EJEMPLO 5****Resolver la desigualdad  $x^2 - 3x + 2 > 0$** **Solución**

Al factorizar la desigualdad  $x^2 - 3x + 2 > 0$ , tenemos  $(x - 1)(x - 2) > 0$ .

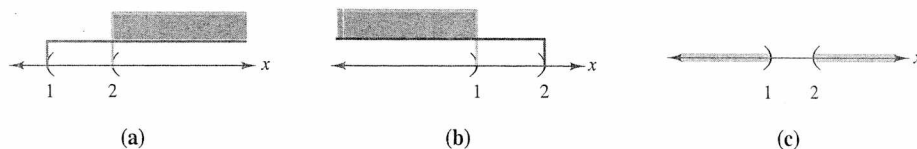
Si consideramos la parte izquierda de la desigualdad como el producto de dos factores, este producto es positivo, lo cual ocurre cuando los factores son del mismo signo.

Se tienen los siguientes casos.

**Caso 1** Si  $(x - 1)(x - 2) > 0$

Entonces  $x - 1 > 0$  y  $x - 2 > 0$

De donde  $x > 1$  y  $x > 2$



**Figura 1.12**

El conjunto solución de estas dos desigualdades como se muestra en la figura 1.12a es  $(1, \infty) \cap (2, \infty) = (2, \infty)$ .

**Caso 2** Si  $(x - 1)(x - 2) > 0$

Entonces  $x - 1 < 0$  y  $x - 2 < 0$

De donde  $x < 1$  y  $x < 2$

El conjunto solución de estas dos desigualdades es  $(-\infty, 1) \cap (-\infty, 2) = (-\infty, 1)$ , ver figura 1.12b.

La solución de la desigualdad se obtiene al unir las soluciones obtenidas en los casos 1 y 2. Es decir la solución es el conjunto  $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ . Figura 1.12c.

**EJEMPLO 6****Resolver la desigualdad  $x^2 - x - 6 \leq 0$** **Solución**

Al factorizar la desigualdad  $x^2 - x - 6 \leq 0$ , tenemos  $(x - 3)(x + 2) \leq 0$ .

Si consideramos la parte izquierda de la desigualdad como el producto de dos factores, este producto es menor o igual a cero, lo cual ocurre cuando los factores son de signos diferentes o cero.

Se tienen los siguientes casos.

**Caso 1** Si  $(x - 3)(x + 2) \leq 0$

Entonces  $x - 3 \leq 0$  y  $x + 2 \geq 0$

De donde  $x \leq 3$  y  $x \geq -2$

El conjunto solución de estas desigualdades es  $(-\infty, 3] \cap [-2, \infty) = [-2, 3]$ , ver figura 1.13.

**Caso 2** Si  $(x - 3)(x + 2) \geq 0$

Entonces  $x - 3 \geq 0$  y  $x + 2 \leq 0$

De donde  $x \geq 3$  y  $x \leq -2$

El conjunto solución de estas dos desigualdades es  $(-\infty, -2] \cap [3, \infty) = \emptyset$ .

La solución de la desigualdad se obtiene al unir las soluciones obtenidas en los casos 1 y 2. Como puede observarse en la figura 1.13, la solución es el conjunto  $x \in [-2, 3] \cup \emptyset = [-2, 3]$ .

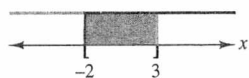


Figura 1.13

### EJEMPLO 7

Resuelva la desigualdad  $\frac{x-4}{x+2} \geq 4$

#### Solución

Considerando la desigualdad  $\frac{x-4}{x+2} \geq 4$ , se tienen los siguientes dos casos dependiendo del signo del denominador.

**Caso 1** Si  $x + 2 > 0$  (obsérvese que no se puede dar el caso  $x + 2 \geq 0$ )

Entonces  $x - 4 \geq 4(x + 2)$  con  $x > -2$

De manera que  $-3x \geq 12$  y  $x > -2$

Dividiendo por  $-3$ , tenemos  $x \leq -4$  y  $x > -2$

Es decir  $x \in (-\infty, -4] \cap [-2, \infty) = \emptyset$

**Caso 2** Si  $x + 2 < 0$  (obsérvese que no se puede dar el caso  $x + 2 \leq 0$ )

Entonces  $x - 4 \leq 4(x + 2)$  con  $x < -2$

De manera que  $-3x \leq 12$  y  $x < -2$

Dividiendo por  $-3$ , tenemos  $x \geq -4$  y  $x < -2$

Es decir  $x \in [-4, \infty) \cap (-\infty, -2) = [-4, -2)$

Finalmente, la solución es la unión de los intervalos solución obtenidos en los dos casos, es decir

$$x \in [-4, -2) \cup \emptyset = [-4, -2)$$

Otra manera de resolver una desigualdad es a través de un análisis gráfico.

Para esto, es necesario recordar que dada una función  $f(x)$  los puntos de corte de su gráfica y el eje  $x$  se determinan resolviendo la ecuación  $f(x) = 0$ . Además de considerar que si  $f(x) > 0$  entonces la gráfica está por "arriba" del eje  $x$  y si  $f(x) < 0$  entonces la gráfica está por "abajo" del eje  $x$ . Ver figura 1.14.

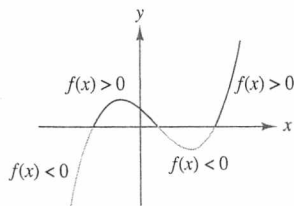


Figura 1.14

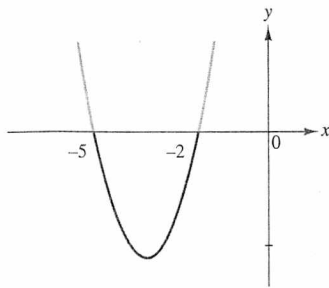


Figura 1.15

**EJEMPLO 8****Resolver la desigualdad  $x^2 + 7x + 10 \geq 0$** **Solución**

Los puntos de corte de la gráfica de  $f(x) = x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$  y el eje  $x$  son  $x = -2$  y  $x = -5$ .

La gráfica de la función puede observarse en la figura 1.15.

Se verifica que  $f(x) = (x + 2)(x + 5) \geq 0$  en el intervalo  $(-\infty, -5) \cup (-2, \infty)$ .

(También puede observarse que  $f(x) = (x + 2)(x + 5) \leq 0$  en  $[-5, -2]$ . ■

**Valor absoluto de un número real**

En la sección anterior se estableció que a cada número real se le asocia un único punto de la recta real considerando la distancia entre el origen (el cero) y el número dado. Esta distancia también se conoce como el valor absoluto o como la magnitud del número. Formalmente se tiene la siguiente definición.

**Definición de valor absoluto de un número real**

Si  $x$  es un número real, se define el valor absoluto de  $a$  como

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

**EJEMPLO 9****Algunos valores absolutos**

1.  $|5| = 5$

2.  $|0| = 0$

3.  $|-3| = 3$

$$4. \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{-x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$5. |x| - x = \begin{cases} x - x & \text{si } x \geq 0 \\ -x - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Definición de distancia entre dos números**

Si  $a, b \in \mathbb{R}$ , se define su distancia como  $|a - b|$

**Propiedades del valor absoluto**

En el siguiente teorema se enuncian las propiedades más importantes del valor absoluto. La demostración se deja como ejercicio al lector (es suficiente aplicar la definición de valor absoluto).

**TEOREMA 1.3 Propiedades del valor absoluto**

1.  $|a| \geq 0$
2.  $|a| = 0$  si y solo si  $a = 0$
3.  $|a| = |-a|$
4.  $|ab| = |a| |b|$
5.  $\frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$ ,  $|b| \neq 0$

**Desigualdades y valor absoluto**

En el siguiente teorema se presentan las propiedades del valor absoluto en las desigualdades.

**TEOREMA 1.4 Propiedades del valor absoluto**

1.  $|x| < a$  si y solo si  $-a < x < a$
2.  $|x| > a$  si y solo si  $x < -a$  o  $x > a$
3.  $|x + y| \leq |x| + |y|$  Desigualdad del triángulo
4.  $x \leq |x|$  y  $-x \leq |x|$
5. Si  $y \geq 0$ , entonces  $|x| = y$  si y solo si  $\begin{cases} x = y & \text{si } x \geq 0 \\ -x = y & \text{si } x < 0 \end{cases}$

**Demostración (1)**

Por definición, si  $|x| < a$  entonces se tienen los siguientes casos:

$$\begin{cases} x < a & \text{si } x \geq 0 \\ -x < a & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{Multiplicar por } -1$$

$$\begin{cases} x < a & \text{si } x \geq 0 \\ x > -a & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{Aplicar transitividad}$$

$$-a < x < a \quad \text{Para toda } x \in \mathbb{R}$$

**Demostración (2)**

Por definición, si  $|x| > a$  entonces se tienen los siguientes casos:

$$\begin{cases} x > a & \text{si } x \geq 0 \\ -x > a & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{Multiplicar por } -1$$

$$\begin{cases} x > a & \text{si } x \geq 0 \\ x < -a & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Es decir  $x < -a$  o  $x > a$  para toda  $x \in \mathbb{R}$

La demostración de las propiedades restantes se asignan al lector como ejercicio.

Las propiedades anteriores siguen siendo válidas al cambiar los símbolos de desigualdad estrictos  $<$  y  $>$  por los no estrictos  $\leq$  y  $\geq$ .

**EJEMPLO 10****Resolver la desigualdad  $|2x - 8| < 16$** **Solución**

$$|2x - 8| < 16$$

$$-16 < 2x - 8 < 16$$

$$-16 + 8 < 2x - 8 + 8 < 16 + 8$$

$$-8 < 2x < 24$$

$$-8 \left(\frac{1}{2}\right) < 2 \left(\frac{1}{2}\right)x < 24 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$-4 < x < 12$$

$$x \in (-4, 12)$$

Teorema 1.4, inciso 1

Por el axioma 11, sumar 8 a cada rama

Simplificar

Teorema 1.2, multiplicar por  $\frac{1}{2}$ 

Simplificar

En forma de intervalo

**EJEMPLO 11****Resolver la desigualdad  $|f(x) - L| < \varepsilon$** **Solución**

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < f(x) - L + L < L + \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

$$f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

Teorema 1.4, inciso 1

Por el axioma 11, sumar  $L$  a cada rama

Simplificar

En forma de intervalo

**EJEMPLO 12****Resolver la desigualdad  $|x - a| < \delta$** **Solución**

$$|x - a| < \delta$$

$$-\delta < x - a < \delta$$

$$a - \delta < x < a + \delta$$

$$x \in (a - \delta, a + \delta)$$

Teorema 1.4, inciso 1

Por el axioma 11, sumar  $a$  y simplificar

En forma de intervalo

**EJEMPLO 13****Resolver la desigualdad  $|-3x + 3| \leq 18$** **Solución**

$$|-3x + 3| \leq 18$$

$$-18 \leq -3x + 3 \leq 18$$

$$-18 - 3 \leq -3x + 3 - 3 \leq 18 - 3$$

$$-21 \leq -3x \leq 15$$

$$\frac{-21}{-3} \geq \frac{-3x}{-3} \geq \frac{15}{-3}$$

$$7 \geq x \geq -5$$

$$-5 \leq x \leq 7$$

$$x \in [-5, 7]$$

Teorema 1.4, inciso 1

Por el axioma 11, restar 3 a cada rama

Simplificar

Teorema 1.2, inciso 1, dividir por  $-3$ 

Simplificar

Reordenar

En forma de intervalo

**EJEMPLO 14****Resolver la desigualdad  $|2x + 10| > 4$** **Solución**

$$|2x + 10| > 4$$

Teorema 1.4, inciso 2, se tienen los siguientes dos casos

$$2x + 10 > 4, \quad 2x + 10 < -4$$

Resolver estas desigualdades

$$2x > -6, \quad 2x < -14$$

Simplificar

$$x > -3, \quad x < -7$$

En forma de intervalo

$$x \in (-\infty, -7) \cup (-3, \infty)$$

**EJEMPLO 15****Resolver la desigualdad  $|-2x + 15| \geq 5$ .****Solución**

$$|-2x + 15| \geq 5$$

Teorema 1.4, inciso 2, se tienen los siguientes dos casos

$$-2x + 15 \geq 5, \quad -2x + 15 \leq -5$$

Resolver estas desigualdades

$$-2x \geq -10, \quad -2x \leq -20$$

Simplificar

$$x \leq 5, \quad x \geq 10$$

En forma de intervalo

$$x \in (-\infty, 5) \cup (10, \infty)$$

**EJEMPLO 16****Resolver la desigualdad  $|4x + 5| \geq x + 11$ .****Solución**

$$|4x + 5| \geq x + 11$$

Teorema 1.4, inciso 2, se tienen los siguientes dos casos

$$4x + 5 \geq x + 11, \quad 4x + 5 \leq -(x + 11)$$
 Resolver estas desigualdades simultáneamente

$$3x \geq 6, \quad 5x \leq -16$$

Simplificar

$$x \geq 2, \quad x \leq -\frac{16}{5}$$

En forma de intervalo

$$x \in (-\infty, -\frac{16}{5}] \cup [2, \infty)$$

## 1.3 Ejercicios

En los ejercicios 1-10, evalúe la expresión.

1.  $|-10|$

2.  $|0|$

3.  $|3 - 8|$

4.  $|4 - 1|$

5.  $|-1| - |-2|$

6.  $-3 - |-3|$

7.  $\frac{-5}{|-5|}$

8.  $-3|-3|$

9.  $\frac{|x + 2|}{x + 2}, \quad x < -2$

10.  $\frac{|x - 1|}{x - 1}, \quad x > 1$

En los ejercicios 11-16, ponga el símbolo correcto ( $<$ ,  $>$  o  $=$ ) entre los dos números reales.

11.  $|-3|$        $-|-3|$
12.  $|-4|$        $|4|$
13.  $-5$        $-|5|$
14.  $-|-6|$        $|-6|$
15.  $-|-2|$        $-|2|$
16.  $-(-2)$        $-2$

En los ejercicios 17-22, encuentre la distancia entre  $a$  y  $b$ .

17.  $a = 126, b = 75$
18.  $a = -126, b = -75$
19.  $a = -\frac{5}{2}, b = 0$
20.  $a = \frac{1}{4}, b = \frac{11}{4}$
21.  $a = \frac{16}{5}, b = \frac{112}{75}$
22.  $a = 9.34, b = -5.65$

En los ejercicios 23-26, use notación de valor absoluto para describir la situación.

23. La distancia entre  $x$  y 5 es no mayor a 3.
24. La distancia entre  $x$  y  $-10$  es al menos 6.
25.  $y$  está al menos a seis unidades de 0.
26.  $y$  está como máximo a dos unidades de  $a$ .

En los ejercicios 27-54, resolver la desigualdad indicada, dar la solución en términos de intervalos y representarla en la recta real.

27.  $2x < 10 - 3x$
28.  $6x - 2 < 12 - 9x$
29.  $3x + 10 > 20 - 4x$
30.  $-2(x + 4) > 4x - 5$
31.  $-3(2x - 5) \leq 2 - (5x + 6)$
32.  $\frac{3}{5}x - 7 \leq 5x - \frac{9}{5}$
33.  $\frac{1}{14}x + 4 \geq 6(1 - \frac{2}{7}x)$
34.  $-1 < 6x + 20 < 7$
35.  $-3 < 20 - 9x \leq 6$
36.  $-20 \leq 11 - 4x < 6$
37.  $-8 \leq 10 - x \leq 1$
38.  $-3x - 10 < 21 + 8x$
39.  $(x + 9)(x - 4) < 0$
40.  $6(x - 5)(x - 4) > 0$
41.  $(4 - x)(x + 8) \leq 0$
42.  $-3(x + 5)(x - 9) \geq 0$
43.  $x^2 + 18x + 80 \leq 0$
44.  $2x^2 + x - 1 \geq 0$

45.  $x^2 < x + 2$
46.  $x^2 + 2x - 3 \geq 0$
47.  $6x^2 + 54x < 0$
48.  $-x^2 + 8x < 0$
49.  $x^2 < 81$
50.  $(x + 3)(x - 1)(x - 3) < 0$
51.  $x^2(x - 5) \leq 0$
52.  $2x^2 + 5x < -x^2 + 1$
53.  $x^3 > (x - 1)^2$
54.  $\text{sen } x \leq \text{cos } x$

En los ejercicios 55-74, resolver la desigualdad mostrada, dar la solución en términos de intervalos y representarla en la recta real.

55.  $\frac{x - 4}{x + 9} > 0$
56.  $\frac{x + 6}{x - 6} < 0$
57.  $\frac{x - 5}{x + 8} \leq 0$
58.  $\frac{2x + 3}{x - 3} > 1$
59.  $\frac{x - 3}{x} \leq -2$
60.  $\frac{2x + 1}{3x - 4} \leq -1$
61.  $-\frac{2}{x} \leq x$
62.  $\frac{6}{x} \leq x - 5$
63.  $\frac{x}{x - 5} > 3x$
64.  $\frac{1}{x + 3} \leq \frac{4}{x}$
65.  $\frac{x}{x + 1} \geq \frac{5}{x}$
66.  $\frac{x}{x - 2} \geq \frac{1}{x}$
67.  $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{x + 2}$
68.  $x^2 - 3x + 2 > 0$
69.  $\frac{x + 3}{2 - x} \geq \frac{x}{x + 1}$
70.  $\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 3x - 4} < 0$
71.  $\frac{2}{x - 4} \geq \frac{-6}{5 - x}$
72.  $\frac{3x - 7}{4x - 1} > -1$

MATH-91444

73. 1  
74.  $\frac{x}{x}$   
En lo dar la la recta  
75. 2  
76. 3  
77. 1  
78.  $|\frac{2}{2}$   
79.  $|\frac{1}{1}$   
80.  $|\frac{-}{-}$   
81.  $|\frac{2}{2}$   
82.  $|\frac{2}{2}$   
83.  $|\frac{3}{3}$   
84. 1  
85.  $|\frac{6}{2}$   
86.  $|\frac{3}{3}$   
87.  $|\frac{-}{-}$   
88.  $|\frac{4}{4}$   
89.  $|\frac{-}{x}$   
90.  $|\frac{2}{2}$   
91.  $|\frac{5}{5}$   
92. D  
93. D  
94. D  
95. Si  $x^2$   
96. Si de  
97. C p: Pi m

73.  $1 \leq \frac{-2x}{x-1}$

74.  $\frac{x+1}{x+5} < \frac{1}{x-5}$

En los ejercicios 75-91, resolver la desigualdad mostrada, dar la solución en términos de intervalos y representarla en la recta real.

75.  $2x^2 - 9x + 1 > -3$

76.  $3x^2 \geq 7x - 4$

77.  $16 < |x - 6|$

78.  $|2x + 5| \geq 15$

79.  $|1 - 2x| \geq 3$

80.  $|-3x - 4| \leq 12$

81.  $|2 - x| \leq 5$

82.  $|2x + 1| \geq x + 5$

83.  $|3 - x^2| < -2x + 4$

84.  $1 \leq \left| \frac{3x+2}{x-3} \right|$

85.  $\left| \frac{6x+3}{4x-2} \right| < 12$

86.  $\left| \frac{x+3}{2x} \right| \leq 10$

87.  $\left| -\frac{x+6}{x} \right| < 4$

88.  $\left| 4 - \frac{7}{2x-1} \right| \geq 7$

89.  $\left| \frac{x}{x-2} \right| \leq 10$

90.  $\left| \frac{2-3x}{1+x} \right| > 1$

91.  $\left| \frac{5x-2}{x+4} \right| > 8$

92. Demuestre que si  $a \neq 0$  entonces  $a^2 > 0$ .

93. Demuestre que si  $|x| \leq 1$  entonces  $x^2 \leq x$ .

94. Demuestre que si  $|x| \geq 1$  entonces  $x^2 \geq x$ .

95. Suponiendo que  $0 < a < b < c$  resolver

$$\frac{x^2 + (a-b)x - ab}{x+c} \geq 0$$

96. Si  $a, b, c, d > 0$  son números reales tales que  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

demuestre que  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

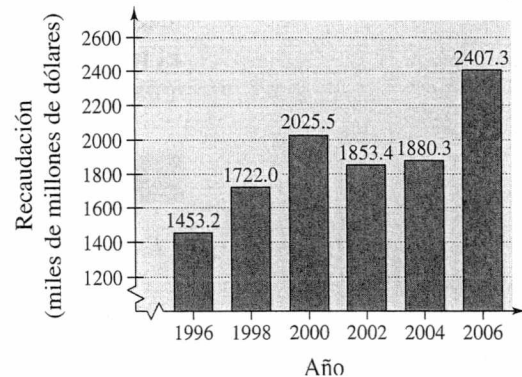
97. Cuando una persona viaja por la autopista de Pensilvania, pasa el señalamiento de distancia 57 (en millas) cerca de Pittsburgh y luego el 236 cerca de Gettysburg. ¿Cuántas millas ha recorrido durante ese tiempo?

98. La temperatura en Bismarck, Dakota del Norte, era de 60 °F al mediodía, luego 23 °F a medianoche. ¿Cuál fue el cambio en temperatura en el periodo de 12 horas?

**VARIANZA EN PRESUPUESTO** En los ejercicios 99-102, el departamento de contabilidad de una compañía embotelladora de bebidas para deporte está comprobando si los gastos reales de un departamento difieren, en más de \$500 o en más de 5%, respecto de los gastos presupuestados. Llene las partes faltantes de la tabla y determine si cada gasto real pasa el "examen de varianza de presupuesto".

	Gasto presupuestado, b	Gasto real, a	$ a - b $	$0.05b$
99. Sueldos	\$112 700	\$113 356		
100. Utilidades	\$9400	\$9772		
101. Impuestos	\$37 640	\$37 335		
102. Seguros	\$2575	\$2613		

**DÉFICIT FEDERAL** En los ejercicios 103-108, use la gráfica de barras, que muestra la recaudación del gobierno federal (en miles de millones de dólares) para años seleccionados de 1996 a 2006. En cada ejercicio se indican los gastos del gobierno federal. Encuentre la magnitud del excedente o déficit para el año. (Fuente: U.S. Office of Management and Budget)



Año	Recaudación	Gastos	$ Recaudación - Gastos $
103. 1996	\$1560.6 miles de millones		
104. 1998	\$1652.7 miles de millones		
105. 2000	\$1789.2 miles de millones		
106. 2002	\$2011.2 miles de millones		
107. 2004	\$2293.0 miles de millones		
108. 2006	\$2655.4 miles de millones		

# 1.4 Introducción al álgebra

- Expresiones algebraicas.
- Reglas básicas del álgebra.
- Números primos.

## Expresiones algebraicas

Una característica del álgebra es el uso de letras para representar números. Las letras son **variables**, y las combinaciones de letras y números son **expresiones algebraicas**. A continuación veamos unos ejemplos de expresiones algebraicas

$$5x, \quad 2x - 3, \quad \frac{4}{x^2 + 2}, \quad 7x + y$$

### Definición de expresión algebraica

Una **expresión algebraica** es un conjunto de letras (**variables**) y números reales (**constantes**) combinados que usan operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y exponenciación.

Los **términos** de una expresión algebraica son las partes que están separadas por *adición*. Por ejemplo,

$$x^2 - 5x + 8 = x^2 + (-5x) + 8$$

tiene tres términos:  $x^2$  y  $-5x$  son los **términos variables** y 8 es el **término constante**. El factor numérico de un término se llama **coeficiente**. Por ejemplo, el coeficiente de  $-5x$  es  $-5$ , y el de  $x^2$  es 1.

### EJEMPLO 1

#### Identificar términos y coeficientes

Expresión algebraica	Términos	Coeficientes
a. $5x - \frac{1}{7}$	$5x, -\frac{1}{7}$	$5, -\frac{1}{7}$
b. $2x^2 - 6x + 9$	$2x^2, -6x, 9$	$2, -6, 9$
c. $\frac{3}{x} + \frac{1}{2}x^4 - y$	$\frac{3}{x}, \frac{1}{2}x^4, -y$	$3, \frac{1}{2}, -1$

Para evaluar una expresión algebraica, sustituya valores numéricos por cada una de las variables de la expresión, como se muestra en el ejemplo siguiente.

### EJEMPLO 2

#### Evaluar expresiones algebraicas

Expresión	Valor de variable	Sustituya	Valor de expresión
a. $-3x + 5$	$x = 3$	$-3(3) + 5$	$-9 + 5 = -4$
b. $3x^2 + 2x - 1$	$x = -1$	$3(-1)^2 + 2(-1) - 1$	$3 - 2 - 1 = 0$
c. $\frac{2x}{x + 1}$	$x = -3$	$\frac{2(-3)}{-3 + 1}$	$\frac{-6}{-2} = 3$

Observe que se debe sustituir el valor *cada vez* que se presente la variable.

Al evaluar una expresión algebraica, se usa el **principio de sustitución**, que dice que “si  $a = b$ , entonces  $a$  puede ser sustituida por  $b$  en cualquier expresión en donde aparezca  $a$ ”. En el ejemplo 2(a), por ejemplo, 3 es *sustituido* por  $x$  en la expresión  $-3x + 5$ .

## Reglas básicas del álgebra

Hay cuatro operaciones aritméticas con números reales: *adición*, *multiplicación*, *sustracción* y *división*, denotadas por los símbolos  $+$ ,  $\times$  o  $\cdot$ ,  $-$  y  $\div$  o  $/$ . De estos, la adición y multiplicación son las dos operaciones primarias. Sustracción y división son operaciones inversas de adición y multiplicación, respectivamente.

### Definiciones de sustracción y división

**Sustracción:** Sume lo opuesto.      **División:** multiplique por el recíproco.

$$a - b = a + (-b) \qquad \text{Si } b \neq 0, \text{ entonces } a/b = a\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}.$$

En estas definiciones,  $-b$  es el **inverso aditivo** (u opuesto) de  $b$ , y  $1/b$  es el **inverso multiplicativo** (o recíproco) de  $b$ . En la forma fraccionaria  $a/b$ ,  $a$  es el **numerador** de la fracción y  $b$  es el **denominador**.

Como las propiedades de los números reales siguientes son verdaderas para variables y expresiones algebraicas, así como para números reales, con frecuencia reciben el nombre de **reglas básicas del álgebra**. Trate de formular una descripción verbal de cada una de ellas. Por ejemplo, la primera propiedad dice que el orden en *el que se suman dos números reales no afecta su suma*.

### Reglas básicas de álgebra

Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  números reales, variables o expresiones algebraicas.

	<i>Propiedad</i>	<i>Ejemplo</i>
Propiedad conmutativa de la adición:	$a + b = b + a$	$4x + x^2 = x^2 + 4x$
Propiedad conmutativa de la multiplicación:	$ab = ba$	$(4 - x)x^2 = x^2(4 - x)$
Propiedad asociativa de la adición:	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(x + 5) + x^2 = x + (5 + x^2)$
Propiedad asociativa de la multiplicación:	$(ab)c = a(bc)$	$(2x \cdot 3y)(8) = (2x)(3y \cdot 8)$
Propiedades distributivas:	$a(b + c) = ab + ac$	$3x(5 + 2x) = 3x \cdot 5 + 3x \cdot 2x$
	$(a + b)c = ac + bc$	$(y + 8)y = y \cdot y + 8 \cdot y$
Propiedad aditiva de identidad:	$a + 0 = a$	$5y^2 + 0 = 5y^2$
Propiedad multiplicativa de identidad:	$a \cdot 1 = a$	$(4x^2)(1) = 4x^2$
Propiedad aditiva inversa:	$a + (-a) = 0$	$5x^3 + (-5x^3) = 0$
Propiedad multiplicativa inversa:	$a \cdot \frac{1}{a} = 1, \quad a \neq 0$	$(x^2 + 4)\left(\frac{1}{x^2 + 4}\right) = 1$

Como la sustracción se define como “sumar lo opuesto”, las propiedades distributivas también son verdaderas para la sustracción. Por ejemplo, la “forma de sustracción” de  $a(b + c) = ab + ac$  es  $a(b - c) = ab - ac$ . Observe que las operaciones de sustracción y división no son conmutativas ni asociativas. Los ejemplos

$$7 - 3 \neq 3 - 7 \quad \text{y} \quad 20 \div 4 \neq 4 \div 20$$

demuestran que la sustracción y división no son conmutativas. Del mismo modo

$$5 - (3 - 2) \neq (5 - 3) - 2 \quad \text{y} \quad 16 \div (4 \div 2) \neq (16 \div 4) \div 2$$

demuestran que la sustracción y la división no son asociativas.

**EJEMPLO 3** Identificar reglas del álgebra

Identifique la regla del álgebra ilustrada por el enunciado.

- a.  $(5x^3)2 = 2(5x^3)$
- b.  $\left(4x + \frac{1}{3}\right) - \left(4x + \frac{1}{3}\right) = 0$
- c.  $7x \cdot \frac{1}{7x} = 1, \quad x \neq 0$
- d.  $(2 + 5x^2) + x^2 = 2 + (5x^2 + x^2)$

**Solución**

- a. Este enunciado ilustra la propiedad conmutativa de la multiplicación. En otras palabras, se obtiene el mismo resultado si se multiplica  $5x^3$  por 2 o 2 por  $5x^3$ .
- b. Este enunciado ilustra la propiedad aditiva inversa. En términos de sustracción, esta propiedad simplemente dice que cuando cualquier expresión se resta de sí misma el resultado es 0.
- c. Este enunciado ilustra la propiedad del inverso multiplicativo. Observe que es importante que  $x$  sea un número diferente de cero. Si  $x$  fuera 0, el recíproco de  $x$  sería no definido.
- d. Este enunciado ilustra la propiedad asociativa de la adición. En otras palabras, para formar la suma

$$2 + 5x^2 + x^2$$

no importa si 2 y  $5x^2$ , o  $5x^2$  y  $x^2$  se suman primero.

*Tip de estudio*

Nótese la diferencia entre el opuesto de un número y un número negativo. Si  $a$  ya es negativo, entonces su opuesto,  $-a$ , es positivo. Por ejemplo, si  $a = -5$ , entonces

$$-a = -(-5) = 5.$$

**Propiedades de negación e igualdad**

Sean  $a, b$  y  $c$  números reales, variables o expresiones algebraicas.

Propiedad	Ejemplo
1. $(-1)a = -a$	$(-1)7 = -7$
2. $-(-a) = a$	$-(-6) = 6$
3. $(-a)b = -(ab) = a(-b)$	$(-5)3 = -(5 \cdot 3) = 5(-3)$
4. $(-a)(-b) = ab$	$(-2)(-x) = 2x$
5. $-(a + b) = (-a) + (-b)$	$-(x + 8) = (-x) + (-8)$ $= -x - 8$
6. Si $a = b$ , entonces $a \pm c = b \pm c$ .	$\frac{1}{2} + 3 = 0.5 + 3$
7. Si $a = b$ , entonces $ac = bc$ .	$4^2 \cdot 2 = 16 \cdot 2$
8. Si $a \pm c = b \pm c$ , entonces $a = b$ .	$1.4 - 1 = \frac{7}{5} - 1 \Rightarrow 1.4 = \frac{7}{5}$
9. Si $ac = bc$ y $c \neq 0$ , entonces $a = b$ .	$3x = 3 \cdot 4 \Rightarrow x = 4$

*Tip*  
La "c  
cero  
que c  
factor  
Esto  
forma  
se us  
mate

*Tip*  
En la  
la fra  
dos e  
es: s  
ad =  
si aa  
d ≠

*Tip de estudio*

La “o” en la propiedad del factor cero incluye la posibilidad de que cualquiera de los dos factores, o ambos, sean cero. Esto es una **o inclusiva**, y es la forma en que la conjunción “o” se usa por lo general en matemáticas.

**Propiedades de cero**

Sean  $a$  y  $b$  números reales, variables o expresiones algebraicas.

- $a + 0 = a$  y  $a - 0 = a$
- $a \cdot 0 = 0$
- $\frac{0}{a} = 0$ ,  $a \neq 0$
- $\frac{a}{0}$  no está definida.
- Propiedad del factor cero:** si  $ab = 0$ , entonces  $a = 0$  o  $b = 0$ .

**Propiedades y operaciones de fracciones**

Sean  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  números reales, variables o expresiones algebraicas tales que  $b \neq 0$  y  $d \neq 0$ .

- Fracciones equivalentes:**  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  si y solo si  $ad = bc$ .
- Reglas de los signos:**  $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$  y  $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$
- Generar fracciones equivalentes:**  $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ ,  $c \neq 0$
- Sumar o restar denominadores comunes:**  $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$
- Sumar o restar con denominadores diferentes:**  $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$
- Multiplicar fracciones:**  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- Dividir fracciones:**  $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ ,  $c \neq 0$

*Tip de estudio*

En la propiedad 1 de fracciones, la frase “si y solo si” implica dos enunciados. Un enunciado es: si  $a/b = c/d$ , entonces  $ad = bc$ . El otro enunciado es: si  $ad = bc$ , donde  $b \neq 0$  y  $d \neq 0$ , entonces  $a/b = c/d$ .

**EJEMPLO 4****Propiedades y operaciones con fracciones**

a. Fracciones equivalentes:  $\frac{x}{5} = \frac{3 \cdot x}{3 \cdot 5} = \frac{3x}{15}$

b. Dividir fracciones:  $\frac{7}{x} \div \frac{3}{2} = \frac{7}{x} \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{3x}$

c. Sumar fracciones con denominadores diferentes:  $\frac{x}{3} + \frac{2x}{5} = \frac{5 \cdot x + 3 \cdot 2x}{3 \cdot 5} = \frac{11x}{15}$

Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son enteros tales que  $ab = c$ , entonces  $a$  y  $b$  son **factores** o **divisores** de  $c$ . Un **número primo** es un entero que tiene exactamente dos factores positivos, el propio número y 1, tales como 2, 3, 5, 7 y 11. Los números 4, 6, 8, 9 y 10 son **compuestos** porque cada uno de ellos se puede escribir como el producto de dos o más números primos. El número 1 no es primo ni compuesto. El **teorema fundamental de la aritmética** dice que todo entero positivo mayor a 1 puede escribirse como el producto de números primos en precisamente una forma (sin tomar en cuenta el orden). Por ejemplo, la **factorización prima** de 24 es  $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ .

# 1.4 Ejercicios

En los ejercicios 1-6, identifique los términos. A continuación, identifique los coeficientes de los términos variables de la expresión.

1.  $7x + 4$
2.  $6x^3 - 5x$
3.  $\sqrt{3}x^2 - 8x - 11$
4.  $3\sqrt{3}x^2 + 1$
5.  $4x^3 + \frac{x}{2} - 5$
6.  $3x^4 - \frac{x^2}{4}$

En los ejercicios 7-12, evalúe la expresión para cada uno de los valores de  $x$ . (Si no es posible, diga la razón.)

Expresión	Valores	
7. $4x - 6$	(a) $x = -1$	(b) $x = 0$
8. $9 - 7x$	(a) $x = -3$	(b) $x = 3$
9. $x^2 - 3x + 4$	(a) $x = -2$	(b) $x = 2$
10. $-x^2 + 5x - 4$	(a) $x = -1$	(b) $x = 1$
11. $\frac{x+1}{x-1}$	(a) $x = 1$	(b) $x = -1$
12. $\frac{x}{x+2}$	(a) $x = 2$	(b) $x = -2$

En los ejercicios 13-24, identifique la o las reglas del álgebra ilustrada por el enunciado.

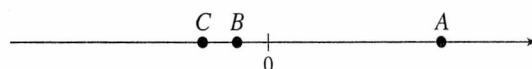
13.  $x + 9 = 9 + x$
14.  $2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$
15.  $\frac{1}{h+6}(h+6) = 1, \quad h \neq -6$
16.  $(x+3) - (x+3) = 0$
17.  $2(x+3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3$
18.  $(z-2) + 0 = z - 2$
19.  $1 \cdot (1+x) = 1 + x$
20.  $(z+5)x = z \cdot x + 5 \cdot x$
21.  $x + (y+10) = (x+y) + 10$
22.  $x(3y) = (x \cdot 3)y = (3x)y$
23.  $3(t-4) = 3 \cdot t - 3 \cdot 4$
24.  $\frac{1}{7}(7 \cdot 12) = \left(\frac{1}{7} \cdot 7\right)12 = 1 \cdot 12 = 12$

En los ejercicios 25-32, realice la(s) operación(es). (Escriba respuestas fraccionarias en su forma más sencilla.)

25.  $\frac{3}{16} + \frac{5}{16}$
26.  $\frac{6}{7} - \frac{4}{7}$
27.  $\frac{5}{8} - \frac{5}{12} + \frac{1}{6}$
28.  $\frac{10}{11} + \frac{6}{33} - \frac{13}{66}$
29.  $12 \div \frac{1}{4}$
30.  $-(6 \cdot \frac{4}{8})$
31.  $\frac{2x}{3} - \frac{x}{4}$
32.  $\frac{5x}{6} \cdot \frac{2}{9}$

## EXPLORACIÓN

En los ejercicios 33 y 34, use los números reales  $A$ ,  $B$  y  $C$  mostrados en la recta numérica. Determine el signo de cada expresión.



33. (a)  $-A$
34. (a)  $-C$
- (b)  $B - A$
- (b)  $A - C$

## 35. CONJETURA

(a) Use una calculadora para completar la tabla.

$n$	1	0.5	0.01	0.0001	0.000001
$5/n$					

(b) Use el resultado del inciso (a) para hacer una conjetura acerca del valor de  $5/n$  cuando  $n$  se aproxima a 0.

## 36. CONJETURA

(a) Use una calculadora para completar la tabla.

$n$	1	10	100	10 000	100 000
$5/n$					

(b) Use el resultado del inciso (a) para hacer una conjetura acerca del valor de  $5/n$  cuando  $n$  aumenta sin límite.

**¿VERDADERO O FALSO?** En los ejercicios 37-40, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

37. Si  $a > 0$  y  $b < 0$ , entonces  $a - b > 0$ .
38. Si  $a > 0$  y  $b < 0$ , entonces  $ab > 0$ .
39. Si  $a < b$ , entonces  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ , donde  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$ .
40. Como  $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ , entonces  $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$ .

**41. PIÉNSELO** Considere  $|u+v|$  y  $|u|+|v|$ , donde  $u \neq 0$  y  $v \neq 0$ .

- (a) ¿Los valores de las expresiones son siempre iguales? Si no es así, ¿bajo qué condiciones son desiguales?
- (b) Si las dos expresiones no son iguales para ciertos valores de  $u$  y  $v$ , ¿una de las expresiones es siempre mayor que la otra? Explique.

42.

43.

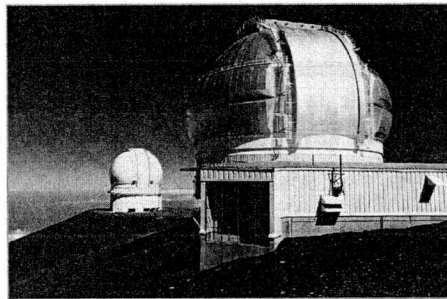
44.

42. **PIÉNSELO** ¿Hay diferencia entre decir que un número real es positivo y decir que un número real es no negativo? Explique.
43. **PIÉNSELO** Debido a que todo número par es divisible entre 2, ¿es posible que existan algunos números primos pares? Explique.
44. **PIÉNSELO** ¿Es posible que un número real sea racional e irracional? Explique.
45. **ESCRITURA** ¿Puede alguna vez ser cierto que  $|a| = -a$  para un número real  $a$ ? Explique.
46. **TOQUE FINAL** Describa las diferencias entre los conjuntos de números naturales, números enteros (solo positivos), enteros (pos. y neg.), números racionales y números irracionales.

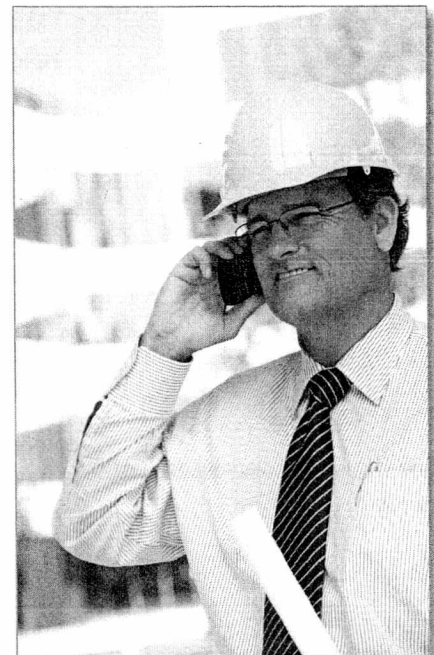


# Funciones

- 2.1 Funciones y sus gráficas
- 2.2 Gráficas y modelos
- 2.3 Funciones inversas



Modelado de la concentración de dióxido de carbono



Suscriptores de teléfono celular



Aerodinámica

Modelado de la concentración de dióxido de carbono (Gavriel Jecan/Terra/CORBIS);  
Suscriptores de teléfono celular (Andy Dean Photography/Shutterstock.com);  
Aerodinámica (Gyi nesa/iStockphoto.com).

# 2.1 Funciones y sus gráficas

- Usar la notación de función para representar y evaluar funciones.
- Encontrar el dominio y el rango de una función.
- Trazar la gráfica de una función.
- Identificar los diferentes tipos de transformaciones de las funciones.
- Clasificar funciones y reconocer combinaciones de ellas.

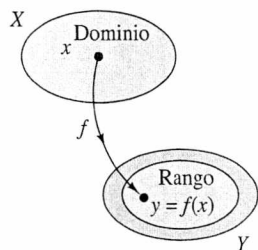
## Funciones y notación de funciones

Una **relación** entre dos conjuntos  $X$  y  $Y$  es un conjunto de pares ordenados, cada uno de la forma  $(x, y)$ , donde  $x$  es un elemento de  $X$  y  $y$  un elemento de  $Y$ . Una **función** de  $X$  y  $Y$  es una relación entre  $X$  y  $Y$  con la propiedad de que si dos pares ordenados tienen el mismo valor de  $x$ , también tienen el mismo valor de  $y$ . La variable  $x$  se denomina **variable independiente**, mientras que la variable  $y$  se denomina **variable dependiente**.

Muchas situaciones de la vida real pueden describirse mediante funciones. Por ejemplo, el área de  $A$  de un círculo es una función de su radio  $r$ .

$$A = \pi r^2 \quad A \text{ es una función de } r.$$

En este caso,  $r$  es la variable independiente, y  $A$  la variable dependiente.



Una función real  $f$  de una variable real.

Figura 2.1

### Definición de función real de una variable real

Sean  $X$  y  $Y$  conjuntos de números reales. Una **función real  $f$  de una variable real  $x$**  de  $X$  a  $Y$  es una regla de correspondencia que asigna a cada número un número  $x$  en  $X$  exactamente un número de  $Y$ .

El **dominio** de  $f$  es el conjunto  $X$ . El número  $y$  es la **imagen** de  $x$  bajo  $f$  y se denota mediante  $f(x)$ , a lo cual se llama el **valor de  $f$  en  $x$** . El **rango** de  $f$  se define como el subconjunto de  $Y$  formado por todas las imágenes de los números en  $X$  (vea la figura 2.1).

Las funciones pueden especificarse de muchas formas. No obstante, este texto se concentra fundamentalmente en funciones dadas por ecuaciones que contienen variables dependientes e independientes. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + 2y = 1 \quad \text{Ecuación en forma implícita}$$

define  $y$ , la variable dependiente, como función de  $x$ , la variable independiente. Para **evaluar** esta función (esto es, para encontrar el valor de  $y$  correspondiente a un valor de  $x$  dado) resulta conveniente despejar  $y$  en el lado izquierdo de la ecuación.

$$y = \frac{1}{2}(1 - x^2) \quad \text{Ecuación en forma explícita}$$

Utilizando  $f$  como nombre de la función, esta ecuación puede escribirse como:

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2). \quad \text{Notación de funciones}$$

La ecuación original

$$x^2 + 2y = 1$$

define **implícitamente** a  $y$  como una función de  $x$ . Cuando se despeja  $y$ , se obtiene la ecuación en forma **explícita**.

La notación de funciones tiene la ventaja de que permite identificar claramente la variable dependiente como  $f(x)$ , informando al mismo tiempo que la variable independiente es  $x$  y que la función se denota por " $f$ ". El símbolo  $f(x)$  se lee " $f$  de  $x$ ". La notación de funciones permite ahorrar palabras. En lugar de preguntar "¿Cuál es el valor de  $y$  que corresponde a  $x = 3$ ?", se puede preguntar "¿Cuánto vale  $f(3)$ ?".

### NOTACIÓN DE FUNCIONES

Gottfried Wilhelm Leibniz fue el primero que utilizó la palabra *función*, en 1694, para denotar cualquier cantidad relacionada con una curva, como las coordenadas de uno de sus puntos o su pendiente. Cuarenta años más tarde, Leonhard Euler empleó la palabra "función" para describir cualquier expresión construida con una variable y varias constantes. Fue él quien introdujo la notación  $y = f(x)$ .

•••CC  
• sío  
• coc  
• un  
• cál  
• est  
••••

En una ecuación que define a una función de  $x$  el papel de la variable  $x$  es simplemente el de un hueco a llenar. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

puede describirse como

$$f(\text{█}) = 2(\text{█})^2 - 4(\text{█}) + 1$$

donde se usan huecos entre paréntesis en lugar de  $x$ . Para evaluar  $f(-2)$ , basta con colocar  $-2$  dentro de cada paréntesis.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2(-2)^2 - 4(-2) + 1 && \text{Sustituya } -2 \text{ en lugar de } x. \\ &= 2(4) + 8 + 1 && \text{Simplifique.} \\ &= 17 && \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

Aunque es frecuente usar  $f$  como un símbolo adecuado para denotar una función y  $x$  para la variable independiente, se pueden utilizar otros símbolos. Por ejemplo, todas las ecuaciones siguientes definen la misma función.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 7 && \text{El nombre de la función es } f, \text{ el de la variable independiente es } x. \\ f(t) &= t^2 - 4t + 7 && \text{El nombre de la función es } f, \text{ el de la variable independiente es } t. \\ g(s) &= s^2 - 4s + 7 && \text{El nombre de la función es } g, \text{ el de la variable independiente es } s. \end{aligned}$$

### EJEMPLO 1

### Evaluar una función

Para la función  $f$  definida por  $f(x) = x^2 + 7$ , evalúe cada expresión:

a.  $f(3a)$     b.  $f(b - 1)$     c.  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

#### Solución

$$\begin{aligned} \text{a. } f(3a) &= (3a)^2 + 7 && \text{Sustituya } x \text{ por } 3a. \\ &= 9a^2 + 7 && \text{Simplifique.} \\ \text{b. } f(b - 1) &= (b - 1)^2 + 7 && \text{Sustituya } x \text{ por } b - 1. \\ &= b^2 - 2b + 1 + 7 && \text{Desarrolle el binomio.} \\ &= b^2 - 2b + 8 && \text{Simplifique.} \\ \text{c. } \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{[(x + \Delta x)^2 + 7] - (x^2 + 7)}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 7 - x^2 - 7}{\Delta x} \\ &= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= 2x + \Delta x, \quad \Delta x \neq 0 \end{aligned}$$

En cálculo es importante especificar con claridad el dominio de una función o expresión. Por ejemplo, en el ejemplo 1(c), las expresiones

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{y} \quad 2x + \Delta x, \quad \Delta x \neq 0$$

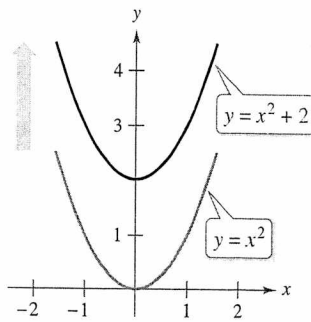
son equivalentes, ya que  $\Delta x = 0$  se excluye del dominio de la función o expresión. Si no se estableciera esa restricción del dominio, las dos expresiones no serían equivalentes.

...**COMENTARIO** La expresión en el ejemplo 1(c) se llama *cociente de diferencias* y tiene un significado especial en el cálculo. Se aprenderá más sobre esto en la unidad 4.

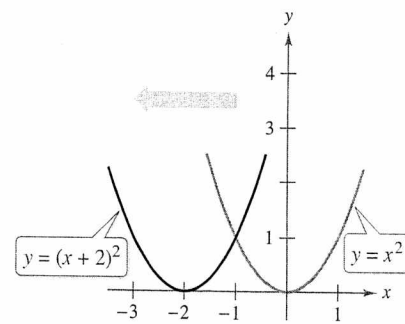


## Transformaciones de las funciones

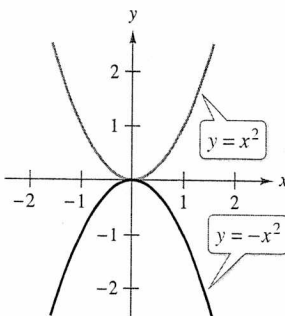
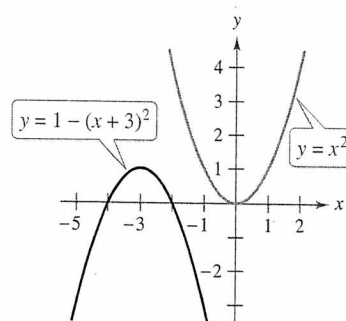
Algunas familias de gráficas tienen la misma forma básica. Por ejemplo, compare la gráfica de  $y = x^2$  con las gráficas de las otras cuatro funciones cuadráticas de la figura 2.7.



(a) Traslación vertical hacia arriba



(b) Traslación horizontal a la izquierda

(c) Reflexión  
Figura 2.7

(d) Traslación a la izquierda, reflexión y traslación hacia arriba

Cada una de las gráficas de la figura 2.7 es una **transformación** de la gráfica de  $y = x^2$ . Los tres tipos básicos de transformaciones ilustrados por estas gráficas son las traslaciones verticales, las traslaciones horizontales y las reflexiones. La notación de funciones es adecuada para describir transformaciones de gráficas en el plano. Por ejemplo, usando

$$f(x) = x^2 \quad \text{Función original}$$

como la función original, las transformaciones mostradas en la figura 2.7 se pueden representar por medio de las siguientes ecuaciones.

- |                        |  |
|------------------------|--|
| a. $y = f(x) + 2$      | Traslación vertical de 2 unidades hacia arriba   |
| b. $y = f(x + 2)$      | Traslación horizontal de 2 unidades a la izquierda   |
| c. $y = -f(x)$         | Reflexión respecto al eje $x$  |
| d. $y = -f(x + 3) + 1$ | Traslación de 3 unidades a la izquierda, reflexión respecto al eje $x$ y traslación de 1 unidad hacia arriba |

### Tipos básicos de transformaciones ( $c > 0$ )

Gráfica original:	$y = f(x)$
Traslación horizontal de $c$ unidades a la <b>derecha</b> :	$y = f(x - c)$
Traslación horizontal de $c$ unidades a la <b>izquierda</b> :	$y = f(x + c)$
Traslación vertical de $c$ unidades <b>hacia abajo</b> :	$y = f(x) - c$
Traslación vertical de $c$ unidades <b>hacia arriba</b> :	$y = f(x) + c$
<b>Reflexión</b> (respecto al eje $x$ ):	$y = -f(x)$
<b>Reflexión</b> (respecto al eje $y$ ):	$y = f(-x)$
<b>Reflexión</b> (respecto al origen):	$y = -f(-x)$



**LEONHARD EULER**  
(1707–1783)

Además de sus contribuciones esenciales a casi todas las ramas de las matemáticas, Euler fue uno de los primeros en aplicar el cálculo a problemas reales de la física. Sus numerosas publicaciones incluyen temas como construcción de barcos, acústica, óptica, astronomía, mecánica y magnetismo.  
Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para leer más de esta biografía.

### Clasificaciones y combinaciones de funciones

La noción moderna de función es fruto de los esfuerzos de muchos matemáticos de los siglos XVII y XVIII. Mención especial merece Leonhard Euler, a quien debemos la notación  $y = f(x)$ . Hacia finales del siglo XVIII, los matemáticos y científicos habían llegado a la conclusión de que un gran número de fenómenos de la vida real podían representarse mediante modelos matemáticos, construidos a partir de una colección de funciones denominadas **funciones elementales**. Estas funciones se dividen en tres categorías.

1. Funciones algebraicas (polinomiales, radicales, racionales).
2. Funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, etc.).
3. Funciones exponenciales y logarítmicas.

En el apéndice C se encuentra un repaso de las funciones trigonométricas. El resto de las funciones no algebraicas, como las funciones trigonométricas inversas y las funciones exponenciales y logarítmicas, se presentan en la unidad 4.

El tipo más común de función algebraica es una **función polinomial**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde  $n$  es un entero no negativo. Las constantes  $a_i$  son **coeficientes**, siendo  $a_n$  el **coeficiente dominante** y  $a_0$  el **término constante** de la función polinomial. Si  $a_n \neq 0$ , entonces  $n$  es el **grado** de la función polinomial. La función polinomial cero  $f(x) = 0$  no tiene grado. Aunque se suelen utilizar subíndices para los coeficientes de funciones polinomiales en general, para las de grados más bajos se utilizan con frecuencia las siguientes formas más sencillas. (Observe que  $a \neq 0$ .)

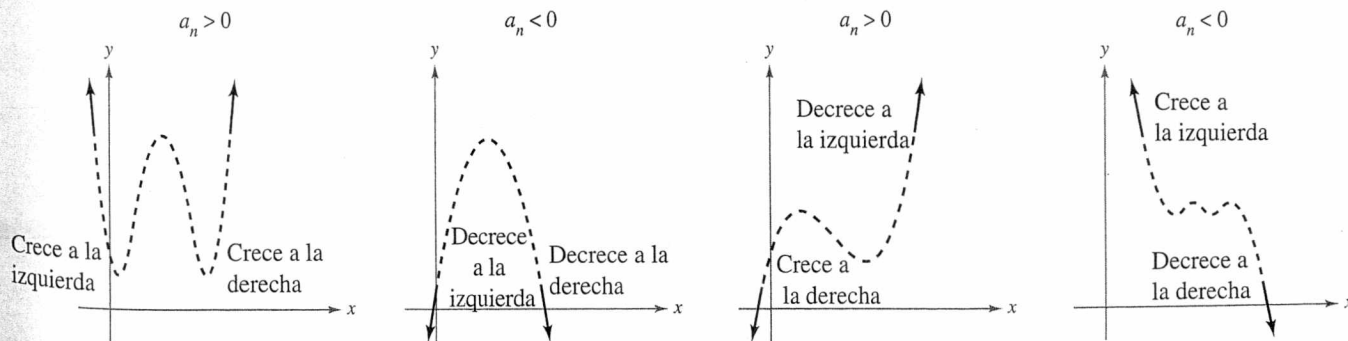
<b>Grado cero:</b>	$f(x) = a$	Función constante
<b>Grado uno:</b>	$f(x) = ax + b$	Función lineal
<b>Grado dos:</b>	$f(x) = ax^2 + bx + c$	Función cuadrática
<b>Grado tres:</b>	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Función cúbica

Aunque la gráfica de una función polinomial no constante puede presentar varias inflexiones, en algún momento ascenderá o descenderá sin límite al moverse  $x$  hacia la izquierda o hacia la derecha. Se puede determinar qué ocurre en la gráfica de

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

eventualmente crece o decrece a partir del grado de la función (par o impar) y del coeficiente dominante  $a_n$ , como se indica en la figura 2.8. Observe que las regiones punteadas muestran que el **criterio del coeficiente principal** *solo* determina el comportamiento a la derecha y a la izquierda de la gráfica.

**■ PARA INFORMACIÓN ADICIONAL**  
Puede encontrar más información sobre la historia del concepto de función en el artículo "Evolution of the Function Concept: A Brief Survey", de Israel Kleiner, en *The College Mathematics Journal*. Para consultar este artículo, visite [MathArticles.com](http://MathArticles.com).



Gráficas de funciones polinomiales de grado impar Gráficas de funciones polinomiales de grado par.  
Criterio del coeficiente principal para funciones polinomiales.  
**Figura 2.8**

Del mismo modo que un número racional se puede escribir como el cociente de dos enteros, una **función racional** se puede expresar como el cociente de dos polinomios. De manera específica, una función  $f$  es racional si tiene la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad q(x) \neq 0$$

donde  $p(x)$  y  $q(x)$  son polinomiales.

Las funciones polinomiales y las racionales son ejemplos de **funciones algebraicas**. Se llama función algebraica de  $x$  a aquella que se puede expresar mediante un número finito de sumas, diferencias, productos, cocientes y raíces que contengan  $x^n$ . Por ejemplo,

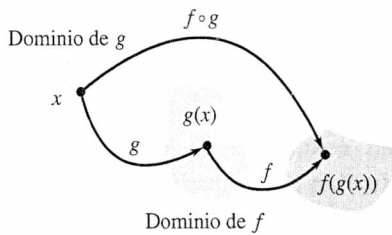
$$f(x) = \sqrt{x + 1}$$

es algebraica. Las funciones no algebraicas se denominan **trascendentes**. Por ejemplo, las funciones trigonométricas son trascendentes.

Es posible combinar dos funciones de varias formas para crear nuevas funciones. Por ejemplo, dadas  $f(x) = 2x - 3$  y  $g(x) = x^2 + 1$ , se pueden construir las siguientes funciones.

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (2x - 3) + (x^2 + 1)$	Suma
$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (2x - 3) - (x^2 + 1)$	Diferencia
$(fg)(x) = f(x)g(x) = (2x - 3)(x^2 + 1)$	Producto
$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x - 3}{x^2 + 1}$	Cociente

Aún hay otra manera de combinar dos funciones, llamada **composición**. La función resultante recibe el nombre de **función compuesta**.



El dominio de la función compuesta  $f \circ g$ .

Figura 2.9

**Definición de función compuesta**

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones. La función dada por  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  se llama **función compuesta** de  $f$  con  $g$ . El dominio de  $f$  es el conjunto de todas las  $x$  del dominio de  $g$  tales que  $g(x)$  esté en el dominio de  $f$  (vea la figura 2.9).

La función compuesta de  $f$  con  $g$  puede no ser igual a la función compuesta de  $g$  con  $f$ . Esto se muestra en el ejemplo siguiente.

**EJEMPLO 4 Composición de funciones**

•••► Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Dadas  $f(x) = 2x - 3$  y  $g(x) = \cos x$ , encuentre cada una de las funciones compuestas:

- a.  $f \circ g$       b.  $g \circ f$

**Solución**

a.  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$   
 $= f(\cos x)$   
 $= 2(\cos x) - 3$   
 $= 2 \cos x - 3$

b.  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$   
 $= g(2x - 3)$   
 $= \cos(2x - 3)$

- Definición de  $f \circ g$
- Sustituya  $\cos x$  por  $g(x)$ .
- Definición de  $f(x)$
- Simplifique.
- Definición de  $g \circ f$
- Sustituya  $2x - 3$  por  $f(x)$ .
- Definición de  $g(x)$

Observe que  $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ .

**Exp**

Utilice gráficas para cada una de las funciones siguientes.

- $f(x)$  :
- $g(x)$  :
- $h(x)$  :
- $j(x)$  :
- $k(x)$  :
- $p(x)$  :

Describa e identifique cada una de las funciones por medio de un análisis.



(a) Función



(b) Función

Figura 2

**Exploración**

Utilice una herramienta de graficación para representar cada función. Determine si la función es *par*, *impar* o *ninguna* de las dos.

$$f(x) = x^2 - x^4$$

$$g(x) = 2x^3 + 1$$

$$h(x) = x^5 - 2x^3 + x$$

$$j(x) = 2 - x^6 - x^8$$

$$k(x) = x^5 - 2x^4 + x - 2$$

$$p(x) = x^9 + 3x^5 - x^3 + x$$

Describa una manera de identificar una función como par o impar mediante un análisis visual de la ecuación.

Se puede definir la intersección en  $x$  de una gráfica como todo punto  $(a, 0)$  en el que la gráfica corta el eje  $x$ . Si la gráfica representa una función  $f$ , el número  $a$  es un **cero** de  $f$ . En otras palabras, los *ceros de una función  $f$  son las soluciones de la ecuación  $f(x) = 0$* . Por ejemplo, la función

$$f(x) = x - 4$$

tiene un cero en  $x = 4$ , porque  $f(4) = 0$ .

En la terminología de funciones, se dice que una función es **par** si su gráfica es simétrica respecto al eje  $y$ , y se dice que es **impar** si su gráfica es simétrica con respecto al origen. Los criterios de simetría conducen a la siguiente prueba para las funciones pares e impares.

**Prueba para las funciones pares e impares**

La función  $y = f(x)$  es **par** si

$$f(-x) = f(x).$$

La función  $y = f(x)$  es **impar** si

$$f(-x) = -f(x).$$

**EJEMPLO 5**

**Funciones pares o impares y ceros de funciones**

Determine si cada una de las siguientes funciones es par, impar o ninguna de ambas. Después calcule los ceros de la función.

- a.  $f(x) = x^3 - x$       b.  $g(x) = 1 + \cos x$

**Solución**

- a. La función es impar, porque

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x).$$

Los ceros de  $f$  son

$$\begin{aligned} x^3 - x &= 0 \\ x(x^2 - 1) &= 0 \\ x(x - 1)(x + 1) &= 0 \\ x &= 0, 1, -1. \end{aligned}$$

Sea  $f(x) = 0$ .  
Factorice.  
Factorice.  
Ceros de  $f$

Vea la figura 2.10(a).

- b. La función es par, porque

$$g(-x) = 1 + \cos(-x) = 1 + \cos x = g(x).$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

Los ceros de  $g$  son

$$\begin{aligned} 1 + \cos x &= 0 \\ \cos x &= -1 \\ x &= (2n + 1)\pi, n \text{ es un entero.} \end{aligned}$$

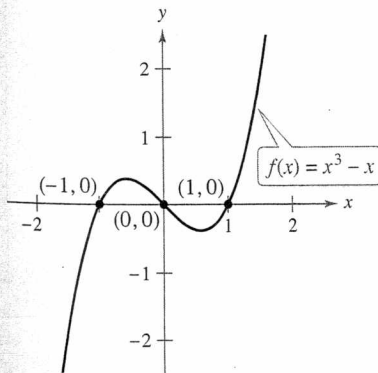
Sea  $g(x) = 0$ .  
Reste 1 en ambos miembros.  
Ceros de  $g$

Vea la figura 2.10(b).

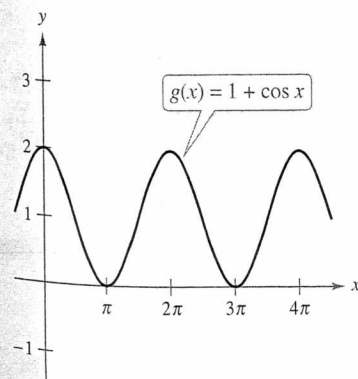
Cada una de las funciones del ejemplo 5 es par o impar. Sin embargo, muchas funciones, como

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

no son pares ni impares.



(a) Función impar



(b) Función par

Figura 2.10

# 2.1 Ejercicios

Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Evaluar una función** En los ejercicios 1-10, evalúe la función para el (los) valor(es) dado(s) de la variable independiente. Simplifique los resultados.

- |   |   |
|---|---|
| 1. $f(x) = 7x - 4$                        | 2. $f(x) = \sqrt{x + 5}$                        |
| (a) $f(0)$ (b) $f(-3)$                    | (a) $f(-4)$ (b) $f(11)$                         |
| (c) $f(b)$ (d) $f(x - 1)$                 | (c) $f(4)$ (d) $f(x + \Delta x)$                |
| 3. $g(x) = 5 - x^2$                       | 4. $g(x) = x^2(x - 4)$                          |
| (a) $g(0)$ (b) $g(\sqrt{5})$              | (a) $g(4)$ (b) $g(\frac{3}{2})$                 |
| (c) $g(-2)$ (d) $g(t - 1)$                | (c) $g(c)$ (d) $g(t + 4)$                       |
| 5. $f(x) = \cos 2x$                       | 6. $f(x) = \sin x$                              |
| (a) $f(0)$ (b) $f(-\frac{\pi}{4})$        | (a) $f(\pi)$ (b) $f(\frac{5\pi}{4})$            |
| (c) $f(\frac{\pi}{3})$ (d) $f(\pi)$       | (c) $f(\frac{2\pi}{3})$ (d) $f(-\frac{\pi}{6})$ |
| 7. $f(x) = x^3$                           | 8. $f(x) = 3x - 1$                              |
| $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ | $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$                     |
| 9. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$        | 10. $f(x) = x^3 - x$                            |
| $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$               | $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$                     |

**Encontrar el dominio y el rango de una función** En los ejercicios 11-22, encuentre el dominio y el rango de la función.

- |                                   |                                  |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| 11. $f(x) = 4x^2$                 | 12. $g(x) = x^2 - 5$             |
| 13. $f(x) = x^3$                  | 14. $h(x) = 4 - x^2$             |
| 15. $g(x) = \sqrt{6x}$            | 16. $h(x) = -\sqrt{x + 3}$       |
| 17. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$      | 18. $f(x) =  x - 3 $             |
| 19. $f(t) = \sec \frac{\pi t}{4}$ | 20. $h(t) = \cot t$              |
| 21. $f(x) = \frac{3}{x}$          | 22. $f(x) = \frac{x - 2}{x + 4}$ |

**Encontrar el dominio de la función** En los ejercicios 23-28, encuentre el dominio de la función.

- |                                      |                                       |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 23. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$ | 24. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$      |
| 25. $g(x) = \frac{2}{1 - \cos x}$    | 26. $h(x) = \frac{1}{\sin x - (1/2)}$ |
| 27. $f(x) = \frac{1}{ x + 3 }$       | 28. $g(x) = \frac{1}{ x^2 - 4 }$      |

**Encontrar el rango y el dominio de una función por partes** En los ejercicios 29-32, evalúe la función como se indica. Determine su dominio y su rango.

29.  $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ 2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$
- (a)  $f(-1)$  (b)  $f(0)$  (c)  $f(2)$  (d)  $f(t^2 + 1)$

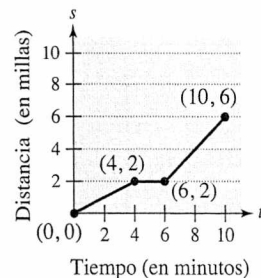
30.  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 1 \\ 2x^2 + 2, & x > 1 \end{cases}$
- (a)  $f(-2)$  (b)  $f(0)$  (c)  $f(1)$  (d)  $f(s^2 + 2)$
31.  $f(x) = \begin{cases} |x| + 1, & x < 1 \\ -x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$
- (a)  $f(-3)$  (b)  $f(1)$  (c)  $f(3)$  (d)  $f(b^2 + 1)$
32.  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 4}, & x \leq 5 \\ (x - 5)^2, & x > 5 \end{cases}$
- (a)  $f(-3)$  (b)  $f(0)$  (c)  $f(5)$  (d)  $f(10)$

**Trazar la gráfica de una función** En los ejercicios 33-40, trace la gráfica de la función y encuentre su dominio y su rango. Utilice una herramienta graficadora para comprobar las gráficas.

- |                             |  |
|-----------------------------|--|
| 33. $f(x) = 4 - x$          | 34. $g(x) = \frac{4}{x}$                   |
| 35. $h(x) = \sqrt{x - 6}$   | 36. $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 3$            |
| 37. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ | 38. $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$            |
| 39. $g(t) = 3 \sin \pi t$   | 40. $h(\theta) = -5 \cos \frac{\theta}{2}$ |

### DESARROLLO DE CONCEPTOS

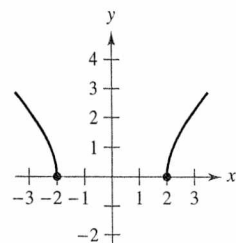
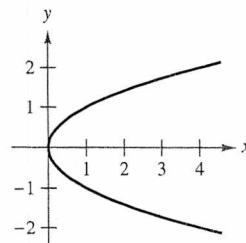
**41. Descripción gráfica** En la figura se muestra la gráfica de la distancia que recorre un estudiante en su camino de 10 minutos a la escuela. Dé una descripción verbal de las características del recorrido del estudiante hacia la escuela.



**42. Trazar una gráfica** Tras unos minutos de recorrido, un estudiante que conduce 27 millas para ir a la universidad recuerda que olvidó en casa el trabajo que tiene que entregar ese día. Conduciendo a mayor velocidad de la que acostumbra, regresa a casa, recoge su trabajo y reemprende su camino a la universidad. Trace la posible gráfica de la distancia de la casa del estudiante como función del tiempo.

**Usar el criterio de la recta vertical** En los ejercicios 43-46, aplique el criterio de la recta vertical para determinar si y es una función de  $x$ . Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite [MathGraphs.com](http://MathGraphs.com).

43.  $x - y^2 = 0$       44.  $\sqrt{x^2 - 4} - y = 0$



45.  $y =$

Decidi  
47-50, c

47.  $x^2$   
49.  $y^2$

Transf  
muestr  
ción de  
escriba

51.

5  
4  
3  
2  
1

+  
-1

53.

+  
-2

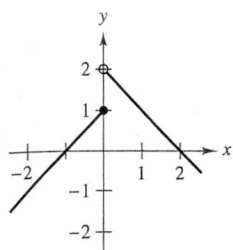
Relaci  
para re

55.  $y =$

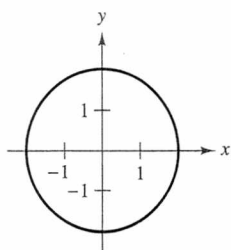
57.  $y =$

59.  $y =$

45.  $y = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0 \\ -x + 2, & x > 0 \end{cases}$



46.  $x^2 + y^2 = 4$



**Decidir si una ecuación es una función** En los ejercicios 47-50, determine si  $y$  es una función de  $x$ .

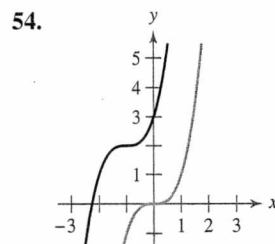
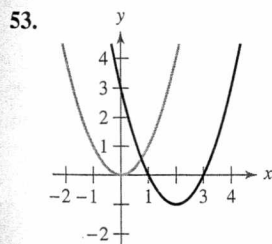
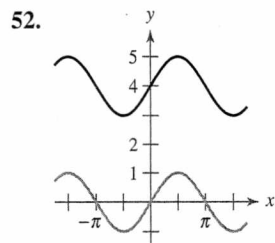
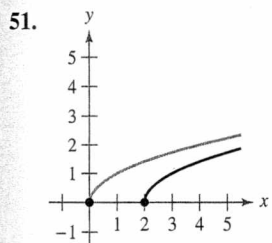
47.  $x^2 + y^2 = 16$

48.  $x^2 + y = 16$

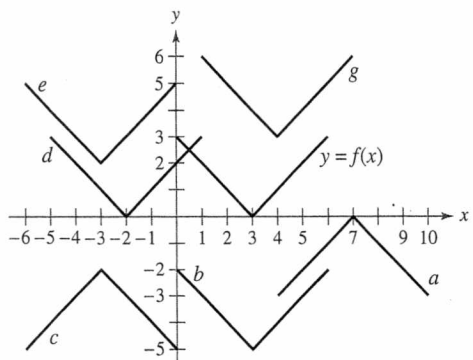
49.  $y^2 = x^2 - 1$

50.  $x^2y - x^2 + 4y = 0$

**Transformar una función** En los ejercicios 51-54, la gráfica muestra una de las ocho funciones básicas y una transformación de la función. Describa la transformación. A continuación, escriba la ecuación para la transformación.



**Relacionar** En los ejercicios 55-60, utilice la gráfica de  $y = f(x)$  para relacionar la función con su gráfica.



55.  $y = f(x + 5)$

56.  $y = f(x) - 5$

57.  $y = -f(-x) - 2$

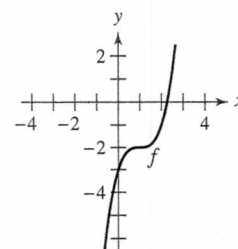
58.  $y = -f(x - 4)$

59.  $y = f(x + 6) + 2$

60.  $y = f(x - 1) + 3$

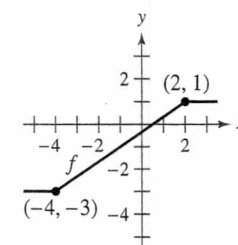
**61. Trazar transformaciones** Utilice la gráfica de  $f$  mostrada en la figura para trazar la gráfica de cada función. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite *MathGraphs.com*.

- (a)  $f(x + 3)$     (b)  $f(x - 1)$
- (c)  $f(x) + 2$     (d)  $f(x) - 4$
- (e)  $3f(x)$     (f)  $\frac{1}{4}f(x)$
- (g)  $-f(x)$     (h)  $-f(-x)$



**62. Trazar transformaciones** Utilice la gráfica de  $f$  mostrada en la figura para trazar la gráfica de cada función. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite *MathGraphs.com*.

- (a)  $f(x - 4)$     (b)  $f(x + 2)$
- (c)  $f(x) + 4$     (d)  $f(x) - 1$
- (e)  $2f(x)$     (f)  $\frac{1}{2}f(x)$
- (g)  $f(-x)$     (h)  $-f(x)$



**Combinar funciones** En los ejercicios 63 y 64, determine (a)  $f(x) + g(x)$ , (b)  $f(x) - g(x)$ , (c)  $f(x) \cdot g(x)$ , (d)  $f(x)/g(x)$ .

63.  $f(x) = 3x - 4$   
 $g(x) = 4$

64.  $f(x) = x^2 + 5x + 4$   
 $g(x) = x + 1$

**65. Evaluar funciones compuestas** Dadas  $f(x) = \sqrt{x}$  y  $g(x) = x^2 - 1$ , evalúe cada expresión.

- (a)  $f(g(1))$     (b)  $g(f(1))$     (c)  $g(f(0))$
- (d)  $f(g(-4))$     (e)  $f(g(x))$     (f)  $g(f(x))$

**66. Evaluar funciones compuestas** Dadas  $f(x) = \sin x$  y  $g(x) = \pi x$ , evalúe cada expresión.

- (a)  $f(g(2))$     (b)  $f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$     (c)  $g(f(0))$
- (d)  $g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$     (e)  $f(g(x))$     (f)  $g(f(x))$

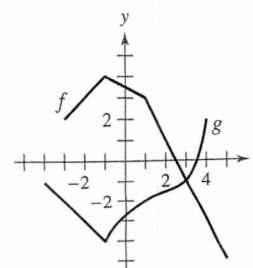
**Encontrar funciones compuestas** En los ejercicios 67-70, encuentre las funciones compuestas  $f \circ g$  y  $g \circ f$ . ¿Cuál es el dominio de cada función compuesta? ¿Son iguales ambas funciones compuestas?

67.  $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$     68.  $f(x) = x^2 - 1, g(x) = \cos x$

69.  $f(x) = \frac{3}{x}, g(x) = x^2 - 1$     70.  $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \sqrt{x + 2}$

**71. Evaluar funciones compuestas** Utilice las gráficas de  $f$  y de  $g$  para evaluar cada expresión. Si el resultado es indefinido, explique por qué.

- (a)  $(f \circ g)(3)$     (b)  $g(f(2))$
- (c)  $g(f(5))$     (d)  $(f \circ g)(-3)$
- (e)  $(g \circ f)(-1)$     (f)  $f(g(-1))$



72. **Ondas** Se deja caer una roca en un estanque tranquilo, provocando ondas en forma de círculos concéntricos. El radio (en pies) de la onda exterior está dado por  $r(t) = 0.6t$ , donde  $t$  es el tiempo, en segundos, transcurrido desde que la roca golpea el agua. El área del círculo está dada por la función  $A(t) = \pi r^2$ . Calcule e interprete  $(A \circ r)(t)$ .

**Piénselo** En los ejercicios 73 y 74,  $F(x) = f \circ g \circ h$ . Identifique las funciones para  $f, g$  y  $h$ . Existen muchas respuestas correctas.

73.  $F(x) = \sqrt{2x - 2}$       74.  $F(x) = -4 \sin(1 - x)$

**Piénselo** En los ejercicios 75 y 76, encuentre las coordenadas de un segundo punto de la gráfica de una función  $f$ , si el punto dado forma parte de la gráfica y la función es (a) par y (b) impar.

75.  $(-\frac{3}{2}, 4)$       76.  $(4, 9)$

77. **Funciones pares e impares** En la figura se muestran las gráficas de  $f, g$  y  $h$ . Determine si cada función es par o impar o ninguna de las dos.

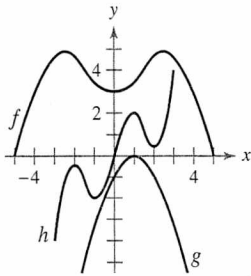


Figura para 77

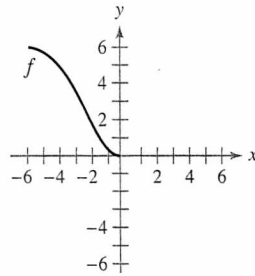


Figura para 78

78. **Evaluar funciones compuestas** El dominio de la función  $f$  que se muestra en la figura es  $-6 \leq x \leq 6$ .

- (a) Complete la gráfica de  $f$  dado que  $f$  es par.
- (b) Complete la gráfica de  $f$  dado que  $f$  es impar.

**Funciones pares e impares y ceros de las funciones** En los ejercicios 79-82, determine si la función es par, impar o ninguna de las dos. Luego determine los ceros de la función. Utilice una herramienta de graficación para verificar su resultado.

79.  $f(x) = x^2(4 - x^2)$       80.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$   
 81.  $f(x) = x \cos x$       82.  $f(x) = \sin^2 x$

**Escribir funciones** En los ejercicios 83-86, escriba la ecuación para una función que tiene la gráfica dada.

- 83. Segmento de la recta que une  $(-2, 4)$  y  $(0, -6)$ .
- 84. Segmento de la recta que une  $(3, 1)$  y  $(5, 8)$ .
- 85. La mitad inferior de la parábola  $x + y^2 = 0$ .
- 86. La mitad inferior del círculo  $x^2 + y^2 = 36$ .

**Dibujar una gráfica** En los ejercicios 87-90, trace una posible gráfica de la situación.

87. La velocidad de un aeroplano en una función del tiempo durante un vuelo de 5 horas.

88. La altura de una pelota de béisbol en función de la distancia horizontal durante un home run.

89. La cantidad de cierta marca de un zapato vendida por una tienda de deportes en función del precio del artículo.

90. El valor de un auto nuevo en función del tiempo en un periodo de 8 años.

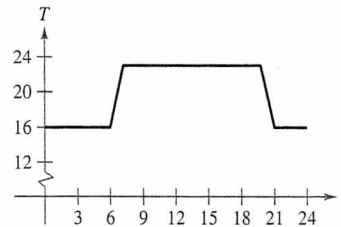
91. **Dominio** Determine el valor de  $c$  de manera que el dominio de la función  $f(x) = \sqrt{c - x^2}$  sea  $[-5, 5]$ .

92. **Dominio** Determine todos los valores de  $c$  de manera que el dominio de la función

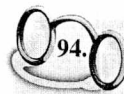
$$f(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 3cx + 6}$$

es el conjunto de todos los números reales.

93. **Razonamiento gráfico** Un termostato controlado de manera electrónica está programado para reducir la temperatura automáticamente durante la noche (vea la figura). La temperatura  $T$ , en grados Celsius, está dada en términos de  $t$ , el tiempo en horas de un reloj de 24 horas.

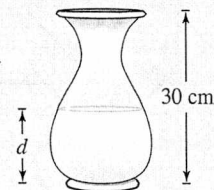


- (a) Calcule  $T(4)$  y  $T(15)$ .
- (b) Si el termostato se reprograma para producir una temperatura  $H(t) = T(t - 1)$ , ¿qué cambios habrá en la temperatura? Explique.
- (c) Si el termostato se reprograma para producir una temperatura  $H(t) = T(t) - 1$ , ¿qué cambios habrá en la temperatura? Explique.



94.

**¿CÓMO LO VE?** El agua fluye a una vasija de 30 centímetros de altura a velocidad constante, llenándola en 5 segundos. Utilice esta información y la forma de la vasija que se muestra en la figura para responder a las siguientes preguntas, si  $d$  es la profundidad del agua en centímetros y  $t$  es el tiempo en segundos (vea la figura).



- (a) Explique por qué  $d$  es una función de  $t$ .
- (b) Determine el dominio y el rango de dicha función.
- (c) Trace una posible gráfica de la función.
- (d) Use la gráfica del inciso (c) para calcular  $d(4)$ . ¿Qué representa esto?

95. **Mc**  
dio  
(Fu  
Aí  
Sup  
en :

(a)  
(b)  
96.  
La  
aut  
apr  
H(  
dor  
cid  
en :

(a)  
(b)

97. **Pié**  
zar  
luta  
98. **Re**  
rep  
p<sub>2</sub>(  
cio  
Exj

99. **De**  
f(x)

100. **D**  
f

101. **D**  
ci

102. **D**  
ir

103. **L**  
co  
di  
co

95. **Modelar datos** En la tabla se muestra el número promedio de acres por granja en Estados Unidos para ciertos años. (Fuente: U.S. Department of Agriculture.)

Año	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Superficie en acres	297	374	429	460	436	418

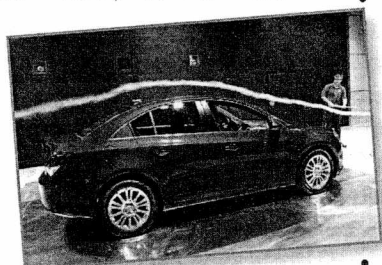
- (a) Represente gráficamente los datos, donde  $A$  es la superficie en acres y  $t$  es el tiempo en años, donde  $t = 5$  corresponde a 1960. Trace a mano una curva que aproxime los datos.
- (b) Utilice la curva del inciso (a) para calcular  $A(25)$ .

96. **Aerodinámica automotriz**

La potencia  $H$ , en caballos de fuerza, que requiere cierto automóvil para vencer la resistencia del viento está dada aproximadamente por

$$H(x) = 0.002x^2 + 0.005x - 0.029, \quad 10 \leq x \leq 100$$

donde  $x$  es la velocidad del automóvil en millas por hora.



- (a) Represente  $H$  con una herramienta de graficación.

- (b) Reescriba la función de potencia de tal modo que  $x$  represente la velocidad en kilómetros por hora. [Encuentre  $H(x/1.6)$ .]

97. **Piénselo** Escriba la función  $f(x) = |x| + |x - 2|$  sin utilizar los signos de valor absoluto (puede repasar el valor absoluto en el apéndice C).

98. **Redacción** Utilice una herramienta de graficación para representar las funciones polinomiales  $p_1(x) = x^3 - x + 1$  y  $p_2(x) = x^3 - x$ . ¿Cuántos ceros tiene cada una de estas funciones? ¿Existe algún polinomio cúbico que no tenga ceros? Explique su respuesta.

99. **Demostración** Demuestre que la función es impar.

$$f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + \dots + a_3x^3 + a_1x$$

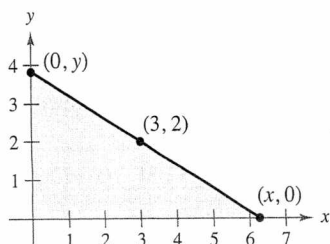
100. **Demostración** Demuestre que la función es par.

$$f(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \dots + a_2x^2 + a_0$$

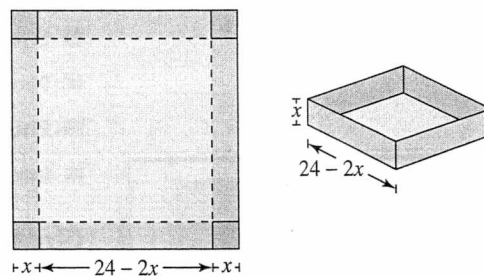
101. **Demostración** Demuestre que el producto de dos funciones pares (o impares) es una función par.

102. **Demostración** Demuestre que el producto de una función impar y una par es una función impar.

103. **Longitud** Una recta que pasa por el punto  $(3, 2)$  forma con los ejes  $x$  y  $y$  un triángulo rectángulo en el primer cuadrante (vea la figura). Expresar la longitud  $L$  de la hipotenusa como función de  $x$ .



104. **Volumen** Se va a construir una caja abierta (sin tapa) de volumen máximo con una pieza cuadrada de material de 24 centímetros de lado, recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando los lados hacia arriba (vea la figura).



- (a) Expresar el volumen  $V$  como función de  $x$ , que es la longitud de las esquinas cuadradas. ¿Cuál es el dominio de la función?
- (b) Utilice una herramienta de graficación para representar la función volumen y aproximar las dimensiones de la caja que producen el volumen máximo.
- (c) Utilice la función *table* de la herramienta de graficación para verificar la respuesta del inciso (b). (Se muestran los dos primeros renglones de la tabla.)

Altura, $x$	Longitud y altura	Volumen, $V$
1	$24 - 2(1)$	$1[24 - 2(1)]^2 = 484$
2	$24 - 2(2)$	$2[24 - 2(2)]^2 = 800$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 105-110, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

- 105. Si  $f(a) = f(b)$ , entonces  $a = b$ .
- 106. Una recta vertical puede cortar la gráfica de una función a lo más una vez.
- 107. Si  $f(x) = f(-x)$  para todo  $x$  en el dominio de  $f$ , entonces la gráfica de  $f$  es simétrica con respecto al eje  $y$ .
- 108. Si  $f$  es una función, entonces  $f(ax) = af(x)$ .
- 109. La gráfica de una función de  $x$  no puede tener simetría respecto al eje  $x$ .
- 110. Si el dominio de una función consta de un solo número, entonces su rango debe consistir también en un solo número.

**DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM**

- 111. Sea  $R$  la región constituida por los puntos  $(x, y)$  del plano cartesiano que satisfacen tanto  $|x| - |y| \leq 1$  como  $|y| \leq 1$ . Trace la región  $R$  y calcule su área.
- 112. Considere un polinomio  $f(x)$  con coeficientes reales que tienen la propiedad  $f(g(x)) = g(f(x))$  para todo polinomio  $g(x)$  con coeficientes reales. Determine y demuestre la naturaleza de  $f(x)$ .

Estos problemas fueron preparados por el Committee on the Putnam Prize Competition. ©The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

# 2.2 Gráficas y modelos



**RENÉ DESCARTES (1596–1650)**

Descartes hizo muchas contribuciones a la filosofía, la ciencia y las matemáticas. En su libro *La Géométrie*, publicado en 1637, describió la idea de representar puntos del plano por medio de pares de números reales y curvas en el plano mediante ecuaciones.

Ver [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para leer más acerca de esta biografía.

- Dibujar la gráfica de una ecuación.
- Encontrar las intersecciones de la gráfica.
- Probar la simetría de una gráfica respecto a un eje y al origen.
- Encontrar los puntos de intersección de dos gráficas.
- Interpretar los modelos matemáticos con los datos de la vida real.

## Gráfica de una ecuación

En 1637, el matemático francés René Descartes revolucionó el estudio de las matemáticas mediante la combinación de sus dos principales campos: álgebra y geometría. Con el plano de coordenadas de Descartes, los conceptos geométricos se podrían formular analíticamente y los conceptos algebraicos se podrían ver de forma gráfica. El poder de este enfoque era tal, que a un siglo de su introducción, mucho del cálculo ya se había desarrollado. Se puede seguir el mismo método en su estudio del cálculo. Es decir, mediante la visualización de cálculo desde múltiples perspectivas, en forma *gráfica*, *analítica* y *numérica*, aumentará su comprensión de los conceptos fundamentales.

Considere la ecuación  $3x + y = 7$ . El punto  $(2, 1)$  es un **punto solución** de la ecuación, puesto que esta última se cumple (es cierto) cuando se sustituye  $x$  por 2 y  $y$  por 1. Esta ecuación tiene muchas otras soluciones, como  $(1, 4)$  y  $(0, 7)$ , para encontrarlas de manera sistemática despeje  $y$  de la ecuación inicial.

$$y = 7 - 3x$$

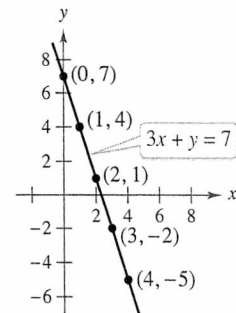
Método analítico

Ahora, se construye una **tabla de valores** dando valores de  $x$ .

$x$	0	1	2	3	4
$y$	7	4	1	-2	-5

Método numérico

A partir de la tabla, se puede ver que  $(0, 7)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(3, -2)$  y  $(4, -5)$  son soluciones de la ecuación inicial  $3x + y = 7$ . Al igual que muchas ecuaciones, esta tiene una cantidad infinita de soluciones. El conjunto de todos los puntos de solución constituye la **gráfica** de la ecuación, como se ilustra en la figura 2.11. Observe que aunque se refiera al dibujo de la figura 2.11 como la gráfica de  $3x + y = 7$ , en realidad solo representa una *porción* de la misma. La gráfica completa se extendería fuera de la página.



Método gráfico:  $3x + y = 7$   
**Figura 2.11**

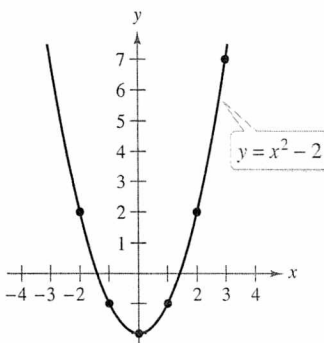
En este curso se estudiarán varias técnicas para la representación gráfica. La más simple consiste en dibujar puntos hasta que la forma esencial de la gráfica sea evidente.

### EJEMPLO 1

### Dibujar una gráfica mediante el trazado de puntos

Para dibujar la gráfica de  $y = x^2 - 2$ , primero construya una tabla de valores. A continuación, dibuje los puntos dados en la tabla. Después, una los puntos con una *curva suave*, como se muestra en la figura 2.12. Esta gráfica es una **parábola**.

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$y$	2	-1	-2	-1	2	7



La parábola  $y = x^2 - 2$   
**Figura 2.12**

**Exp**

**Comp gráfica**  
una h  
para r  
siguie  
caso,  
repre  
caract  
gráfic

- a.  $y :$
- b.  $y :$
- c.  $y :$
- d.  $y :$
- e.  $y :$
- f.  $y :$

Resol  
solo r  
llevar  
de "ir  
y revi  
aspec  
plante  
ejem  
gráfic  
es así  
que s  
estud  
analít  
ayuda  
de ec

Uno de los inconvenientes de la representación mediante el trazado de puntos radica en que la obtención de una idea confiable de la forma de una gráfica puede exigir que se marque un gran número de puntos. Utilizando solo unos pocos, se corre el riesgo de obtener una visión deformada de la gráfica. Por ejemplo, suponiendo que para dibujar la gráfica de

$$y = \frac{1}{30}x(39 - 10x^2 + x^4)$$

se han marcado solo cinco puntos:

$$(-3, -3), (-1, -1), (0, 0), (1, 1) \text{ y } (3, 3)$$

como se muestra en la figura 2.13(a). A partir de estos cinco puntos se podría concluir que la gráfica es una recta. Sin embargo, esto no es correcto. Trazando varios puntos más, se puede ver que la gráfica es más complicada, como se observa en la figura 2.13(b).

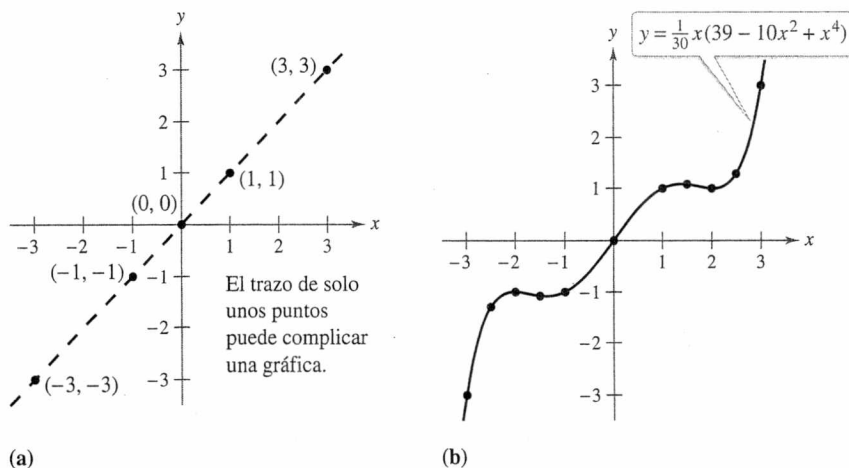


Figura 2.13

### Exploración

**Comparación de los métodos gráfico y analítico** Utilice una herramienta de graficación para representar cada una de las siguientes ecuaciones. En cada caso, encuentre una ventana de representación que muestre las características principales de la gráfica.

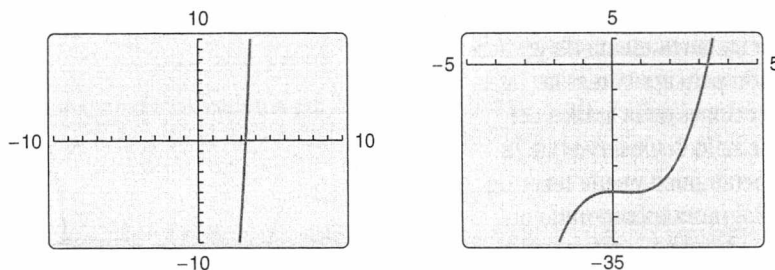
- a.  $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$
- b.  $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 25$
- c.  $y = -x^3 - 3x^2 + 20x + 5$
- d.  $y = 3x^3 - 40x^2 + 50x - 45$
- e.  $y = -(x + 12)^3$
- f.  $y = (x - 2)(x - 4)(x - 6)$

Resolver este problema usando solo métodos gráficos conllevaría una estrategia simple de "intuición, comprobación y revisión". ¿Qué tipo de aspectos podría involucrar un planteamiento analítico? Por ejemplo, ¿tiene simetrías la gráfica? ¿Tiene inflexiones? Si es así, ¿dónde están? A medida que se avance por este texto, se estudiarán muchas herramientas analíticas nuevas que serán de ayuda para analizar las gráficas de ecuaciones como estas.

► **TECNOLOGÍA** La tecnología moderna ha simplificado el dibujo de las gráficas. No obstante, incluso recurriendo a ella es posible desfigurar una gráfica. Por ejemplo, cada una de las pantallas de la herramienta de graficación\* de la figura 2.14 muestran una porción de la gráfica de

$$y = x^3 - x^2 - 25.$$

En la pantalla de la izquierda puede suponer que la gráfica es una recta. Sin embargo, la de la derecha muestra que no es así. Entonces, cuando dibuja una gráfica, ya sea a mano o mediante una herramienta de graficación, debe tener en cuenta que diferentes ventanas de representación pueden dar lugar a imágenes muy distintas a las de la gráfica. Al elegir una ventana, la clave está en mostrar una imagen de la gráfica que se adecue al contexto del problema.



Visualizaciones en la pantalla de una herramienta de graficación de  $y = x^3 - x^2 - 25$ .  
Figura 2.14

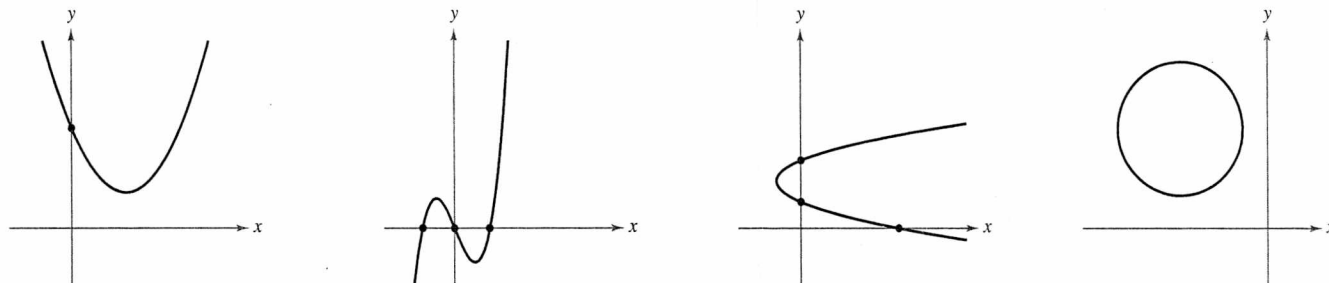
\*En este libro, el término *herramienta de graficación* se refiere a una calculadora graficadora o a una herramienta graficadora como *Maple*, *Mathematica* o a la calculadora *TI-Nspire*.

.....▷ **Intersecciones de una gráfica**

• **COMENTARIO** Algunos textos denominan intersección  $x$  a la coordenada  $x$  del punto  $(a, 0)$  en un lugar del propio punto. A menos que sea necesario distinguirlos, se usará el término *intersección* para denotar tanto al punto de intersección con el eje  $x$  como a su abscisa.

Dos tipos de puntos de solución útiles al representar gráficamente una ecuación son aquellos en los que la coordenada  $x$  o  $y$  es cero. Tales puntos se denominan **intersecciones con los ejes**, porque son los puntos en los que la gráfica corta (hace intersección con) el eje  $x$  o eje  $y$ . Un punto del tipo  $(a, 0)$  es una **intersección en  $x$**  de la gráfica de una ecuación si es un punto solución de esta. Para determinar las intersecciones en  $x$  de una gráfica, iguale  $y$  a cero y despeje  $x$  de la ecuación resultante. De manera análoga, un punto del tipo  $(0, b)$  es una **intersección en  $y$**  de la gráfica de una ecuación si es un punto solución de la misma. Para encontrar las intersecciones en  $y$  de una gráfica, iguale  $x$  a cero y despeje  $y$  de la ecuación resultante.

Es posible que un gráfico no carezca de intersecciones con los ejes, o que presente varias de ellas. Por ejemplo, considere las cuatro gráficas de la figura 2.15.



No hay intersecciones con el eje  $x$   
Una intersección con el eje  $y$

Tres intersecciones con el eje  $x$   
Una intersección con el eje  $y$

Una intersección con el eje  $y$   
Dos intersecciones con el eje  $x$

No hay intersecciones

**Figura 2.15**

**EJEMPLO 2 Encontrar las intersecciones  $x$  y  $y$**

Encuentre las intersecciones con los ejes  $x$  y  $y$  en la gráfica de  $y = x^3 - 4x$ .

**Solución** Para determinar las intersecciones en  $x$ , haga  $y$  igual a cero y despeje  $x$ .

$$\begin{aligned} x^3 - 4x &= 0 && \text{Igualé a cero.} \\ x(x - 2)(x + 2) &= 0 && \text{Factorice.} \\ x = 0, 2, \text{ o } -2 &&& \text{Despeje } x. \end{aligned}$$

Puesto que esta ecuación admite tres soluciones, puede concluir que la gráfica tiene tres intersecciones en  $x$ :

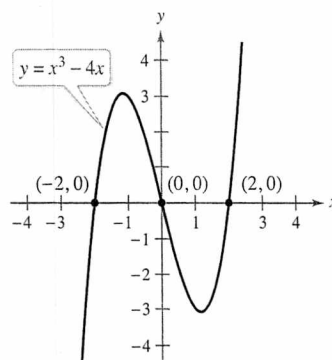
$$(0, 0), (2, 0) \text{ y } (-2, 0). \quad \text{Intersecciones en } x$$

Para encontrar las intersecciones en  $y$ , iguale  $x$  a cero. Resulta entonces  $y = 0$ . Por tanto, la intersección en  $y$  es

$$(0, 0). \quad \text{Intersección en } y$$

(Vea la figura 2.16.)

▷ **TECNOLOGÍA** En el ejemplo 2 utilice un método analítico para determinar intersecciones con los ejes. Cuando no es posible utilizar un método analítico, puede recurrir a métodos gráficos buscando los puntos donde la gráfica toca los ejes. Utilice la función *trace* de su herramienta de graficación para aproximar las intersecciones de la gráfica del ejemplo 2. Observe que la herramienta puede tener un programa incorporado que puede encontrar las intersecciones de la gráfica. (Su utilidad puede llamar a esto función *raíz* o *cero*.) Si es así, utilice el programa para encontrar las intersecciones de la gráfica de la ecuación en el ejemplo 2.



Intersecciones de una gráfica.  
**Figura 2.16**

$(-x, y)$

Simetría respecto

$(-x, -y)$

Figura

-2

$(-1, -$

Simetría  
Figura

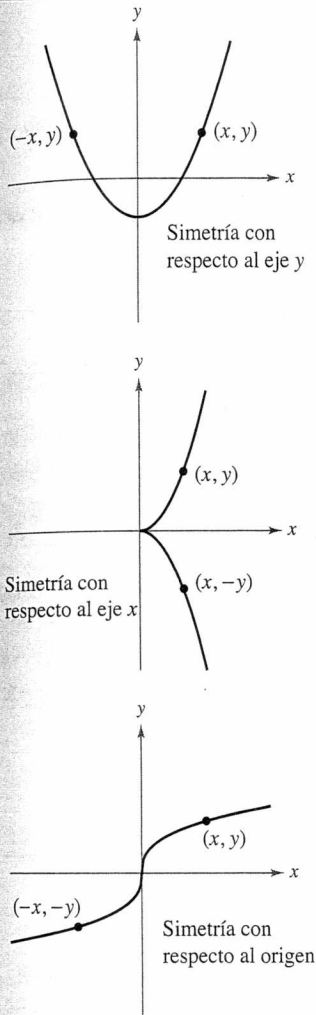
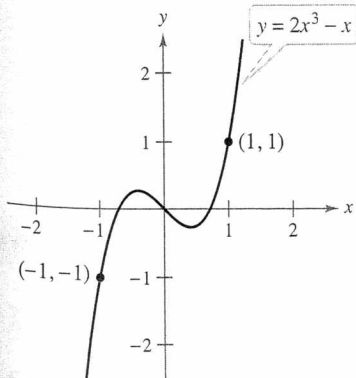


Figura 2.17

Simetría con respecto al origen.  
Figura 2.18

## Simetría de una gráfica

Es útil conocer la simetría de una gráfica antes de intentar trazarla, puesto que solo se necesitarán la mitad de los puntos para hacerlo. Los tres tipos siguientes de simetría pueden servir de ayuda para dibujar la gráfica de una ecuación (vea la figura 2.17).

1. Una gráfica es **simétrica respecto al eje y** si, para cada punto  $(x, y)$  de la gráfica, el punto  $(-x, y)$  también pertenece a la gráfica. Esto significa que la porción de la gráfica situada a la izquierda del eje y es la imagen especular de la derecha de dicho eje.
2. Una gráfica es **simétrica respecto al eje x** si, para cada punto  $(x, y)$  de la gráfica, el punto  $(x, -y)$  también pertenece a la gráfica. Esto significa que la porción situada sobre el eje x del eje es la imagen especular de la situada bajo el mismo eje.
3. Una gráfica es **simétrica respecto al origen** si, para cada punto  $(x, y)$  de la gráfica, el mismo punto  $(-x, -y)$  también pertenece a la gráfica. Esto significa que la gráfica permanece inalterada si se efectúa una rotación de  $180^\circ$  respecto al origen.

### Criterios de simetría

1. La gráfica de una ecuación en  $x$  y  $y$  es simétrica respecto al eje y si al sustituir  $x$  por  $-x$  en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente.
2. La gráfica de una ecuación en  $x$  y  $y$  es simétrica respecto al eje x si al sustituir  $y$  por  $-y$  en la ecuación resulta una ecuación equivalente.
3. La gráfica de una ecuación en  $x$  y  $y$  es simétrica con respecto al origen si al sustituir  $x$  por  $-x$  y  $y$  por  $-y$  en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente.

La gráfica de un polinomio es simétrica respecto al eje y si cada uno de los términos tiene exponente par (o es una constante). Por ejemplo, la gráfica de

$$y = 2x^4 - x^2 + 2$$

es simétrica respecto al eje y. La gráfica de un polinomio es simétrica respecto al origen si cada uno de los términos tiene exponente impar, como se ilustra en el ejemplo 3.

### EJEMPLO 3

### Comprobar la simetría

Verifique si la gráfica de  $y = 2x^3 - x$  es simétrica respecto (a) al eje y y (b) respecto al origen.

#### Solución

- a.  $y = 2x^3 - x$                       Escriba la ecuación original.  
 $y = 2(-x)^3 - (-x)$                       Sustituya  $x$  por  $-x$ .  
 $y = -2x^3 + x$                       Simplifique. No es una ecuación equivalente.

Debido a que la sustitución  $x$  por  $-x$  no produce una ecuación equivalente, se puede concluir que la gráfica de  $y = 2x^3 - x$  no es simétrica con respecto al eje.

- b.  $y = 2x^3 - x$                       Escriba la ecuación original.  
 $-y = 2(-x)^3 - (-x)$                       Sustituya  $x$  por  $-x$  y  $y$  por  $-y$ .  
 $-y = -2x^3 + x$                       Simplifique.  
 $y = 2x^3 - x$                       Ecuación equivalente

Puesto que la sustitución  $x$  por  $-x$  y  $y$  por  $-y$  produce una ecuación equivalente, puede concluir que la gráfica de  $y = 2x^3 - x$  es simétrica con respecto al origen, como se muestra en la figura 2.18.

## EJEMPLO 4

## Usar las intersecciones y las simetrías para representar una gráfica

⋯▶ Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Dibuje la gráfica de  $x - y^2 = 1$ .

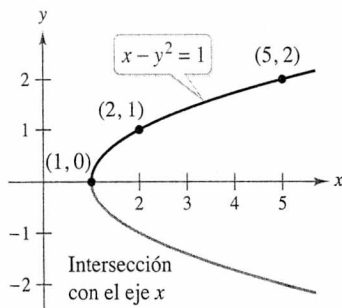


Figura 2.19

**Solución** La gráfica es simétrica respecto al eje  $x$ , porque al sustituir  $y$  por  $-y$  se obtiene una ecuación equivalente

$$x - y^2 = 1$$

Escriba la ecuación original.

$$x - (-y)^2 = 1$$

Sustituya  $y$  por  $-y$ .

$$x - y^2 = 1$$

Ecuación equivalente

Esto significa que la porción de la gráfica situada bajo el eje  $x$  es una imagen especular de la porción situada sobre el eje. Para dibujar la gráfica, primero se grafica la intersección con el eje  $x$  y la porción sobre el eje  $x$ . Después se refleja el dibujo en el eje  $x$  y se obtiene la gráfica completa, como se muestra en la figura 2.19.

▶ **TECNOLOGÍA** Las herramientas de graficación están diseñadas para dibujar con mayor facilidad ecuaciones en las que  $y$  está en función de  $x$  (vea la definición de **función**). Para representar otros tipos de ecuación, es necesario dividir la gráfica en dos o más partes, o bien utilizar un modo gráfico diferente. Por ejemplo, para graficar la gráfica de la ecuación del ejemplo 4, se puede dividir en dos partes.

$$y_1 = \sqrt{x - 1}$$

Porción superior de la gráfica

$$y_2 = -\sqrt{x - 1}$$

Porción inferior de la gráfica

## Puntos de intersección

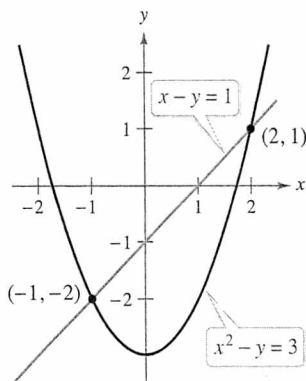
Se llama **punto de intersección** de las gráficas de dos ecuaciones a todo punto que satisfaga ambas ecuaciones. Los puntos de intersección de dos gráficas se determinan al resolver las ecuaciones de manera simultánea.

## EJEMPLO 5

## Determinar los puntos de intersección

Calcule los puntos de intersección de las gráficas de

$$x^2 - y = 3 \quad \text{y} \quad x - y = 1.$$



Dos puntos de intersección.

Figura 2.20

**Solución** Comience por representar las gráficas de ambas ecuaciones en el mismo sistema de coordenadas rectangulares, como se muestra en la figura 2.20. De la figura, parece que las gráficas tienen dos puntos de intersección. Para determinarlos, puede proceder como sigue.

$$y = x^2 - 3$$

Despeje  $y$  de la primera ecuación.

$$y = x - 1$$

Despeje  $y$  de la segunda ecuación.

$$x^2 - 3 = x - 1$$

Igual los valores obtenidos de  $y$ .

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Escriba la ecuación en la forma general.

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

Factorice.

$$x = 2 \text{ o } -1$$

Despeje  $x$ .

Los valores correspondientes de  $y$  se obtienen sustituyendo  $x = 2$  y  $x = -1$  en cualquiera de las ecuaciones originales. Resultan así los dos puntos de intersección:

$$(2, 1) \quad \text{y} \quad (-1, -2).$$

Puntos de intersección

Se puede verificar los puntos de intersección del ejemplo 5 sustituyéndolos *tanto* en la ecuación original como usando la función de *intersección* de la herramienta de graficación.

## Modelos matemáticos

Al aplicar las matemáticas en la vida real, con frecuencia se usan ecuaciones como **modelos matemáticos**. Si desarrolla un modelo matemático con el fin de representar datos reales, se debe esforzar para alcanzar dos objetivos (a menudo contradictorios): precisión y sencillez. Es decir, el modelo deberá ser lo suficientemente simple como para poder manejarlo, pero también preciso como para producir resultados significativos.

### EJEMPLO 6

### Comparar dos modelos matemáticos

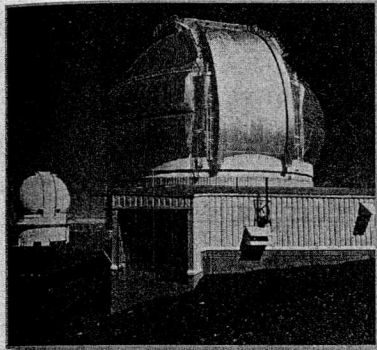
El observatorio de Mauna Loa, Hawái, registra la concentración de dióxido de carbono y (en partes por millón) en la atmósfera terrestre. En la figura 2.21 se muestran los registros correspondientes al mes de enero de varios años. En el número de julio de 1990 de *Scientific American*, se utilizaron estos para pronosticar el nivel de dióxido de carbono en la atmósfera terrestre en el año 2035, utilizando el modelo cuadrático:

$$y = 0.018t^2 + 0.70t + 316.2 \quad \text{Modelo cuadrático para los datos de 1960-1990}$$

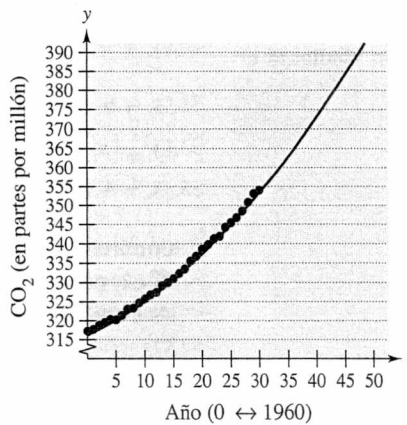
donde  $t = 0$  representa a 1960, como se muestra en la figura 2.21(a). Los datos mostrados en la figura 2.11(b) representan los años 1980 hasta 2010 y se pueden modelar por

$$y = 1.68t + 303.5 \quad \text{Modelo lineal para los datos de 1980-2010}$$

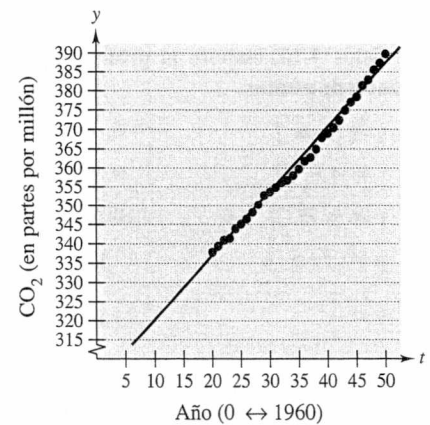
donde  $t = 0$  representa a 1960. ¿Cuál fue el pronóstico dado en el artículo de *Scientific American* de 1990? Dados los datos más recientes de los años 1990 a 2010, ¿parece exacta esa predicción para el año 2035?



El observatorio de Mauna Loa en Hawái ha estado monitoreando el aumento de la concentración de dióxido de carbono en la atmósfera de la Tierra desde 1958.



(a)



(b)

Figura 2.21

**Solución** Para responder a la primera pregunta, sustituya  $t = 75$  (para el año 2035) en el modelo cuadrático.

$$y = 0.018(75)^2 + 0.70(75) + 316.2 = 469.95 \quad \text{Modelo cuadrático}$$

De tal manera, el pronóstico establecido en el artículo de la revista *Scientific American* fue que la concentración de dióxido de carbono en la atmósfera terrestre alcanzaría alrededor de 470 partes por millón en el año 2035. Utilizando el modelo lineal para los datos de 1980 a 2010, la predicción para el año 2035 es

$$y = 1.68(75) + 303.5 = 429.5. \quad \text{Modelo lineal}$$

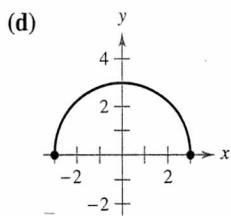
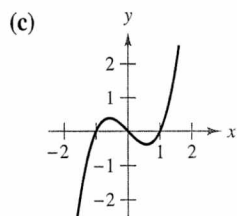
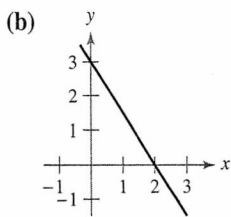
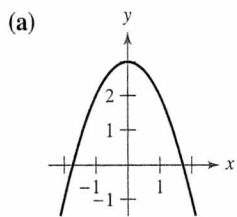
Por lo tanto, de acuerdo con el modelo lineal para los años 1980 a 2010, parece que el pronóstico de 1990 fue demasiado elevado.

Los modelos del ejemplo 6 se desarrollaron utilizando un procedimiento llamado *ajuste de mínimos cuadrados*. El modelo lineal tiene una correlación dada por  $r^2 = 0.997$  y el modelo cuadrático  $r^2 = 0.994$ , respectivamente. Cuanto más próximo es  $r^2$  a 1, “mejor” es el modelo.

# 2.2 Ejercicios

Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Correspondencia** En los ejercicios 1-4, relacione cada ecuación con su gráfica. [Las gráficas están etiquetadas (a), (b), (c) y (d).]



1.  $y = -\frac{3}{2}x + 3$

2.  $y = \sqrt{9 - x^2}$

3.  $y = 3 - x^2$

4.  $y = x^3 - x$

**Elaborar una gráfica mediante puntos de trazado** En los ejercicios 5-14, elabore la gráfica de la ecuación mediante el trazado de puntos.

5.  $y = \frac{1}{2}x + 2$

6.  $y = 5 - 2x$

7.  $y = 4 - x^2$

8.  $y = (x - 3)^2$

9.  $y = |x + 2|$

10.  $y = |x| - 1$

11.  $y = \sqrt{x} - 6$

12.  $y = \sqrt{x + 2}$

13.  $y = \frac{3}{x}$

14.  $y = \frac{1}{x + 2}$

**Solucionar puntos de aproximación** En los ejercicios 15 y 16, utilice una herramienta de graficación para representar la ecuación. Desplace el cursor a lo largo de la curva para determinar de manera aproximada la coordenada desconocida de cada punto solución, con una precisión de dos decimales.

15.  $y = \sqrt{5 - x}$

16.  $y = x^5 - 5x$

(a) (2, y)

(a) (-0.5, y)

(b) (x, 3)

(b) (x, -4)

**Encontrar la intersección** En los ejercicios 17-26, encuentre las intersecciones.

17.  $y = 2x - 5$

18.  $y = 4x^2 + 3$

19.  $y = x^2 + x - 2$

20.  $y^2 = x^3 - 4x$

21.  $y = x\sqrt{16 - x^2}$

22.  $y = (x - 1)\sqrt{x^2 + 1}$

23.  $y = \frac{2 - \sqrt{x}}{5x + 1}$

24.  $y = \frac{x^2 + 3x}{(3x + 1)^2}$

25.  $x^2y - x^2 + 4y = 0$

26.  $y = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

**Pruebas de simetría** En los ejercicios 27-38, busque si existe simetría respecto a cada uno de los ejes y respecto al origen.

27.  $y = x^2 - 6$

28.  $y = x^2 - x$

29.  $y^2 = x^3 - 8x$

30.  $y = x^3 + x$

31.  $xy = 4$

32.  $xy^2 = -10$

33.  $y = 4 - \sqrt{x + 3}$

34.  $xy - \sqrt{4 - x^2} = 0$

35.  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

36.  $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

37.  $y = |x^3 + x|$

38.  $|y| - x = 3$

**Utilizar una gráfica para dibujar la intersección y simetría** En los ejercicios 39-56, encuentre la intersección y pruebe la simetría. Después dibuje la gráfica de la ecuación.

39.  $y = 2 - 3x$

40.  $y = \frac{2}{3}x + 1$

41.  $y = 9 - x^2$

42.  $y = 2x^2 + x$

43.  $y = x^3 + 2$

44.  $y = x^3 - 4x$

45.  $y = x\sqrt{x + 5}$

46.  $y = \sqrt{25 - x^2}$

47.  $x = y^3$

48.  $x = y^2 - 4$

49.  $y = \frac{8}{x}$

50.  $y = \frac{10}{x^2 + 1}$

51.  $y = 6 - |x|$

52.  $y = |6 - x|$

53.  $y^2 - x = 9$

54.  $x^2 + 4y^2 = 4$

55.  $x + 3y^2 = 6$

56.  $3x - 4y^2 = 8$

**Encontrar los puntos de intersección** En los ejercicios 57-62, encuentre los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones.

57.  $x + y = 8$

58.  $3x - 2y = -4$

$4x - y = 7$

$4x + 2y = -10$

59.  $x^2 + y = 6$

60.  $x = 3 - y^2$

$x + y = 4$

$y = x - 1$

61.  $x^2 + y^2 = 5$

62.  $x^2 + y^2 = 25$

$x - y = 1$

$-3x + y = 15$

**Encontrar puntos de intersección** En los ejercicios 63-66, utilice una herramienta de graficación para encontrar los puntos de intersección de las gráficas. Verifique los resultados de manera analítica.

63.  $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$

64.  $y = x^4 - 2x^2 + 1$

$y = -x^2 + 3x - 1$

$y = 1 - x^2$

65.  $y = \sqrt{x + 6}$

$y = \sqrt{-x^2 - 4x}$

66.  $y = -|2x - 3| + 6$

$y = 6 - x$

El símbolo indica los ejercicios donde se pide utilizar la tecnología para graficar o un sistema de álgebra computacional. La resolución de los demás ejercicios también puede simplificarse mediante el uso de la tecnología adecuada.

67. Mo  
o PI  
Ofic

(a)

(b)

(c)

68. La t  
móv  
cion

Af

Nt

(a)

(b)

(c)

69. Pun  
alca  
de x  
x un

70. Alar  
de al  
mate

y =

dond  
(0.0C  
zar e  
facto

**67. Modelar datos** La tabla muestra el producto interno bruto o PIB (en billones de dólares), en determinados años. (Fuente: Oficina de Análisis Económico de E.U.)

Año	1980	1985	1990	1995
PIB	2.8	4.2	5.8	7.4

Año	2000	2005	2010
PIB	10.0	12.6	14.5

- (a) Utilice una herramienta de graficación para encontrar un modelo matemático de la forma  $y = at^2 + bt + c$  de los datos. En el modelo,  $y$  representa el PIB (en billones de dólares) y  $t$  representa el año, con  $t = 0$  correspondiendo a 1980.
- (b) Utilice una herramienta de graficación para trazar los datos y graficar el modelo. Compare los datos con el modelo.
- (c) Utilice el modelo para predecir el PIB en el año 2020.

**68. Modelar datos**

La tabla muestra el número de suscriptores de teléfonos móviles (en millones) en Estados Unidos para años seleccionados. (Fuente: CTIA—The Wireless)

Año	1995	1998	2001	2004	2007	2010
Número	34	69	128	182	255	303

- (a) Utilice la función de regresión de una herramienta de graficación y encuentre así un modelo matemático de la forma  $y = at^2 + bt + c$  de los datos. En este modelo,  $y$  representa el número de usuarios (en millones) y  $t$  representa el año, con  $t = 5$  correspondiendo a 1995.
- (b) Utilice una herramienta de graficación para trazar los datos y graficar el modelo. Compare los datos con el modelo.
- (c) Utilice el modelo para predecir el número de suscriptores de teléfonos móviles en Estados Unidos en el año 2020.



**69. Punto de equilibrio** Encuentre las ventas necesarias para alcanzar el equilibrio ( $R = C$ ), si el costo  $C$  de producción de  $x$  unidades es  $C = 2.04x + 5600$  y el ingreso  $R$  por vender  $x$  unidades es  $R = 3.29x$ .

**70. Alambre de cobre** La resistencia  $y$  en ohms de 1000 pies de alambre de cobre a  $77^\circ\text{F}$  se puede aproximar con el modelo matemático

$$y = \frac{10,770}{x^2} - 0.37, \quad 5 \leq x \leq 100$$

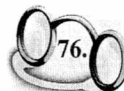
donde  $x$  es el diámetro del alambre en milésimas de pulgada (0.001 pulg.). Utilice una herramienta de graficación para trazar el modelo. Si se duplica el diámetro del alambre, ¿en qué factor aproximado varía la resistencia?

- 71. Usar puntos solución** ¿Para qué valores de  $k$  la gráfica de  $y = kx^3$  pasan por el punto?
  - (a) (1, 4)      (b) (-2, 1)      (c) (0, 0)      (d) (-1, -1)
- 72. Usar puntos solución** ¿Para qué valores de  $k$  la gráfica de  $y^2 = 4kx$  pasan por el punto?
  - (a) (1, 1)      (b) (2, 4)      (c) (0, 0)      (d) (3, 3)

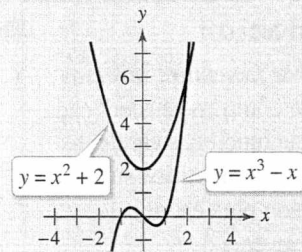
**DESARROLLO DE CONCEPTOS**

**Escritura de ecuaciones** En los ejercicios 73 y 74, escriba una ecuación cuya gráfica tenga la propiedad que se indica. (Puede existir más de una respuesta correcta.)

- 73.** La gráfica tiene intersecciones en  $x = -4$ ,  $x = 3$  y  $x = 8$ .
- 74.** La gráfica tiene intersecciones en  $x = -\frac{3}{2}$ ,  $x = 4$  y  $x = \frac{5}{2}$ .
- 75. Demostración**
  - (a) Demuestre que si una gráfica es simétrica con respecto al eje  $x$  y al eje  $y$ , entonces es simétrica con respecto al origen. Dé un ejemplo que demuestre que lo contrario no es cierto.
  - (b) Demuestre que si una gráfica es simétrica con respecto a cualquiera de los ejes y al origen, entonces es simétrica con respecto al otro eje.



**76. ¿CÓMO LO VE?** Utilice las gráficas de dos ecuaciones para contestar las siguientes preguntas.



- (a) ¿Cuáles son las intersecciones de cada ecuación?
- (b) Determine la simetría de cada ecuación.
- (c) Determine el punto de intersección de dos ecuaciones.

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 77-80, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o proporcione un ejemplo que demuestre que es falso.

- 77.** Si  $(-4, -5)$  es el punto en una gráfica que es simétrica con respecto al eje  $x$ , entonces  $(4, -5)$  también es un punto en dicha gráfica.
- 78.** Si  $(-4, -5)$  es el punto en una gráfica que es simétrica con respecto al eje  $y$ , entonces  $(4, -5)$  también es un punto en la gráfica.
- 79.** Si  $b^2 - 4ac > 0$  y  $a \neq 0$ , entonces la gráfica de  $y = ax^2 + bx + c$  tiene dos intersecciones  $x$ .
- 80.** Si  $b^2 - 4ac = 0$  y  $a \neq 0$ , entonces la gráfica de  $y = ax^2 + bx + c$  solo tiene una intersección con  $x$ .

# 2.3 Funciones inversas

- Comprobar que una función es la función inversa de otra función.
- Determinar si una función tiene una función inversa.
- Encontrar la derivada de una función inversa.

## Funciones inversas

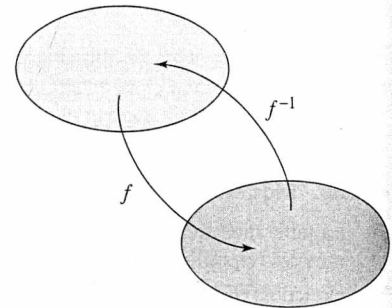
Recordemos de la sección 2.1 que una función puede ser representada por un conjunto de pares ordenados. Por ejemplo, la función  $f(x) = x + 3$  de  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  a  $B = \{4, 5, 6, 7\}$  se puede escribir como

$$f: \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7)\},$$

Intercambiando la primera y segunda coordenadas de cada par ordenado, se puede formar la función inversa de  $f$ . Esta función se denota por  $f^{-1}$ . Es una función de  $B$  a  $A$  y se puede escribir como

$$f^{-1}: \{(4, 1), (5, 2), (6, 3), (7, 4)\},$$

Observe que el dominio de  $f$  es igual al rango de  $f^{-1}$  y viceversa, como se muestra en la figura 2.22. Las funciones  $f$  y  $f^{-1}$  tienen el efecto de “deshacerse” la una a la otra. Es decir, cuando se forma la composición de  $f$  con  $f^{-1}$  o con la composición de  $f^{-1}$  con  $f$  se obtiene la función identidad.



Dominio de  $f =$  rango de  $f^{-1}$   
 Dominio de  $f^{-1} =$  rango de  $f$   
**Figura 2.22**

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

• **COMENTARIO** Aunque la notación utilizada para denotar una función inversa se parece a la notación exponencial, es un uso diferente de  $-1$  como un superíndice. Es decir, en general,

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}.$$

### Exploración

**Encontrar funciones inversas**  
 Explique cómo “deshacer” cada una de las funciones siguientes. A continuación, utilice su explicación para escribir la función inversa de  $f$ .

- a.  $f(x) = x - 5$
- b.  $f(x) = 6x$
- c.  $f(x) = \frac{x}{2}$
- d.  $f(x) = 3x + 2$
- e.  $f(x) = x^3$
- f.  $f(x) = 4(x - 2)$

Utilice un programa de graficación para trazar cada función y su inversa en el mismo “cuadrado” de la ventana de visualización. ¿Qué comentario se puede hacer sobre cada par de gráficas?

### Definición de la función inversa

Una función  $g$  es la **función inversa** de la función  $f$  cuando

$$f(g(x)) = x \text{ para cada } x \text{ en el dominio de } g$$

y

$$g(f(x)) = x \text{ para cada } x \text{ en el dominio de } f.$$

La función  $g$  se denota por  $f^{-1}$  (y se lee “inversa de  $f$ ”).

He aquí algunas observaciones importantes sobre las funciones inversas.

1. Si  $g$  es la función inversa de  $f$ , entonces  $f$  es la función inversa de  $g$ .
2. El dominio de  $f^{-1}$  es igual al rango de  $f$ , y el rango de  $f^{-1}$  es igual al dominio de  $f$ .
3. Una función no tiene que tener una función inversa, pero cuando la tiene, la función inversa es única.

Usted puede pensar en  $f^{-1}$  como que deshace lo hecho por  $f$ . Por ejemplo, la resta se puede utilizar para deshacer la suma, y la división se puede utilizar para deshacer la multiplicación. Así,

$$f(x) = x + c \quad \text{y} \quad f^{-1}(x) = x - c \quad \text{La resta se puede utilizar para deshacer la suma.}$$

son funciones inversas una de la otra y

$$f(x) = cx \quad \text{y} \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{c}, \quad c \neq 0 \quad \text{La división se puede utilizar para deshacer la multiplicación.}$$

son funciones inversas una de la otra.

**EJEMPLO 1**

**Comprobar funciones inversas**

Demuestre que las funciones son funciones inversas una de la otra.

$$f(x) = 2x^3 - 1 \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$$

**COMENTARIO** En el ejemplo 1, intente comparar verbalmente las funciones  $f$  y  $g$ . Para  $f$ : Primero eleve al cubo  $x$ , y después multiplique por 2, luego reste 1. Para  $g$ : Primero sume 1, después divida entre 2, luego tome la raíz cúbica. ¿Ve el “patrón de deshacer”?

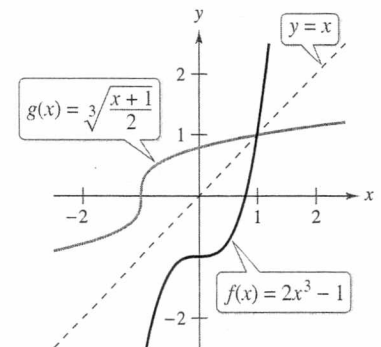
**Solución** Debido a que los dominios y rangos tanto de  $f$  como de  $g$  constan de todos los números reales, se puede concluir que existen dos funciones compuestas para todo  $x$ . La composición de  $f$  con  $g$  es

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)^3 - 1 \\ &= 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 \\ &= x + 1 - 1 \\ &= x. \end{aligned}$$

La composición de  $g$  con  $f$  es

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sqrt[3]{\frac{(2x^3 - 1) + 1}{2}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} \\ &= \sqrt[3]{x^3} \\ &= x. \end{aligned}$$

Ya que  $f(g(x)) = x$  y  $g(f(x)) = x$ , puede concluir que  $f$  y  $g$  son funciones inversas entre sí (vea la figura 2.23).



$f$  y  $g$  son funciones inversas una de la otra.

**Figura 2.23**

En la figura 2.23, las gráficas de  $f$  y  $g = f^{-1}$  parecen ser imágenes especulares entre sí respecto a la recta  $y = x$ . La gráfica de  $f^{-1}$  es una reflexión de la gráfica de  $f$  en la recta  $y = x$ . Esta idea se generaliza en el siguiente teorema.

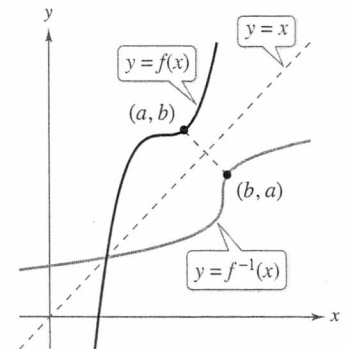
**TEOREMA 2.1 Propiedad reflexiva de las funciones inversas**

La gráfica de  $f$  contiene el punto  $(a, b)$  si y solo si el gráfico de  $f^{-1}$  contiene el punto  $(b, a)$ .

**Demostración** Si  $(a, b)$  está en la gráfica de  $f$ , entonces  $f(a) = b$ , y se puede escribir

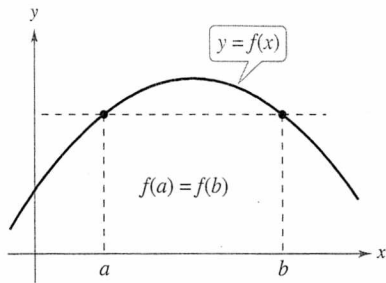
$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a.$$

Así,  $(b, a)$  está en la gráfica de  $f^{-1}$ , como se muestra en la figura 2.24. Un argumento similar demuestra el teorema en la otra dirección.



La gráfica de  $f^{-1}$  es una reflexión de la gráfica de  $f$  en la recta  $y = x$ .

**Figura 2.24**



Si una recta horizontal corta la gráfica de  $f$  dos veces, entonces  $f$  no es uno a uno.

Figura 2.25

## Existencia de una función inversa

No todas las funciones tienen una función inversa, y el teorema 2.1 sugiere una prueba gráfica para los que quieran hacerlo, la **prueba de recta horizontal** de una función inversa. Esta prueba indica que una función  $f$  tiene una función inversa si y solo si toda recta horizontal corta la gráfica de  $f$  a lo más una vez (vea la figura 2.25). El siguiente teorema establece formalmente la razón por la que la prueba de la recta horizontal es válida. (Se estudiará en la unidad 4 que una función es *estrictamente monótona* cuando es creciente en todo su dominio o decreciente en todo su dominio.)

### TEOREMA 2.2 Existencia de una función inversa

1. Una función  $f$  tiene una función inversa si y solo si es uno a uno.
2. Si  $f$  es estrictamente monótona en todo su dominio, entonces es uno a uno y por lo tanto tiene una función inversa.

**Demostración** La demostración de la primera parte del teorema se deja como ejercicio. Para demostrar la segunda parte del teorema, recordará de la sección 2.1 que  $f$  es uno a uno cuando para  $x_1$  y  $x_2$  en su dominio

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Ahora, elija  $x_1$  y  $x_2$  en el dominio de  $f$ . Si  $x_1 \neq x_2$ , entonces, ya que  $f$  es estrictamente monótona, se deduce que  $f(x_1) < f(x_2)$  o  $f(x_1) > f(x_2)$ . En cualquier caso,  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Por tanto,  $f$  es uno a uno sobre el intervalo.

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para el video de Bruce Edwards de esta demostración.

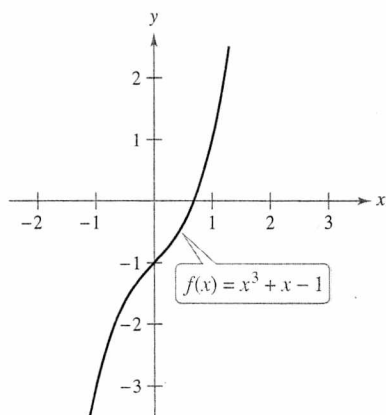
### EJEMPLO 2 Existencia de una función inversa

- a. A partir de la gráfica de  $f(x) = x^3 + x - 1$  mostrada en la figura 2.26(a), parece que  $f$  es creciente en todo su dominio. Para verificar esto, observe que la derivada,  $f'(x) = 3x^2 + 1$ , es positiva para todos los valores reales de  $x$ . Por tanto, es estrictamente monótona y debe tener una función inversa.
- b. A partir de la gráfica de  $f(x) = x^3 + x - 1$  mostrada en la figura 2.26(b), se puede ver que la función no pasa la prueba de la recta horizontal. En otras palabras, no es uno a uno. Por ejemplo, tiene el mismo valor cuando  $x = -1, 0$  y  $1$ .

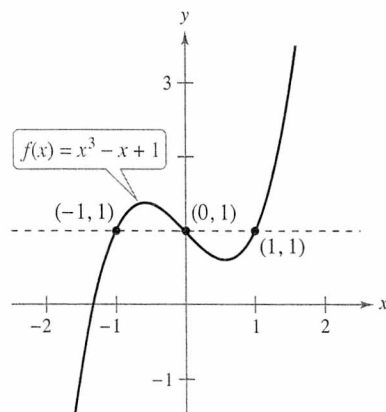
$$f(-1) = f(1) = f(0) = 1 \quad \text{No es uno a uno}$$

Por lo tanto, por el teorema 2.2,  $f$  no tiene una función inversa.

A menudo es más fácil demostrar que una función *tiene* una función inversa que encontrar la función inversa. Por ejemplo, sería difícil algebraicamente encontrar la función inversa de la función en el ejemplo 2(a).



(a) Debido a que  $f$  es creciente en todo su dominio, tiene una función inversa.

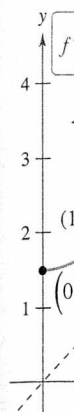


(b) Debido a que  $f$  no es uno a uno, no tiene una función inversa.

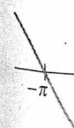
Figura 2.26

### DIRECTRICES PARA ENCONTRAR UNA FUNCIÓN INVERSA

1. Utilice el teorema 2.2 para determinar si la función  $y = f(x)$  tiene una función inversa.
2. Resuelva para  $x$  en función de  $y$ :  $x = g(y) = f^{-1}(y)$ .
3. Intercambie  $x$  y  $y$ . La ecuación resultante es  $y = f^{-1}(x)$ .
4. Defina el dominio de  $f^{-1}$  como el rango de  $f$ .
5. Verifique que  $f(f^{-1}(x)) = x$  y  $f^{-1}(f(x)) = x$ .



El dom de  $f$ .  
Figura



$(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$  es uno a uno.  
Figura

**EJEMPLO 3**

**Determinar la función inversa**

Encuentre la función inversa de  $f(x) = \sqrt{2x - 3}$ .

**Solución** A partir de la gráfica de  $f$  en la figura 2.27, observe que  $f$  es creciente en todo su dominio,  $[3/2, \infty)$ . Para verificar esto, observe que

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 3}}$$

es positiva en el dominio de  $f$ . Por lo tanto, es estrictamente monótona y debe tener una función inversa. Para encontrar una ecuación para la función inversa, haga  $y = f(x)$  y resuelva para  $x$  en términos de  $y$ .

$$\begin{aligned} \sqrt{2x - 3} &= y && \text{Haga } y = f(x). \\ 2x - 3 &= y^2 && \text{Eleve al cuadrado cada lado.} \\ x &= \frac{y^2 + 3}{2} && \text{Despeje } x. \\ y &= \frac{x^2 + 3}{2} && \text{Intercambie } x \text{ y } y. \\ f^{-1}(x) &= \frac{x^2 + 3}{2} && \text{Sustituya y por } f^{-1}(x). \end{aligned}$$

El dominio de  $f^{-1}$  es el rango de  $f$  que es  $[0, \infty)$ . Puede verificar este resultado, como se muestra.

$$f(f^{-1}(x)) = \sqrt{2\left(\frac{x^2 + 3}{2}\right) - 3} = \sqrt{x^2} = x, \quad x \geq 0$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{(\sqrt{2x - 3})^2 + 3}{2} = \frac{2x - 3 + 3}{2} = x, \quad x \geq \frac{3}{2}$$

El teorema 2.2 es útil en el siguiente tipo de problema. Se le da una función que no es uno a uno en su dominio. Al restringir el dominio a un intervalo en el que la función es estrictamente monótona, se puede concluir que la nueva función es uno a uno en el dominio restringido.

**EJEMPLO 4**

**Encontrar el perímetro de una elipse**

•••► Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Demuestre que la función seno

$$f(x) = \text{sen } x$$

no es uno a uno en toda la recta real. A continuación, demuestre que  $[-\pi/2, \pi/2]$  es el intervalo más grande, centrado en el origen, en el que  $f$  es estrictamente monótona.

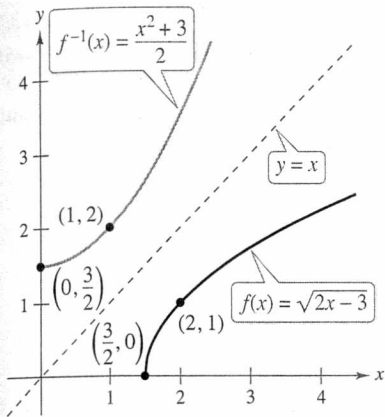
**Solución** Está claro que no es uno a uno, porque diferentes valores de  $x$  dan el mismo valor de  $y$ . Por ejemplo,

$$\text{sen}(0) = 0 = \text{sen}(\pi).$$

Por otra parte,  $f$  es cada vez mayor sobre el intervalo abierto  $(-\pi/2, \pi/2)$ , porque su derivada

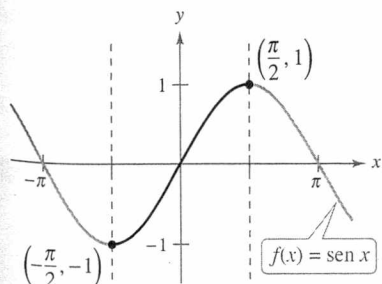
$$f'(x) = \text{cos } x$$

es positiva en el intervalo. Por último, debido a que los puntos finales de la izquierda y de la derecha corresponden a los extremos relativos de la función seno, se puede concluir que  $f$  es creciente en el intervalo cerrado  $[-\pi/2, \pi/2]$ , y que en cualquier intervalo mayor la función no es estrictamente monótona (vea figura 2.28).



El dominio de  $f^{-1}$ ,  $[0, \infty)$ , es el rango de  $f$ .

**Figura 2.27**



$f$  es uno a uno sobre el intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

**Figura 2.28**

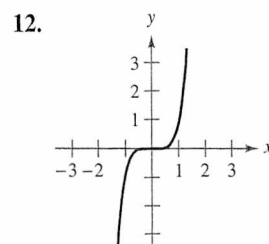
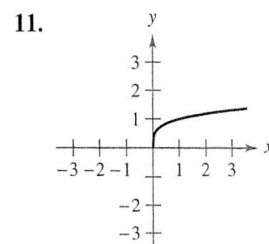
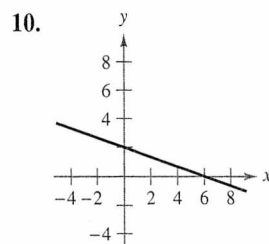
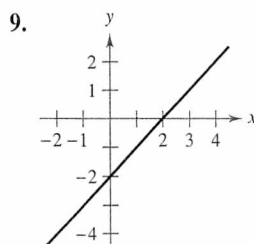
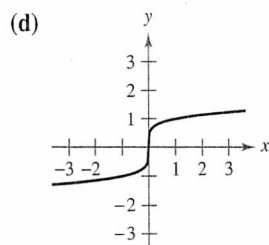
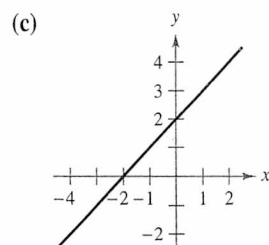
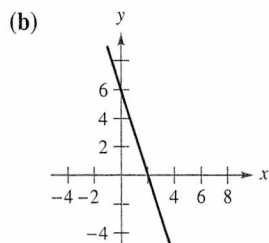
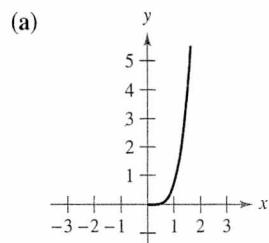
## 2.3 Ejercicios

Consulte [CalcChat.com](http://CalcChat.com) para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Verificar funciones inversas** En los ejercicios 1-8, demuestre que  $f$  y  $g$  son funciones inversas de forma (a) analítica y (b) gráficamente.

- $f(x) = 5x + 1$ ,  $g(x) = \frac{x-1}{5}$
- $f(x) = 3 - 4x$ ,  $g(x) = \frac{3-x}{4}$
- $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = \sqrt[3]{x}$
- $f(x) = 1 - x^3$ ,  $g(x) = \sqrt[3]{1-x}$
- $f(x) = \sqrt{x-4}$ ,  $g(x) = x^2 + 4$ ,  $x \geq 0$
- $f(x) = 16 - x^2$ ,  $x \geq 0$ ,  $g(x) = \sqrt{16-x}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ,  $x \geq 0$ ,  $g(x) = \frac{1-x}{x}$ ,  $0 < x \leq 1$

**Correspondencia** En los ejercicios 9-12, relacione la gráfica de la función con la gráfica de la función inversa. [Las gráficas de las funciones inversas están etiquetadas (a), (b), (c) y (d).]



**Usar la prueba de la recta horizontal** En los ejercicios 13-22, utilice un programa de graficación para representar gráficamente la función. A continuación, utilice la prueba de la recta horizontal para determinar si la función es uno a uno en todo su dominio y por lo tanto tiene una función inversa.

- $f(x) = \frac{3}{4}x + 6$
- $f(x) = 5x - 3$
- $f(\theta) = \sin \theta$
- $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 4}$
- $h(s) = \frac{1}{s-2} - 3$
- $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$
- $f(x) = \ln x$
- $f(x) = 5x\sqrt{x-1}$
- $g(x) = (x+5)^3$
- $h(x) = |x+4| - |x-4|$

**Determinar si una función tiene una función inversa** En los ejercicios 23-28, utilice la derivada para determinar si la función es estrictamente monótona en la totalidad de su dominio y por lo tanto tiene una función inversa.

- $f(x) = 2 - x - x^3$
- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$
- $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2$
- $f(x) = x^5 + 2x^3$
- $f(x) = \ln(x-3)$
- $f(x) = \cos \frac{3x}{2}$

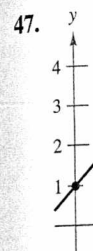
**Verificar que una función tiene una función inversa** Los ejercicios 29-34 muestran que  $f$  es estrictamente monótona sobre el intervalo dado y por lo tanto tiene una función inversa en ese intervalo.

- $f(x) = (x-4)^2$ ,  $[4, \infty)$
- $f(x) = |x+2|$ ,  $[-2, \infty)$
- $f(x) = \frac{4}{x^2}$ ,  $(0, \infty)$
- $f(x) = \cot x$ ,  $(0, \pi)$
- $f(x) = \cos x$ ,  $[0, \pi]$
- $f(x) = \sec x$ ,  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

**Determinar una función inversa** En los ejercicios 35-46, (a) encuentre la función inversa de  $f$ , (b) grafique  $f$  y  $f^{-1}$  en el mismo conjunto de ejes de coordenadas, (c) describa la relación entre las gráficas y (d) indique el dominio y el rango de  $f$  y  $f^{-1}$ .

- $f(x) = 2x - 3$
- $f(x) = 7 - 4x$
- $f(x) = x^5$
- $f(x) = x^3 - 1$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = x^2$ ,  $x \geq 0$
- $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ,  $0 \leq x \leq 2$
- $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ ,  $x \geq 2$
- $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$
- $f(x) = x^{2/3}$ ,  $x \geq 0$
- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+7}}$
- $f(x) = \frac{x+2}{x}$

Determi  
utilice la  
para los  
bla que s  
de  $f^{-1}$ . P  
MathGra



49. Cos  
tan  
(a)

(b)

(c)

(d)

50. Ter  
rep  
tem

(a)

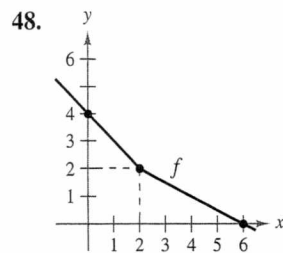
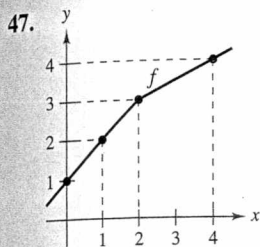
(b)

(c)

(d)

Compr  
51-54, c  
su inver

**Determinar una función inversa** En los ejercicios 47 y 48, utilice la gráfica de la función  $f$  para hacer una tabla de valores para los puntos dados. A continuación, haga una segunda tabla que se pueda utilizar para encontrar  $f^{-1}$  y trace la gráfica de  $f^{-1}$ . Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite [MathGraphs.com](http://MathGraphs.com).



49. **Costo** Usted necesita 50 libras de dos productos que cuestan \$1.25 y \$1.60 por libra.

- Verifique que el costo total es  $y = 1.25x + 1.60(50 - x)$ , donde  $x$  es el número de libras de la materia prima más barata.
- Encuentre la función inversa de la función de costo. ¿Qué representa cada variable en la función inversa?
- ¿Cuál es el dominio de la función inversa? Valide o explique su respuesta utilizando el contexto del problema.
- Determine el número de libras de la mercancía menos costosa que compró cuando el costo total es de \$73.

50. **Temperatura** La fórmula  $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ , donde  $F \geq -459.6$ , representa la temperatura Celsius  $C$  como una función de la temperatura Fahrenheit  $F$ .

- Encuentre la función inversa de  $C$ .
- ¿Qué representa la función inversa?
- ¿Cuál es el dominio de la función inversa? Valide o explique su respuesta utilizando el contexto del problema.
- La temperatura es  $22^\circ\text{C}$ , ¿cuál es la temperatura correspondiente en grados Fahrenheit?

**Comprobar que es una función uno a uno** En los ejercicios 51-54, determine si la función es uno a uno. Si es así, encuentre su inversa.

51.  $f(x) = \sqrt{x - 2}$

52.  $f(x) = -3$

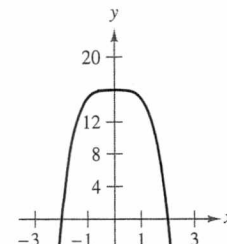
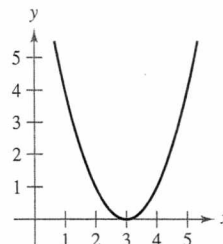
53.  $f(x) = |x - 2|, x \leq 2$

54.  $f(x) = ax + b, a \neq 0$

**Construir una función uno a uno** En los ejercicios 55-58, borre parte del dominio para que la función que queda sea uno a uno. Encuentre la función inversa de la función restante y dé el dominio de la función inversa. (Nota: Hay más de una respuesta correcta.)

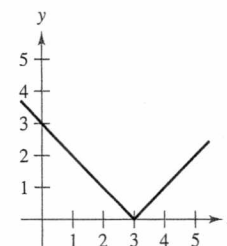
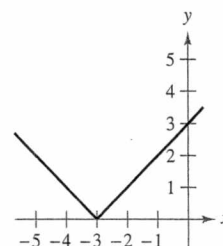
55.  $f(x) = (x - 3)^2$

56.  $f(x) = 16 - x^4$



57.  $f(x) = |x + 3|$

58.  $f(x) = |x - 3|$



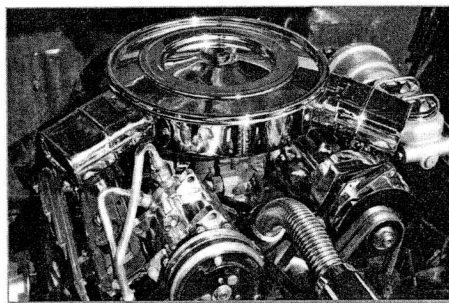
**Para pensar** En los ejercicios 59-62, decida si la función tiene una función inversa. Si es así, ¿cuál es la función inversa?

- $g(t)$  es el volumen de agua que ha pasado a través de una línea de agua  $t$  minutos después de abrir una válvula de control.
- $h(t)$  es la altura de la marea  $t$  horas después de la medianoche, donde  $0 \leq t \leq 24$ .
- $C(t)$  es el costo de una llamada de larga distancia de  $t$  minutos de duración.
- $A(r)$  es el área de un círculo de radio  $r$ .



## Límites y continuidad

- ..... 3.1 Introducción al cálculo a través del límite
- ..... 3.2 Límite de una función
- ..... 3.3 Propiedades de los límites y cálculo analítico de límites
- ..... 3.4 Continuidad y límites laterales
- ..... 3.5 Límites infinitos y asíntotas verticales
- ..... 3.6 Límites al infinito y asíntotas horizontales



Eficiencia del motor



Rapidez media



Gestión de inventarios



Objeto en caída libre



Deportes



Razón de cambio

Eficiencia del motor (Straight 8 Fotografía/Shutterstock.com); Rapidez media (WendellandCarolyn/iStockphoto.com); Objeto en caída libre (Kevin Fleming/Corbis); Razón de cambio (Ljupco Smokovski/Shutterstock.com); Deportes (Tony Bowler/Shutterstock.com); Gestión de inventarios (Christian Delbert/Shutterstock.com).

# 3.1 Introducción al cálculo a través del límite

- Comprender lo que es el cálculo y cómo se compara con el precálculo.
- Comprender que el problema de la recta tangente es básica para el cálculo.
- Comprender que el problema del área también es básico para el cálculo.



**COMENTARIO** A medida que vaya avanzando en este curso, le conviene recordar que el aprendizaje de cálculo es solo uno de sus fines. Su objetivo más importante es aprender a utilizar el cálculo para modelar y resolver problemas reales. En seguida se presentan algunas estrategias de resolución de problemas que pueden ayudar.

- Asegúrese de entender la pregunta. ¿Cuáles son los datos? ¿Qué se le pide encontrar?
- Conciba un plan. Existen muchos métodos que se pueden utilizar: hacer un esquema, resolver un problema sencillo, trabajar hacia atrás, dibujar un diagrama, usar recursos tecnológicos y muchos otros.
- Ejecute el plan. Asegúrese de que responde la pregunta. Enuncie la respuesta en palabras. Por ejemplo, en vez de escribir la respuesta como  $x = 4.6$ , sería mejor escribir: “El área de la zona es 4.6 metros cuadrados”.
- Revise el trabajo. ¿Tiene sentido la respuesta? ¿Existe alguna forma de comprobar lo razonable de su respuesta?

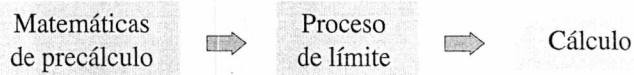
## ¿Qué es el cálculo?

El cálculo es la matemática de los cambios (velocidades y aceleraciones). También son objeto de cálculo rectas tangentes, pendientes, áreas, volúmenes, longitudes de arco, centroides, curvaturas y una gran variedad de conceptos que han permitido a científicos, ingenieros y economistas elaborar modelos para situaciones de la vida real.

Aunque las matemáticas del precálculo también tratan con velocidades, aceleraciones, rectas tangentes, pendientes y demás, existe una diferencia fundamental entre ellas y el cálculo. Mientras que las primeras son más estáticas, el cálculo es más dinámico. He aquí algunos ejemplos.

- Las matemáticas del precálculo permiten analizar un objeto que se mueve con velocidad constante. Sin embargo, para analizar la velocidad de un objeto sometido a aceleración es necesario recurrir al cálculo.
- Las matemáticas del precálculo permiten analizar la pendiente de una recta, pero para analizar la pendiente de una curva es necesario el cálculo.
- Las matemáticas del precálculo permiten analizar la curvatura constante de un círculo, pero para analizar la curvatura variable de una curva general es necesario el cálculo.
- Las matemáticas del precálculo permiten analizar el área de un rectángulo, pero para analizar el área bajo una curva general es necesario el cálculo.

Cada una de estas situaciones implica la misma estrategia general: la reformulación de las matemáticas del precálculo a través de un proceso de límite. De tal modo, una manera de responder a la pregunta “¿qué es el cálculo?”, consiste en decir que el cálculo es una “máquina de límites” que funciona en tres etapas. La primera la constituyen las matemáticas del precálculo, con conceptos como la pendiente de una recta o el área de un rectángulo. La segunda es el proceso de límite, y la tercera es la nueva formulación propia del cálculo en términos de derivadas e integrales.



Por desgracia, algunos estudiantes tratan de aprender cálculo como si se tratara de una simple recopilación de fórmulas nuevas. Si se reduce el estudio de cálculo a la memorización de fórmulas de derivación y de integración, su comprensión será deficiente, el estudiante perderá confianza en sí mismo y no obtendrá satisfacción.

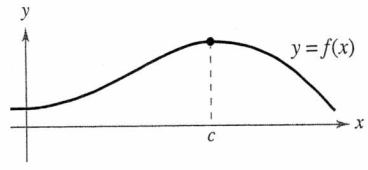
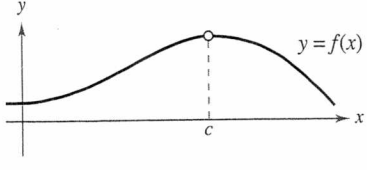
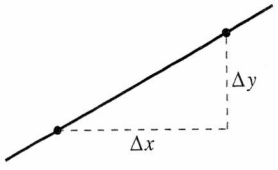
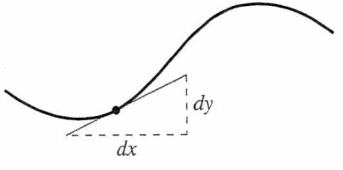
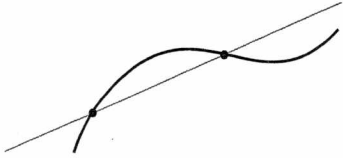

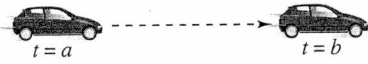

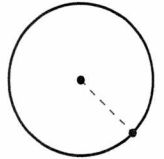

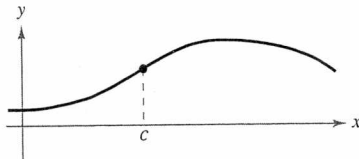
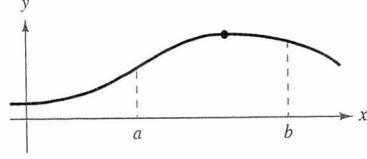
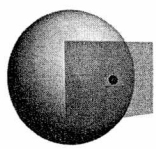
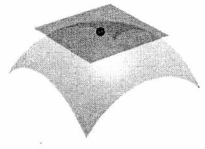
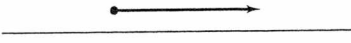

En las dos páginas siguientes se presentan algunos conceptos familiares del precálculo, listados junto con sus contrapartes del cálculo. A lo largo del texto se debe recordar que el objetivo es aprender a utilizar las fórmulas y técnicas del precálculo como fundamento para producir las fórmulas y técnicas más generales del cálculo. Quizás algunas de las “viejas fórmulas” de las páginas siguientes no resulten familiares para algunos estudiantes; repasaremos todas ellas.

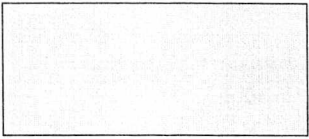
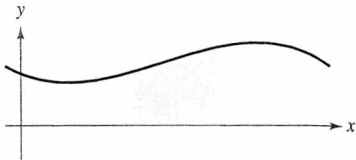
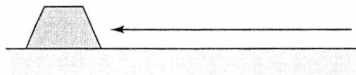
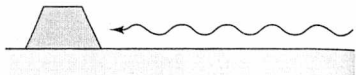
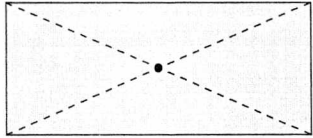
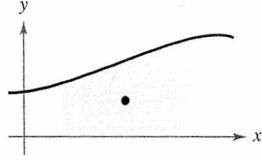
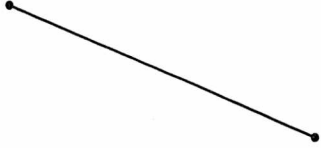

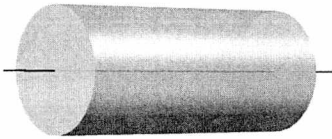
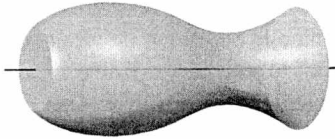
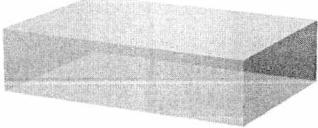
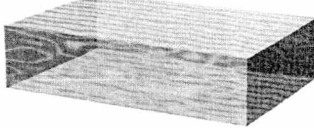


A medida que avance en el libro, se sugiere volver a leer estos comentarios repetidas veces. Es importante saber en cuál de las tres etapas siguientes del estudio del cálculo se encuentra.

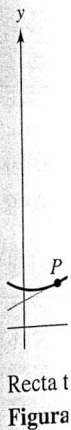
Preparación para el cálculo	Precálculo
Límites y sus propiedades	Proceso de límite
Derivación	Cálculo

Este ciclo se repite muchas veces en una escala menor en todo el libro.

Valor cuand  
Pendi  
Recta a una  
Razón prom t = a  
Curv: del ci  
Altur una c x =  
Plan a una  
Dire mov larg

Sin cálculo	Con cálculo diferencial
<p>Valor de <math>f(x)</math> cuando <math>x = c</math></p> 	<p>Límite de <math>f(x)</math> cuando <math>x</math> tiende a <math>c</math></p> 
<p>Pendiente de una recta</p> 	<p>Pendiente de una curva</p> 
<p>Recta secante a una curva</p> 	<p>Recta tangente a una curva</p> 
<p>Razón de cambio promedio entre <math>t = a</math> y <math>t = b</math></p> 	<p>Razón de cambio instantáneo en <math>t = c</math></p> 
<p>Curvatura del círculo</p> 	<p>Curvatura de una curva</p> 
<p>Altura de una curva en <math>x = c</math></p> 	<p>Altura máxima de una curva dentro de un intervalo</p> 
<p>Plano tangente a una esfera</p> 	<p>Plano tangente a una superficie</p> 
<p>Dirección del movimiento a lo largo de una recta.</p> 	<p>Dirección del movimiento a lo largo de una curva</p> 

Sin cálculo	Con cálculo integral
<p>Área de un rectángulo</p> 	<p>Área bajo una curva</p> 
<p>Trabajo realizado por una fuerza constante</p> 	<p>Trabajo hecho por una fuerza variable</p> 
<p>Centro de un rectángulo</p> 	<p>Centroide de una región</p> 
<p>Longitud de un segmento de recta</p> 	<p>Longitud de un arco</p> 
<p>Área superficial de un cilindro</p> 	<p>Área superficial de un sólido de revolución</p> 
<p>Masa de un sólido con densidad constante</p> 	<p>Masa de un sólido con densidad variable</p> 
<p>Volumen de un sólido rectangular</p> 	<p>Volumen de la región bajo una superficie</p> 
<p>Suma de un número finito de términos</p> $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S$	<p>Suma de un número infinito de términos</p> $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = S$



Recta t  
Figura

Gratítul  
Coll  
Sus  
bajo  
mar  
You  
los t  
hicie  
Gan

### El problema de la recta tangente

El concepto de límite es fundamental en el estudio del cálculo. A continuación se dan breves descripciones de dos problemas clásicos de cálculo: *el problema de la recta tangente* y *el problema del área*, que muestran la forma en que intervienen los límites en el cálculo.

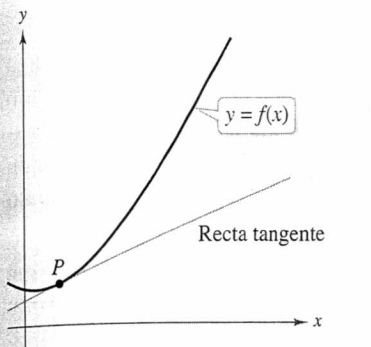
En el problema de la recta tangente, se le da una función  $f$  y un punto  $P$  en su gráfica, y se trata de encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto, como se muestra en la figura 3.1.

Exceptuando los casos en que una recta tangente es vertical, el problema de encontrar la **recta tangente** en el punto  $P$  equivale al de determinar la *pendiente* de la recta tangente en  $P$ . Se puede calcular aproximadamente esta pendiente trazando una recta que pase por el punto de tangencia y por otro punto de la curva, como se muestra en la figura 3.2(a). Tal recta se llama una **recta secante**. Si  $P(c, f(c))$  es el punto de tangencia y

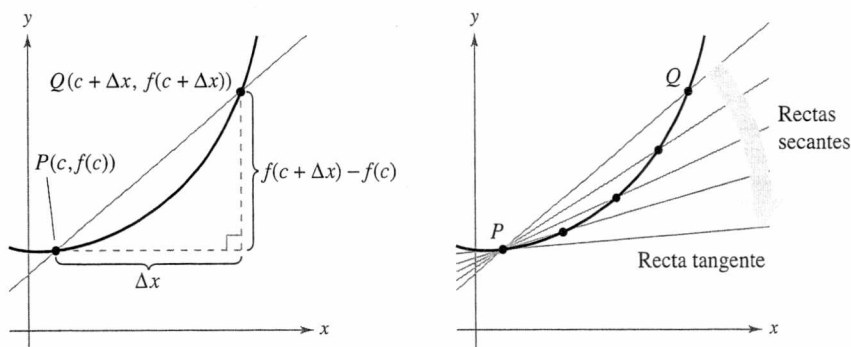
$$Q(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$$

Es un segundo punto de la gráfica de  $f$ , la pendiente de la recta secante que pasa por estos dos puntos puede encontrarse al utilizar precálculo y está dada por

$$m_{sec} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{c + \Delta x - c} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$



Recta tangente de la gráfica de  $f$  en  $P$ .  
**Figura 3.1**



(a) La recta secante que pasa por  $(c, f(c))$  y  $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$ .  
 (b) Cuando  $Q$  tiende a  $P$ , las rectas secantes se aproximan a la recta tangente.

**Figura 3.2**

A medida que el punto  $Q$  se aproxima al punto  $P$ , la pendiente de la recta secante se aproxima a la de la recta tangente, como se muestra en la figura 3.2(b). Cuando existe tal “posición límite”, se dice que la pendiente de la recta tangente es el **límite** de la pendiente de las rectas secantes (este importante problema se estudiará con más detalle en la unidad 4).



**GRACE CHISHOLM YOUNG**  
 (1868-1944)

Grace Chisholm Young obtuvo su título en matemáticas de Girton College de Cambridge, Inglaterra. Sus primeros trabajos se publicaron bajo el nombre de William Young, su marido. Entre 1914 y 1916, Grace Young publicó trabajos relativos a los fundamentos de cálculo que la hicieron merecedora del Premio Gamble del Girton College.

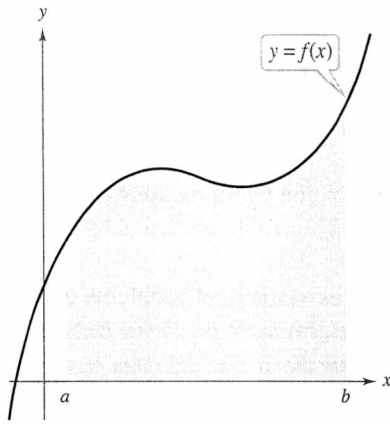
#### Exploración

Los siguientes puntos se encuentran en la gráfica de  $f(x) = x^2$

$$Q_1(1.5, f(1.5)), Q_2(1.1, f(1.1)), Q_3(1.01, f(1.01)),$$

$$Q_4(1.001, f(1.001)), Q_5(1.0001, f(1.0001))$$

Cada punto sucesivo se acerca más al punto  $P(1, 1)$ . Calcule la pendiente de la recta secante que pasa por  $Q_1$  y  $P$ ,  $Q_2$  y  $P$ , y así sucesivamente. Utilice una herramienta de graficación para representar estas rectas secantes. Luego, utilice los resultados para estimar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $P$ .



Área bajo una curva.

Figura 3.3

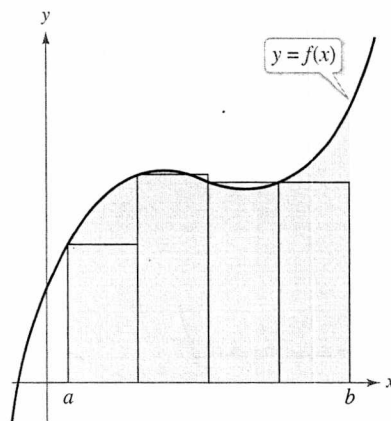
**NOTA HISTÓRICA**

En uno de los eventos más asombrosos ocurrido en las matemáticas, se descubrió que el problema de la recta tangente y el problema del área están estrechamente relacionados. Este descubrimiento condujo al nacimiento del cálculo. Se abordará la relación que existe entre estos dos problemas cuando se estudie el teorema fundamental del cálculo.

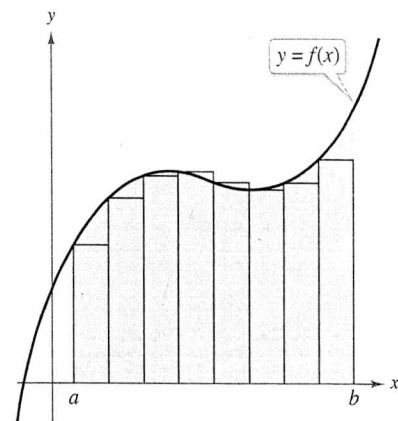
**El problema del área**

En el problema de la recta tangente vio cómo el proceso de límite puede ser aplicado a la pendiente de una recta para encontrar la pendiente de una curva general. Un segundo problema clásico en cálculo consiste en determinar el área de una región plana delimitada por las gráficas de funciones. Este problema también se puede resolver mediante un proceso del límite. En este caso, el proceso de límite se aplica al área de un rectángulo con el fin de encontrar el área de una región general.

A modo de ejemplo sencillo, considere la zona acotada por la gráfica de la función  $y = f(x)$ , el eje  $x$  y las líneas verticales  $x = a$  y  $x = b$ , como se muestra en la figura 3.3. Se puede estimar su área usando varios rectángulos, como se muestra en la figura 3.4. Al aumentar el número de rectángulos, la aproximación mejora cada vez más, ya que se reduce el área que se pierde mediante los rectángulos. El objetivo radica en determinar el límite de la suma de las áreas de los rectángulos cuando su número crece sin fin.



Aproximación usando cuatro rectángulos.



Aproximación usando ocho rectángulos.

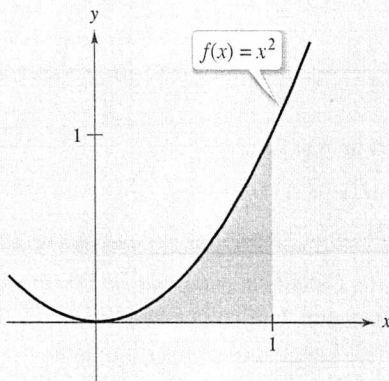
Figura 3.4

**Exploración**

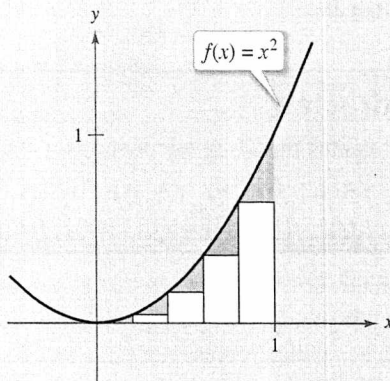
Considere la región acotada por las gráficas de

$$f(x) = x^2, \quad y = 0 \quad \text{y} \quad x = 1$$

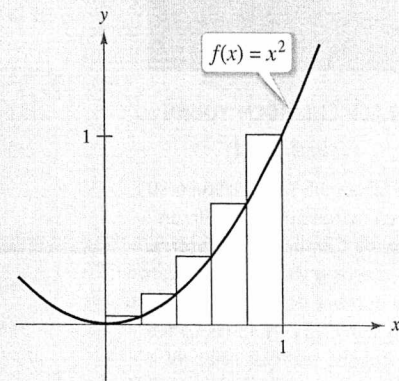
que se muestra en el inciso (a) de la figura. Puede estimar el área de esta región empleando dos conjuntos de rectángulos, unos inscritos en ella y otros circunscritos, como se muestra en los incisos (b) y (c). Calcule la suma de las áreas de cada conjunto de rectángulos. Luego, utilice los resultados para calcular aproximadamente el área de la región.



(a) Región acotada



(b) Rectángulos inscritos



(c) Rectángulos circunscritos

**Precálculo**  
ma se p  
Si el pr  
valo. En  
solución

1. Cal  
via
2. Cal  
se r

- 3.
- Ur
- mc
- mi
- cí



4. Un  
tori  
la e  
dor  
mil  
de  
cua

5. Enc  
(a)

6. Re  
f(  
y ∈  
(a)

- (b)
- (c)

# 3.1 Ejercicios

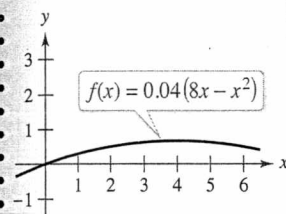
Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Precálculo o cálculo** En los ejercicios 1-5, decida si el problema se puede resolver mediante precálculo o si requiere cálculo. Si el problema se puede resolver utilizando precálculo, resuélvalo. En caso contrario, explique el razonamiento y aproxime la solución por métodos gráficos o numéricos.

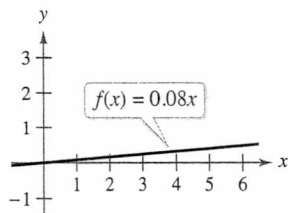
1. Calcule la distancia recorrida en 15 segundos por un objeto que viaja a una velocidad constante de 20 pies por segundo.
2. Calcule la distancia recorrida en 15 segundos por un objeto que se mueve a una velocidad  $v(t) = 20 + 7 \cos t$  pies por segundo.

### 3. Razón de cambio

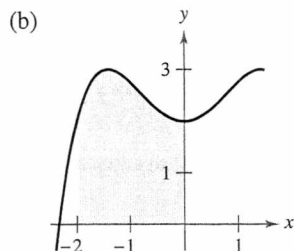
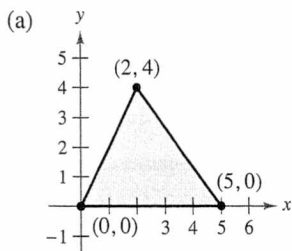
Un ciclista recorre una trayectoria que admite como modelo la ecuación  $f(x) = 0.04(8x - x^2)$  donde  $x$  y  $f(x)$  se miden en millas. Calcule la razón de cambio en la elevación cuando  $x = 2$ .



4. Un ciclista recorre una trayectoria que admite como modelo la ecuación  $f(x) = 0.08x$ , donde  $x$  y  $f(x)$  se miden en millas. Encuentre la razón de cambio de la elevación cuando  $x = 2$ .



5. Encuentre el área de la región sombreada.



6. **Rectas secantes** Considere la función

$$f(x) = \sqrt{x}$$

y el punto  $P(4, 2)$  en la gráfica de  $f$ .

- (a) Dibuje la gráfica de  $f$  y las rectas secantes que pasan por  $P(4, 2)$  y  $Q(x, f(x))$  para los siguientes valores de  $x$ : 1, 3 y 5.
- (b) Encuentre la pendiente de cada recta secante.
- (c) Utilice los resultados del inciso (b) para estimar la pendiente de recta tangente a  $f$  en  $P(4, 2)$ . Describa cómo puede mejorar la aproximación de la pendiente.

7. **Rectas secantes** Considere la función  $f(x) = 6x - x^2$  y el punto  $P(2, 8)$  sobre la gráfica de  $f$ :

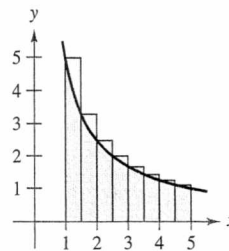
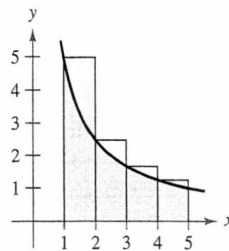
- (a) Dibuje la gráfica de  $f$  y las rectas secantes que pasan por  $P(2, 8)$  y  $Q(x, f(x))$  para los valores de  $x$ : 3, 2.5 y 1.5.
- (b) Encuentre la pendiente de cada recta secante.
- (c) Utilice los resultados del inciso (b) para calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $P(2, 8)$ . Describa cómo puede mejorar la aproximación de la pendiente.



**8. ¿CÓMO LO VE?** ¿Cómo describe la razón cambio instantáneo de la posición de un automóvil sobre una autopista?

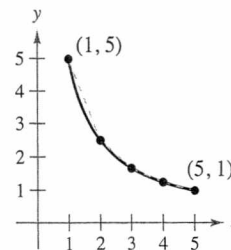
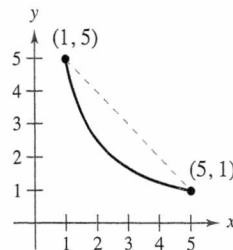


9. **Aproximar un área** Utilice los rectángulos de cada una de las gráficas para aproximar el área de la región acotada por  $y = 5/x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ , y  $x = 5$ . Describa cómo se puede continuar este proceso para obtener una aproximación más exacta del área.



## DESARROLLO DE CONCEPTOS

10. **Aproximar la longitud de una curva** Considere la longitud de la gráfica de  $f(x) = 5/x$  desde  $(1, 5)$  hasta  $(5, 1)$ :



- (a) Aproxime la longitud de la curva mediante el cálculo de la distancia entre sus extremos, como se muestra en la primera figura.
- (b) Aproxime la longitud de la curva mediante el cálculo de las longitudes de los cuatro segmentos de recta, como se muestra en la segunda figura.
- (c) Describa cómo se podría continuar con este proceso a fin de obtener una aproximación más exacta de la longitud de la curva.

# 3.2 Límite de una función

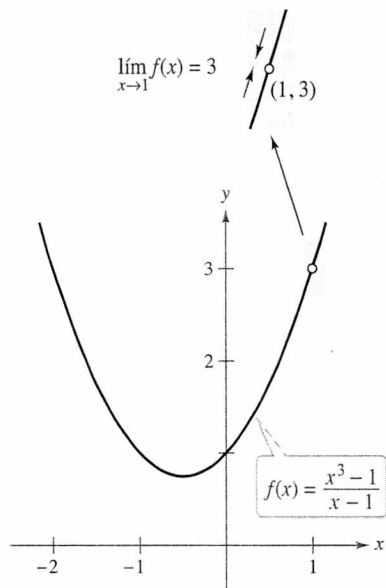
- Estimar un límite utilizando los métodos numérico y gráfico.
- Aprender diferentes formas en las que un límite puede no existir.
- Estudiar y utilizar la definición formal de límite.

## Introducción a los límites

Al dibujar la función de la gráfica

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

para todos los valores distintos de  $x = 1$ , es posible emplear las técnicas usuales de representación de curvas. Sin embargo, en  $x = 1$  no está claro qué esperar. Para obtener una idea del comportamiento de la gráfica de  $f$  cerca de  $x = 1$ , se pueden usar dos conjuntos de valores de  $x$ , uno que se aproxime a 1 por la izquierda y otro que lo haga por la derecha, como se ilustra en la tabla.



El límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a 1 es 3.

Figura 3.5

$x$ se aproxima a 1 por la izquierda.					$x$ se aproxima a 1 por la derecha.				
$x$	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
$f(x)$	2.313	2.710	2.970	2.997	?	3.003	3.030	3.310	3.813
$f(x)$ se aproxima a 3.					$f(x)$ se aproxima a 3.				

Como se muestra en la figura 3.5, la gráfica de  $f$  es una parábola con un hueco en el punto  $(1, 3)$ . A pesar de que  $x$  no puede ser igual a 1, se puede acercarse arbitrariamente a 1 y, en consecuencia,  $f(x)$  se acerca a 3 de la misma manera. Utilizando la notación que se emplea con los límites, se podría escribir

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3. \quad \text{Esto se lee: "el límite de } f(x) \text{ cuando } x \text{ se aproxima a 1 es 3".}$$

Este análisis conduce a una descripción informal de límite. Si  $f(x)$  se acerca arbitrariamente a un número  $L$  cuando  $x$  se aproxima a  $c$  por cualquiera de los dos lados, entonces el **límite** de  $f(x)$ , cuando  $x$  se aproxima a  $c$ , es  $L$ . Esto se escribe

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L.$$

### Exploración

El análisis anterior proporciona un ejemplo de cómo calcular un límite de *manera numérica* mediante la construcción de una tabla, o de *manera gráfica*, dibujar un esquema. Calcule el siguiente límite de forma numérica al completar la tabla.

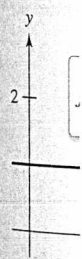
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

$x$	1.75	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.25
$f(x)$	?	?	?	?	?	?	?	?	?

A continuación, utilice una herramienta de graficación para calcular el límite de forma gráfica.

$f$  está in  
en  $x = 0$ .

El límite  
a 0 es 2.  
Figura :



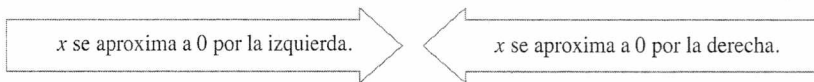
El límite  
a 2 es 1.  
Figura :

**EJEMPLO 1** Estimar numéricamente un límite

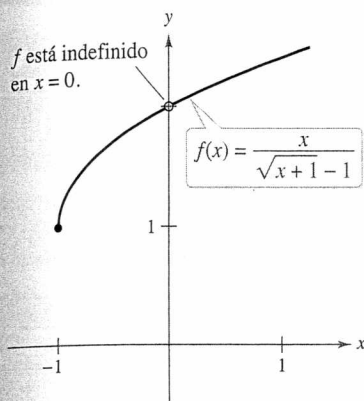
Evalúe la función  $f(x) = x/(\sqrt{x+1} - 1)$  en varios puntos cercanos a  $x = 0$  y use el resultado para calcular el límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

**Solución** En la siguiente tabla se registran los valores de  $f(x)$  para diversos valores de  $x$  cercanos a 0.



$x$	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	1.99499	1.99950	1.99995	?	2.00005	2.00050	2.00499



El límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a 0 es 2.

Figura 3.6

De los datos mostrados en la tabla, puede estimar que el límite es 2. Dicho resultado se confirma por la gráfica de  $f$  (vea la figura 3.6).

Observe que en el ejemplo 1, la función no está definida en  $x = 0$  y aún así  $f(x)$  parece aproximarse a un límite a medida que  $x$  se aproxima a 0. Esto ocurre con frecuencia, y es importante percatarse de que la existencia o inexistencia de  $f(x)$  en  $x = c$  no tiene relación con la existencia del límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a  $c$ .

**EJEMPLO 2** Calcular un límite

Encuentre el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a 2, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$

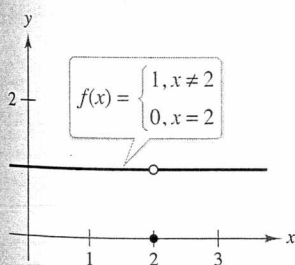
**Solución** Puesto que  $f(x) = 1$  para toda  $x$  distinta de  $x = 2$ , puede concluir que el límite es 1, como se muestra en la figura 3.7. Por tanto, puede escribir

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1.$$

El hecho de que  $f(2) = 0$  no influye en la existencia ni el valor del límite cuando  $x$  se aproxima a 2. Por ejemplo, si se hubiera definido la función como

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

el límite sería el mismo que el de  $f$ .



El límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a 2 es 1.

Figura 3.7

Hasta este punto de la sección, ha calculado los límites de manera numérica y gráfica. Cada uno de estos métodos genera una estimación del límite. En la sección 3.3 estudiará técnicas analíticas para evaluarlos. A largo de este curso, se trata de desarrollar el hábito de utilizar este método de árbol para resolver problemas.

- |                     |   |
|---------------------|---|
| 1. Método numérico  | Construya una tabla de valores.                                 |
| 2. Método gráfico   | Elabore una gráfica a mano o con algún dispositivo tecnológico. |
| 3. Método analítico | Utilice álgebra o cálculo.                                      |

### Límites que no existen

En los tres ejemplos siguientes se examinarán algunos límites que no existen.

#### EJEMPLO 3 Comportamiento diferente por la derecha y por la izquierda

Demuestre que el siguiente límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$  no existe.

**Solución** Considere la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

De la figura 3.8 y de la definición de valor absoluto.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad \text{Definición de valor absoluto}$$

observe que

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Esto significa que, independientemente de cuánto se aproxime  $x$  a 0, existirán tanto valores positivos como negativos de  $x$  que darán  $f(x) = 1$  y  $f(x) = -1$ . De manera específica, si  $\delta$  (letra griega *delta* minúscula) es un número positivo, entonces los valores de  $x$  que satisfacen la desigualdad  $0 < |x| < \delta$ , se pueden clasificar en los valores de  $|x|/x$  de la siguiente manera:

$$(-\delta, 0) \quad \text{o} \quad (0, \delta)$$

Los valores negativos de  $x$  dan como resultado  $|x|/x = -1$ .

Los valores positivos de  $x$  dan como resultado  $|x|/x = 1$ .

Debido a que  $|x|/x$  tiende a un número diferente por la derecha del 0, por la izquierda entonces el límite  $\lim_{x \rightarrow 0} (|x|/x)$  no existe.

#### EJEMPLO 4 Comportamiento no acotado

Analice la existencia del límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ .

**Solución** Considere la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

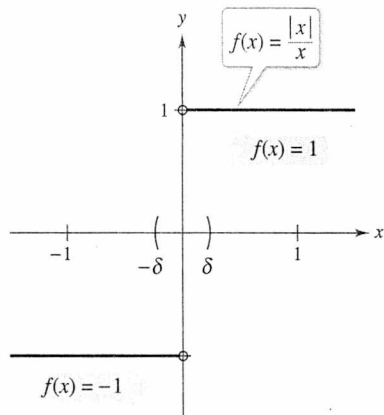
En la figura 3.9 puede observar que a medida que  $x$  se aproxima a 0, tanto por la derecha como por la izquierda,  $f(x)$  crece sin límite. Esto quiere decir que eligiendo un valor de  $x$  cercano a 0, puede lograr que  $f(x)$  sea tan grande como se quiera. Por ejemplo,  $f(x)$  será mayor que 100 si elige valores de  $x$  que estén entre  $\frac{1}{10}$  y 0. Es decir:

$$0 < |x| < \frac{1}{10} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} > 100.$$

Del mismo modo, puede obligar a que  $f(x)$  sea mayor que 1,000,000 de la siguiente manera:

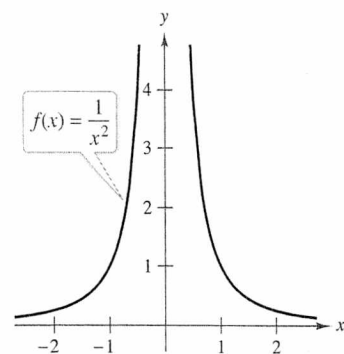
$$0 < |x| < \frac{1}{1000} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} > 1,000,000$$

Puesto que  $f(x)$  no se aproxima a ningún número real  $L$  cuando  $x$  se aproxima a 0, se puede concluir que el límite no existe.



El  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  no existe.

Figura 3.8



El  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  no existe.

Figura 3.9

El  $\lim_{x \rightarrow 0}$   
Figura

En el cálculo era necesario que Dirichlet considerara la función de Fourier para

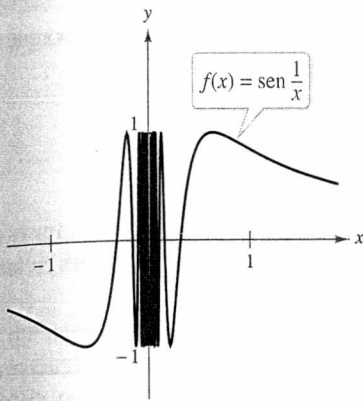
**EJEMPLO 5**

**Comportamiento oscilante**

•••► Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Analice la existencia del límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ .

**Solución** Sea  $f(x) = \sin(1/x)$ . En la figura 3.10 puede observar que cuando  $x$  se aproxima a 0, oscila entre  $-1$  y  $1$ . Por consiguiente, el límite no existe, puesto que por pequeño que se elija  $\delta$  siempre es posible encontrar  $x_1$  y  $x_2$  que disten menos de  $\delta$  unidades de 0, tales que  $\sin(1/x_1) = 1$  y  $\sin(1/x_2) = -1$ , como se muestra en la tabla.



El  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  no existe.

Figura 3.10

$x$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{2}{7\pi}$	$\frac{2}{9\pi}$	$\frac{2}{11\pi}$	$x \rightarrow 0$
$\sin \frac{1}{x}$	1	-1	1	-1	1	-1	No existe el límite

**Comportamientos asociados a la no existencia de un límite**

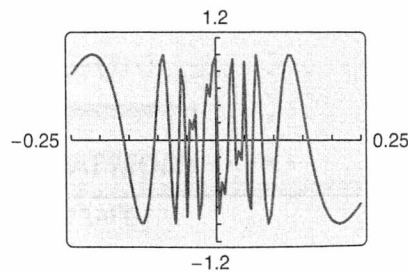
1.  $f(x)$  se aproxima a números diferentes por la derecha de  $c$  que por la izquierda.
2.  $f(x)$  aumenta o disminuye sin límite a medida que  $x$  se aproxima a  $c$ .
3.  $f(x)$  oscila entre dos valores fijos a medida que  $x$  se aproxima a  $c$ .

Existen muchas otras funciones interesantes que presentan comportamientos inusuales. Una de las que se cita con mayor frecuencia es la *función de Dirichlet*:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Puesto que esta función *carece de límite* en cualquier número real  $c$ , *no es continua* en cualquier número real  $c$ . La continuidad se estudiará con más detalle en la sección 3.4.

► **CONFUSIÓN TECNOLÓGICA** Cuando utilice una herramienta de graficación para investigar el comportamiento de una función cerca del valor de  $x$  en el que se intenta evaluar su límite, recuerde que no siempre se puede confiar en las imágenes dibujadas. Al utilizar una herramienta de graficación para dibujar la gráfica de la función del ejemplo 5 en un intervalo que contenga al 0, es muy probable que obtenga una gráfica incorrecta, como la que se muestra en la figura 3.11. El motivo por el cual una herramienta de graficación no puede mostrar la gráfica correcta radica en que la gráfica cuenta con oscilaciones infinitas en cualquier intervalo que contenga al 0.



Gráfica incorrecta de  $f(x) = \sin(1/x)$ .

Figura 3.11

**PETER GUSTAV DIRICHLET**  
(1805-1859)

En el desarrollo temprano del cálculo, la definición de una función era mucho más restrictiva que en la actualidad, y "funciones" como la de Dirichlet no se hubieran tomado en consideración. La definición moderna de función se debe al matemático alemán Peter Gustav Dirichlet.  
Consulte *LarsonCalculus.com* para leer más de esta biografía.

**PARA INFORMACIÓN ADICIONAL**

Para conocer más sobre la introducción del rigor al cálculo, consulte "Who Gave You The Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus", de Judith V. Grabiner, en *The American Mathematical Monthly*. Para ver este artículo, visite *MathArticles.com*.

**Definición formal de límite**

Examine nuevamente la descripción informal de límite. Si  $f(x)$  se acerca de manera arbitraria a un número  $L$  a medida que  $x$  se aproxima a  $c$  por cualquiera de sus lados, se dice que el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a  $c$  es  $L$  y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L.$$

A primera vista, esta descripción parece muy técnica. No obstante, es informal porque aún hay que conferir un significado preciso a las frases:

" $f(x)$  se acerca arbitrariamente a  $L$ "

y

" $x$  se aproxima a  $c$ "

La primera persona en asignar un significado matemático riguroso a estas dos frases fue Agustín-Louis Cauchy. Su **definición  $\epsilon$ - $\delta$  de límite** es la que se suele utilizar en la actualidad.

En la figura 3.12, sea  $\epsilon$  (letra griega *épsilon* minúscula) la representación de un número positivo (pequeño). Entonces, la frase " $f(x)$  se acerca arbitrariamente a  $L$ " significa que  $f(x)$  pertenece al intervalo  $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ . Al usar la noción de valor absoluto, esto se puede escribir como

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

Del mismo modo, la frase " $x$  se aproxima a  $c$ " significa que existe un número positivo  $\delta$  tal que  $x$  pertenece al intervalo  $(c - \delta, c)$ , o bien al intervalo  $(c, c + \delta)$ . Esto puede expresarse de manera concisa mediante la doble desigualdad

$$0 < |x - c| < \delta.$$

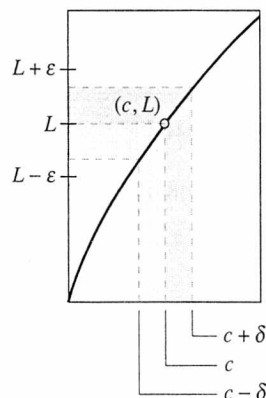
La primera desigualdad

$$0 < |x - c| \quad \text{La distancia entre } x \text{ y } c \text{ es mayor que } 0.$$

expresa que  $x \neq c$ . La segunda desigualdad

$$|x - c| < \delta \quad x \text{ está a menos de } \delta \text{ unidades de } c.$$

Indica que  $x$  está a una distancia  $\delta$  menor que  $c$ .



Definición  $\epsilon$ - $\delta$  del límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $c$ .

Figura 3.12

**Definición de límite**

Sea  $f$  una función definida en un intervalo abierto que contiene a  $c$  (salvo posiblemente en  $c$ ) y  $L$  un número real. La expresión

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

Significa que para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si

$$0 < |x - c| < \delta$$

entonces

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

**COMENTARIO** A lo largo de todo el texto, la expresión

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

lleva implícitas dos afirmaciones, el límite existe y es igual a  $L$ .

Algunas funciones carecen de límite cuando  $x$  se aproxima a  $c$ , pero aquellas que lo poseen no pueden tener dos límites diferentes cuando  $x$  se aproxima a  $c$ . Es decir, *si el límite de una función existe, entonces es único* (vea el ejercicio 75).

•• CO  
•• ejer  
•• es e  
•• gar:  
••  
•• sier  
••  
•• Tod  
•• tam  
••••

Los tres ejemplos siguientes ayudan a entender mejor la definición  $\varepsilon$ - $\delta$  de límite.

**EJEMPLO 6****Determinar una  $\delta$  para un  $\varepsilon$  dado**

Dado el límite

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5) = 1$$

encuentre  $\delta$  tal que

$$|(2x - 5) - 1| < 0.01$$

siempre que

$$0 < |x - 3| < \delta.$$

- • **COMENTARIO** En el
- ejemplo 6, observe que 0.005
- es el *mayor* valor de  $\delta$  que
- garantiza que

$$|(2x - 5) - 1| < 0.01$$

- siempre que

$$0 < |x - 3| < \delta.$$

- Todo valor positivo de  $\delta$  *menor*
- también satisface esta condición.

**Solución** En este problema trabaje con un valor dado de  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon = 0.01$ . Para encontrar una  $\delta$  apropiada, trate de establecer una conexión entre el valor absoluto

$$|(2x - 5) - 1| \text{ y } |x - 3|.$$

Observe que

$$|(2x - 5) - 1| = |2x - 6| = 2|x - 3|.$$

Como la desigualdad  $|(2x - 5) - 1| < 0.01$  es equivalente a  $2|x - 3| < 0.01$ , puede elegir

$$\delta = \frac{1}{2}(0.01) = 0.005.$$

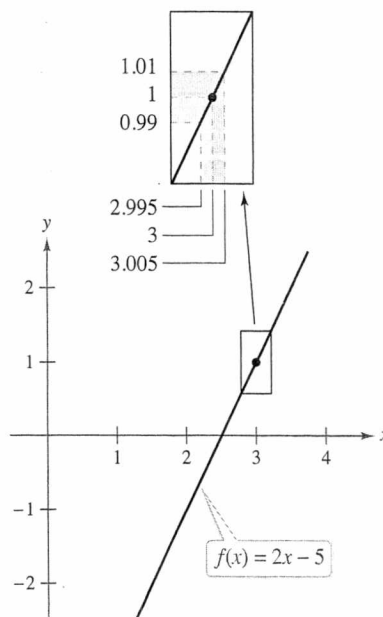
Esta opción funciona porque

$$0 < |x - 3| < 0.005$$

lo que implica que

$$|(2x - 5) - 1| = 2|x - 3| < 2(0.005) = 0.01.$$

Como se muestra en la figura 3.13, para  $x$  valores dentro de 0.005 a 3 ( $x \neq 3$ ), los valores de  $f(x)$  están dentro de 0.01 a 1.



El límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a 3 es 1.

**Figura 3.13**

En el ejemplo 6 encontró un valor  $\delta$  para una  $\varepsilon$  dada. Esto no prueba la existencia del límite. Para hacer eso, debe demostrar que se puede encontrar una  $\delta$  para *cualquier*  $\varepsilon$ , como se muestra en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 7****Usar la definición  $\varepsilon$ - $\delta$  de límite**

Utilice la definición  $\varepsilon$ - $\delta$  de límite para demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 4.$$

**Solución** Demuestre que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe una  $\delta > 0$  tal que

$$|(3x - 2) - 4| < \varepsilon$$

siempre que

$$0 < |x - 2| < \delta.$$

Puesto que la elección  $\delta$  depende de  $\varepsilon$ , necesita establecer una relación entre los valores absolutos  $|(3x - 2) - 4|$  y  $|x - 2|$

$$|(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = 3|x - 2|$$

Por tanto, para cada  $\varepsilon > 0$  dado, se puede tomar  $\delta > 0$ . Esta opción funciona porque

$$0 < |x - 2| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$$

implica que

$$|(3x - 2) - 4| = 3|x - 2| < 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon.$$

Como puede ver en la figura 3.14, para valores de  $x$  en  $\delta$  de  $2(x \neq 2)$ , los valores de  $f(x)$  se encuentran en  $\varepsilon$  de 4.

**EJEMPLO 8****Usar la definición  $\varepsilon$ - $\delta$  de límite**

Utilice la definición  $\varepsilon$ - $\delta$  de límite, para demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

**Solución** Demuestre que para cada  $\varepsilon > 0$  existe una  $\delta > 0$ , de tal forma que

$$|x^2 - 4| < \varepsilon$$

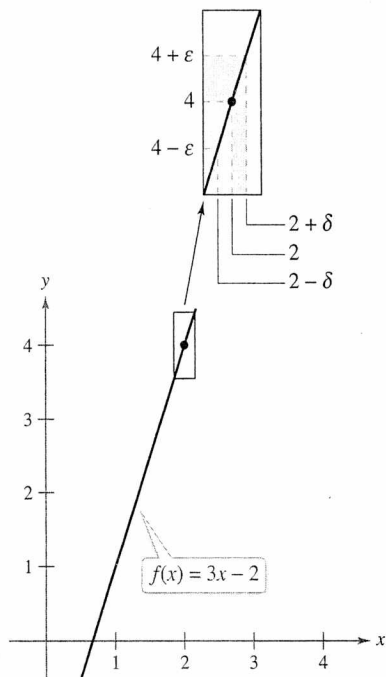
siempre que

$$0 < |x - 2| < \delta.$$

Para encontrar una  $\delta$  adecuada, comience escribiendo  $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|$ . Para todo  $x$  del intervalo  $(1, 3)$ ,  $x + 2 < 5$ , se sabe que  $|x + 2| < 5$ . De tal manera, haciendo que  $\delta$  sea el mínimo entre  $\varepsilon/5$  y 1 resulta que, siempre que  $0 < |x - 2| < \delta$ , se tiene

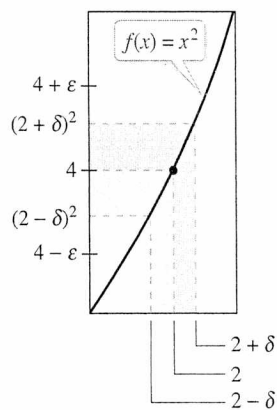
$$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < \left(\frac{\varepsilon}{5}\right)(5) = \varepsilon.$$

Como se muestra en la figura 3.15, para valores de  $x$  en  $\delta$  de  $2(x \neq 2)$ , los valores de  $f(x)$  se encuentran en  $\varepsilon$  de 4.



El límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a 2 es 4.

Figura 3.14



El límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a 2 es 4.

Figura 3.15

A lo largo de esta unidad se utilizará la definición  $\varepsilon$ - $\delta$  de límite, principalmente para demostrar teoremas relativos a los límites y para establecer la existencia o inexistencia de tipos de límites específicos. Para *calcular* límites, se describirán técnicas más fáciles de usar que la definición  $\varepsilon$ - $\delta$  de límite.

3  
Cálculo de la pendiente en el fin d  
1.  $\lim_{x \rightarrow 4}$   
2.  $\lim_{x \rightarrow 3}$   
3.  $\lim_{x \rightarrow 0}$   
4.  $\lim_{x \rightarrow 3}$   
5.  $\lim_{x \rightarrow 0}$   
6.  $\lim_{x \rightarrow 0}$   
7.  $\lim_{x \rightarrow 1}$   
9.  $\lim_{x \rightarrow 1}$

# 3.2 Ejercicios

Consulte [CalcChat.com](http://CalcChat.com) para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Cálculo numérico de un límite** En los ejercicios 1-6, complete la tabla y utilice el resultado para estimar el límite. Represente la función utilizando una herramienta de graficación, con el fin de confirmar su resultado.

1.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - 3x - 4}$

x	3.9	3.99	3.999	4	4.001	4.01	4.1
f(x)				?			

2.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$

x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
f(x)				?			

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
f(x)				?			

4.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[1/(x+1)] - (1/4)}{x-3}$

x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
f(x)				?			

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
f(x)				?			

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
f(x)				?			

**Cálculo numérico de un límite** En los ejercicios 7-14, elabore una tabla de valores para la función y utilice el resultado para estimar el valor del límite. Utilice una herramienta de graficación para representar la función y confirmar el resultado.

7.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{x^2 + x - 6}$

8.  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x + 4}{x^2 + 9x + 20}$

9.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^6 - 1}$

10.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x + 3}$

11.  $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{\sqrt{10-x} - 4}{x + 6}$

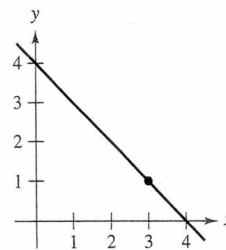
12.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x/(x+1)] - (2/3)}{x - 2}$

13.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{x}$

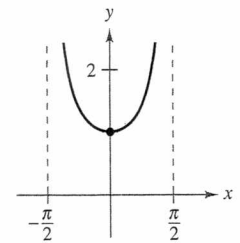
14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\tan 2x}$

**Encontrar límites gráficamente** En los ejercicios 15-22, utilice la gráfica para encontrar el límite (si es que existe). Si el límite no existe, explique por qué.

15.  $\lim_{x \rightarrow 3} (4 - x)$

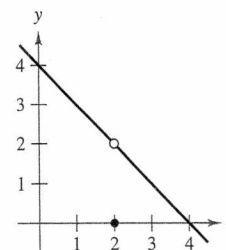


16.  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sec } x$



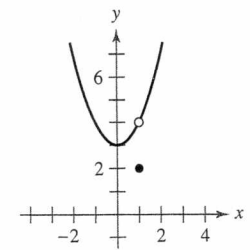
17.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$

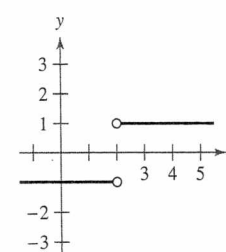


18.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

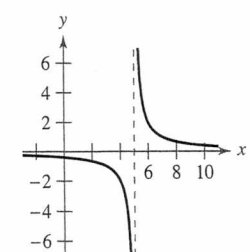
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$



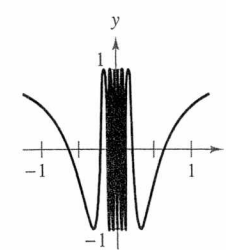
19.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2}$



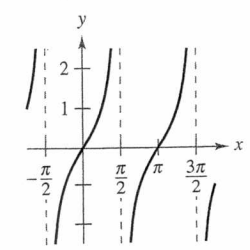
20.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2}{x - 5}$



21.  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$

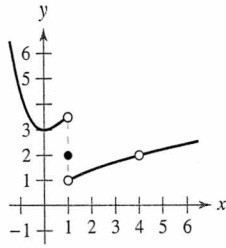


22.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x$

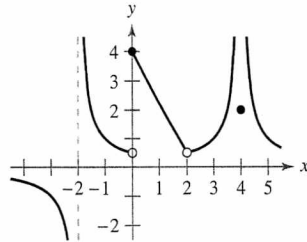


**Razonamiento gráfico** En los ejercicios 23 y 24, utilice la gráfica de la función  $f$  para determinar si existe el valor de la cantidad dada. De ser así, ubíquela; si no existe, explique por qué.

23. (a)  $f(1)$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$   
 (c)  $f(4)$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$



24. (a)  $f(-2)$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$   
 (c)  $f(0)$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$   
 (e)  $f(2)$   
 (f)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$   
 (g)  $f(4)$   
 (h)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$



**Límites de una función por partes** En los ejercicios 25 y 26, utilice la gráfica de  $f$  con el fin de identificar los valores de  $c$  para los que existe el límite  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ .

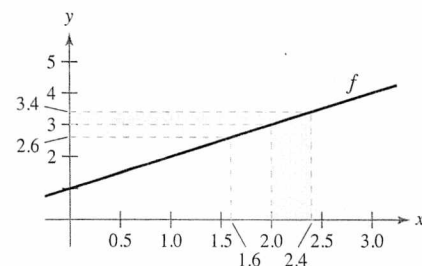
$$25. f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ 8 - 2x, & 2 < x < 4 \\ 4, & x \geq 4 \end{cases}$$

$$26. f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ 1 - \cos x, & 0 \leq x \leq \pi \\ \cos x, & x > \pi \end{cases}$$

**Dibujar una gráfica** En los ejercicios 27 y 28, construya una gráfica de una función  $f$  que satisfaga los valores indicados (existen muchas respuestas correctas).

27.  $f(0)$  no está definida.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$   
 $f(2) = 6$   
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$
28.  $f(-2) = 0$   
 $f(2) = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  no existe.

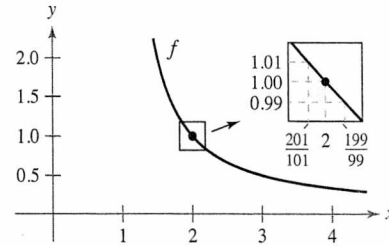
29. **Encontrar una  $\delta$  para un  $\epsilon$  dado** En la figura se muestra la gráfica de  $f(x) = x + 1$ . Encuentre un  $\delta$  tal que si  $0 < |x - 2| < \delta$ , entonces  $|f(x) - 3| < 0.4$ .



30. **Encontrar una  $\delta$  para un  $\epsilon$  dado** En la figura se muestra la gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

Encuentre un  $\delta$  tal que si  $0 < |x - 2| < \delta$ , entonces  $|f(x) - 1| < 0.01$ .



31. **Encontrar una  $\delta$  para un  $\epsilon$  dado** En la figura se muestra la gráfica de

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

Encuentre un  $\delta$  tal que si  $0 < |x - 1| < \delta$ , entonces  $|f(x) - 1| < 0.1$ .

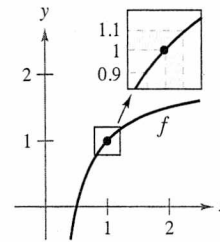


Figura para 31.

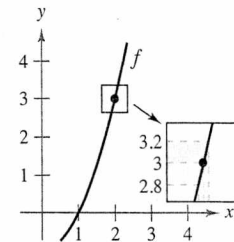


Figura para 32.

32. **Encontrar una  $\delta$  para un  $\epsilon$  dado** En la figura se muestra la gráfica de

$$f(x) = x^2 - 1$$

Encuentre un  $\delta$  tal que si  $0 < |x - 2| < \delta$ , entonces  $|f(x) - 3| < 0.2$ .

**Encontrar una  $\delta$  para un  $\epsilon$  dado.** En los ejercicios 33-36, encuentre el límite  $L$ . Después determine  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < 0.01$  siempre que  $0 < |x - c| < \delta$ .

33.  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2)$       34.  $\lim_{x \rightarrow 6} \left(6 - \frac{x}{3}\right)$   
 35.  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3)$       36.  $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + 6)$

**Usar la definición  $\epsilon$ - $\delta$  de límite** En los ejercicios 37-48, encuentre el límite  $L$ . Luego utilice la definición  $\epsilon$ - $\delta$  de límite para demostrar que el límite es  $L$ .

37.  $\lim_{x \rightarrow 4} (x + 2)$       38.  $\lim_{x \rightarrow -2} (4x + 5)$   
 39.  $\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{1}{2}x - 1\right)$       40.  $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3}{4}x + 1\right)$   
 41.  $\lim_{x \rightarrow 6} 3$       42.  $\lim_{x \rightarrow 2} (-1)$   
 43.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x}$       44.  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x}$   
 45.  $\lim_{x \rightarrow -5} |x - 5|$       46.  $\lim_{x \rightarrow 3} |x - 3|$   
 47.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1)$       48.  $\lim_{x \rightarrow -4} (x^2 + 4x)$

49. O  
tie

50. O  
tie

Redac  
una he  
¿Cuál  
ble err  
que ge  
acerca  
analíti

51.  $f(x)$

lín  
 $x \rightarrow$

53.  $f(x)$

lín  
 $x \rightarrow$

54.  $f(x)$

lín  
 $x \rightarrow$

55. M  
ci  
\$  
el  
C  
de  
(N  
[3  
(a  
(t

56. R  
C

El sím  
o un s  
bién p  
Tony Bow

49. **Obtener un límite** ¿Cuál es el límite de  $f(x) = 4$  cuando  $x$  tiende a  $\pi$ ?
50. **Obtener un límite** ¿Cuál es el límite de  $g(x) = x$  cuando  $x$  tiende a  $\pi$ ?

**Redacción** En los ejercicios 51-54, represente la función con una herramienta de graficación y estime el límite (si existe). ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Puede detectar un posible error en la determinación del dominio si analiza la gráfica que genera la herramienta de graficación? Redacte un párrafo acerca de la importancia de examinar una función de manera analítica además de hacerlo gráficamente.

51.  $f(x) = \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x-4}$       52.  $f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 4x + 3}$

$\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$        $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

53.  $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

$\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

54.  $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

**55. Modelar datos** Por una llamada telefónica de larga distancia, un hotel hace un cargo de \$9.99 para el primer minuto y de \$0.79 por cada minuto o fracción adicional. Una fórmula para el costo está dada por

$C(t) = 9.99 - 0.79 \llbracket -(t - 1) \rrbracket$

donde  $t$  es el tiempo en minutos.

(Nota:  $\llbracket x \rrbracket =$  mayor entero tal que  $n \leq x$ . Por ejemplo,  $\llbracket 3.2 \rrbracket = 3$  y  $\llbracket -1.6 \rrbracket = -2$ .)

- (a) Utilice una herramienta de graficación para representar la gráfica de la función de costo para  $0 < t \leq 6$ .
- (b) Utilice la gráfica para completar la siguiente tabla y observe el comportamiento de la función a medida que  $t$  tiende a 3.5. Utilice la gráfica y la tabla para encontrar  $\lim_{t \rightarrow 3.5} C(t)$ .

$t$	3	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	4
$C$				?			


- (c) Utilice la gráfica para completar la siguiente tabla y observe el comportamiento de la función a medida que  $t$  se aproxima a 3.

$t$	2	2.5	2.9	3	3.1	3.5	4
$C$				?			

¿Existe el límite de  $C(t)$  cuando  $t$  se aproxima a 3? Explique su respuesta.

**56.** Repita el ejercicio 55 considerando ahora

$C(t) = 5.79 - 0.99 \llbracket -(t - 1) \rrbracket$ .

El símbolo  indica un ejercicio en el que se pide utilizar una herramienta de graficación o un sistema simbólico de álgebra computarizado. La solución de los demás ejercicios también puede simplificarse mediante el uso de la tecnología apropiada.

Tony Bowler/Shutterstock.com

**DESARROLLO DE CONCEPTOS**

**57. Notación descrita** Escriba una breve descripción de lo que significa la notación

$\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = 25$ .

**58. Utilizar la definición de límite** La definición de límite de la página 36 requiere que  $f$  sea una función definida sobre un intervalo abierto que contiene a  $c$ , excepto posiblemente en  $c$ . ¿Por qué es necesaria esta condición?

**59. Límites que no existen** Identifique tres tipos de comportamiento relacionados con la inexistencia de un límite. Ejemplifique cada tipo con una gráfica de una función.

**60. Comparar funciones y límites**

- (a) Si  $f(2) = 4$ , ¿se puede concluir algo acerca del límite de  $f$  cuando  $x$  tiende a 2? Explique
- (b) Si el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a 2 es 4, ¿se puede concluir algo acerca de  $f(2)$ ? Explique

**61. Joyería** Un joyero ajusta un anillo de tal manera que su circunferencia interna es de 6 cm.

- (a) ¿Cuál es el radio del anillo?
- (b) Si la circunferencia interna del anillo puede variar entre 5.5 y 6.5 centímetros, ¿cuánto puede variar su radio?
- (c) Utilice la definición  $\epsilon$ - $\delta$  de límite para describir esta situación. Identifique  $\epsilon$  y  $\delta$ .

**62. Deportes**

Un fabricante de artículos deportivos diseña una pelota de golf que tiene un volumen de 2.48 pulgadas cúbicas.

- (a) ¿Cuál es el radio de la pelota de golf?
- (b) Si el volumen de la pelota puede variar entre 2.45 y 2.51 pulgadas cúbicas, ¿cuánto puede variar su radio?



- (c) Utilice la definición  $\epsilon$ - $\delta$  de límite para describir esta situación. Identifique  $\epsilon$  y  $\delta$ .

**63. Calcular un límite** Considere la función

$f(x) = (1 + x)^{1/x}$

Calcule

$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$

mediante la evaluación de  $f$  en valores de  $x$  cerca de 0. Dibuje la gráfica de  $f$ .

64. **Calcular un límite** Considere la función

$$f(x) = \frac{|x + 1| - |x - 1|}{x}$$

Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x + 1| - |x - 1|}{x}$$

mediante la evaluación de  $f$  con valores de  $x$  cercanos a 0. Construya la gráfica de  $f$ .

65. **Análisis gráfico** La expresión

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Significa que a cada  $\varepsilon > 0$  le corresponde una  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - 2| < \delta$ , entonces

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon.$$

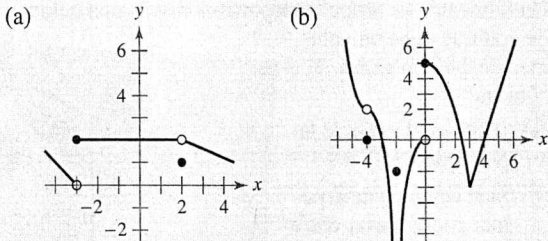
Si  $\varepsilon = 0.001$ , entonces

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < 0.001.$$

Utilice una herramienta de graficación para representar ambos lados de esta desigualdad. Usando la función *zoom*, encuentre un intervalo  $(2 - \delta, 2 + \delta)$  tal que la gráfica del lado izquierdo quede por debajo de la del lado derecho.



66. **¿CÓMO LO VE?** Utilice la gráfica de  $f$  para identificar los valores de  $c$  para los que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  existe.



**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 67-70, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que lo demuestre.

- 67. Si  $f$  no está definida en  $x = c$ , no existe el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a  $c$ .
- 68. Si el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $c$  es 0, debe existir un número  $k$  tal que  $f(k) < 0.001$ .
- 69. Si  $f(c) = L$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ .
- 70. Si  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ , entonces  $f(c) = L$ .

**Determinar un límite** En los ejercicios 71 y 72, considere la función  $f(x) = \sqrt{x}$ .

- 71. ¿Es  $\lim_{x \rightarrow 0.25} \sqrt{x} = 0.5$  una afirmación verdadera? Explique su respuesta.
- 72. ¿Es  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$  una afirmación verdadera? Explique su respuesta.

73. **Evaluar un límite** Utilice una herramienta de graficación para evaluar el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{x}$$

para diferentes valores de  $n$ . ¿Qué observa?

74. **Evaluar un límite** Utilice una herramienta de graficación para evaluar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan nx}{x}$$

para diferentes valores de  $n$ . ¿Qué observa?

75. **Demostración** Demuestre que si existe el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $c$ , ese límite debe ser único. [Sugerencia: Sea  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L_1$  y  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L_2$  y demuestre que  $L_1 = L_2$ .]

76. **Demostración** Considere la recta  $f(x) = mx + b$ , donde  $m \neq 0$ . Aplique la definición  $\varepsilon$ - $\delta$  de límite, demuestre que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = mc + b$ .

77. **Demostración** Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

es equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - L] = 0.$$

78. **Demostración**

(a) Dado que

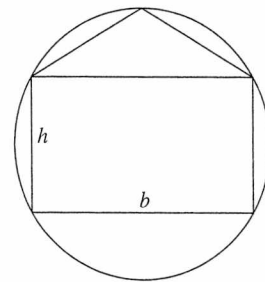
$$\lim_{x \rightarrow 0} (3x + 1)(3x - 1)x^2 + 0.01 = 0.01$$

demuestre que existe un intervalo abierto  $(a, b)$  que contiene al 0, tal que  $(3x + 1)(3x - 1)x^2 + 0.01 > 0$  para toda  $x \neq 0$  en  $(a, b)$ .

(b) Dado que  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ , donde  $L > 0$ , demuestre que existe un intervalo abierto  $(a, b)$  que contiene a  $c$ , tal que  $g(x) > 0$  para toda  $x \neq c$  en  $(a, b)$ .

### DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

79. Inscribe en un círculo con radio 1 un rectángulo con base  $b$  y altura  $h$ , y un triángulo isósceles con base  $b$ , como se muestra en la figura. ¿Para qué valor de  $h$  tienen la misma área el rectángulo y el triángulo?



80. Un cono recto tiene una base con radio 1 y una altura de 3. Se inscribe un cubo dentro de él, de tal manera que una de las caras del cubo queda contenida en la base del cono. ¿Cuál es la longitud lateral del cubo?

Este problema fue preparado por el Committee on Prize Putnam Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

... CC se t o sí hay cón lím "el apr ... CC mo: se c ejer

# 3.3 Propiedades de los límites y cálculo analítico de límites

- Evaluar un límite mediante el uso de las propiedades de los límites.
- Desarrollar y usar una estrategia para el cálculo de límites.
- Evaluar un límite mediante el uso de técnicas de cancelación y de racionalización.
- Evaluar un límite mediante el uso del teorema del emparedado.

## Propiedades de los límites

En la sección 3.2 aprendió que el límite de  $f(x)$  cuando se aproxima a  $c$  no depende del valor de  $f$  en  $x = c$ . Sin embargo, puede darse el caso de que este límite sea  $f(c)$ . En esta situación se puede evaluar el límite por **sustitución directa**. Esto es:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c). \quad \text{Sustituya } c \text{ por } x.$$

Las funciones *bien comportadas* son **continuas en  $c$** . En la sección 3.4 se examinará con más detalle este concepto.

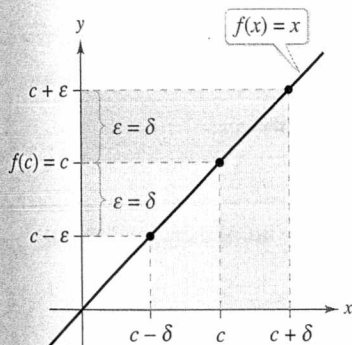


Figura 3.16

### TEOREMA 3.1 Algunos límites básicos

Si  $b$  y  $c$  son números reales y  $n$  un entero positivo:

1.  $\lim_{x \rightarrow c} b = b$
2.  $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
3.  $\lim_{x \rightarrow c} x^n = c^n$

**Demostración** Las demostraciones de las propiedades 1 y 3 del teorema 3.1 se dejan como ejercicios (vea los ejercicios 107 y 108). Para demostrar la propiedad 2 del teorema 3.1, es necesario demostrar que para todo  $\epsilon > 0$  existe una  $\delta > 0$  tal que  $|x - c| < \epsilon$  tal que  $0 < |x - c| < \delta$ . Para lograrlo elija  $\delta = \epsilon$ . Entonces, la segunda desigualdad lleva implícita a la primera, como se muestra en la figura 3.16.

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para el video de Bruce Edwards de esta demostración.

### EJEMPLO 1 Evaluar límites básicos

- a.  $\lim_{x \rightarrow 2} 3 = 3$
- b.  $\lim_{x \rightarrow -4} x = -4$
- c.  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2^2 = 4$

### TEOREMA 3.2 Propiedades de los límites

Si  $b$  y  $c$  son números reales y  $n$  un entero positivo,  $f$  y  $g$  son funciones con los límites siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = K.$$

1. Múltiplo escalar:  $\lim_{x \rightarrow c} [bf(x)] = bL$
2. Suma o diferencia:  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$
3. Producto:  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = LK$
4. Cociente:  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}, \quad K \neq 0$
5. Potencia:  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = L^n$

En el apéndice A se presenta una demostración de este teorema.

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para el video de Bruce Edwards de esta demostración.

..... ➤  
**COMENTARIO** Cuando se tengan nuevas notaciones o símbolos en matemáticas, hay que cerciorarse de conocer cómo se leen. Por ejemplo, el límite del ejemplo 1(c) se lee “el límite de  $x^2$  cuando  $x$  se aproxima a 2 es 4”.

..... ➤  
**COMENTARIO** La demostración de la propiedad 1 se deja como ejercicio (vea el ejercicio 109).

**EJEMPLO 2****El límite de un polinomio**

Determine el límite  $\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 + 3)$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 + 3) &= \lim_{x \rightarrow 2} 4x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 3 && \text{Propiedad 2, teorema 3.2} \\ &= 4 \left( \lim_{x \rightarrow 2} x^2 \right) + \lim_{x \rightarrow 2} 3 && \text{Propiedad 1, teorema 3.2} \\ &= 4(2^2) + 3 && \text{Propiedades 1 y 3, teorema 3.1} \\ &= 19 && \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

En el ejemplo 2, observe que el límite (cuando  $x$  se aproxima a 2) de la *función polinomial*  $p(x) = 4x^2 + 3$  es simplemente el valor de  $p$  en  $x = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} p(x) = p(2) = 4(2^2) + 3 = 19$$

Esta propiedad de *sustitución directa* es válida para todas las funciones polinomiales y racionales cuyos denominadores no se anulen en el punto considerado.

**TEOREMA 3.3 Límites de las funciones polinomiales y racionales**

Si  $p$  es una función polinomial y  $c$  un número real, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow c} p(x) = p(c).$$

Si  $r$  es una función racional dada por  $r(x) = p(x)/q(x)$  y  $c$  un número real tal que  $q(c) \neq 0$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}.$$

**EJEMPLO 3****Límite de una función racional**

Encuentre el límite:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2}{x + 1}$ .

**Solución** Puesto que el denominador no es 0 cuando  $x = 1$ , se puede aplicar el teorema 3.3 para obtener

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2}{x + 1} = \frac{1^2 + 1 + 2}{1 + 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Las funciones polinomiales y racionales son dos de los tres tipos básicos de funciones algebraicas. El siguiente teorema se refiere al límite del tercer tipo de función algebraica: el que contiene un radical.

**TEOREMA 3.4 Límite de una función radical**

Si  $n$  es un entero positivo. El siguiente límite es válido para toda  $c$  si  $n$  es impar, y para toda  $c > 0$  si  $n$  es par:

$$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

En el apéndice A se presenta una demostración de este teorema.

Consulte *LarsonCalculus.com* para el video de Bruce Edwards de esta demostración.

**EL SIMBOLO DE RAÍZ CUADRADA**

El primer uso de un símbolo para denotar a la raíz cuadrada data del siglo XVI. Al principio, los matemáticos emplearon el símbolo  $\surd$ , que tiene solo dos trazos. Éste se eligió por su parecido con una  $r$  minúscula, para representar la palabra latina *radix*, que significa raíz.

El siguiente teorema aumentará notablemente su capacidad para calcular límites, ya que muestra cómo tratar el límite de una función compuesta.

### TEOREMA 3.5 Límite de una función compuesta

Si  $f$  y  $g$  son funciones tales que  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow L} f(x) = f(L)$ , entonces:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right) = f(L).$$

En el apéndice A se presenta una demostración de este teorema.

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para el video de Bruce Edwards de esta demostración.

### EJEMPLO 4

### Límite de una función compuesta

•••► Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre el límite.

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 4}$       b.  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{2x^2 - 10}$

### Solución

a. Puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 4) = 0^2 + 4 = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$$

puede concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4} = 2.$$

b. Puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 10) = 2(3^2) - 10 = 8 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 8} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{8} = 2$$

puede concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{2x^2 - 10} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Ha visto que los límites de muchas funciones algebraicas se pueden calcular por medio de la sustitución directa. Las seis funciones trigonométricas básicas también cuentan con esta propiedad deseable, como se muestra en el siguiente teorema (presentado sin demostración).

### TEOREMA 3.6 Límites de funciones trigonométricas

Sea  $c$  un número real en el dominio de una función trigonométrica dada

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow c} \sin x = \sin c & 2. \lim_{x \rightarrow c} \cos x = \cos c & 3. \lim_{x \rightarrow c} \tan x = \tan c \\ 4. \lim_{x \rightarrow c} \cot x = \cot c & 5. \lim_{x \rightarrow c} \sec x = \sec c & 6. \lim_{x \rightarrow c} \csc x = \csc c \end{array}$$

### EJEMPLO 5

### Límites de funciones trigonométricas

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = \tan(0) = 0$

b.  $\lim_{x \rightarrow \pi} (x \cos x) = \left(\lim_{x \rightarrow \pi} x\right) \left(\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x\right) = \pi \cos(\pi) = -\pi$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^2 = 0^2 = 0$

## Límites por factorización

En las tres páginas previas se han estudiado diversos tipos de funciones cuyos límites pueden calcularse mediante sustitución directa. Lo anterior, aunado al teorema siguiente, permite desarrollar una estrategia para calcular límites.

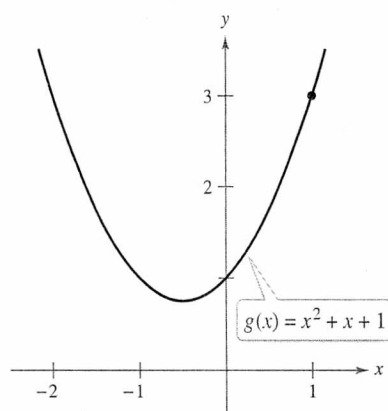
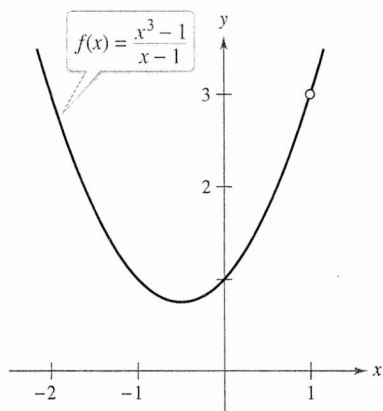
### TEOREMA 3.7 Funciones que coinciden en todo, salvo en el punto

Sea  $c$  un número real y  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \neq c$  en un intervalo abierto que contiene a  $c$ . Si existe el límite de  $g(x)$  cuando  $x$  se aproxima a  $c$ , entonces también existe el límite de  $f(x)$  y

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

En el apéndice A se presenta una demostración de este teorema.

Consulte *LarsonCalculus.com* para el video de Bruce Edwards de esta demostración.



$f$  y  $g$  coinciden, salvo en un punto.

Figura 3.17

### EJEMPLO 6

### Calcular el límite de una función

Encuentre el límite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

**Solución** Sea  $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$ . Al factorizar y cancelar factores, puede escribir  $f$  como

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)} = x^2 + x + 1 = g(x), \quad x \neq 1.$$

De tal modo, para todos los valores de  $x$  distintos de  $x = 1$ , las funciones  $f$  y  $g$  coinciden, como se muestra en la figura 3.17. Puesto que el  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  existe, puede aplicar el teorema 3.7 y concluir que  $f$  y  $g$  tienen el mismo límite en  $x = 1$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} && \text{Factorice.} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x-1} && \text{Cancele factores idénticos.} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) && \text{Aplique el teorema 3.7} \\ &= 1^2 + 1 + 1 && \text{Use sustitución directa.} \\ &= 3 && \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

### Estrategia para el cálculo de límites

1. Aprenda a reconocer cuáles límites pueden evaluarse por medio de la sustitución directa (estos límites se enumeran en los teoremas 3.1-3.6).
2. Si el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a  $c$  *no se puede evaluar* por sustitución directa, trate de encontrar una función  $g$  que coincida con  $f$  para todo  $x$  distinto de  $x = c$ . [Seleccione una  $g$  tal que el límite de  $g(x)$  se pueda evaluar por medio de la sustitución directa.] Después aplique el teorema 3.7 para concluir de manera analítica que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c).$$

3. Utilice una *gráfica* o una *tabla* para respaldar la conclusión.



**COMENTARIO** Cuando aplique esta estrategia al cálculo de límites, recuerde que algunas funciones no tienen límite (cuando  $x$  se aproxima a  $c$ ). Por ejemplo, el siguiente límite no existe.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{x - 1}$$

COM  
ción  
distin  
de fac  
teore  
cero  
enton  
polin  
sustit  
racion

Pued  
facto

-2

(-3, -)

$f$  no está  
Figura 3.

### Técnicas de factorización y racionalización

Un procedimiento para encontrar un límite es la **técnica de cancelación**. Esta técnica consiste en dividir factores comunes, como se muestra en el ejemplo 7.

#### EJEMPLO 7 Técnicas de factorización y cancelación

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre el límite  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$ .

**Solución** Aunque se trata del límite de una función racional, *no se puede* aplicar el teorema 3.3 debido a que el límite del denominador es 0.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$$

$\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + x - 6) = 0$   
La sustitución directa falla.

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x + 3) = 0$$

Puesto que el límite del numerador también es 0, numerador y denominador tienen un **factor común** de  $(x + 3)$ . Por tanto, para toda  $x \neq -3$ , se cancela este factor para obtener

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 3} = x - 2 = g(x), \quad x \neq -3.$$

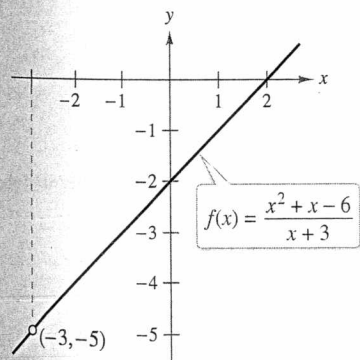
Empleando el teorema 3.7, obtiene que

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x - 2) = -5.$$

Aplique el teorema 3.7.  
Use sustitución directa.

Este resultado se muestra de forma gráfica en la figura 3.18. Observe que la gráfica de la función  $f$  coincide con la de la función  $g(x) = x - 2$ , solo que la gráfica de  $f$  tiene un hueco en el punto  $(-3, -5)$ .

En el ejemplo 7, la sustitución directa produce la forma fraccionaria  $0/0$ , que carece de significado. A una expresión como  $0/0$  se le denomina **forma indeterminada**, porque no es posible (a partir solo de esa forma) determinar el límite. Si al intentar evaluar un límite llega a esta forma, debe reescribir la fracción de modo que el nuevo denominador no tenga 0 como límite. Una manera de lograrlo consiste en *cancelar los factores idénticos o comunes*, como se muestra en el ejemplo 7. Otra manera consiste en *racionalizar el numerador*, como se muestra en la siguiente página.



$f$  no está definida para  $x = -3$ .

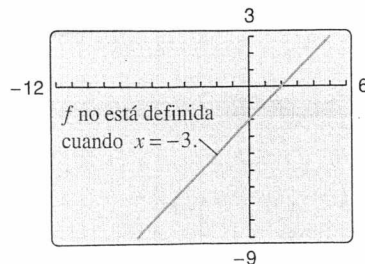
Figura 3.18

#### CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Una herramienta de graficación puede

- dar información incorrecta sobre la gráfica de una función. Por ejemplo, trate de graficar la función del ejemplo 7

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$$

- en una ventana de visualización estándar (vea la figura 3.19). En la mayoría de las gráficas utilizadas, la gráfica parece estar definida en cada número real. Sin embargo, dado que  $f$  no está definida cuando  $x = -3$ , se sabe que la gráfica de  $f$  tiene un hueco en  $x = -3$ . Puede verificarlo con una herramienta de graficación mediante la función de *trazado* o con una *tabla*.



Gráfica incorrecta de  $f$ .

Figura 3.19

### Técnica de racionalización

Otra forma de encontrar un límite analíticamente es la **técnica de racionalización**, que consiste en racionalizar el numerador de una expresión fraccionaria. Recuerde que racionalizar el numerador significa multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del numerador. Por ejemplo, para racionalizar el numerador de

$$\frac{\sqrt{x} + 4}{x}$$

multiplique el numerador y el denominador por el conjugado de  $\sqrt{x} + 4$ , lo que es  $\sqrt{x} - 4$ .

#### EJEMPLO 8 Técnica de racionalización

Encuentre el límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ .

**Solución** Al utilizar la sustitución directa, obtiene la forma indeterminada 0/0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1} - 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{cases}$$

La sustitución directa falla.

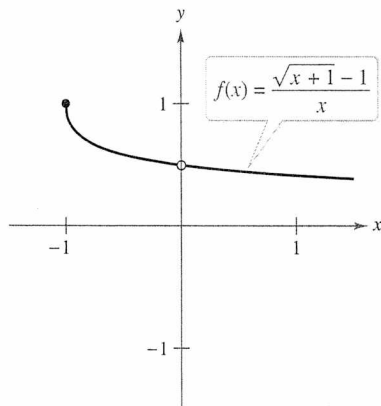
En este caso, puede reescribir la fracción racionalizando el denominador:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} &= \left( \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \right) \left( \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} \right) \\ &= \frac{(x+1) - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}, \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

Ahora, cuando se emplea el teorema 3.7, se puede evaluar el límite como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} \\ &= \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

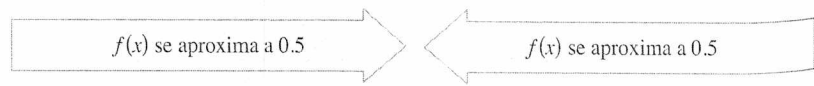
Una tabla o una gráfica puede servir para fortalecer la conclusión de que el límite es  $\frac{1}{2}$ . (Vea la figura 3.20.)



El límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a 0 es  $\frac{1}{2}$ .  
Figura 3.20



$x$	-0.25	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1	0.25
$f(x)$	0.5359	0.5132	0.5013	0.5001	?	0.4999	0.4988	0.4881	0.4721

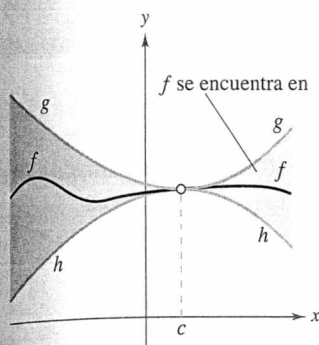


Teorema  
Figura



Sector c  
el teore  
Figura

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$



Teorema del emparedado.  
Figura 3.21

### Teorema del emparedado (de intercalación)

El siguiente teorema se refiere al límite de una función que está “comprendida” entre otras dos, cada una de las cuales tiene el mismo límite de un valor dado de  $x$ , como se muestra en la figura 3.21.

#### TEOREMA 3.8 Teorema del emparedado (de intercalación)

Si  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  para todas las  $x$  en un intervalo abierto que contiene a  $c$  por la posible excepción de la propia  $c$ , y si

$$\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

entonces  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  existe y es igual a  $L$ .

En el apéndice A se presenta una demostración de este teorema.

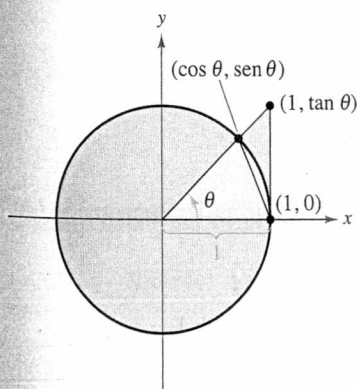
Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

En la demostración del teorema 3.9 se aprecia la utilidad del teorema del emparedado (también se le llama teorema del sándwich o de encaje).

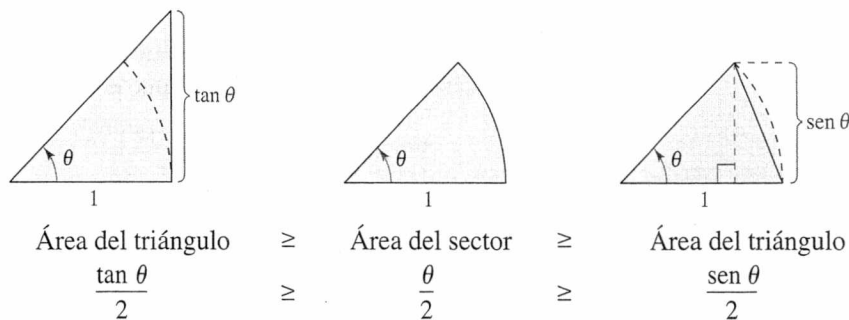
#### TEOREMA 3.9 Dos límites trigonométricos especiales

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

**Demostración** Con el fin de evitar la confusión entre dos usos distintos de  $x$ , se presenta la demostración utilizando la variable  $\theta$ , donde  $\theta$  denota un ángulo agudo positivo medido en radianes. En la figura 3.22 se muestra un sector circular comprendido entre dos triángulos.



Sector circular utilizado para demostrar el teorema 3.9.  
Figura 3.22



Al multiplicar cada expresión por  $2/\sin \theta$  resulta

$$\frac{1}{\cos \theta} \geq \frac{\theta}{\sin \theta} \geq 1$$

y tomando sus recíprocos e invirtiendo las desigualdades se obtiene:

$$\cos \theta \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1.$$

Puesto que  $\cos \theta = \cos(-\theta)$  y  $(\sin \theta)/\theta = [(\sin(-\theta))/(-\theta)]$ , se puede concluir que esta desigualdad es válida para *todo*  $\theta$  distinto de cero dentro del intervalo abierto  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Por último, dado que  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$  y  $\lim_{\theta \rightarrow 0} 1 = 1$ , se puede aplicar el teorema del emparedado para concluir que  $\lim_{\theta \rightarrow 0} (\sin \theta)/\theta = 1$ .

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

**EJEMPLO 9**

**Límite en el que interviene una función trigonométrica**

Encuentre el límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ .

**Solución** La sustitución directa tiene como resultado la forma indeterminada 0/0. Para resolver este problema, puede escribir  $\tan x$  como  $(\sin x)/(\cos x)$  y obtener

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right) \left( \frac{1}{\cos x} \right).$$

Ahora, puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

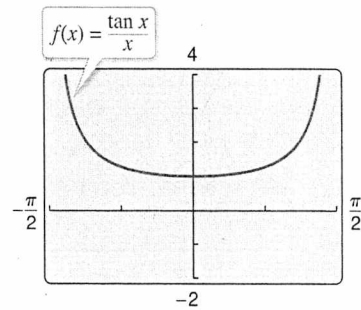
y

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

se puede obtener

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \right) \\ &= (1)(1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(Vea la figura 3.23.)



El límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a 0 es 1.

**Figura 3.23**

• • **COMENTARIO** Asegúrese de entender las convenciones matemáticas relativas al paréntesis y las funciones trigonométricas. Por ejemplo, en el ejemplo 10,  $\sin 4x$  significa  $\sin(4x)$ .

**EJEMPLO 10**

**Límite en el que interviene una función trigonométrica**

Encuentre el límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$ .

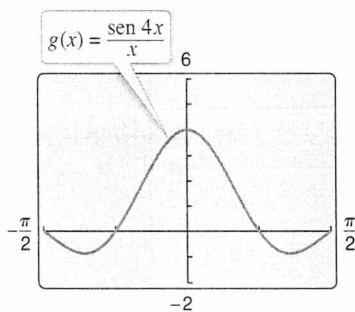
**Solución** La sustitución directa tiene como resultado la forma indeterminada 0/0. Para resolver este problema, puede escribir el límite como

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \right). \quad \text{Multiplique y divida entre 4.}$$

Ahora, haga  $y = 4x$  y observe que  $x$  tiende a 0 si y solo si  $y$  tiende a 0, se puede escribir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} &= 4 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \right) \\ &= 4 \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \right) && \text{Haga que } y = 4x. \\ &= 4(1) && \text{Aplique el teorema 3.9(1).} \\ &= 4. \end{aligned}$$

(Vea la figura 3.24.)



El límite de  $g(x)$  cuando  $x$  tiende a 0 es 4.

**Figura 3.24**

► **TECNOLOGÍA** Utilice una herramienta de graficación para confirmar los límites de los ejemplos y del conjunto de ejercicios. Por ejemplo, las figuras 3.23 y 3.24 muestran las gráficas de:

$$f(x) = \frac{\tan x}{x} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{\sin 4x}{x}.$$

• Observe que la primera gráfica parece contener al punto (0, 1) y la segunda al punto (0, 4), lo cual respalda las conclusiones obtenidas en los ejemplos 9 y 10.

Estima de gráficas de mano

1.  $h(x)$
- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0}$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0}$
3.  $f(x)$
- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0}$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0}$

Encuentre

5.  $\lim_{x \rightarrow 2}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0}$
9.  $\lim_{x \rightarrow -}$
11.  $\lim_{x \rightarrow -}$
13.  $\lim_{x \rightarrow 3}$
15.  $\lim_{x \rightarrow -}$
17.  $\lim_{x \rightarrow 2}$
19.  $\lim_{x \rightarrow 1}$
21.  $\lim_{x \rightarrow 7}$

Encuentre los límites.

23.  $f(x)$
- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0}$
24.  $f(x)$
- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0}$
25.  $f(x)$
- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0}$
26.  $f(x)$
- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0}$

Hallar los límites de los ejercicios 27.

27.  $\lim_{x \rightarrow \pi/}$
29.  $\lim_{x \rightarrow 1}$
31.  $\lim_{x \rightarrow 0}$

## 3.3 Ejercicios

Consulte [CalcChat.com](http://CalcChat.com) para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Estimar límites** En los ejercicios 1-4, utilice una herramienta de graficación para representar la función y estime los límites de manera visual.

- $h(x) = -x^2 + 4x$ 
  - $\lim_{x \rightarrow 4} h(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$
- $g(x) = \frac{12(\sqrt{x} - 3)}{x - 9}$ 
  - $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow 9} g(x)$
- $f(x) = x \cos x$ 
  - $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow \pi/3} f(x)$
- $f(t) = t|t - 4|$ 
  - $\lim_{t \rightarrow 4} f(t)$
  - $\lim_{t \rightarrow -1} f(t)$

**Encontrar límites** En los ejercicios 5-22, calcule el límite.

- $\lim_{x \rightarrow 2} x^3$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - 1)$
- $\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + 3x)$
- $\lim_{x \rightarrow -3} (2x^2 + 4x + 1)$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -4} (x + 3)^2$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 + 4}$
- $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{3x}{\sqrt{x + 2}}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} x^4$
- $\lim_{x \rightarrow -4} (2x + 3)$
- $\lim_{x \rightarrow 2} (-x^3 + 1)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 - 6x + 5)$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{12x + 3}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (3x - 2)^4$
- $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{5}{x + 3}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 5}{x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 6}}{x + 2}$

**Encontrar límites** En los ejercicios 23-26, encuentre los límites.

- $f(x) = 5 - x$ ,  $g(x) = x^3$ 
  - $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow 1} g(f(x))$
- $f(x) = x + 7$ ,  $g(x) = x^2$ 
  - $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow -3} g(f(x))$
- $f(x) = 4 - x^2$ ,  $g(x) = \sqrt{x + 1}$ 
  - $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow 1} g(f(x))$
- $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ ,  $g(x) = \sqrt[3]{x + 6}$ 
  - $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow 21} g(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow 4} g(f(x))$

**Hallar el límite de una función trigonométrica.** En los ejercicios 27-36, encuentre el límite de la función trigonométrica.

- $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \cos \frac{\pi x}{3}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sec 2x$
- $\lim_{x \rightarrow \pi} \tan x$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \sin \frac{\pi x}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos 3x$

- $\lim_{x \rightarrow 5\pi/6} \sin x$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow 7} \sec\left(\frac{\pi x}{6}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow 5\pi/3} \cos x$

**Evaluar límites** En los ejercicios 37-40, utilice la información dada para evaluar los límites.

- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 3$   
 $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 2$ 
  - $\lim_{x \rightarrow c} [5g(x)]$
  - $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)]$
  - $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)]$
  - $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 4$ 
  - $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^3$
  - $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f(x)}$
  - $\lim_{x \rightarrow c} [3f(x)]$
  - $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^{3/2}$
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 2$   
 $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \frac{3}{4}$ 
  - $\lim_{x \rightarrow c} [4f(x)]$
  - $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)]$
  - $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)]$
  - $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 27$ 
  - $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[3]{f(x)}$
  - $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{18}$
  - $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^2$
  - $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^{2/3}$

**Encontrar un límite** En los ejercicios 41-46, escriba una función simple que coincida en todo con la función dada, excepto en un punto. A continuación, determine el límite de la función. Utilice una herramienta de graficación para confirmar el primer resultado.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 5x^2}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

**Encontrar un límite** En los ejercicios 47-62, determine el límite.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 - x}$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - 16}$
- $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9}$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x + 5} - 3}{x - 4}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 5} - \sqrt{5}}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1/(3 + x)] - (1/3)}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2 + 4x}$
- $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5 - x}{x^2 - 25}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1/(x + 4)] - (1/4)}{x}$

59.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x) - 2x}{\Delta x}$       60.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$

61.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) + 1 - (x^2 - 2x + 1)}{\Delta x}$

62.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$

**Encontrar el límite de una función trigonométrica** En los ejercicios 63-74, determine el límite de la función trigonométrica.

63.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{5x}$       64.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(1 - \cos x)}{x}$

65.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x(1 - \cos x)}{x^2}$       66.  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta \tan \theta}{\theta}$

67.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x}$       68.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{x}$

69.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos h)^2}{h}$       70.  $\lim_{\phi \rightarrow \pi} \phi \sec \phi$

71.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\cot x}$       72.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \tan x}{\text{sen } x - \cos x}$

73.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3t}{2t}$

74.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{\text{sen } 3x}$

[Sugerencia: Encuentre  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 \text{sen } 2x}{2x} \right) \left( \frac{3x}{3 \text{sen } 3x} \right)$ .]

**Análisis gráfico, numérico y analítico** En los ejercicios 75-82, utilice una herramienta de graficación para representar la función y estimar el límite. Use una tabla para respaldar su conclusión. Posteriormente, calcule el límite empleando métodos analíticos.

75.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$       76.  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{4 - \sqrt{x}}{x - 16}$

77.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1/(2+x)] - (1/2)}{x}$       78.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x - 2}$

79.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3t}{t}$       80.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x^2}$

81.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x^2}{x}$       82.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{\sqrt[3]{x}}$

**Encontrar un límite** En los ejercicios 83-88, determine

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

83.  $f(x) = 3x - 2$       84.  $f(x) = -6x + 3$

85.  $f(x) = x^2 - 4x$       86.  $f(x) = \sqrt{x}$

87.  $f(x) = \frac{1}{x+3}$       88.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

**Usar el teorema del emparedado** En los ejercicios 89 y 90, utilice el teorema del emparedado para calcular  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ .

89.  $c = 0$   
 $4 - x^2 \leq f(x) \leq 4 + x^2$

90.  $c = a$   
 $b - |x - a| \leq f(x) \leq b + |x - a|$

**Usar el teorema del emparedado** En los ejercicios 91-94, utilice una herramienta de graficación para representar la función dada y las ecuaciones  $y = |x|$  y  $y = -|x|$  en una misma ventana. Usando las gráficas para visualizar el teorema del emparedado, calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

91.  $f(x) = |x| \text{sen } x$       92.  $f(x) = |x| \cos x$

93.  $f(x) = x \text{sen } \frac{1}{x}$       94.  $h(x) = x \cos \frac{1}{x}$

**DESARROLLO DE CONCEPTOS**

**95. Funciones que coinciden en todo, salvo en un punto**

- (a) En el contexto de cálculo de límites, analice qué quiere decir mediante funciones que coinciden en todo, salvo en un punto.
- (b) Elabore un ejemplo de funciones que coincidan en todo, salvo en un punto.

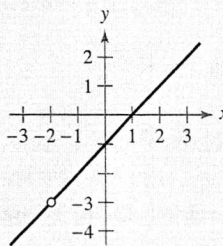
**96. Forma indeterminada** ¿Qué se quiere decir con indeterminación o forma indeterminada?

**97. Teorema del emparedado** Explique el teorema del emparedado.

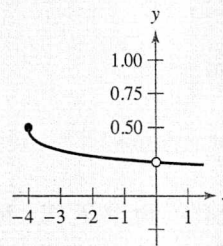


**98. ¿CÓMO LO VE?** ¿Utilizaría la técnica de cancelación o la técnica de racionalización para encontrar el límite de la función? Explique su razonamiento.

(a)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$



(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$



**99. Redacción** Utilice una herramienta de graficación para hacer la representación de

$f(x) = x$ ,  $g(x) = \text{sen } x$  y  $h(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$

en la misma ventana. Compare las magnitudes de  $f(x)$  y  $g(x)$  cuando  $x$  se acerca a 0. Utilice la comparación para escribir un breve párrafo en el que se explique por qué

$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$ .

**100. Redacción** Utilice una herramienta de graficación para representar

$f(x) = x$ ,  $g(x) = \text{sen}^2 x$  y  $h(x) = \frac{\text{sen}^2 x}{x}$

en la misma ventana. Compare las magnitudes de  $f(x)$  y  $g(x)$  cuando  $x$  se acerca a 0. Utilice la comparación para escribir un breve párrafo en el que se explique por qué

$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ .

C  
E  
si  
d  
a  
st  
lí  
t-  
101.  
102.  
Objeto  
función  
metros)  
200 m. I  
lí  
t-a  
a  
103. D  
104. t  
105. E  
le  
lí  
x-  
sí  
106. D  
lí  
x-  
107. D  
108. D  
3.  
109. D  
110. D  
lí  
x-  
111. D  
≤  
lí  
x-  
112. D  
(a  
(b

**Objeto en caída libre** . . . . .  
 En los ejercicios 101 y 102, utilice la función de posición  $s(t) = -16t^2 + 500$ , que da la altura (en pies) de un objeto que lleva cayendo  $t$  segundos desde una altura de 500 pies. La velocidad en el instante  $t = a$  segundos está dada por

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}$$

- 101. Si a un albañil se le cae una herramienta desde una altura de 500 pies, ¿a qué velocidad estará cayendo en 2 segundos?
- 102. Si a un albañil se le cae una herramienta desde una altura de 500 pies, ¿cuánto tiempo tardará esta en llegar al suelo? ¿A qué velocidad se producirá el impacto?



**Objeto en caída libre** En los ejercicios 103 y 104, utilice la función de posición  $s(t) = -4.9t^2 + 200$ , que da la altura (en metros) de un objeto que cae desde  $t$  segundos una altura de 200 m. La velocidad en el instante  $t = a$  segundos está dada por

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}$$

- 103. Determine la velocidad del objeto cuando  $t = 3$ .
- 104. ¿A qué velocidad golpeará el suelo?
- 105. **Encontrar funciones** Encuentre dos funciones  $f$  y  $g$  tales que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existan, pero  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)]$  sí existe.
- 106. **Demostración** Demuestre que si  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  existe y  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)]$  no existe, entonces  $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$  tampoco existe.
- 107. **Demostración** Demuestre la propiedad 1 del teorema 3.1.
- 108. **Demostración** Demuestre la propiedad 3 del teorema 3.1. (Se puede utilizar la propiedad 3 del teorema 3.2.)
- 109. **Demostración** Demuestre la propiedad 1 del teorema 3.2.
- 110. **Demostración** Demuestre que si  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$ .
- 111. **Demostración** Demuestre que si  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$  y  $|g(x)| \leq M$  para un número fijo  $M$  y todas las  $x \neq c$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = 0$ .

**112. Demostración**

(a) Demuestre que si  $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ .

(Nota: Este ejercicio es inverso al ejercicio 110.)

(b) Demuestre que si  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |L|$ .

[Sugerencia: Utilice la desigualdad  $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L|$ .]

**113. Piénselo** Encuentre una función  $f$  que muestre que el recíproco del ejercicio 112(b) no es verdadero. [Sugerencia: Busque una función  $f$  tal que  $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |L|$  pero donde  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  no exista.]

**114. Piénselo** Cuando utiliza una herramienta de graficación para generar una tabla con el fin de estimar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

un estudiante concluye el límite, era 0.01745 y no 1. Determine la probable causa del error.

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 115-120, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué y proporcione un ejemplo que lo demuestre.

115.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = 1$

116.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} = 1$

117. Si  $f(x) = g(x)$  para todos los números reales distintos a  $x = 0$ , y  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = L$ .

118. Si  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ , entonces  $f(c) = L$ .

119.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ , donde  $f(x) = \begin{cases} 3, & x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$

120. Si  $f(x) < g(x)$  para todas las  $x \neq a$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

**121. Demostración** Demuestre la segunda parte del teorema 1.9 probando que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

**122. Funciones por partes** Sean

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ x, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Calcule (si es posible)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .

 **123. Razonamiento gráfico** Considere  $f(x) = \frac{\sec x - 1}{x^2}$ .

- (a) Determine el dominio de  $f$ .
- (b) Utilice una herramienta de graficación para hacer la representación de  $f$ . ¿Resulta evidente el dominio de  $f$  a partir de la gráfica? Si no es así, explique por qué.
- (c) Utilice la gráfica  $f$  para calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .
- (d) Confirme su respuesta del inciso (c) utilizando el método analítico.

**124. Aproximación**

(a) Encuentre  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ .

(b) Utilice el resultado del inciso anterior para obtener la aproximación  $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$  para  $x$  cercanas a 0.

(c) Aplique el resultado del inciso (b) para estimar  $\cos(0.1)$ .

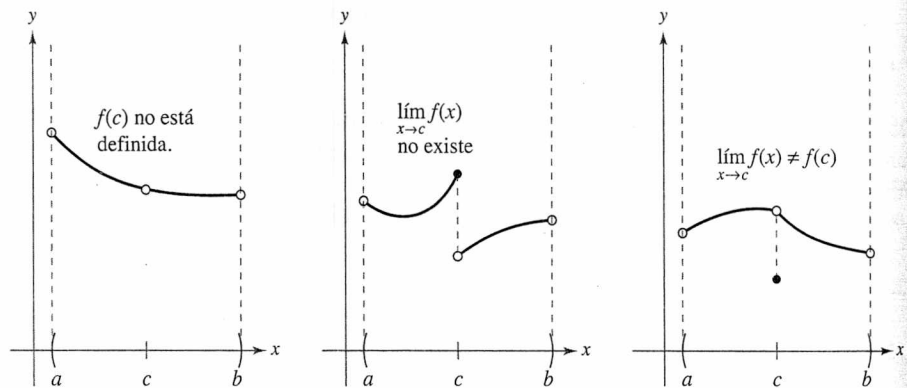
(d) Utilice una herramienta de graficación para estimar  $\cos(0.1)$  con cuatro cifras decimales. Compare el resultado con el apartado (c).

# 3.4 Continuidad y límites laterales

- Determinar la continuidad en un punto y en un intervalo abierto.
- Determinar límites laterales o unilaterales y continuidad en un intervalo cerrado.
- Usar las propiedades de continuidad.
- Comprender y aplicar el teorema del valor medio.

## Continuidad en un punto y en un intervalo abierto

En matemáticas, el término *continuo* tiene el mismo significado que en su uso cotidiano. Decir, de manera informal, que una función  $f$  es continua en  $x = c$ , significa que no hay interrupción de la gráfica de  $f$  en  $c$ . Es decir, la gráfica no tiene saltos o huecos en  $c$ . En la figura 3.25 se identifican tres valores de  $x$  en los que la gráfica de  $f$  no es continua. En los demás puntos del intervalo  $(a, b)$ , la gráfica de  $f$  no sufre interrupciones y es **continua**.



Existen tres condiciones para las que la gráfica de  $f$  no es continua en  $x = c$ .

Figura 3.25

En la figura 3.25, parece que la continuidad en  $x = c$  puede destruirse mediante cualquiera de las siguientes condiciones.

1. La función no está definida en  $x = c$ .
2. No existe el límite de  $f(x)$  en  $x = c$ .
3. El límite de  $f(x)$  existe en  $x = c$ , pero no es igual a  $f(c)$ .

Si no se da *ninguna* de las tres condiciones anteriores, se dice que la función  $f$  es **continua en  $c$** , como lo indica la importante definición que sigue.

### Definición de continuidad

#### Continuidad en un punto

Una función  $f$  es **continua en  $c$**  si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

1.  $f(c)$  está definida.
2.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  existe.
3.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

#### Continuidad en un intervalo abierto

Una función es **continua en un intervalo abierto  $(a, b)$**  si es continua en cada punto del intervalo. Una función continua en la recta completa de los números reales  $(-\infty, \infty)$  es **continua en todas partes**.

### Exploración

De modo informal, se podría decir que una función es *continua* en un intervalo abierto si su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Utilice una herramienta de graficación para representar las siguientes funciones en el intervalo indicado. De las gráficas, ¿qué funciones se dice que son continuas en dicho intervalo? ¿Puede confiar en los resultados obtenidos gráficamente? Explique su razonamiento.

Función	Intervalo
a. $y = x^2 + 1$	$(-3, 3)$
b. $y = \frac{1}{x - 2}$	$(-3, 3)$
c. $y = \frac{\sin x}{x}$	$(-\pi, \pi)$
d. $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$	$(-3, 3)$

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL**  
Para obtener más información sobre el concepto de continuidad, vea el artículo "Leibniz an the Spell of the Continuous", de Hardy Grant, en *The College Mathematic Journal*. Para consultar este artículo, visite [MathArticles.com](http://MathArticles.com).



(a) Disco



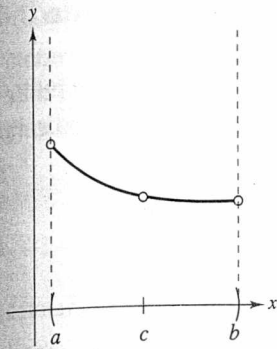
(b) Disco



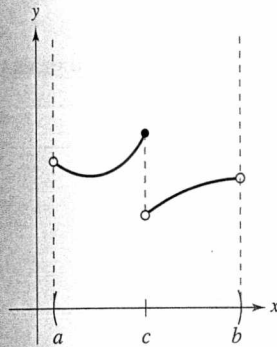
(c) Disco

Figura 3.25

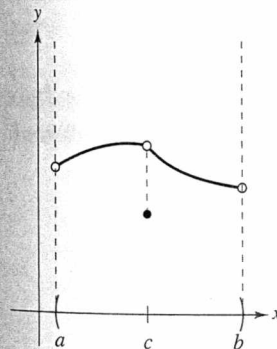
•••••  
••••• **CO**  
veci  
ejer  
se h  
tern  
feri  
una



(a) Discontinuidad removable.



(b) Discontinuidad no removable.



(c) Discontinuidad removable.

Figura 3.26

Considere un intervalo abierto  $I$  que contiene un número real  $c$ . Si la función  $f$  está definida en  $I$  (excepto, posiblemente, en  $c$ ) y no es continua en  $c$ , se dice que  $f$  tiene una **discontinuidad** en  $c$ . Las discontinuidades se clasifican en dos categorías: **removibles o no removibles**. Se dice que una discontinuidad en  $c$  es evitable o removable si  $f$  se puede hacer continua definiendo (o redefiniendo) apropiadamente  $f(c)$ . Por ejemplo, las funciones en las figuras 3.26(a) y (c) presentan discontinuidades evitables o removibles en  $c$ , mientras que la de la figura 3.26(b) presenta una discontinuidad inevitable o no removable en  $c$ .

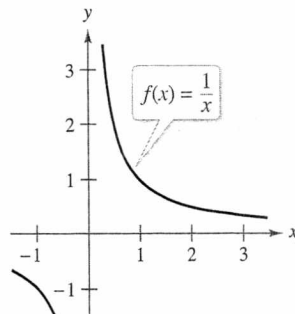
**EJEMPLO 1 Continuidad de una función**

Analice la continuidad de cada función

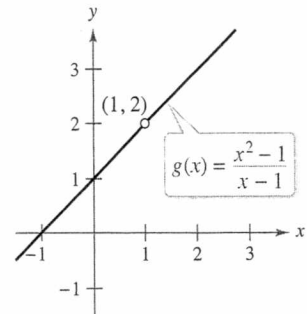
- a.  $f(x) = \frac{1}{x}$     b.  $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$     c.  $h(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$     d.  $y = \text{sen } x$

**Solución**

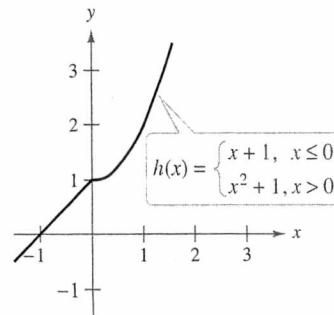
- a. El dominio de  $f$  lo constituyen todos los números reales distintos de cero. A partir del teorema 3.3, puede concluir que  $f$  es continua en todos los valores de  $x$  de su dominio. En  $x = 0$ ,  $f$  tiene una discontinuidad inevitable, como se muestra en la figura 3.27(a). En otras palabras, no hay modo de definir  $f(0)$  para hacer que la nueva función sea continua en  $x = 0$ .
- b. El dominio de  $g$  lo constituyen todos los números reales, excepto  $x = 1$ . Aplicando el teorema 3.3, puede concluir que  $g$  es continua en todos los valores de  $x$  de su dominio. En  $x = 1$ , la función presenta una discontinuidad evitable, como se muestra en la figura 3.27(b). Si  $g(1)$  se define como 2, la “nueva” función es continua para todos los números reales.
- c. El dominio de  $h$  está formado por todos los números reales. La función  $h$  es continua sobre  $(-\infty, 0)$  y en  $(0, \infty)$ , y puesto que
- $$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$$
- $h$  es continua en toda la recta real, como ilustra la figura 3.27(c).
- d. El dominio de  $y$  está formado por todos los números reales. Del teorema 3.6, puede concluir que la función es continua en todo su dominio  $(-\infty, \infty)$ , como se muestra en la figura 3.27(d).



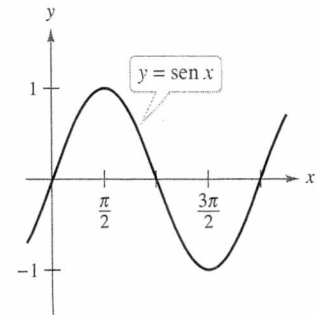
(a) Discontinuidad no removable en  $x = 0$ .



(b) Discontinuidad removable en  $x = 1$ .



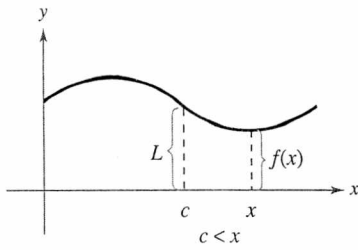
(c) Continua en toda la recta real.



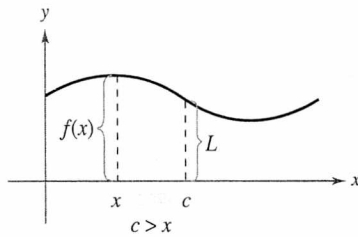
(d) Continua en toda la recta real.

Figura 3.27

**COMENTARIO** Algunas veces se llama a la función del ejemplo 1(a) “discontinua”, pero se ha encontrado que esta terminología es confusa. Es preferible decir que la función tiene una discontinuidad en  $x = 0$ .

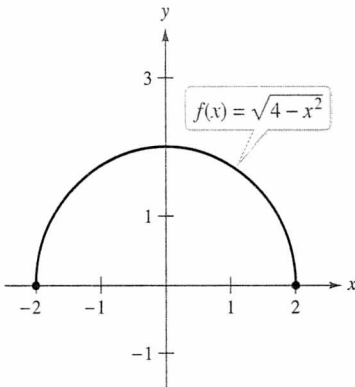


(a) Límite cuando  $x$  tiende a  $c$  por la derecha.



(b) Límite cuando  $x$  se acerca a  $c$  desde la izquierda.

Figura 3.28



El límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a  $-2$  por la derecha es 0.  
Figura 3.29

### Límites laterales y continuidad en un intervalo cerrado

Para comprender el concepto de continuidad sobre un intervalo cerrado, es necesario estudiar antes un tipo diferente de límite, llamado **límite lateral**. Por ejemplo, el **límite por la derecha** significa que  $x$  se aproxima a  $c$  por valores superiores a  $c$  [vea la figura 3.28(a)]. Este límite se denota como

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L. \quad \text{Límite por la derecha}$$

Del mismo modo, el **límite por la izquierda** significa que  $x$  se aproxima a  $c$  por valores inferiores a  $c$  [vea la figura 3.28(b)]. Este límite se denota como

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L. \quad \text{Límite por la izquierda}$$

Los límites laterales son útiles al calcular límites de funciones que contienen radicales. Por ejemplo, si  $n$  es un entero dado, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} = 0.$$

#### EJEMPLO 2 Un límite lateral

Encuentre el límite de  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  cuando  $x$  tiende a  $-2$  por la derecha.

**Solución** Como se muestra en la figura 3.29, el límite cuando  $x$  se aproxima a  $-2$  por la derecha es

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0.$$

Los límites laterales pueden usarse para investigar el comportamiento de las **funciones escalón**. Un tipo común de función escalón es la **función parte entera o mayor entero**  $\llbracket x \rrbracket$ , que se define como

$$\llbracket x \rrbracket = \text{mayor entero } n \text{ tal que } n \leq x. \quad \text{Función entero mayor}$$

Por ejemplo,  $\llbracket 2.5 \rrbracket = 2$  y  $\llbracket -2.5 \rrbracket = -3$ .

#### EJEMPLO 3 Función parte entera o entero mayor

Calcule el límite de la función parte entera o entero mayor  $f(x) = \llbracket x \rrbracket$  cuando  $x$  tiende a 0 por la izquierda y por la derecha.

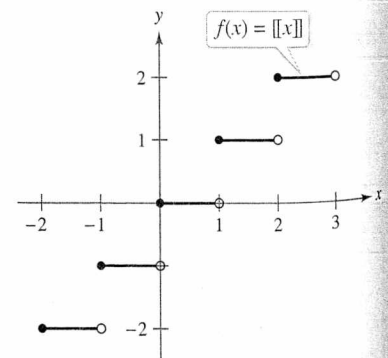
**Solución** Como se muestra en la figura 3.30, el límite cuando  $x$  tiende a 0 por la izquierda está dado por

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \llbracket x \rrbracket = -1$$

y el límite cuando  $x$  se aproxima a 0 por la derecha está dado por

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \llbracket x \rrbracket = 0.$$

La función parte entera o entero mayor no es continua en 0 debido a que los límites por la izquierda y por la derecha en ese punto son diferentes. Mediante un razonamiento similar, se puede concluir que la función parte entera o mayor entero tiene una discontinuidad en cualquier entero  $n$ .



Función parte entera o entero mayor.  
Figura 3.30

Función c  
cerrado.  
Figura 3.

f es func  
Figura 3

Cuando el límite por la izquierda no es igual al límite por la derecha, el límite (bilateral) *no existe*. El siguiente teorema lo explica mejor. Su demostración se obtiene directamente de la definición de límite lateral.

**TEOREMA 3.10 Existencia de un límite**

Si  $f$  es una función, y  $c$  y  $L$  son números reales, el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a  $c$  es  $L$  si y solo si

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L.$$

El concepto de límite lateral permite extender la definición de continuidad a los intervalos cerrados. Básicamente, se dice que una función es continua sobre un intervalo cerrado si es continua en el interior del intervalo y posee continuidad lateral en los extremos. Esto se enuncia de manera formal como sigue.

**Definición de continuidad sobre un intervalo cerrado**

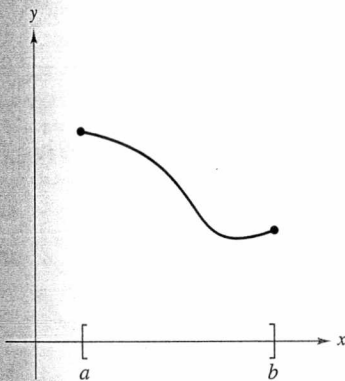
Una función  $f$  es **continua sobre un intervalo cerrado**  $[a, b]$  si es continua sobre el intervalo abierto  $(a, b)$  y

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

La función  $f$  es **continua por la derecha** en  $a$  y **continua por la izquierda** en  $b$  (vea la figura 3.31).



Función continua en un intervalo cerrado.

Figura 3.31

Se pueden establecer definiciones análogas para incluir la continuidad en intervalos con la forma  $(a, b]$  y  $[a, b)$ , que no son abiertos ni cerrados o infinitos. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \sqrt{x}$$

es continua sobre el intervalo infinito  $[0, \infty)$ , y la función

$$g(x) = \sqrt{2-x}$$

es continua sobre el intervalo infinito  $(-\infty, 2]$ .

**EJEMPLO 4**

**Continuidad sobre un intervalo cerrado**

Analice la continuidad de

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

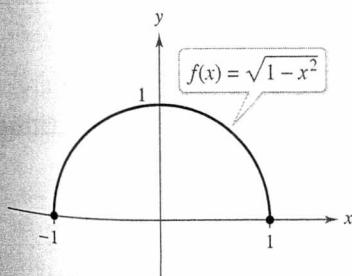
**Solución** El dominio de  $f$  es el intervalo cerrado  $[-1, 1]$ . En todos los puntos del intervalo abierto  $(-1, 1)$ , la continuidad de  $f$  obedece a los teoremas 3.4 y 3.5. Además, dado que

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(-1) \quad \text{Continua por la derecha}$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(1) \quad \text{Continua por la izquierda}$$

puede concluir que  $f$  es continua en el intervalo cerrado  $[-1, 1]$ , como se ilustra en la figura 3.32.



$f$  es función continua sobre  $[-1, 1]$ .

Figura 3.32

El siguiente ejemplo muestra cómo se puede aplicar un límite lateral con el fin de determinar el cero absoluto en la escala Kelvin.

**EJEMPLO 5 Ley de Charles y cero absoluto**

**COMENTARIO** La ley de Charles para los gases (suponiendo una presión constante) puede enunciarse como

$$V = RT$$

donde  $V$  es el volumen,  $R$  es una constante y  $T$  es la temperatura.

En la escala Kelvin, el *cero absoluto* es la temperatura 0 K. A pesar de que se han obtenido temperaturas muy cercanas a 0 K en laboratorio, nunca se ha alcanzado el cero absoluto. De hecho, existen evidencias que sugieren la imposibilidad de alcanzar el cero absoluto. ¿Cómo determinaron los científicos que 0 K es el “límite inferior” de la temperatura de la materia? ¿Cuál es el cero absoluto en la escala Celsius?

**Solución** La determinación del cero absoluto proviene del trabajo del físico francés Jacques Charles (1746-1823), quien descubrió que el volumen de un gas a presión constante crece de manera lineal con respecto a la temperatura. En la tabla siguiente se ilustra la relación entre volumen y temperatura. Para crear los valores que aparecen en la tabla, un mol de hidrógeno se mantiene a una presión constante de una atmósfera. El volumen  $V$  es aproximado y se mide en litros y la temperatura  $T$  se mide en grados Celsius.

$T$	-40	-20	0	20	40	60	80
$V$	19.1482	20.7908	22.4334	24.0760	25.7186	27.3612	29.0038

En la figura 3.33 se muestran los puntos representados en la tabla. Empleando dichos puntos, se puede determinar que  $T$  y  $V$  se relacionan a través de la ecuación lineal

$$V = 0.08213T + 22.4334.$$

Resolviendo para  $T$ , obtiene una ecuación para la temperatura del gas

$$T = \frac{V - 22.4334}{0.08213}$$

Mediante el razonamiento de que el volumen del gas puede tender a 0 (pero nunca ser igual o menor que cero), puede concluir que la “temperatura mínima posible” se obtiene por medio de

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow 0^+} T &= \lim_{V \rightarrow 0^+} \frac{V - 22.4334}{0.08213} \\ &= \frac{0 - 22.4334}{0.08213} \\ &\approx -273.15. \end{aligned}$$

Use sustitución directa.

De tal manera, el cero en la escala Kelvin (0 K) es aproximadamente  $-273.15^\circ$  en la escala Celsius.

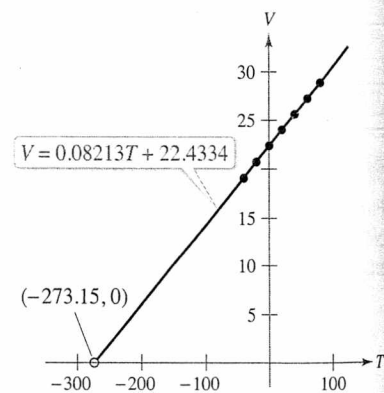
La tabla siguiente muestra la temperatura del ejemplo 5, en la escala Fahrenheit. Repita la solución del ejemplo 5 utilizando estas temperaturas y volúmenes. Utilice el resultado para determinar el valor del cero absoluto en la escala Fahrenheit.

$T$	-40	-4	32	68	104	140	176
$V$	19.1482	20.7908	22.4334	24.0760	25.7186	27.3612	29.0038

Massachusetts Institute of Technology(MIT)



En 2003, investigadores del Massachusetts Institute of Technology utilizaron láser y evaporación para producir un gas superfrío en el que los átomos se superponen. Este gas se denomina condensado de Bose-Einstein. Midieron una temperatura de alrededor de 450 pK (picokelvins) o  $-273.14999999955^\circ\text{C}$  aproximadamente. (Fuente: *Science Magazine*, 12 de septiembre de 2003.)



El volumen del hidrógeno gaseoso depende de su temperatura.

Figura 3.33

AU  
El conce fue pres por Aug 1821. La texto C que las definida pequeñ en x: "... continu: de la dif disminu los de 0 Consul para le

CO  
cons 3.12 las c posit de f( a c e



**AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY**  
(1789-1857)

El concepto de función continua fue presentado por primera vez por Augustin-Louis Cauchy en 1821. La definición expuesta en su texto *Cours d'Analyse*, establecía que las pequeñas modificaciones definidas en  $y$  eran resultado de pequeñas modificaciones indefinidas en  $x$ : "...  $f(x)$  será una función continua si... los valores numéricos de la diferencia  $f(x + \alpha) - f(x)$  disminuyen de forma indefinida con los de  $\alpha$ ...".

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para leer más de esta biografía.

## Propiedades de la continuidad

En la sección 3.3 estudió las propiedades de los límites. Cada una de esas propiedades genera una propiedad correspondiente relativa a la continuidad de una función. Por ejemplo, el teorema 3.11 es consecuencia directa del teorema 3.2.

### TEOREMA 3.11 Propiedades de la continuidad

Si  $b$  es un número real, y  $f$  y  $g$  son continuas en  $x = c$ , entonces las siguientes funciones también son continuas en  $c$ .

1. Múltiplo escalar:  $bf$ .
2. Suma y diferencia:  $f \pm g$ .
3. Producto:  $fg$ .
4. Cociente:  $\frac{f}{g}$ ,  $g(c) \neq 0$ .

En el apéndice A se presenta una demostración del teorema 3.11.

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para el video de Bruce Edwards de esta demostración.

Es importante que usted sea capaz de reconocer las funciones que son continuas en cada punto de sus dominios. La lista siguiente resume las funciones que ha estudiado hasta ahora, que son continuas en cada punto de sus dominios.

1. Funciones polinomiales:  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
2. Funciones racionales:  $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ,  $q(x) \neq 0$
3. Funciones radicales:  $f(x) = \sqrt[n]{x}$
4. Funciones trigonométricas:  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\cot x$ ,  $\tan x$ ,  $\sec x$ ,  $\csc x$ .

Combinando el teorema 3.11 con esta síntesis, puede concluir que una gran variedad de funciones elementales son continuas en sus dominios.

### EJEMPLO 6

#### Aplicar las propiedades de la continuidad

...► Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Por el teorema 3.11, cada una de las siguientes funciones es continua en todos los puntos de su dominio.

$$f(x) = x + \sin x, \quad f(x) = 3 \tan x, \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{\cos x}$$

El siguiente teorema, consecuencia del teorema 3.5, permite determinar la continuidad de funciones *compuestas*, como

$$f(x) = \sin 3x, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad \text{y} \quad f(x) = \tan \frac{1}{x}$$

### TEOREMA 3.12 Continuidad de una función compuesta

Si  $g$  es continua en  $c$  y  $f$  es continua en  $g(c)$ , entonces la función compuesta dada por  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  es continua en  $c$ .

**Demostración** Por la definición de continuidad  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c)$  y  $\lim_{x \rightarrow g(c)} f(x) = f(g(c))$ . Al aplicar el teorema 3.5 con  $L = g(c)$  se obtiene  $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow c} g(x)) = f(g(c))$ . De esta manera  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  es continua en  $c$ .

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para el video de Bruce Edwards de esta demostración.

© Bettmann/CORBIS

...►

**COMENTARIO** Una consecuencia del teorema 3.12 es que si  $f$  y  $g$  satisfacen las condiciones señaladas, es posible determinar que el límite de  $f(g(x))$  cuando  $x$  se aproxima a  $c$  es

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(g(c)).$$

## EJEMPLO 7

## Probar la continuidad

Describe el intervalo o intervalos donde cada función es continua.

$$\text{a. } f(x) = \tan x \quad \text{b. } g(x) = \begin{cases} \text{sen } \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{c. } h(x) = \begin{cases} x \text{ sen } \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

## Solución

a. La función tangente  $f(x) = \tan x$  no está definida en

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

En todos los demás puntos es continua. De tal modo,  $f(x) = \tan x$  es continua en todos los intervalos abiertos

$$\dots, \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \dots$$

como muestra la figura 3.34(a).

b. Puesto que  $y = 1/x$  es continua, excepto en  $x = 0$ , y la función seno es continua para todos los valores reales de  $x$ , resulta que

$$y = \text{sen } \frac{1}{x}$$

es continua en todos los valores reales salvo en  $x = 0$ . En  $x = 0$ , no existe el límite de  $g(x)$  (vea el ejemplo 5 de la sección 3.2). Por tanto,  $g$  es continua en los intervalos  $(-\infty, 0)$  y  $(0, \infty)$ , como se muestra en la figura 3.34(b).

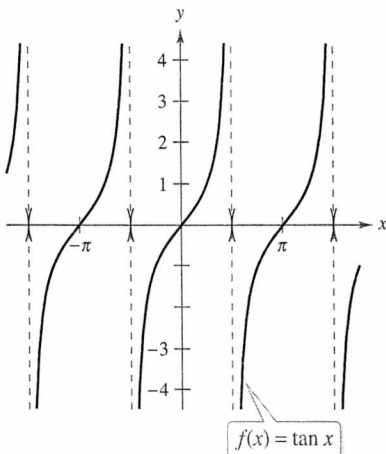
c. Esta función es parecida a la del apartado (b), con excepción de que las oscilaciones están amortiguadas por el factor  $x$ . Aplicando el teorema del emparedado, se obtiene

$$-|x| \leq x \text{ sen } \frac{1}{x} \leq |x|, \quad x \neq 0$$

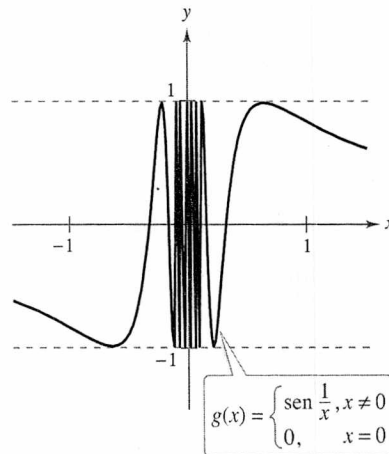
y se puede concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0.$$

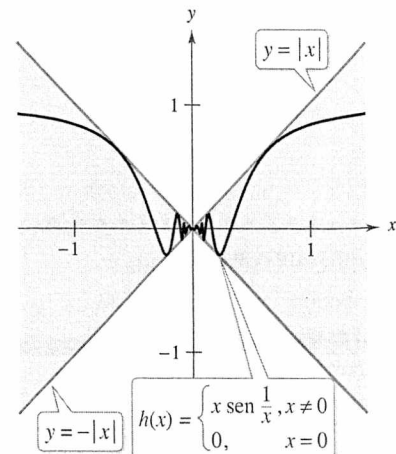
De tal manera,  $h$  es continua en toda la recta real, como se muestra en la figura 3.34(c).



(a)  $f$  es continua en cada intervalo abierto de su dominio.



(b)  $g$  es continua en  $(-\infty, 0)$  y  $(0, \infty)$ .



(c)  $h$  es continua en toda la recta real.

Figura 3.34

### Teorema del valor medio

El teorema 3.13 es un importante teorema relativo al comportamiento de las funciones continuas en un intervalo cerrado.

...▷ **TEOREMA 3.13 Teorema del valor medio**

Si  $f$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ ,  $f(a) \neq f(b)$  y  $k$  es cualquier número entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , entonces existe al menos un número  $c$  en  $[a, b]$  tal que

$$f(c) = k.$$

...••••• **COMENTARIO** El teorema del valor medio asegura que existe al menos un número  $c$ , pero no proporciona un método para encontrarlo. Tales teoremas se denominan **teoremas de existencia**. Al consultar un libro de cálculo avanzado, se observará que la demostración de este teorema se basa en una propiedad de los números reales llamados *completitud*. El teorema del valor medio establece que para que una función sea continua en  $f$ , si  $x$  recorre todos los valores desde  $a$  hasta  $b$ , entonces  $f(x)$  debe asumir todos los valores entre  $f(a)$  y  $f(b)$ .

Como ejemplo sencillo del teorema del valor medio, considere la estatura de las personas. Suponga que una niña medía 1.52 m (5 pies) al cumplir 13 años, y 1.70 m al cumplir 14 años, entonces, para cualquier altura  $h$  entre 1.52 y 1.70 m, debe existir algún momento  $t$  en el que su estatura fue exactamente  $h$ . Esto parece razonable, debido a que el crecimiento humano es continuo y la estatura de una persona no cambia de un valor a otro en forma abrupta.

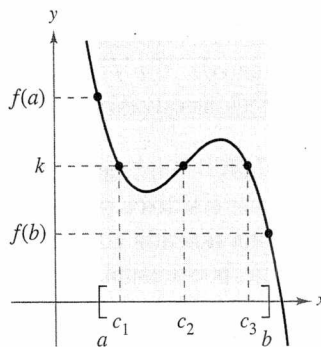
El teorema del valor medio garantiza la existencia de *al menos* un número  $c$  en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Puede, claro está, haber más de uno, tal que

$$f(c) = k$$

como se muestra en la figura 3.35. Una función discontinua no necesariamente manifiesta la propiedad del valor medio. Por ejemplo, la gráfica de la función discontinua de la figura 3.36 salta sobre la recta horizontal dada por

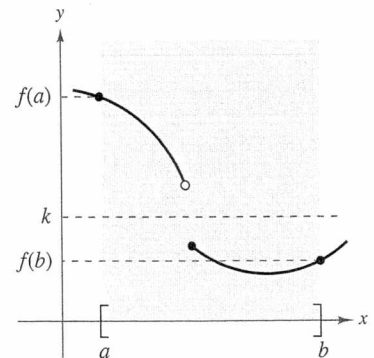
$$y = k$$

sin que exista valor alguno para  $c$  en  $[a, b]$ , tal que  $f(c) = k$ .



$f$  es continua en  $[a, b]$ .  
[Existen tres números  $c$  tales que  $f(c) = k$ .]

**Figura 3.35**



$f$  no es continua en  $[a, b]$ .  
[No existen números  $c$  tales que  $f(c) = k$ .]

**Figura 3.36**

El teorema del valor medio suele emplearse para localizar los ceros de una función que es continua en un intervalo cerrado. De manera más específica, si  $f$  es continua en  $[a, b]$  y  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signo distinto, entonces el teorema garantiza la existencia de al menos un cero de  $f$  en el intervalo cerrado  $[a, b]$ .

**EJEMPLO 8**

**Aplicar el teorema del valor medio**

Utilice el teorema del valor medio para demostrar que la función polinomial

$$f(x) = x^3 + 2x - 1$$

tiene un cero en el intervalo  $[0, 1]$ .

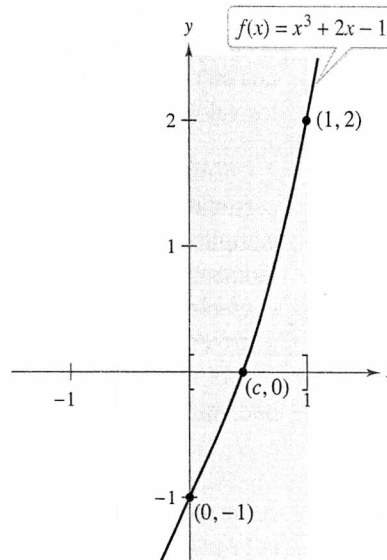
**Solución** Observe que  $f$  es continua en el intervalo cerrado  $[0, 1]$ . Dado que

$$f(0) = 0^3 + 2(0) - 1 = -1 \quad \text{y} \quad f(1) = 1^3 + 2(1) - 1 = 2$$

resulta que  $f(0) < 0$  y  $f(1) > 0$ . Por tanto, puede aplicar el teorema del valor medio y concluir que debe existir algún  $c$  en  $[0, 1]$  tal que

$$f(c) = 0 \quad f \text{ tiene un cero en el intervalo cerrado } [0, 1].$$

como se muestra en la figura 3.37.

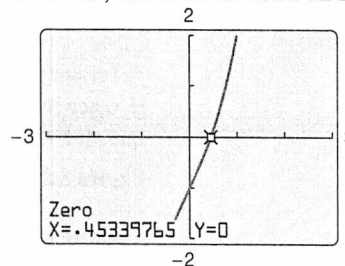


$f$  es continua en  $[0, 1]$  con  $f(0) < 0$  y  $f(1) > 0$ .

**Figura 3.37**

El **método de bisección** para aproximar los ceros reales de una función continua es parecido al método empleado en el ejemplo 8. Si se sabe que existe un cero en el intervalo cerrado  $[a, b]$ , dicho cero debe pertenecer al intervalo  $[a, (a + b)/2]$  o  $[(a + b)/2, b]$ . A partir del signo de  $f((a + b)/2)$ , se puede determinar cuál intervalo contiene al cero. Mediante bisecciones sucesivas del intervalo, se puede “atrapar” al cero de la función.

► **TECNOLOGÍA** También puede usar el **zoom** de una herramienta de graficación para estimar los ceros reales de una función continua. Al hacer acercamientos de forma repetida a la zona donde la gráfica corta al eje  $x$  y ajustar la escala de dicho eje, puede estimar el cero de la función con la precisión deseada. El cero de  $x^3 + 2x - 1$  es alrededor de 0.453, como se muestra en la figura 3.38.



Cero de  $f(x) = x^3 + 2x - 1$ .

**Figura 3.38**

Límite  
ramie:  
continu

(a)  $\lim_{x \rightarrow c}$

1.

5

4

3

2

1

+

-1

3.

y

4

+

-

1

+

-1

+

-1

+

-1

+

-1

+

-1

+

-1

+

-1

Calcula  
existe); ;

7.  $\lim_{x \rightarrow 8^+}$

9.  $\lim_{x \rightarrow 5^-}$

11.  $\lim_{x \rightarrow -}$

13.  $\lim_{x \rightarrow 0^-}$

15.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$

16.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$

17.  $\lim_{x \rightarrow 3^-}$

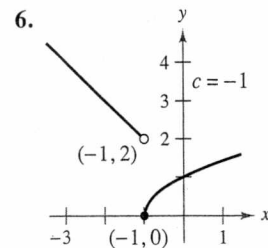
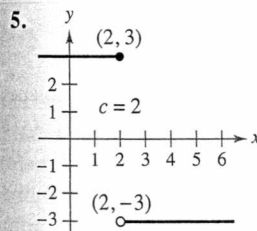
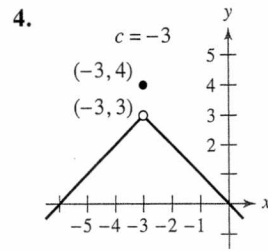
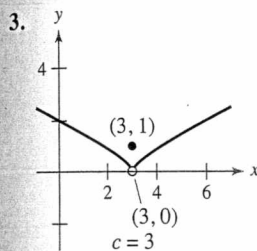
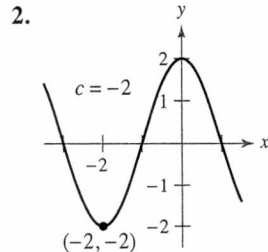
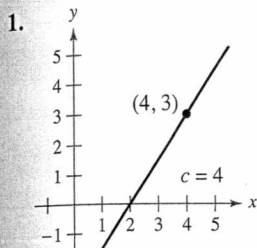
18.  $\lim_{x \rightarrow 3}$

# 3.4 Ejercicios

Consulte [CalcChat.com](http://CalcChat.com) para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Límites y continuidad** En los ejercicios 1-6, utilice una herramienta de graficación para determinar el límite y analizar la continuidad de la función.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$     (b)  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$     (c)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$



**Calcular el límite** En los ejercicios 7-26, calcule el límite (si existe); si no existe, explique por qué.

7.  $\lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{1}{x+8}$     8.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{x+2}$   
 9.  $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x-5}{x^2-25}$     10.  $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{4-x}{x^2-16}$   
 11.  $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$     12.  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$   
 13.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$     14.  $\lim_{x \rightarrow 10^+} \frac{|x-10|}{x-10}$   
 15.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$   
 16.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(x+\Delta x)^2 + x + \Delta x - (x^2 + x)}{\Delta x}$   
 17.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ , donde  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2}, & x \leq 3 \\ \frac{12-2x}{3}, & x > 3 \end{cases}$   
 18.  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ , donde  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & x < 3 \\ -x^2 + 4x - 2, & x \geq 3 \end{cases}$

19.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , donde  $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x < 1 \\ x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

20.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ , donde  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 1-x, & x > 1 \end{cases}$

21.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \cot x$

22.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sec x$

23.  $\lim_{x \rightarrow 4^-} (5\lfloor x \rfloor - 7)$

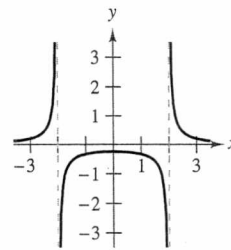
24.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - \lfloor x \rfloor)$

25.  $\lim_{x \rightarrow 3} (2 - \lfloor -x \rfloor)$

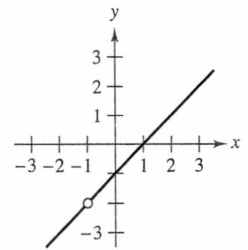
26.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( 1 - \left\lfloor \left\lfloor -\frac{x}{2} \right\rfloor \right\rfloor \right)$

**Continuidad de una función** En los ejercicios 27-30, analice la continuidad de cada función.

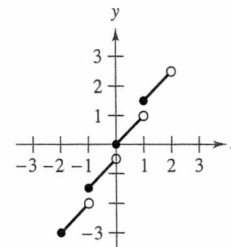
27.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$



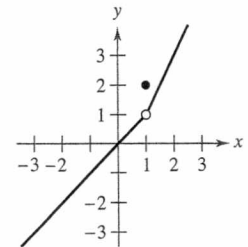
28.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$



29.  $f(x) = \frac{1}{2}\lfloor x \rfloor + x$



30.  $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$



**Continuidad de una función en intervalo cerrado** En los ejercicios 31-34, analice la continuidad de la función en el intervalo cerrado.

Función	Intervalo
31. $g(x) = \sqrt{49 - x^2}$	$[-7, 7]$
32. $f(t) = 3 - \sqrt{9 - t^2}$	$[-3, 3]$
33. $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \leq 0 \\ 3 + \frac{1}{2}x, & x > 0 \end{cases}$	$[-1, 4]$
34. $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$	$[-1, 2]$

**Discontinuidades removibles y no removibles** En los ejercicios 35-60, encuentre los valores de  $x$  (si existe alguno) en los que no es continua. ¿Cuáles discontinuidades son evitables o removibles?

35.  $f(x) = \frac{6}{x}$

36.  $f(x) = \frac{4}{x-6}$

37.  $f(x) = x^2 - 9$

38.  $f(x) = x^2 - 4x + 4$

39.  $f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$

40.  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

41.  $f(x) = 3x - \cos x$

42.  $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$

43.  $f(x) = \frac{x}{x^2 - x}$

44.  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

45.  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

46.  $f(x) = \frac{x - 5}{x^2 - 25}$

47.  $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 3x - 10}$

48.  $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - x - 6}$

49.  $f(x) = \frac{|x + 7|}{x + 7}$

50.  $f(x) = \frac{|x - 5|}{x - 5}$

51.  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

52.  $f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$

53.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x \leq 2 \\ 3 - x, & x > 2 \end{cases}$

54.  $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 1, & x > 2 \end{cases}$

55.  $f(x) = \begin{cases} \tan \frac{\pi x}{4}, & |x| < 1 \\ x, & |x| \geq 1 \end{cases}$

56.  $f(x) = \begin{cases} \csc \frac{\pi x}{6}, & |x - 3| \leq 2 \\ 2, & |x - 3| > 2 \end{cases}$

57.  $f(x) = \csc 2x$

58.  $f(x) = \tan \frac{\pi x}{2}$

59.  $f(x) = \llbracket x - 8 \rrbracket$

60.  $f(x) = 5 - \llbracket x \rrbracket$

**Desarrollar una función continua** En los ejercicios 61-66, encuentre la constante  $a$ , o las constantes  $a$  y  $b$ , tales que la función sea continua en toda la recta real.

61.  $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \geq 1 \\ ax - 4, & x < 1 \end{cases}$

62.  $f(x) = \begin{cases} 3x^3, & x \leq 1 \\ ax + 5, & x > 1 \end{cases}$

63.  $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 2 \\ ax^2, & x > 2 \end{cases}$

64.  $g(x) = \begin{cases} 4 \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ a - 2x, & x \geq 0 \end{cases}$

65.  $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq -1 \\ ax + b, & -1 < x < 3 \\ -2, & x \geq 3 \end{cases}$

66.  $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - a^2}{x - a}, & x \neq a \\ 8, & x = a \end{cases}$

**Continuidad de una composición compuesta** En los ejercicios 67-72, analice la continuidad de la función compuesta  $h(x) = f(g(x))$ .

67.  $f(x) = x^2$   
 $g(x) = x - 1$

68.  $f(x) = 5x + 1$   
 $g(x) = x^3$

69.  $f(x) = \frac{1}{x - 6}$   
 $g(x) = x^2 + 5$

70.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$   
 $g(x) = x - 1$

71.  $f(x) = \tan x$   
 $g(x) = \frac{x}{2}$

72.  $f(x) = \sen x$   
 $g(x) = x^2$

**Determinar discontinuidades** En los ejercicios 73-76, utilice una herramienta de graficación para representar la función. Use la gráfica para determinar todo valor de  $x$  en donde la función no sea continua.

73.  $f(x) = \llbracket x \rrbracket - x$

74.  $h(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 15}$

75.  $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x > 4 \\ 2x - 5, & x \leq 4 \end{cases}$

76.  $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x}, & x < 0 \\ 5x, & x \geq 0 \end{cases}$

**Prueba de continuidad** En los ejercicios 77-84, describa el o los intervalos en los que la función es continua.

77.  $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 2}$

78.  $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x}}$

79.  $f(x) = 3 - \sqrt{x}$

80.  $f(x) = x\sqrt{x + 3}$

81.  $f(x) = \sec \frac{\pi x}{4}$

82.  $f(x) = \cos \frac{1}{x}$

83.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

84.  $f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x \neq 3 \\ 1, & x = 3 \end{cases}$

**Redacción** En los ejercicios 85 y 86, utilice una herramienta de graficación para representar la función en el intervalo  $[-4, 4]$ . ¿Parece continua en este intervalo la gráfica de la función? ¿Es continua la función en  $[-4, 4]$ ? Escriba unas líneas sobre la importancia de examinar una función analíticamente, además de hacerlo de manera gráfica.

85.  $f(x) = \frac{\sen x}{x}$

86.  $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

**Redacción** En los ejercicios 87-90, explique por qué la función tiene un cero en el intervalo dado.

Función	Intervalo
87. $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - x^3 + 4$	$[1, 2]$
88. $f(x) = x^3 + 5x - 3$	$[0, 1]$
89. $f(x) = x^2 - 2 - \cos x$	$[0, \pi]$
90. $f(x) = -\frac{5}{x} + \tan\left(\frac{\pi x}{10}\right)$	$[1, 4]$

**Uso del teorema del valor medio** En los ejercicios 91-94, utilice el teorema del valor medio y una herramienta de graficación para calcular el cero de la función en el intervalo  $[0, 1]$ . Realice acercamientos de forma repetida en la gráfica de la función con el fin de determinar el cero con una precisión de dos cifras decimales. Use la función *cero* o *raíz* de su herramienta de graficación para estimar el cero con una precisión de cuatro cifras decimales.

91.  $f(x) = x^3 + x - 1$

92.  $f(x) = x^4 - x^2 + 3x - 1$

93.  $g(x)$   
94.  $h(x)$   
Uso d  
verifiq  
indica  
95.  $f(x)$   
96.  $f(x)$   
97.  $f(x)$   
98.  $f(x)$   
**DES**  
99.  
100.  
101.  
102.  
Christian

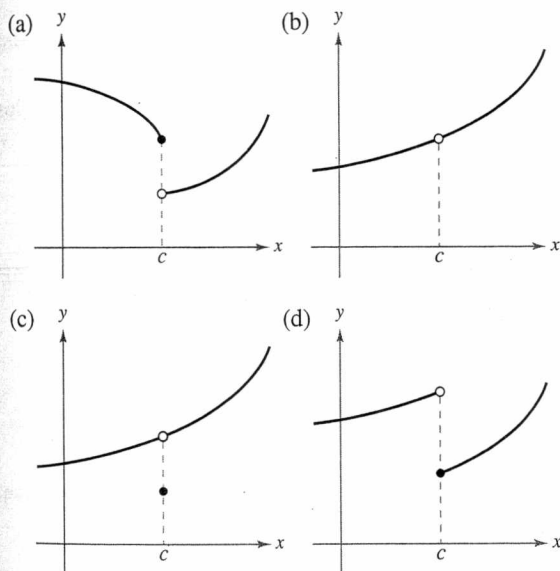
93.  $g(t) = 2 \cos t - 3t$   
 94.  $h(\theta) = \tan \theta + 3\theta - 4$

**Uso del teorema del valor medio** En los ejercicios 95-98, verifique que el teorema de valor medio es aplicable al intervalo indicado y encuentre el valor de  $c$  garantizado por el teorema.

95.  $f(x) = x^2 + x - 1$ ,  $[0, 5]$ ,  $f(c) = 11$   
 96.  $f(x) = x^2 - 6x + 8$ ,  $[0, 3]$ ,  $f(c) = 0$   
 97.  $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ ,  $[0, 3]$ ,  $f(c) = 4$   
 98.  $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$ ,  $[\frac{5}{2}, 4]$ ,  $f(c) = 6$

**DESARROLLO DE CONCEPTOS**

99. **Usar la definición de continuidad** En cada una de las gráficas siguientes, especifique cómo se destruye la continuidad en  $x = c$ :



100. **Trazar una gráfica** Trace la gráfica de cualquier función  $f$  tal que:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0.$$

¿Esta función es continua en  $x = 3$ ? Explique su respuesta.

101. **Continuidad de combinación de funciones** Si las funciones  $f$  y  $g$  son continuas para todos los  $x$  reales, ¿ $f + g$  siempre es continua para todos los  $x$  reales? ¿ $f/g$  siempre es continua para todos los  $x$  reales? Si alguna no es continua, elabore un ejemplo para comprobar su conclusión.

102. **Discontinuidades removibles y permanentes** Describa la diferencia entre una discontinuidad removible y una no removible. En su explicación, dé ejemplos de las siguientes descripciones.

- (a) Una función con una discontinuidad no evitable en  $x = 4$ .  
 (b) Una función con una discontinuidad evitable en  $x = -4$ .  
 (c) Una función que cuenta con las dos características descritas en los incisos (a) y (b).

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 103-106, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o proporcione un ejemplo que lo demuestre.

103. Si  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  y  $f(c) = L$ , y  $f(c) = L$ , entonces  $f$  es continua en  $c$ .  
 104. Si  $f(x) = g(x)$  para  $x \neq c$  y  $f(c) \neq g(c)$ , entonces  $f$  o  $g$  no es continua en  $c$ .  
 105. En una función racional puede haber infinitos valores de  $x$  en los que no es continua.  
 106. La función

$$f(x) = \frac{|x - 1|}{x - 1}$$

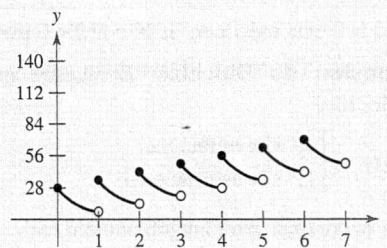
es continua en  $(-\infty, \infty)$ .

107. **Piénselo** Describa en qué difieren las funciones

$$f(x) = 3 + \llbracket x \rrbracket \text{ y } g(x) = 3 - \llbracket -x \rrbracket.$$



**¿CÓMO LO VE?** Todos los días se disuelven 28 onzas de cloro en el agua de una piscina. En la gráfica se muestra la cantidad de cloro  $f(t)$  en esa agua luego de  $t$  días. Calcule e interprete  $\lim_{t \rightarrow 4^-} f(t)$  y  $\lim_{t \rightarrow 4^+} f(t)$ .



109. **Tarifas telefónicas** Una llamada de larga distancia entre dos ciudades cuesta \$0.40 los primeros 10 minutos y \$0.05 por cada minuto o fracción adicional. Utilice la función parte entera o entero mayor para expresar el costo  $C$  de una llamada en términos del tiempo  $t$  (en minutos). Dibuje la gráfica de esta función y analice su continuidad.

• • 110. **Gestión de inventarios** • • • • •

El número de unidades en inventario en una pequeña empresa está dado por

$$N(t) = 25 \left( 2 \left\lceil \frac{t + 2}{2} \right\rceil - t \right)$$

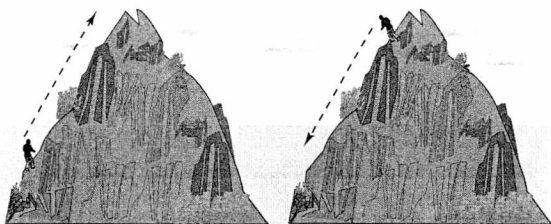
donde  $t$  representa el tiempo en meses.

Dibuje la gráfica de esta función y analice su continuidad.

¿Con qué frecuencia la empresa debe reponer existencias?



**111. Déjale vu** Un sábado a las 8:00 de la mañana, un hombre comienza a correr por la ladera de una montaña hacia su campamento de fin de semana (vea la figura). El domingo a las 8:00 de la mañana baja corriendo la montaña. Tarda 20 minutos en subir, solo 10 minutos en bajar. En cierto punto del camino de bajada el hombre se da cuenta que pasó por el mismo lugar a la misma hora del sábado. Demuestre que el hombre está en lo cierto. [Sugerencia: Considere que  $s(t)$  y  $r(t)$  son las funciones de subida y bajada, y aplique el teorema del valor medio para la función  $f(t) = s(t) - r(t)$ .]



Sábado 8:00 de la mañana

Domingo 8:00 de la mañana

**112. Volumen** Utilice el teorema del valor medio para demostrar que entre todas las esferas cuyos radios pertenecen al intervalo  $[5, 8]$  hay una con un volumen de 1500 centímetros cúbicos.

**113. Demostración** Demuestre que si  $f$  es continua y carece de ceros en  $[a, b]$ , entonces

$f(x) > 0$  para todo  $x$  en  $[a, b]$  o  $f(x) < 0$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ .

**114. Función de Dirichlet** Demuestre que la función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

no es continua para ningún número real.

**115. Función continua** Demuestre que la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ kx, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es continua solo en  $x = 0$ . (Suponga que  $k$  es cualquier número real distinto de cero.)

**116. Función signo** La función signo se define como

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de  $\text{sgn}(x)$  y calcule los siguientes límites (si es posible).

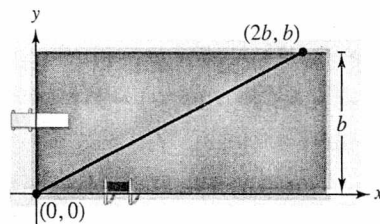
(a)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sgn}(x)$    (b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sgn}(x)$    (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn}(x)$

**117. Modelado de datos** La tabla recoge valores de la velocidad  $S$  (en pies/s) de un objeto tras caer  $t$  segundos.

$t$	0	5	10	15	20	25	30
$S$	0	48.2	53.5	55.2	55.9	56.2	56.3

- (a) Trace la curva con los datos.
- (b) ¿Parece existir una velocidad límite para el objeto? En caso afirmativo, identifique una posible causa.

**118. Elaborar modelos** Un nadador cruza una piscina de una anchura  $b$  nadando en línea recta desde  $(0, 0)$  hasta  $(2b, b)$  (vea la figura).



(a) Sea  $f$  una función definida como la coordenada  $y$  del punto sobre el lado más largo de la piscina que se encuentra más cerca del nadador en cualquier momento dado durante su trayecto a través de la piscina. Encuentre la función  $f$  y dibuje su gráfica. ¿Se trata de una función continua? Explique la respuesta.

(b) Sea  $g$  la distancia mínima entre el nadador y el lado más largo de la piscina. Encuentre la función  $g$  y dibuje la gráfica. ¿Se trata de una función continua? Explique la respuesta.

**119. Hacer una función continua** Encuentre todos los valores de  $c$  tales que  $f$  sea continua en  $(-\infty, \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq c \\ x, & x > c \end{cases}$$

**120. Demostración** Demuestre que para todo número real  $y$  existe un  $x$  en  $(-\pi/2, \pi/2)$ , tal que  $\tan x = y$ .

**121. Hacer una función continua** Sea

$$f(x) = \frac{\sqrt{x + c^2} - c}{x}, \quad c > 0.$$

¿Cómo se puede definir  $f$  en  $x = 0$  con el fin de que sea continua en ese punto?

**122. Demostración** Demuestre que si

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c + \Delta x) = f(c)$$

entonces  $f$  es continua en  $c$ .

**123. Función continua** Analice la continuidad de la función  $h(x) = x \llbracket x \rrbracket$ .

**124. Demostración**

(a) Sean  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  funciones continuas en el intervalo  $[a, b]$ . Si  $f_1(a) < f_2(a)$  y  $f_1(b) > f_2(b)$ , demuestre que entre  $a$  y  $b$  existe  $c$ , tal que  $f_1(c) = f_2(c)$ .

(b) Demuestre que existe  $c$  en  $[0, \frac{\pi}{2}]$  tal que  $\cos x = x$ . Utilice una herramienta de graficación para estimar  $c$  con tres cifras decimales.

**DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM**

**125.** Afirar o desmentir: si  $x$  y  $y$  son números reales con  $y \geq 0$ , y  $y(y + 1) \leq (x + 1)^2$ , entonces  $y(y - 1) \leq x^2$ .

**123.** Encuentre todas las polinomiales  $P(x)$  tales que

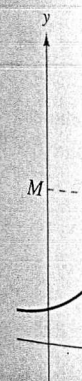
$$P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1 \text{ y } P(0) = 0.$$

Estos problemas fueron preparados por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

$$\frac{1}{-6} - 4$$

$$\frac{3}{x-2} \rightarrow -$$
 cuando  $x$

$f(x)$  crec  
límite cu  
Figura 3



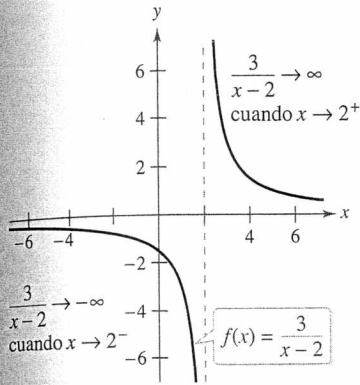
Límites  
Figura

# 3.5 Límites infinitos y asíntotas verticales

- Determinar límites infinitos por la izquierda y por la derecha.
- Encontrar y dibujar las asíntotas verticales de la gráfica de una función.

## Límites infinitos

Sea  $f$  la función dada por  $f(x) = 3/(x - 2)$ . A partir de la figura 3.39 y de la siguiente tabla, se puede observar que  $f(x)$  *decrece sin cota* o sin límite cuando  $x$  se aproxima a 2 por la izquierda y que  $f(x)$  *crece sin cota* o sin límite cuando  $x$  se aproxima a 2 por la derecha.



$f(x)$  crece y decrece sin cota o sin límite cuando  $x$  tiende a 2.

Figura 3.39

$x$  se aproxima a 2 por la izquierda

$x$  se aproxima a 2 por la derecha

$x$	1.5	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.5
$f(x)$	-6	-30	-300	-3000	?	3000	300	30	6

$f(x)$  decrece sin cota o sin límite

$f(x)$  crece sin cota o sin límite

Este comportamiento se denota como

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty$$

$f(x)$  decrece sin cota o sin límite cuando  $x$  se aproxima a 2 por la izquierda.

y

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} = \infty.$$

$f(x)$  crece sin cota o sin límite cuando  $x$  se aproxima a 2 por la derecha.

Los símbolos  $\infty$  y  $-\infty$  se refieren a infinito positivo e infinito negativo, respectivamente. Estos símbolos no representan números reales. Son símbolos convenientes utilizados para describir las condiciones ilimitadas de forma más concisa. Un límite en el que  $f(x)$  aumenta o disminuye sin límite a medida que  $x$  se aproxima a  $c$  recibe el nombre de **límite infinito**.

### Definición de límites infinitos

Sea  $f$  una función definida en todo número real de un intervalo abierto que contiene a  $c$  (salvo, posiblemente, en el propio  $c$ ). La expresión

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

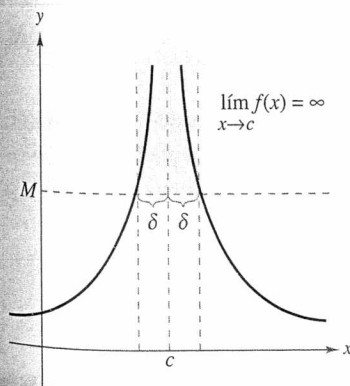
significa que para toda  $M > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > M$ , siempre que  $0 < |x - c| < \delta$  (vea la figura 3.40). Del mismo modo, la expresión

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

significa que para todo  $N < 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $f(x) < N$ , siempre que

$$0 < |x - c| < \delta.$$

Para definir el **límite infinito por la izquierda**, sustituir  $0 < |x - c| < \delta$  por  $c - \delta < x < c$ . Y para definir el **límite infinito por la derecha**, reemplazar  $0 < |x - c| < \delta$  por  $c < x < c + \delta$ .



Límites infinitos.  
Figura 3.40

Observe que el signo de igualdad en la expresión  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$  no significa que el límite exista. Por el contrario, indica la razón de su *no existencia* al denotar el comportamiento no acotado o no limitado de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a  $c$ .

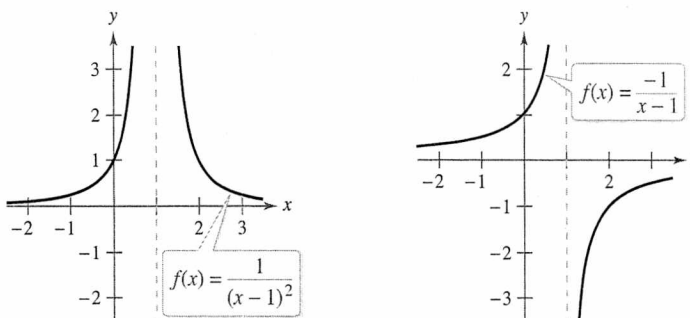
### Exploración

Represente las siguientes funciones con una herramienta de graficación. En cada una de ellas, determine analíticamente el único número real  $c$  que no pertenece al dominio. A continuación, encuentre de manera gráfica el límite de  $f(x)$  si existe, cuando  $x$  tiende a  $c$  por la izquierda y por la derecha.

- a.  $f(x) = \frac{3}{x - 4}$
- b.  $f(x) = \frac{1}{2 - x}$
- c.  $f(x) = \frac{2}{(x - 3)^2}$
- d.  $f(x) = \frac{-3}{(x + 2)^2}$

### EJEMPLO 1 Determinar límites infinitos a partir de una gráfica

Determine el límite de cada función que se muestra en la figura 3.41 cuando  $x$  tiende a 1 por la izquierda y por la derecha.



(a) (b) Las dos gráficas tienen una asíntota vertical en  $x = 1$ .

Figura 3.41

### Solución

- a. Cuando  $x$  se aproxima a 1 por la izquierda o por la derecha,  $(x - 1)^2$  es un número positivo pequeño. Así, el cociente  $1/(x - 1)^2$  es un número grande y  $f(x)$  tiende a infinito por ambos lados de  $x = 1$ . De modo que puede concluir

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = \infty. \quad \text{El límite por cada lado es infinito.}$$

La figura 3.41(a) confirma este análisis.

- b. Cuando  $x$  se aproxima a 1 por la derecha,  $x - 1$  es un número negativo pequeño. Así, el cociente  $-1/(x - 1)$  es un número positivo grande y  $f(x)$  tiende a infinito por la izquierda de  $x = 1$ . De modo que puede concluir

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x - 1} = \infty. \quad \text{El límite por la izquierda es infinito}$$

Cuando  $x$  se aproxima a 1 por la derecha,  $x - 1$  es un número positivo pequeño. Así, el cociente  $-1/(x - 1)$  es un número negativo grande y  $f(x)$  tiende a menos infinito por la derecha de  $x = 1$ . De modo que puede concluir

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x - 1} = -\infty. \quad \text{El límite por la derecha es infinito negativo.}$$

La figura 3.41(b) confirma este análisis.

**TECNOLOGÍA** Recuerde que puede utilizar un método numérico para analizar un límite. Por ejemplo, puede usar una herramienta de graficación para crear una tabla de valores para analizar el límite en el ejemplo 1(a), como se muestra en la figura 3.42.

Introduzca los valores  $x$  usando el modo de *solicitar*.

X	Y1
.9	100
.99	10000
.999	1E6
1	ERROR
1.001	1E6
1.01	10000
1.1	100
X=1	

Como  $x$  se aproxima a 1 por la izquierda,  $f(x)$  aumenta sin límite.

Como  $x$  se aproxima a 1 desde la derecha,  $f(x)$  aumenta sin límite.

Figura 3.42

- Use una herramienta de graficación para hacer una tabla de valores para analizar el límite en el ejemplo 1(b).

CO gráf una entc

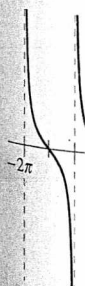
$$f(x) = \frac{1}{2x}$$

(a)

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2}$$

-4

(b)



(c) Funcione: Figura 3.

## Asíntotas verticales

Si fuera posible extender las gráficas de la figura 3.41 hacia el infinito positivo o negativo, vería que ambas se acercan arbitrariamente a la recta vertical  $x = 1$ . Esta recta es una **asíntota vertical** de la gráfica de  $f$ . (En las secciones 5.5 y 5.6 se estudiarán otros tipos de asíntotas.)

••• **COMENTARIO** Si la gráfica de una función  $f$  tiene una asíntota vertical en  $x = c$ , entonces  $f$  no es continua en  $c$ .

### Definición de asíntota vertical

Si  $f(x)$  tiende a infinito (o menos infinito) cuando  $x$  tiende a  $c$  por la derecha o por la izquierda, se dice que la recta  $x = c$  es una **asíntota vertical** de la gráfica de  $f$ .

En el ejemplo 1, observe que todas las funciones son *cocientes* y la asíntota vertical aparece en el número en el cual el denominador es 0 (y el numerador no es 0). El siguiente teorema generaliza esta observación.

### TEOREMA 3.14 Asíntotas verticales

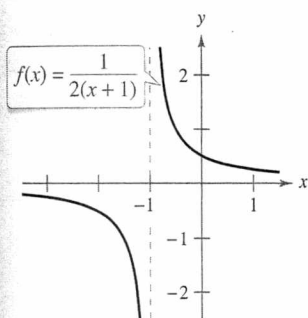
Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas sobre un intervalo abierto que contiene a  $c$ . Si  $f(c) \neq 0$ ,  $g(c) = 0$  y existe un intervalo abierto que contiene a  $c$  tal que  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \neq c$  en el intervalo, entonces la gráfica de la función está dada por

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

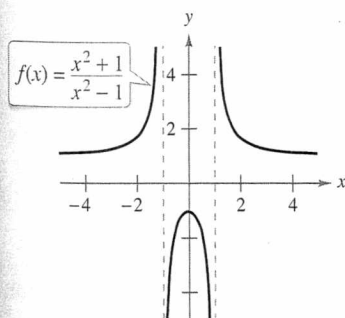
tiene una asíntota vertical en  $x = c$ .

Una demostración de este teorema se da en el apéndice A.

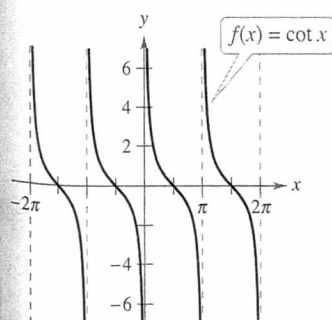
Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.



(a)



(b)



(c)

Funciones de asíntotas verticales.

Figura 3.43

### EJEMPLO 2

### Calcular asíntotas verticales

•••► Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

a. Cuando  $x = -1$ , el denominador de

$$f(x) = \frac{1}{2(x+1)}$$

es igual a 0 y el numerador no lo es. Por tanto, mediante el teorema 3.14, puede concluir que  $x = -1$  es una asíntota vertical, como se muestra en la figura 3.43(a).

b. Al factorizar el denominador como

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)}$$

Puede ver que el denominador se anula en  $x = -1$  y en  $x = 1$ . Además, dado que el numerador no es 0, ninguno de estos puntos puede aplicar el teorema 3.14 y concluir que la gráfica de  $f$  tiene dos asíntotas verticales, como se muestra en la figura 3.43(b).

c. Al escribir la función cotangente de la forma

$$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

puede aplicar el teorema 3.14 para concluir que las asíntotas verticales tienen lugar en todos los valores de  $x$ , tales que  $\sin x = 0$  y  $\cos x \neq 0$ , como se muestra en la figura 3.43(c). Por consiguiente, la gráfica de esta función tiene infinitas asíntotas verticales. Estas asíntotas aparecen cuando  $x = n\pi$ , donde  $n$  es un número entero.

El teorema 3.14 exige que el valor del numerador en  $x = c$  no sea 0. Si tanto el numerador como el denominador son 0 en  $x = c$ , se obtiene la *forma indeterminada*  $0/0$ , y no es posible establecer el comportamiento límite en  $x = c$  sin realizar una investigación complementaria, como se ilustra en el ejemplo 3.

**EJEMPLO 3** Función racional con factores comunes

Determine todas las asíntotas verticales de la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$$

**Solución** Comience por simplificar la expresión como sigue

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} \\ &= \frac{(x + 4)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} \\ &= \frac{x + 4}{x + 2}, \quad x \neq 2 \end{aligned}$$

En todos los valores de  $x$  distintos de  $x = 2$ , la gráfica de  $f$  coincide con la de  $g(x) = (x + 4)/(x + 2)$ . De manera que puede aplicar a  $g$  el teorema 3.14 y concluir que existe una asíntota vertical en  $x = -2$ , como se muestra en la figura 3.44. A partir de la gráfica, observe que

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = \infty.$$

Note que  $x = 2$  no es una asíntota vertical.

**EJEMPLO 4** Calcular límites infinitos

Determine los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$$

**Solución** Puesto que el denominador es 0 cuando  $x = 1$  (y el numerador no se anula), se sabe que la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$$

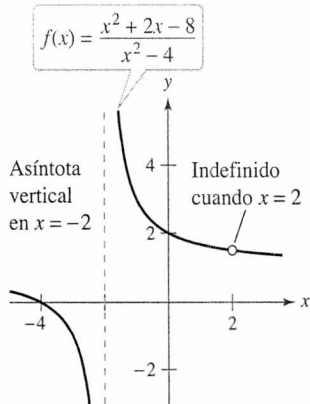
tiene una asíntota vertical en  $x = 1$ . Esto significa que cada uno de los límites dados son  $\infty$  o  $-\infty$ . Puede determinar el resultado al analizar  $f$  en los valores de  $x$  cercanos a 1, o al utilizar una herramienta de graficación. En la gráfica de  $f$  que se muestra en la figura 3.45, observe que la gráfica tiende a  $\infty$  por la izquierda de  $x = 1$  y a  $-\infty$  por la derecha de  $x = 1$ . De tal modo, puede concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = \infty \quad \text{El límite por la izquierda es infinito.}$$

y

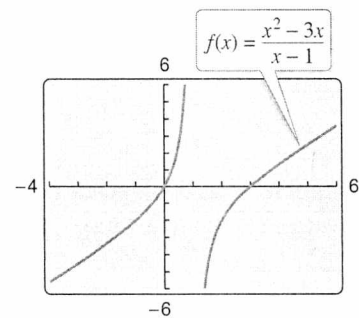
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = -\infty. \quad \text{El límite por la derecha es menos infinito.}$$

► **CONFUSIÓN TECNOLÓGICA** Cuando utilice una herramienta de graficación, debe tener cuidado al interpretar correctamente la gráfica de una función con una asíntota vertical, ya que las herramientas de graficación suelen tener dificultades para representar este tipo de gráficas.



$f(x)$  crece y decrece sin cota o sin límite cuando  $x$  tiende a  $-2$ .

Figura 3.44



$f$  tiene una asíntota vertical en  $x = 1$ .

Figura 3.45

• CO  
• que  
• utili  
• teore  
•  $f(x)$   
•  $-\infty$   
• • •

**TEOREMA 3.15 Propiedades de los límites infinitos**

Sean  $c$  y  $L$  números reales, y  $f$  y  $g$  funciones tales que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L.$$

1. Suma o diferencia:  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \infty$

2. Producto:  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = \infty, \quad L > 0$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = -\infty, \quad L < 0$$

3. Cociente:  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

Propiedades análogas son válidas para límites laterales y para funciones cuyo límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $c$  es  $-\infty$  [vea el ejemplo 5(d)].

**Demostración** Esta es una demostración de la propiedad de la suma. [Las demostraciones de las demás propiedades se dejan como ejercicio (vea el ejercicio 70).] Para demostrar que el límite de  $f(x) + g(x)$  es infinito, elija un  $M > 0$ . Se necesita entonces encontrar una  $\delta > 0$  tal que  $[f(x) + g(x)] > M$  siempre que  $0 < |x - c| < \delta$ . Para simplificar, suponga que  $L$  es positivo. Sea  $M_1 = M + 1$ . Puesto que el límite de  $f(x)$  es infinito, existe una  $\delta_1$  tal que  $f(x) > M_1$  siempre que  $0 < |x - c| < \delta_1$ . Como además el límite de  $g(x)$  es  $L$  existe una  $\delta_2$  tal que  $|g(x) - L| < 1$  siempre que  $0 < |x - c| < \delta_2$ . Haciendo que  $\delta$  sea el menor de  $\delta_1$  y  $\delta_2$ , puede concluir que  $0 < |x - c| < \delta$  implica que  $f(x) > M + 1$  y  $|g(x) - L| < 1$ . La segunda de estas desigualdades implica que  $g(x) > L - 1$  y, sumando esto a la primera desigualdad, se obtiene

$$f(x) + g(x) > (M + 1) + (L - 1) = M + L > M.$$

Por lo tanto, puede concluir que

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \infty.$$

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

**EJEMPLO 5 Calcular límites**

a. Puesto que  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ , se puede escribir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) = \infty. \quad \text{Propiedad 1, teorema 3.15}$$

b. Puesto que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (\cot \pi x) = -\infty$ , se deduce que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{\cot \pi x} = 0. \quad \text{Propiedad 3, teorema 3.15}$$

c. Puesto que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3 = 3$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = \infty$ , se deduce que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3 \cot x = \infty. \quad \text{Propiedad 2, teorema 3.15}$$

d. Puesto que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ , se deduce que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( x^2 + \frac{1}{x} \right) = -\infty. \quad \text{Propiedad 1, teorema 3.15}$$

• **COMENTARIO** Observe que la solución del ejemplo 5(d) utiliza la propiedad 1 del teorema 3.15 para el límite de  $f(x)$  conforme  $x$  se acerca a  $c$  es  $-\infty$ .



tanto el nu-  
inada 0/0, y  
investigación

de  $g(x) =$   
que existe  
la gráfica,

se anula),

datos son  
nos a 1, o  
la figura  
a derecha

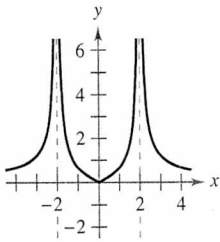
gráfica-  
ción con  
cultades

# 3.5 Ejercicios

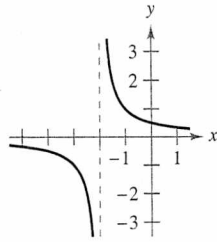
Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Calcular límites infinitos de una gráfica** En los ejercicios 1-4, determine si  $f(x)$  tiende a  $\infty$  o  $-\infty$  cuando  $x$  tiende a 4 por la izquierda y por la derecha.

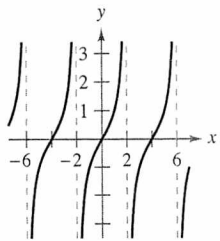
1.  $f(x) = 2 \left| \frac{x}{x^2 - 4} \right|$



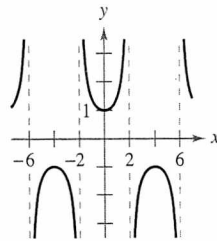
2.  $f(x) = \frac{1}{x+2}$



3.  $f(x) = \tan \frac{\pi x}{4}$



4.  $f(x) = \sec \frac{\pi x}{4}$



**Calcular límites infinitos** En los ejercicios 5-8, determine si  $f(x)$  tiende a  $\infty$  o  $-\infty$  cuando  $x$  tiende a  $-2$  por la izquierda y por la derecha.

5.  $f(x) = \frac{1}{x-4}$

6.  $f(x) = \frac{-1}{x-4}$

7.  $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$

8.  $f(x) = \frac{-1}{(x-4)^2}$

**Análisis numérico y gráfico** En los ejercicios 9-12, complete la tabla para determinar si  $f(x)$  tiende a  $\infty$  o  $-\infty$  cuando  $x$  tiende a  $-3$  por la izquierda y por la derecha, respectivamente. Utilice una herramienta de graficación para representar la función y confirmar su respuesta.

$x$	-3.5	-3.1	-3.01	-3.001	-3
$f(x)$					?

$x$	-2.999	-2.99	-2.9	-2.5
$f(x)$				

9.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

10.  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$

11.  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$

12.  $f(x) = \cot \frac{\pi x}{3}$

**Encontrar una asíntota vertical** En los ejercicios 13-28, encuentre las asíntotas verticales (si las hay) de la gráfica de la función.

13.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

14.  $f(x) = \frac{2}{(x-3)^3}$

15.  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

16.  $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 9}$

17.  $g(t) = \frac{t-1}{t^2 + 1}$

18.  $h(s) = \frac{3s+4}{s^2 - 16}$

19.  $f(x) = \frac{3}{x^2 + x - 2}$

20.  $g(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

21.  $f(x) = \frac{4x^2 + 4x - 24}{x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 18x}$

22.  $h(x) = \frac{x^2 - 9}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$

23.  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^3 - 5x^2 + x - 5}$

24.  $h(t) = \frac{t^2 - 2t}{t^4 - 16}$

25.  $f(x) = \csc \pi x$

26.  $f(x) = \tan \pi x$

27.  $s(t) = \frac{t}{\sin t}$

28.  $g(\theta) = \frac{\tan \theta}{\theta}$

**Asíntota vertical o discontinuidad removible** En los ejercicios 29-32, determine si la función tiene una asíntota vertical o una discontinuidad removible en  $x = -1$ . Represente la función con una herramienta de graficación para confirmar su respuesta.

29.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

30.  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x + 1}$

31.  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

32.  $f(x) = \frac{\sin(x+1)}{x+1}$

**Encontrar un límite lateral** En los ejercicios 33-48, encuentre el límite unilateral (si los hay).

33.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1}$

34.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{(x-1)^2}$

35.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2}$

36.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x^2 + 4}$

37.  $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x+3}{x^2 + x - 6}$

38.  $\lim_{x \rightarrow (-1/2)^+} \frac{6x^2 + x - 1}{4x^2 - 4x - 3}$

39.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

40.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(6 - \frac{1}{x^3}\right)$

41.  $\lim_{x \rightarrow -4^-} \left(x^2 + \frac{2}{x+4}\right)$

42.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x}{3} + \cot \frac{\pi x}{2}\right)$

43.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sin x}$

44.  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \cos x$

45.  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{x}}{\csc x}$

46.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+2}{\cot x}$

47.  $\lim_{x \rightarrow 1/}$

Límite lateral de gráfica de límite lateral

49.  $f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 1^+}$

51.  $f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 5^-}$

## DESA

53. Límite sig

54. Asíntota vertical

55. Es una función racional continua

56. Función asíntota

57. Traslación (vertical) de la gráfica

58. Relación masa

$m =$

dónde la velocidad tiende

59. Análisis gráfico para presionar el eje de x

$x$
$f(x)$

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+}$

47.  $\lim_{x \rightarrow (1/2)^-} x \sec \pi x$

48.  $\lim_{x \rightarrow (1/2)^+} x^2 \tan \pi x$

**Límite lateral** En los ejercicios 49-52, utilice una herramienta de graficación para representar la función y determinar el límite lateral.

49.  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$

50.  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

51.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 25}$

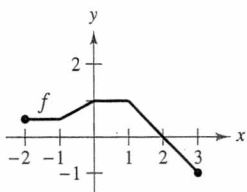
52.  $f(x) = \sec \frac{\pi x}{8}$

$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$

**DESARROLLO DE CONCEPTOS**

- 53. **Límite infinito** Con sus propias palabras, describa el significado de un límite infinito. ¿Es  $\infty$  un número real?
- 54. **Asíntota** Con sus propias palabras, describa el significado de la asíntota vertical de una gráfica.
- 55. **Escribir una función racional** Escriba una función racional con asíntotas verticales en  $x = 6$  y en  $x = -2$  y un cero en  $x = 3$ .
- 56. **Función racional** ¿Tiene toda función racional una asíntota vertical? Explique su respuesta.
- 57. **Trazar una gráfica** Utilice la gráfica de la función  $f$  (vea la figura) para trazar la gráfica de  $g(x) = 1/f(x)$  sobre el intervalo  $[-2, 3]$ . Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite *MathGraphs.com*.



58. **Relatividad** De acuerdo con la teoría de la relatividad, la masa  $m$  de una partícula depende de su velocidad  $v$ , es decir:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

donde  $m_0$  es la masa cuando la partícula está en reposo y  $c$  es la velocidad de la luz. Calcule el límite de la masa cuando  $v$  tiende a  $c$  desde la izquierda.

59. **Análisis numérico y gráfico** Utilice una herramienta de graficación a fin de completar la tabla para cada función y representar gráficamente cada una de ellas con objeto de calcular el límite. ¿Cuál es el valor del límite cuando la potencia de  $x$  en el denominador es mayor que 3?

$x$	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001	0.0001
$f(x)$							

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \text{sen } x}{x}$

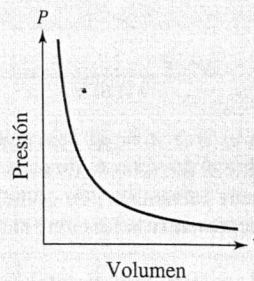
(b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \text{sen } x}{x^2}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \text{sen } x}{x^3}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \text{sen } x}{x^4}$



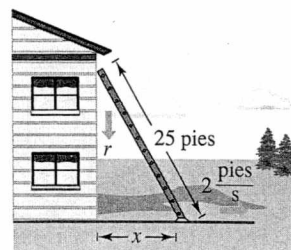
**¿CÓMO LO VE?** Para una cantidad de gas a una temperatura constante, la presión es inversamente proporcional al volumen  $V$ . ¿Cuál es el límite de  $P$  conforme  $V$  se aproxima a 0 desde la derecha? Explique lo que esto significa en el contexto del problema.



61. **Rapidez de cambio** Una escalera de 25 pies de largo está apoyada en una casa (vea la figura). Si por alguna razón la base de la escalera se aleja del muro a un ritmo de 2 pies por segundo, la parte superior descenderá con una razón dada por

$$r = \frac{2x}{\sqrt{625 - x^2}} \text{ pies/s}$$

donde  $x$  es la distancia que hay entre la base de la escalera y el muro y la casa, y  $r$  es la rapidez en pies por segundo.



- (a) Calcule la rapidez  $r$  cuando  $x$  es 7 pies.
- (b) Calcule la rapidez  $r$  cuando  $x$  es 15 pies.
- (c) Encuentre el límite de  $r$  cuando  $x$  se aproxima a 25 por la izquierda.

• 62. **Rapidez media** • • • • •

En un viaje de  $d$  millas hacia otra ciudad, la rapidez media de un camión fue de  $x$  millas por hora. En el viaje de regreso, su rapidez media fue de  $y$  millas por hora. La velocidad media del viaje de ida y vuelta fue de 50 millas por hora.

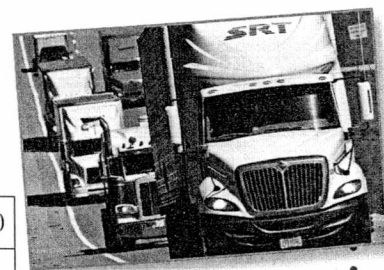
(a) Verifique que

$$y = \frac{25x}{x - 25}$$

¿Cuál es el dominio?

(b) Complete la tabla.

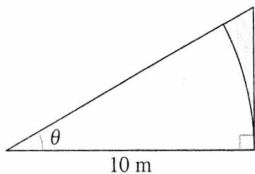
$x$	30	40	50	60
$y$				



¿Los valores de  $y$  difieren de los esperados? Explique su respuesta.

(c) Calcule el límite de  $y$  cuando  $x$  se aproxima a 25 por la derecha e interprete el resultado.

- 63. Análisis numérico y gráfico** Considere la región sombreada que queda fuera del sector del círculo con radio de 10 m y dentro del triángulo rectángulo de la figura.

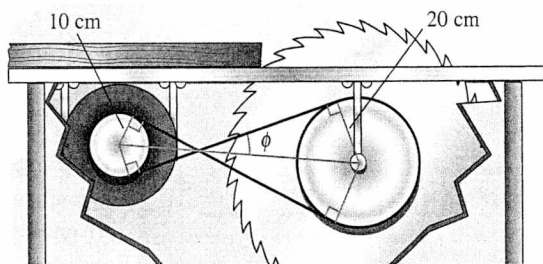


- (a) Expresé el área  $A = f(\theta)$  de la región en función de  $\theta$ . Determine el dominio de esta función.  
 (b) Utilice una herramienta de graficación para completar la tabla y representar la función sobre el dominio apropiado.

$\theta$	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
$f(\theta)$					

- (c) Calcule el límite de  $A$  conforme  $\theta$  tiende a  $\pi/2$  por la izquierda.

- 64. Análisis numérico y gráfico** Una banda cruzada conecta la polea de 20 cm (10 cm de radio) de un motor eléctrico con otra polea de 40 cm (20 cm de radio) de una sierra circular. El motor eléctrico gira a 1700 revoluciones por minuto.



- (a) Determine el número de revoluciones por minuto de la sierra.  
 (b) ¿Cómo afecta el cruce de la banda a la sierra en relación con el motor?  
 (c) Sea  $L$  la longitud total de la correa. Expresé  $L$  en función de  $\phi$ , donde  $\phi$  se mide en radianes. ¿Cuál es el dominio de la función? (Sugerencia: Sumé las longitudes de los tramos rectos de la banda y las longitudes de la banda alrededor de cada pulea.)

- (d) Utilice una herramienta de graficación para completar la tabla.

$\phi$	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
$L$					

- (e) Utilice una herramienta de graficación para representar la función de un dominio apropiado.  
 (f) Calcule el  $\lim_{\phi \rightarrow (\pi/2)^-} L$ . Utilice algún argumento geométrico como base de otro procedimiento para encontrar este límite.  
 (g) Calcule  $\lim_{\phi \rightarrow 0^+} L$ .

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 65-68, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o proporcione un ejemplo que demuestre que lo es.

65. La gráfica de una función racional tiene al menos una asíntota vertical.  
 66. Las funciones polinomiales carecen de asíntotas verticales.  
 67. Las gráficas de funciones trigonométricas carecen de asíntotas verticales.  
 68. Si  $f$  tiene una asíntota vertical en  $x = 0$ , entonces no está definida en  $x = 0$ .  
 69. **Encontrar funciones** Encuentre a continuación las funciones  $f$  y  $g$  tales que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$ , pero  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] \neq 0$ .  
 70. **Demostración** Demuestre las propiedades restantes del teorema 1.15.  
 71. **Demostración** Demuestre que si  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)} = 0$ .  
 72. **Demostración** Demuestre que si  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)} = 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  no existe.

**Límites infinitos** En los ejercicios 73 y 74, use la definición  $\epsilon$ - $\delta$  del límite para demostrar el enunciado.

73.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \infty$       74.  $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{x-5} = -\infty$

### PROYECTO DE TRABAJO

#### Gráficas y límites de funciones trigonométricas

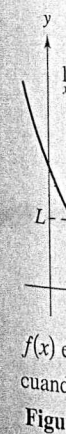
Recuerde, del teorema 3.9, que el límite de  $f(x) = (\text{sen } x)/x$  cuando  $x$  tiende a 0 es 1:

- (a) Utilice una herramienta de graficación para representar la función  $f$  en el intervalo  $-\pi \leq x \leq \pi$ , y explique cómo ayuda esta gráfica a confirmar dicho teorema.  
 (b) Explique cómo podría usar una tabla de valores para confirmar numéricamente el valor de este límite.  
 (c) Dibuje a mano la gráfica de la función  $g(x) = \text{sen } x$ . Trace una recta tangente en el punto  $(0, 0)$  y estime visualmente su pendiente.

- (d) Sea  $(x, \text{sen } x)$  un punto en la gráfica de  $g$  cercano a  $(0, 0)$ . Escriba una fórmula para la pendiente de la recta secante que une a  $(x, \text{sen } x)$  con  $(0, 0)$ . Evalúe esta fórmula para  $x = 0.1$  y  $x = 0.01$ . A continuación, encuentre la pendiente exacta de la recta tangente a  $g$  en el punto  $(0, 0)$ .  
 (e) Dibuje la gráfica de la función coseno,  $h(x) = \text{cos } x$ . ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en el punto  $(0, 1)$ ? Utilice límites para calcular analíticamente dicha pendiente.  
 (f) Calcule la pendiente de la recta tangente a  $k(x) = \text{tan } x$  en el punto  $(0, 0)$ .

$f(x)$   
cuando  
-4 -3  
El lím  
0  $\infty$  e  
Figur:

...  
...  
ex  
lí  
x  
el  
ig



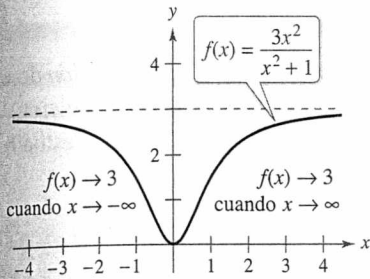
# 3.6 Límites al infinito y asíntotas horizontales

- Determinar límites (finitos) al infinito.
- Determinar las asíntotas horizontales, si las hay, de la gráfica de una función.
- Determinar límites infinitos en el infinito.

## Límites al infinito

Esta sección analiza el “comportamiento final” de una función en un intervalo *infinito*. Considere la gráfica de

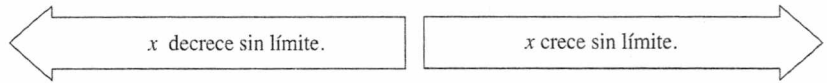
$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$$



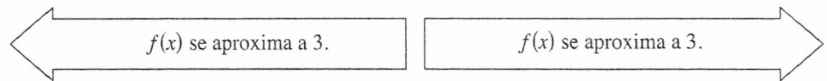
El límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $-\infty$  o  $\infty$  es 3.

Figura 3.46

como se ilustra en la figura 3.46. Gráficamente, puede ver que los valores de  $f(x)$  parecen aproximarse a 3 cuando  $x$  crece o decrece sin límite. Puede llegar numéricamente a las mismas conclusiones, como se indica en la tabla.



$x$	$-\infty \leftarrow$	-100	-10	-1	0	1	10	100	$\rightarrow \infty$
$f(x)$	$3 \leftarrow$	2.9997	2.9703	1.5	0	1.5	2.9703	2.9997	$\rightarrow 3$



La tabla sugiere que el valor de  $f(x)$  se aproxima a 3 cuando  $x$  crece sin límite ( $x \rightarrow \infty$ ). De manera similar,  $f(x)$  tiende a 3 cuando  $x$  decrece sin límite ( $x \rightarrow -\infty$ ). Estos **límites en el infinito** se denotan mediante

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 \quad \text{Límite en infinito negativo.}$$

y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3. \quad \text{Límite en infinito positivo.}$$

Decir que una expresión es cierta cuando  $x$  crece *sin límite* significa que para algún número real (grande)  $M$ , la expresión es verdadera para *todo*  $x$  en el intervalo  $\{x: x > M\}$ . La siguiente definición usa a este concepto.

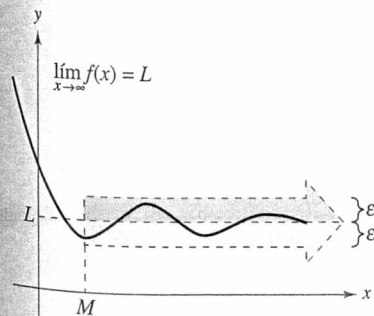
### Definición de límites al infinito

Sea  $L$  un número real.

1. La expresión  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  significa que para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $M > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  siempre que  $x > M$ .
2. La expresión  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  significa que para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $N < 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  siempre que  $x < N$ .

La definición de un límite en el infinito se muestra en la figura 3.47. En esta figura, se advierte que para un número positivo dado  $\varepsilon$ , existe un número positivo  $M$  tal que, para  $x > M$ , la gráfica de  $f$  estará entre las rectas horizontales dadas por

$$y = L + \varepsilon \quad \text{y} \quad y = L - \varepsilon.$$



$f(x)$  está dentro de  $\varepsilon$  unidades de  $L$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .

Figura 3.47

**Exploración**

Utilice una herramienta de graficación para representar

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 6}{3x^2 + 2x - 16}$$

Describa todas las características importantes de la gráfica. ¿Puede encontrar una sola ventana de observación que muestre con claridad todas estas características? Explique su razonamiento.

¿Cuáles son las asíntotas horizontales de la gráfica, de manera que esta se encuentre dentro de 0.001 unidades de su asíntota horizontal? Explique su razonamiento.

**Asíntotas horizontales**

En la figura 3.47, la gráfica de  $f$  se aproxima a la recta  $y = L$  cuando  $x$  crece sin límite. La recta  $y = L$  recibe el nombre de **asíntota horizontal** de la gráfica de  $f$ .

**Definición de una asíntota horizontal**

La recta  $y = L$  es una **asíntota horizontal** de la gráfica de  $f$  si

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L.$$

Observe que a partir de esta definición, se deduce que la gráfica de una *función* de  $x$  puede tener a lo mucho dos asíntotas horizontales (una a la derecha y otra a la izquierda).

Los límites al infinito, tienen muchas de las propiedades de los límites que estudió en la sección 3.3. Por ejemplo, si existen tanto  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)g(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right] \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \right].$$

Se cumplen propiedades similares para límites en  $-\infty$ .

Cuando se evalúan límites al infinito, resulta de utilidad el siguiente teorema.

**TEOREMA 3.16 Límites al infinito**

Si  $r$  es un número racional positivo y  $c$  es cualquier número real, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^r} = 0.$$

Además, si  $x^r$  se define cuando  $x < 0$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^r} = 0.$$

En el apéndice A se da una demostración de este teorema.

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

**EJEMPLO 1**

**Determinar el límite al infinito**

Encuentre el límite:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 5 - \frac{2}{x^2} \right)$ .

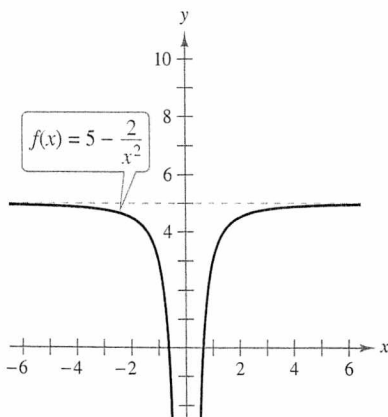
**Solución** Utilizando el teorema 3.16, puede escribir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 5 - \frac{2}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} 5 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} && \text{Propiedad de límites} \\ &= 5 - 0 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Así, la recta  $y = 5$  es una asíntota horizontal a la derecha. Al encontrar el límite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 5 - \frac{2}{x^2} \right) \qquad \text{Límite como } x \rightarrow -\infty.$$

puede ver que  $y = 5$  también es una asíntota horizontal a la izquierda. La gráfica de la función se muestra en la figura 3.48.



$y = 5$  es una asíntota horizontal.  
**Figura 3.48**

**EJEMPLO 2**

**Determinar un límite al infinito**

Determine el límite  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x + 1}$ .

**Solución** Observe que tanto el numerador como el denominador tienden a infinito cuando  $x$  tiende al infinito.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x + 1} \begin{cases} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 1) \rightarrow \infty \\ \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1) \rightarrow \infty \end{cases}$$

.....  
**COMENTARIO** Cuando se encuentre con una forma indeterminada tal como la del ejemplo 2, debe dividir el numerador y el denominador entre la potencia más alta de  $x$  en el denominador.

Esto produce una **forma indeterminada**  $\frac{\infty}{\infty}$ . Para resolver este problema, puede dividir tanto el numerador como el denominador entre  $x$ . Después de eso, el límite puede evaluarse como se muestra.

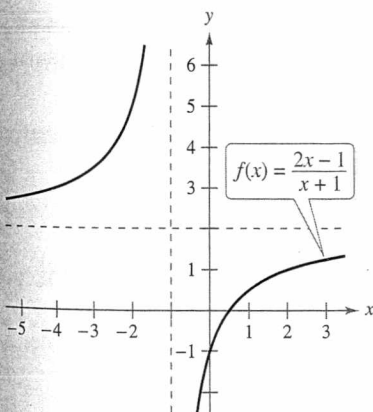
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x - 1}{x}}{\frac{x + 1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} \\ &= \frac{2 - 0}{1 + 0} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Divida el numerador y el denominador entre  $x$ .

Simplifique.

Tome límites del numerador y el denominador.

Aplique el teorema 3.16.



$y = 2$  es una asíntota horizontal.

Figura 3.49

De tal modo, la recta  $y = 2$  es una asíntota horizontal a la derecha. Al tomar el límite cuando  $x \rightarrow -\infty$ , puede ver que  $y = 2$  también es una asíntota horizontal hacia la izquierda. La gráfica de la función se ilustra en la figura 3.49.

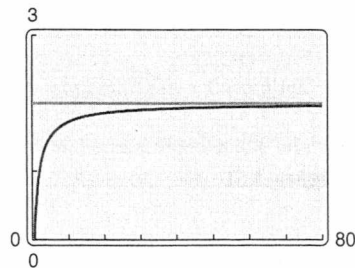
**TECNOLOGÍA** Puede verificar que el límite del ejemplo 2 es razonable evaluando  $f(x)$  para unos pocos valores positivos grandes de  $x$ . Por ejemplo

$$\begin{aligned} f(100) &\approx 1.9703, & f(1000) &\approx 1.9970, \\ & & y & f(10,000) \approx 1.9997. \end{aligned}$$

Otra forma de verificar que el límite obtenido es razonable consiste en representar la gráfica con una herramienta de graficación. Por ejemplo, en la figura 3.50, la gráfica de

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$$

se muestra con la recta horizontal  $y = 2$ . Observe que cuando  $x$  crece, la gráfica de  $f$  se mueve más cerca de su asíntota horizontal.



Cuando  $x$  aumenta, la gráfica de  $f$  se mueve más y más cerca a la recta  $y = 2$ .

Figura 3.50

**EJEMPLO 3**

**Comparar tres funciones racionales**

•••► Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Determine cada límite

a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 5}{3x^2 + 1}$     b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5}{3x^2 + 1}$     c.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 5}{3x^2 + 1}$

**Solución** En cada caso, el intento de evaluar el límite produce la forma indeterminada  $\infty/\infty$ .

a. Divida tanto el numerador como el denominador entre  $x^2$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 5}{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2/x) + (5/x^2)}{3 + (1/x^2)} = \frac{0 + 0}{3 + 0} = \frac{0}{3} = 0$$

b. Divida tanto el numerador como el denominador entre  $x^2$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5}{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + (5/x^2)}{3 + (1/x^2)} = \frac{2 + 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}$$

c. Divida tanto el numerador como el denominador entre  $x^2$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 5}{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + (5/x^2)}{3 + (1/x^2)} = \frac{\infty}{3}$$

Se puede concluir que el límite *no existe* porque el numerador aumenta sin límite mientras el denominador se aproxima a 3.

El ejemplo 3 sugiere las siguientes pautas para la búsqueda de límites en el infinito de funciones racionales. Utilice las siguientes instrucciones para comprobar los resultados en el ejemplo 3.

**ESTRATEGIA PARA DETERMINAR LÍMITES EN  $\pm \infty$  DE FUNCIONES RACIONALES**

1. Si el grado del numerador es *menor* que el grado del denominador, entonces el límite de la función racional es 0.
2. Si el grado del numerador es *igual* al grado del denominador, entonces el límite de la función racional es el cociente de los coeficientes principales.
3. Si el grado del numerador es *mayor* que el grado del denominador, entonces el límite de la función racional no existe.

Estos límites parecen razonables cuando se considera que para valores grandes de  $x$ , el término de la potencia más alta de la función racional es el que más “influye” en la determinación del límite. Por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 1}$$

es 0 porque domina el denominador como el numerador aumenta o disminuye sin límite, como se muestra en la figura 3.51.

La función que se muestra en la figura 3.51 es un caso especial de un tipo de curva estudiada por la matemática italiana María Gaetana Agnesi. La forma general de esta función es

$$f(x) = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} \quad \text{Bruja de Agnesi}$$

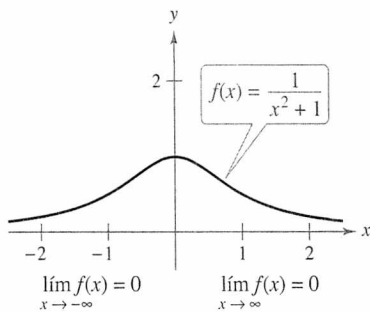
y a través de la traducción errónea de la palabra italiana *vertéré*, la curva ha llegado a conocerse como la Bruja de Agnesi. El trabajo de Agnesi con esta curva apareció por primera vez en un libro de cálculo que se publicó en 1748.



**MARÍA GAETANA AGNESI (1718-1799)**

Agnesi fue una de las pocas mujeres en recibir crédito por aportaciones importantes a las matemáticas antes del siglo XX. Casi al cumplir 20 años, escribió el primer texto que incluyó tanto cálculo diferencial como integral. Alrededor de los 30, fue miembro honorario de la facultad en la Universidad de Boloña.

Consulte *LarsonCalculus.com* para leer más de esta biografía. Para mayor información sobre las contribuciones de las mujeres a las matemáticas, ver el artículo “Why Women Succeed in Mathematics” de Mona Fabricant, Sylvia Svitak y Patricia Clark Kenschaft en *Mathematics Teacher*. Para ver este artículo, visite *MathArticles.com*.



$f$  tiene una asíntota horizontal en  $y = 0$ .  
**Figura 3.51**

En la figura 3.51 puede observar que la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

tiende a la misma asíntota horizontal hacia la derecha que hacia la izquierda. Esto es siempre cierto para las funciones racionales. Las funciones que no son racionales, sin embargo, pueden tender a diferentes asíntotas horizontales hacia la derecha y hacia la izquierda. Esto se demuestra en el ejemplo 4.

### EJEMPLO 4 Una función con dos asíntotas horizontales

Determine cada límite

a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2}{\sqrt{2x^2 + 1}}$       b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 2}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

#### Solución

a. Para  $x > 0$ , puede escribir  $x = \sqrt{x^2}$ . De tal modo, al dividir tanto el numerador como el denominador entre  $x$  obtiene

$$\frac{3x - 2}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{\frac{3x - 2}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{\sqrt{x^2}}} = \frac{3 - \frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{2x^2 + 1}{x^2}}} = \frac{3 - \frac{2}{x}}{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}$$

y puede tomar el límite de la manera siguiente.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{3 - 0}{\sqrt{2 + 0}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

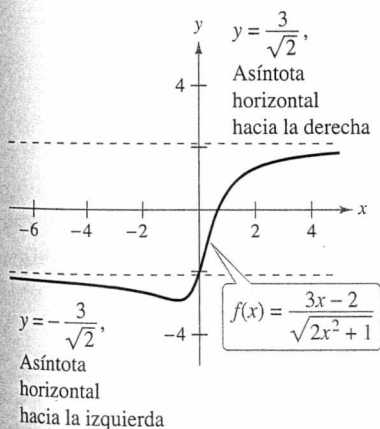
b. Para  $x < 0$ , puede escribir  $x = -\sqrt{x^2}$ . De manera que al dividir tanto el denominador como el numerador entre  $x$ , obtiene

$$\frac{3x - 2}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{\frac{3x - 2}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{-\sqrt{x^2}}} = \frac{3 - \frac{2}{x}}{-\sqrt{\frac{2x^2 + 1}{x^2}}} = \frac{3 - \frac{2}{x}}{-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}$$

y puede tomar el límite de la manera siguiente

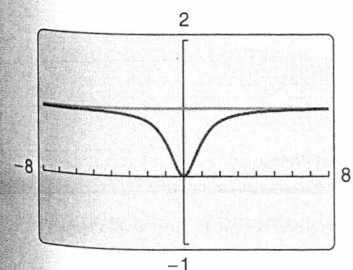
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 2}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{3 - 0}{-\sqrt{2 + 0}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

La gráfica de  $f(x) = (3x - 2)/\sqrt{2x^2 + 1}$  se presenta en la figura 3.52.



Las funciones que no son racionales pueden tener diferentes asíntotas horizontales derecha e izquierda.

Figura 3.52



La asíntota horizontal parece ser la recta  $y = 1$ , pero en realidad es la recta  $y = 2$ .

Figura 3.53

**CONFUSIÓN TECNOLÓGICA** Si utiliza una herramienta de graficación para auxiliarse en la estimación de un límite, cerciőrese de confirmar también la estimación en forma analítica (las imágenes que muestra una herramienta de graficación pueden ser errőneas). Por ejemplo, la figura 3.53 muestra una vista de la gráfica de

$$y = \frac{2x^3 + 1000x^2 + x}{x^3 + 1000x^2 + x + 1000}$$

De acuerdo con esta imagen, sería convincente pensar que la gráfica tiene a  $y = 1$  como una asíntota horizontal. Un enfoque analítico indica que la asíntota horizontal es en realidad  $y = 2$ . Confirme lo anterior agrandando la ventana de la observación de la herramienta de graficación.

En la sección 3.3 (ejemplo 9), vio cómo el teorema del emparedado se puede utilizar para evaluar los límites que incluyen funciones trigonométricas. Este teorema también es válido para los límites al infinito.

**EJEMPLO 5** Límites que implican funciones trigonométricas

Encuentre cada límite

- a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$       b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

**Solución**

- a. Cuando  $x$  tiende al infinito, la función seno oscila entre 1 y  $-1$ . En consecuencia, este límite no existe.  
 b. Como  $-1 \leq \sin x \leq 1$ , se concluye que para  $x > 0$ ,

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

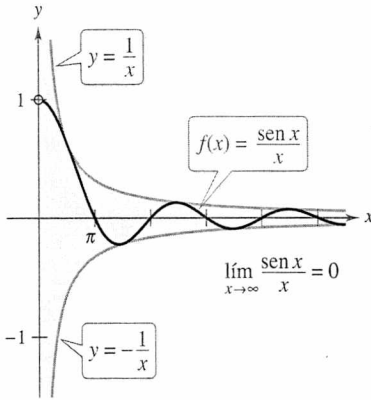
donde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Entonces, por el teorema del emparedado, es posible obtener

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

como se muestra en la figura 3.54.



Cuando  $x$  aumenta sin límite,  $f(x)$  tiende a cero.

Figura 3.54

**EJEMPLO 6** Nivel de oxígeno en un estanque

Suponga que  $f(t)$  mide el nivel de oxígeno en un estanque, donde  $f(t) = 1$  es el nivel normal (no contaminado) y el tiempo  $t$  se mide en semanas. Cuando  $t = 0$ , se descarga desperdicio orgánico en el estanque, y como el material de desperdicio se oxida, el nivel de oxígeno en el estanque es

$$f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}.$$

¿Qué porcentaje del nivel de oxígeno existe en el estanque después de una semana? ¿Después de dos semanas? ¿Después de 10 semanas? ¿Cuál es el límite cuando  $t$  tiende a infinito?

**Solución** Cuando  $t = 1, 2$  y  $10$ , los niveles de oxígeno son como se muestra.

$$f(1) = \frac{1^2 - 1 + 1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2} = 50\% \quad \text{1 semana}$$

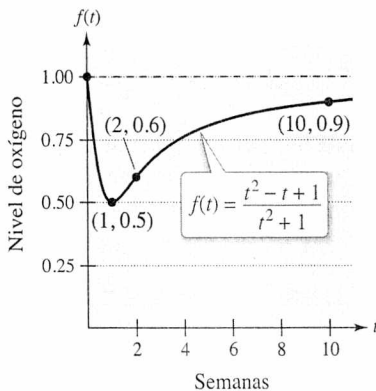
$$f(2) = \frac{2^2 - 2 + 1}{2^2 + 1} = \frac{3}{5} = 60\% \quad \text{2 semanas}$$

$$f(10) = \frac{10^2 - 10 + 1}{10^2 + 1} = \frac{91}{101} \approx 90.1\% \quad \text{10 semanas}$$

Para encontrar el límite cuando  $t$  tiende a infinito, divida el numerador y el denominador entre  $t^2$  con el fin de obtener

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - (1/t) + (1/t^2)}{1 + (1/t^2)} = \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0} = 1 = 100\%.$$

Vea la figura 3.55.



El nivel de oxígeno en el estanque se aproxima a nivel normal de 1 cuando  $t$  tiende a  $\infty$ .

Figura 3.55

COI term tiene infin "con la gr: en la curva



Figura 3.:

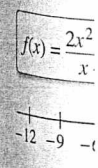


Figura 3.5

### Límites infinitos al infinito

Muchas funciones no tienden a un límite finito cuando  $x$  crece (o decrece) sin límite. Por ejemplo, ninguna función polinomial tiene un límite finito en el infinito. La siguiente definición se usa para describir el comportamiento de las funciones polinomiales y otras funciones al infinito.

#### Definición de límites al infinito

Sea  $f$  una función definida en el intervalo  $(a, \infty)$ .

1. La expresión  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  significa que para cada número positivo  $M$ , existe un número correspondiente  $N > 0$  tal que  $f(x) > M$  siempre que  $x > N$ .
2. La expresión  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$  significa que para cada número negativo  $M$ , existe un número correspondiente  $N > 0$  tal que  $f(x) < M$  siempre que  $x > N$ .

Se pueden dar definiciones similares para los enunciados

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

**COMENTARIO** La determinación de si una función tiene un límite infinito al infinito es útil para analizar el "comportamiento asintótico" de la gráfica. Verá ejemplos de esto en la unidad 4 sobre dibujo de curvas.

#### EJEMPLO 7 Determinar límites infinitos al infinito

Determinar cada límite.

- a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3$       b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$

#### Solución

a. Cuando  $x$  crece sin límite,  $x^3$  también crece sin límite. De tal modo que se puede escribir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty.$$

b. Cuando  $x$  decrece sin límite,  $x^3$  también decrece sin límite. En consecuencia, se puede escribir

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

La gráfica de  $f(x) = x^3$  en la figura 3.56 ilustra estos dos resultados, los cuales concuerdan con el criterio del coeficiente dominante para las funciones polinomiales que se describen en la unidad 2.

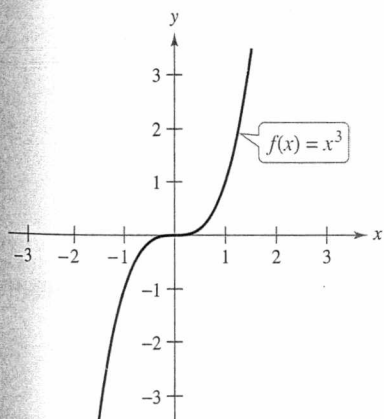


Figura 3.56

#### EJEMPLO 8 Determinar límites infinitos al infinito

Encuentre cada límite

- a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x}{x + 1}$       b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 4x}{x + 1}$

**Solución** Una manera de evaluar cada uno de estos límites consiste en utilizar una división larga para escribir la función racional impropia como la suma de un polinomio y de una función racional.

$$a. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2x - 6 + \frac{6}{x + 1} \right) = \infty$$

$$b. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 4x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2x - 6 + \frac{6}{x + 1} \right) = -\infty$$

Las expresiones anteriores pueden interpretarse diciendo que cuando  $x$  tiende a  $\pm \infty$  la función  $f(x) = (2x^2 - 4x)/(x + 1)$  se comporta como la función  $g(x) = 2x - 6$ . En la unidad 4 esto se describe en forma gráfica afirmando que la recta  $y = 2x - 6$  es una asíntota oblicua de la gráfica de  $f$ , como se muestra en la figura 3.57

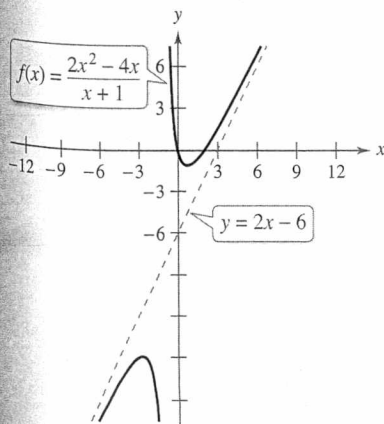
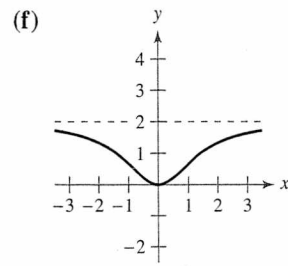
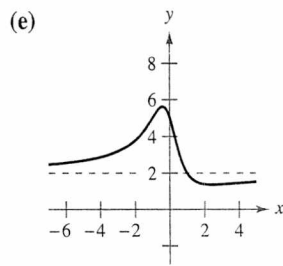
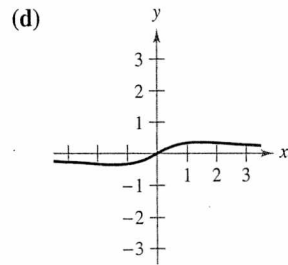
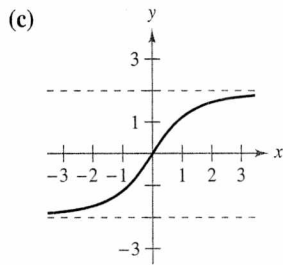
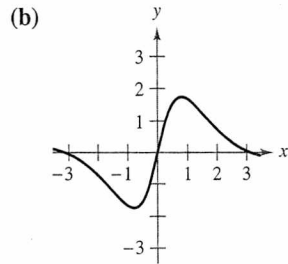
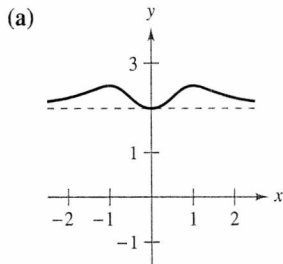


Figura 3.57

# 3.6 Ejercicios

Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Relacionar** En los ejercicios 1-6, relacione la función con una de las gráficas [(a), (b), (c), (d), (e) o (f)] utilizando como ayuda a las asíntotas horizontales.



1.  $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 2}$

2.  $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

3.  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$

4.  $f(x) = 2 + \frac{x^2}{x^4 + 1}$

5.  $f(x) = \frac{4 \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}$

6.  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 + 1}$

**Análisis numérico y gráfico** En los ejercicios 7-12, utilice una herramienta de graficación para completar la tabla y calcular el límite cuando  $x$  tiende a infinito. Utilice después una herramienta de graficación para representar la función y calcular gráficamente el límite.

$x$	$10^0$	$10^1$	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
$f(x)$							

7.  $f(x) = \frac{4x + 3}{2x - 1}$

8.  $f(x) = \frac{2x^2}{x + 1}$

9.  $f(x) = \frac{-6x}{\sqrt{4x^2 + 5}}$

10.  $f(x) = \frac{10}{\sqrt{2x^2 - 1}}$

11.  $f(x) = 5 - \frac{1}{x^2 + 1}$

12.  $f(x) = 4 + \frac{3}{x^2 + 2}$

**Encontrar límites infinitos** En los ejercicios 13 y 14, determine  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$ , si es posible.

13.  $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 10x$

14.  $f(x) = -4x^2 + 2x - 5$

(a)  $h(x) = \frac{f(x)}{x^2}$

(a)  $h(x) = \frac{f(x)}{x}$

(b)  $h(x) = \frac{f(x)}{x^3}$

(b)  $h(x) = \frac{f(x)}{x^2}$

(c)  $h(x) = \frac{f(x)}{x^4}$

(c)  $h(x) = \frac{f(x)}{x^3}$

**Encontrar límites infinitos** En los ejercicios 15-18, encuentre cada límite, si es posible.

15. (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^3 - 1}$

16. (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2x}{3x^3 - 1}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2x}{3x - 1}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x - 1}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2x^2}{3x - 1}$

17. (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 2x^{3/2}}{3x^2 - 4}$

18. (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^{3/2}}{4x^2 + 1}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 2x^{3/2}}{3x^{3/2} - 4}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^{3/2}}{4x^{3/2} + 1}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 2x^{3/2}}{3x - 4}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^{3/2}}{4\sqrt{x} + 1}$

**Encontrar un límite** En los ejercicios 19-38, encuentre el límite.

19.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{3}{x}\right)$

20.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{x} - \frac{x}{3}\right)$

21.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{3x + 2}$

22.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 5}{x^2 + 3}$

23.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1}$

24.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 1}{10x^3 - 3x^2 + 7}$

25.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2}{x + 3}$

26.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$

27.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - x}}$

28.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

29.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - x}}$

30.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 3}}$

31.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x - 1}$

32.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x^3 - 1}$

33.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{(x^2 + 1)^{1/3}}$

34.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{(x^6 - 1)^{1/3}}$

35.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x + \operatorname{sen} x}$

36.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x}$

37.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

38.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \cos x}{x}$

**Asíntota:** herramienta para graficar cu

39.  $f(x)$

41.  $f(x)$

**Encontrar límite:** ( $t \rightarrow 0^+$ )

43.  $\lim_{x \rightarrow \infty}$

**Encontrar límite:** (Si denominador ramien

45.  $\lim_{x \rightarrow -1}$

47.  $\lim_{x \rightarrow -1}$

**Análisis** 49-52, u la tabla nunciación la función analítica

$x$
$f(x)$

49.  $f(x)$

51.  $f(x)$

**DESARROLLO**

Reducción de fracciones p

53.  $\lim_{x \rightarrow -}$

55. D

d

te

f

f

x

1

x

56.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x}$

u

y

**Asíntotas horizontales** En los ejercicios 39-42, utilice una herramienta de graficación para representar la función e identificar cualquier asíntota horizontal.

39.  $f(x) = \frac{|x|}{x+1}$

40.  $f(x) = \frac{3x+2}{x-2}$

41.  $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}}$

42.  $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2-2}}{2x+1}$

**Encontrar un límite** En los ejercicios 43 y 44, determine el límite. (Sugerencia: Sea  $x = 1/t$  y encuentre el límite cuando  $t \rightarrow 0^+$ .)

43.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

44.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan \frac{1}{x}$

**Encontrar un límite** En los ejercicios 45-48, encuentre el límite. (Sugerencia: Trate la expresión como una fracción cuyo denominador es 1, y racionalice el numerador.) Utilice una herramienta de graficación para verificar su resultado.

45.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 3})$

46.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$

47.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt{9x^2 - x})$

48.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x - \sqrt{16x^2 - x})$

**Análisis numérico, gráfico y analítico** En los ejercicios 49-52, utilice una herramienta de graficación para completar la tabla y calcular el límite cuando  $x$  tiende a infinito. A continuación, use una herramienta de graficación para representar la función y calcular el límite. Por último, encuentre el límite analíticamente y compare sus resultados con las estimaciones.

$x$	$10^0$	$10^1$	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
$f(x)$							

49.  $f(x) = x - \sqrt{x(x-1)}$

50.  $f(x) = x^2 - x\sqrt{x(x-1)}$

51.  $f(x) = x \sin \frac{1}{2x}$

52.  $f(x) = \frac{x+1}{x\sqrt{x}}$

**DESARROLLO DE CONCEPTOS**

**Redacción** En los ejercicios 53 y 54, describa en sus propias palabras el significado de las siguientes expresiones.

53.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$

54.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

55. **Dibujar una gráfica** Dibuje la gráfica de una función derivable que satisfaga las siguientes condiciones y que tenga  $x = 2$  como su único punto crítico.

$f'(x) < 0$  para  $x < 2$

$f'(x) > 0$  para  $x > 2$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 6$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 6$

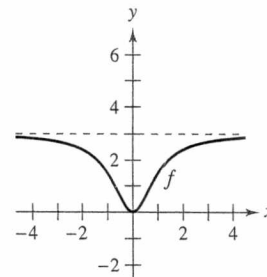
56. **Puntos de inflexión** ¿Es posible dibujar la gráfica de una función que satisfice las condiciones del ejercicio 55 y que no tiene puntos de inflexión? Explique.

**DESARROLLO DE CONCEPTOS (continuación)**

57. **Usar la simetría para encontrar límites** Si  $f$  es una función continua tal que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$ , determine, si es posible,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  para cada condición especificada.

- (a) La gráfica de  $f$  es simétrica con respecto al eje  $y$ .
- (b) La gráfica de  $f$  es simétrica con respecto al origen.

58. **Una función y su derivada** A continuación se muestra la gráfica de una función  $f$ . Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, vaya a *MathGraphs.com*.



- (a) Dibuje  $f'$ .
- (b) Utilice la gráfica para estimar  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ .
- (c) Explique las respuestas que obtuvo en el inciso (b).

**Dibujar una gráfica** En los ejercicios 59-74, dibuje la gráfica de la función utilizando extremos, intersecciones, simetría y asíntotas. Después, use una herramienta de graficación para verificar su resultado.

59.  $y = \frac{x}{1-x}$

60.  $y = \frac{x-4}{x-3}$

61.  $y = \frac{x+1}{x^2-4}$

62.  $y = \frac{2x}{9-x^2}$

63.  $y = \frac{x^2}{x^2+16}$

64.  $y = \frac{2x^2}{x^2-4}$

65.  $xy^2 = 9$

66.  $x^2y = 9$

67.  $y = \frac{3x}{x-1}$

68.  $y = \frac{3x}{1-x^2}$

69.  $y = 2 - \frac{3}{x^2}$

70.  $y = 1 - \frac{1}{x}$

71.  $y = 3 + \frac{2}{x}$

72.  $y = \frac{4}{x^2} + 1$

73.  $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}$

74.  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

**Analizar una gráfica con el uso de tecnología** En los ejercicios 75-82, utilice un sistema algebraico por computadora para analizar la gráfica de la función. Marque cualquier extremo y/o asíntotas que existan.

75.  $f(x) = 9 - \frac{5}{x^2}$

76.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$

77.  $f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 4x + 3}$

78.  $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + x + 1}$

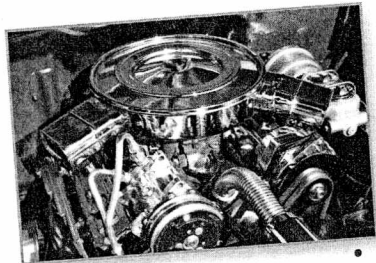
79.  $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$       80.  $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$   
 81.  $g(x) = \sin\left(\frac{x}{x-2}\right), x > 3$       82.  $f(x) = \frac{2 \operatorname{sen} 2x}{x}$

**83. Comparar funciones** En los ejercicios 83 y 84, (a) use una herramienta de graficación para representar  $f$  y  $g$  en la misma ventana de observación, (b) verifique algebraicamente que  $f$  y  $g$  representan la misma función, y (c) con el zoom, haga un acercamiento de tal forma que la gráfica aparezca como una recta. ¿Qué ecuación parece tener esta recta? (Observe que todos los puntos en los cuales la función no es continua no se ven con facilidad cuando se realiza el acercamiento.)

83.  $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x(x-3)}$   
 $g(x) = x + \frac{2}{x(x-3)}$   
 84.  $f(x) = -\frac{x^3 - 2x^2 + 2}{2x^2}$   
 $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{x^2}$

• • 85. Eficiencia de un motor • • • • •

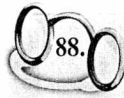
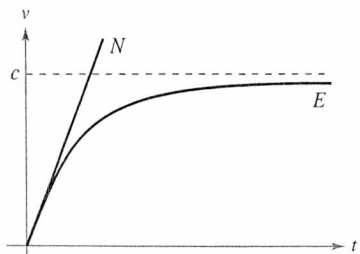
• La eficiencia de un motor de combustión interna es  
 • Eficiencia (%) =  $100 \left[ 1 - \frac{1}{(v_1/v_2)^c} \right]$   
 • donde  $v_1/v_2$  es la razón entre el gas no comprimido y el gas comprimido y  $c$  es una constante positiva que depende del diseño del motor. Encuentre el límite de la eficiencia cuando la razón de compresión se acerca al infinito.



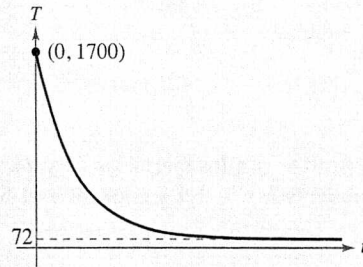
86. **Costo promedio** Un negocio tiene un costo de  $C = 0.5x + 500$  para producir  $x$  unidades. El costo promedio por unidad es  $\bar{C} = \frac{C}{x}$ .

Encuentre el límite de  $\bar{C}$  cuando  $x$  tiende a infinito.

87. **Física** La primera ley del movimiento de Newton y la teoría especial de la relatividad de Einstein difieren respecto al comportamiento de las partículas cuando su velocidad se acerca a la velocidad de la luz,  $c$ . Las funciones  $N$  y  $E$  representan la velocidad  $v$ , con respecto al tiempo  $t$ , de una partícula acelerada por una fuerza constante como la predijeron Newton y Einstein. Desarrolle una condición límite que describa cada una de estas dos teorías.



**88. ¿CÓMO LO VE?** La gráfica muestra la temperatura  $T$ , en grados Fahrenheit, del vidrio fundido  $t$  segundos después de que se retira de un horno.



- (a) Encuentre  $\lim_{t \rightarrow 0^+} T$ . ¿Qué representa este límite?
- (b) Encuentre  $\lim_{t \rightarrow \infty} T$ . ¿Qué representa este límite?
- (c) ¿La temperatura del vidrio puede alcanzar la temperatura ambiente? ¿Por qué?

**89. Modelar datos** La tabla muestra la velocidad  $S$  (en palabras por minuto) a la que un estudiante de mecanografía teclaa  $t$  semanas después de iniciar su aprendizaje.

$t$	5	10	15	20	25	30
$S$	28	56	79	90	93	94

Un modelo para los datos es  $S = \frac{100t^2}{65 + t^2}, t > 0$ .

- (a) Use una herramienta de graficación para dibujar los datos y representar el modelo.
- (b) ¿Parece haber alguna velocidad límite para mecanografiar? Explique.

**90. Modelar datos** Una sonda de calor se une a un intercambiador de calor de un sistema calefactor. La temperatura  $T$  (grados Celsius) se registra  $t$  segundos después que el horno empieza su operación. Los resultados para los primeros dos minutos se registran en la tabla.

$t$	0	15	30	45	60
$T$	25.2°	36.9°	45.5°	51.4°	56.0°

$t$	75	90	105	120
$T$	59.6°	62.0°	64.0°	65.2°

- (a) Utilice los programas para el cálculo de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma  $T_1 = at^2 + bt + c$  para los datos.
- (b) Utilice una herramienta de graficación para representar  $T_1$ .
- (c) Un modelo racional para los datos es  $T_2 = \frac{1451 + 86t}{58 + t}$ . Use una herramienta de graficación para graficar  $T_2$ .
- (d) Determine  $T_1(0)$  y  $T_2(0)$ .
- (e) Encuentre  $\lim_{t \rightarrow \infty} T_2$ .
- (f) Interprete el resultado del inciso (e) en el contexto del problema. ¿Es posible efectuar este tipo de análisis utilizando  $T_1$ ? Explique.

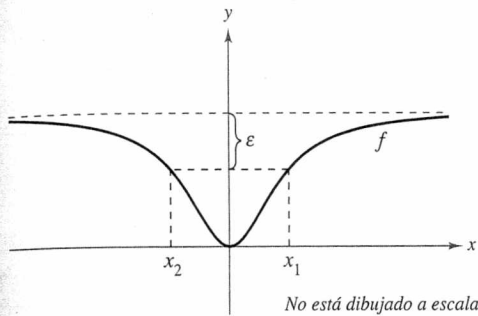
91. Us la  $f(x)$

92. Us la  $f(x)$

93. Us  $\lim_{x \rightarrow \dots}$

91. Usar la definición de límites indefinidos Se muestra la gráfica de

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 2}$$

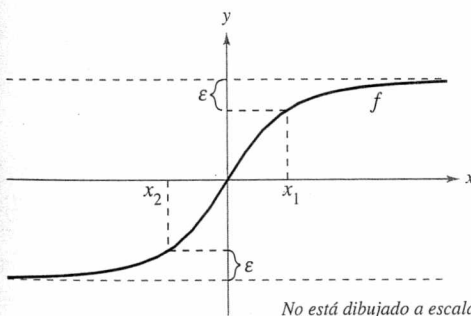


No está dibujado a escala.

- Determine  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
- Determine  $x_1$  y  $x_2$  en términos de  $\epsilon$ .
- Determine  $M$ , donde  $M > 0$ , tal que  $|f(x) - L| < \epsilon$  para  $x > M$ .
- Determine  $N$ , donde  $N < 0$ , tal que  $|f(x) - L| < \epsilon$  para  $x < N$ .

92. Usar la definición de límites indefinidos Se muestra la gráfica de

$$f(x) = \frac{6x}{\sqrt{x^2 + 2}}$$



No está dibujado a escala.

- Encuentre  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  y  $K = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- Determine  $x_1$  y  $x_2$  en términos de  $\epsilon$ .
- Determine  $M$ , donde  $M > 0$ , tal que  $|f(x) - L| < \epsilon$  para  $x > M$ .
- Determine  $N$ , donde  $N < 0$ , tal que  $|f(x) - K| < \epsilon$  para  $x < N$ .

93. Usar la definición de límites indefinidos Considere

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

- Utilice la definición de límites al infinito para encontrar los valores de  $M$  que corresponde a  $\epsilon = 0.5$ .
- Utilice la definición de límites al infinito para encontrar los valores de  $M$  que corresponde a  $\epsilon = 0.1$ .

94. Usar la definición de límites indefinidos Considere

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

- Utilice la definición de límites al infinito para encontrar los valores de  $M$  que corresponde a  $\epsilon = 0.5$ .
- Utilice la definición de límites al infinito para encontrar los valores de  $N$  que corresponde a  $\epsilon = 0.1$ .

**Demostración** En los ejercicios 95-98, use la definición de límites al infinito para comprobar el límite.

95.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$

96.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

97.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

98.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - 2} = 0$

99. **Distancia** Una recta con una pendiente  $m$  pasa por el punto  $(0, 4)$ .

- Escriba la distancia  $d$  entre la recta y el punto  $(3, 1)$  como una función de  $m$ .

- (b) Utilice una herramienta de graficación para representar la ecuación del inciso (a).

- Determine  $\lim_{m \rightarrow \infty} d(m)$  y  $\lim_{m \rightarrow -\infty} d(m)$ . Interprete geoméricamente los resultados.

100. **Distancia** Una recta con pendiente  $m$  pasa por el punto  $(0, -2)$ .

- Escriba la distancia  $d$  entre la recta y el punto  $(4, 2)$  como una función de  $m$ .

- (b) Utilice una herramienta de graficación para representar la ecuación del inciso (a).

- Determine  $\lim_{m \rightarrow \infty} d(m)$  y  $\lim_{m \rightarrow -\infty} d(m)$ . Interprete geoméricamente los resultados.

101. **Demostración** Demuestre que si

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

y

$$q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$$

donde  $a_n \neq 0$  y  $b_m \neq 0$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0, & n < m \\ \frac{a_n}{b_m}, & n = m. \\ \pm \infty, & n > m \end{cases}$$

102. **Demostración** Utilice la definición de límites infinitos al infinito para demostrar que  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$ .

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 103 y 104, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

- Si  $f'(x) > 0$  para todo número real  $x$ , entonces  $f$  es creciente sin límite.
- Si  $f''(x) < 0$  para todo número real  $x$ , entonces  $f$  es decreciente sin límite.

# Ejercicios de repaso

Consulte [CalcChat.com](http://CalcChat.com) para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Precálculo o cálculo** En los ejercicios 1 y 2, determine si el problema se puede resolver usando conocimientos previos al cálculo, o si se requiere el cálculo. Si el problema parece requerir de cálculo, explique por qué. Encuentre la solución usando un método gráfico o numérico.

1. Calcule la distancia entre los puntos (1, 1) y (3, 9) a lo largo de la curva  $y = x^2$ .
2. Calcule la distancia entre los puntos (1, 1) y (3, 9) a lo largo de la recta  $y = 4x - 3$ .

**Estimar un límite numérico** En los ejercicios 3 y 4, complete la tabla y use el resultado para calcular el límite. Utilice una herramienta de graficación para representar la función y confirmar el resultado.

3.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 7x + 12}$

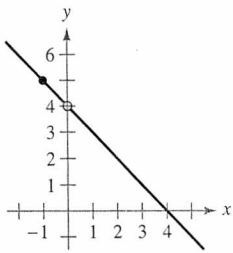
x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
f(x)				?			

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
f(x)				?			

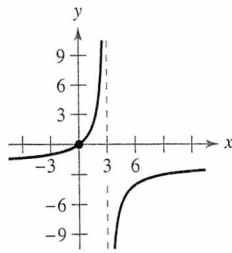
**Encontrar un límite gráfico** En los ejercicios 5 y 6, utilice la gráfica para encontrar el límite (si existe). Si no existe el límite, explique por qué.

5.  $h(x) = \frac{4x - x^2}{x}$



(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$     (b)  $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$

6.  $g(x) = \frac{-2x}{x - 3}$



(a)  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$     (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

**Usar la definición de un límite** En los ejercicios 7-10, encuentre el límite. Después, utilice la definición  $\epsilon$ - $\delta$  para demostrar que el límite es L.

7.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 4)$

8.  $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x}$

9.  $\lim_{x \rightarrow 2} (1 - x^2)$

10.  $\lim_{x \rightarrow 5} 9$

**Calcular un límite** En los ejercicios 11-28, encuentre el límite.

11.  $\lim_{x \rightarrow -6} x^2$

12.  $\lim_{x \rightarrow 0} (5x - 3)$

13.  $\lim_{t \rightarrow 4} \sqrt{t + 2}$

14.  $\lim_{x \rightarrow -5} \sqrt[3]{x - 3}$

15.  $\lim_{x \rightarrow 6} (x - 2)^2$

16.  $\lim_{x \rightarrow 7} (x - 4)^3$

17.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4}{x - 1}$

18.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 + 1}$

19.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{t + 2}{t^2 - 4}$

20.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{t^2 - 16}{t - 4}$

21.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x - 3} - 1}{x - 4}$

22.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + x} - 2}{x}$

23.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1/(x + 1)] - 1}{x}$

24.  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1/\sqrt{1 + s}) - 1}{s}$

25.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

26.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{4x}{\tan x}$

27.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin[(\pi/6) + \Delta x] - (1/2)}{\Delta x}$

[Sugerencia:  $\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$ ]

28.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi + \Delta x) + 1}{\Delta x}$

[Sugerencia:  $\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$ ]

**Evaluar un límite** En los ejercicios 29-32, calcule el límite dados  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -6$  y  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \frac{1}{2}$ .

29.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)]$

30.  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$

31.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + 2g(x)]$

32.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^2$

**Análisis gráfico, numérico y analítico** En los ejercicios 33-36, utilice una herramienta de graficación para trazar la función y calcular el límite. Use una tabla para reforzar su conclusión. A continuación, determine el límite por métodos analíticos.

33.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x + 9} - 3}{x}$

34.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1/(x + 4)] - (1/4)}{x}$

35.  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^3 + 125}{x + 5}$

36.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

**Objeto en caída libre** En los ejercicios 37 y 38, utilice la función de posición  $s(t) = -4.9t^2 + 250$ , que da la altura (en metros) de un objeto que cae libremente durante  $t$  segundos desde una altura de 250 metros. Su velocidad en el instante  $t = a$  segundos está dada por

$\lim_{t \rightarrow a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}$

37. Calcule la velocidad cuando  $t = 4$ .

38. ¿A qué velocidad golpeará el suelo?

**Encontrar un límite** En los ejercicios 39-48, encuentre el límite (si existe). Si no existe, explique por qué.

39.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x + 3}$

40.  $\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{x - 6}{x^2 - 36}$

41.  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

42.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x - 3|}{x - 3}$

43.  $\lim_{x \rightarrow 2}$

44.  $\lim_{x \rightarrow 1}$

45.  $\lim_{t \rightarrow 1}$

46.  $\lim_{s \rightarrow -}$

47.  $\lim_{x \rightarrow 2}$

Discontinuidades 48 no es co

49. f(x)

51. f(x)

53. f(x)

55. Ha par ros

f(x)

56. Ha que ros

f(x)

Prueba interval

57. f(x)

58. f(x)

59. f(x)

60. f(x)

61. f(x)

62. f(x)

63. Us val sol

64. Cc saj lib fur co: Ut cié

43.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ , donde  $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2, & x \leq 2 \\ 2-x, & x > 2 \end{cases}$
44.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ , donde  $g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$
45.  $\lim_{t \rightarrow 1} h(t)$ , donde  $h(t) = \begin{cases} t^3 + 1, & t < 1 \\ \frac{1}{2}(t+1), & t \geq 1 \end{cases}$
46.  $\lim_{s \rightarrow -2} f(s)$ , donde  $f(s) = \begin{cases} -s^2 - 4s - 2, & s \leq -2 \\ s^2 + 4s + 6, & s > -2 \end{cases}$
47.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (2\lfloor x \rfloor + 1)$       48.  $\lim_{x \rightarrow 4} \lfloor x - 1 \rfloor$

**Discontinuidades removibles y no removibles** En los ejercicios 49-54, encuentre los valores de  $x$  (si los hay) en los que  $f$  no es continua. ¿Cuáles de las discontinuidades son removibles?

49.  $f(x) = x^2 - 4$       50.  $f(x) = x^2 - x + 20$
51.  $f(x) = \frac{4}{x-5}$       52.  $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$
53.  $f(x) = \frac{x}{x^3-x}$       54.  $f(x) = \frac{x+3}{x^2-3x-18}$

55. **Hacer una función continua** Determine el valor de  $c$  para que la función sea continua en toda la recta de los números reales.

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 2 \\ cx+6, & x > 2 \end{cases}$$

56. **Hacer una función continua** Determine los valores  $b$  y  $c$  que hacen a la función continua en toda la recta de los números reales.

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 1 < x < 3 \\ x^2 + bx + c, & |x-2| \geq 1 \end{cases}$$

**Prueba de continuidad** En los ejercicios 57-62, determine los intervalos sobre los que la función es continua.

57.  $f(x) = -3x^2 + 7$
58.  $f(x) = \frac{4x^2 + 7x - 2}{x+2}$
59.  $f(x) = \sqrt{x-4}$
60.  $f(x) = \lfloor x + 3 \rfloor$
61.  $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - x - 2}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$
62.  $f(x) = \begin{cases} 5-x, & x \leq 2 \\ 2x-3, & x > 2 \end{cases}$

63. **Usar el teorema del valor medio** Utilice el teorema de valor medio para demostrar que  $f(x) = 2x^3 - 3$  tiene un cero sobre el intervalo  $[1, 2]$ .

64. **Costo de mensajería** El envío de un paquete por mensajería de Nueva York a Atlanta cuesta \$12.80 por la primera libra y \$2.50 por cada libra o fracción adicional. Utilice la función parte entera para elaborar un modelo que describa el costo  $C$  de envío por mensajería para un paquete de  $x$  libras. Utilice una herramienta de graficación para representar la función y analice su continuidad.

65. **Encontrar límites** Sea

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x-2|}$$

Encuentre los siguientes límites (si existen).

(a)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$     (b)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$     (c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

66. **Encontrar límites** Sea  $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$ .

- (a) Encuentre el dominio de  $f$ .
- (b) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ .
- (c) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .

**Encontrar asíntotas verticales** En los ejercicios 67-72, encuentre las asíntotas verticales (si existen) de la gráfica de la función.

67.  $f(x) = \frac{3}{x}$       68.  $f(x) = \frac{5}{(x-2)^4}$
69.  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-9}$       70.  $h(x) = \frac{6x}{36-x^2}$
71.  $g(x) = \frac{2x+1}{x^2-64}$       72.  $f(x) = \csc \pi x$

**Encontrar un límite lateral** En los ejercicios 73-82, encuentre el límite lateral (si existe).

73.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x + 1}{x-1}$       74.  $\lim_{x \rightarrow (1/2)^+} \frac{x}{2x-1}$
75.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{x^3+1}$       76.  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{x^4-1}$
77.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x - \frac{1}{x^3} \right)$       78.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-4}}$
79.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} 4x}{5x}$       80.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sec} x}{x}$
81.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\csc 2x}{x}$       82.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos^2 x}{x}$

83. **Medio ambiente** Una central térmica quema carbón para generar energía eléctrica. El costo  $C$ , en dólares, de eliminar  $p\%$  de las sustancias contaminantes del aire en sus emisiones de humo es

$$C = \frac{80,000p}{100-p}, \quad 0 \leq p < 100.$$

- (a) Calcule cuánto cuesta eliminar 15% de los contaminantes.
- (b) Calcule cuánto cuesta eliminar 50% de los contaminantes.
- (c) Calcule cuánto cuesta eliminar 90% de los contaminantes.
- (d) Encuentre el límite de  $C$  cuando  $p$  tiende a 100 por la izquierda e interprete su significado.

84. **Límites y continuidad** La función  $f$  está definida como

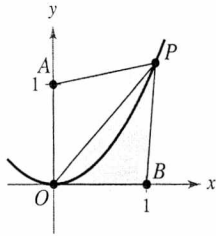
$$f(x) = \frac{\tan 2x}{x}, \quad x \neq 0$$

- (a) Encuentre  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x}$  (si existe).
- (b) ¿Puede definirse la función  $f$  en  $x = 0$  de manera que sea continua en ese punto?

# Solución de problemas

Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

1. **Perímetro** Sea  $P(x, y)$  un punto de la parábola  $y = x^2$  en el primer cuadrante. Considere el triángulo  $\triangle PAO$  formado por  $P$ ,  $A(0, 1)$  y el origen  $O(0, 0)$ , y el triángulo  $\triangle PBO$  formado por  $P$ ,  $B(1, 0)$  y el origen.



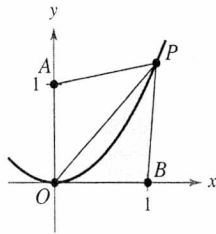
- (a) Determine el perímetro de cada triángulo en términos de  $x$ .  
 (b) Sea  $r(x)$  la razón entre los perímetros de ambos triángulos,

$$r(x) = \frac{\text{Perímetro } \triangle PAO}{\text{Perímetro } \triangle PBO}$$

Complete la tabla. Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0^+} r(x)$ .

$x$	4	2	1	0.1	0.01
Perímetro $\triangle PAO$					
Perímetro $\triangle PBO$					
$r(x)$					

2. **Área** Sea  $P(x, y)$  un punto de la parábola  $y = x^2$  en el primer cuadrante. Considere el triángulo  $\triangle PAO$  formado por  $P$ ,  $A(0, 1)$  y el origen  $O(0, 0)$ , y el triángulo  $\triangle PBO$  formado por  $P$ ,  $B(1, 0)$  y el origen.



- (a) Determine el área de cada triángulo en términos de  $x$ .  
 (b) Sea  $a(x)$  el cociente de las áreas de ambos triángulos,

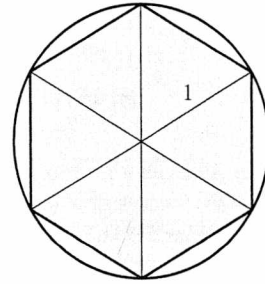
$$a(x) = \frac{\text{Área } \triangle PBO}{\text{Área } \triangle PAO}$$

Complete la tabla. Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0^+} a(x)$ .

$x$	4	2	1	0.1	0.01
Área $\triangle PAO$					
Área $\triangle PBO$					
$a(x)$					

3. **Área de un círculo**

- (a) Calcule el área de un hexágono regular inscrito en un círculo de radio 1. ¿Cuánto se acerca su área a la del círculo?



- (b) Encuentre el área  $A_n$  de un polígono regular con  $n$  lados inscrito en un círculo de radio 1. Elabore su respuesta como una función de  $n$ .  
 (c) Complete la tabla. ¿Qué número es cada vez mayor cuando  $A_n$  tiende a  $n$ ?

$n$	6	12	24	48	96
$A_n$					

4. **Recta tangente** Sea  $P(3, 4)$  un punto del círculo  $x^2 + y^2 = 25$ .

- (a) ¿Cuál es la pendiente de la recta que une a  $P$  con  $O(0, 0)$ ?  
 (b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en  $P$ .  
 (c) Sea  $Q(x, y)$  otro punto que se encuentra en el primer cuadrante y forma parte de la misma circunferencia. Calcule la pendiente  $m_x$  de la recta que une a  $P$  con  $Q$  en términos de  $x$ .  
 (d) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 3} m_x$ . ¿Cómo se relaciona este número con la respuesta en el inciso (b)?

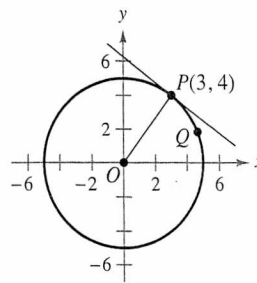


Figura para 4

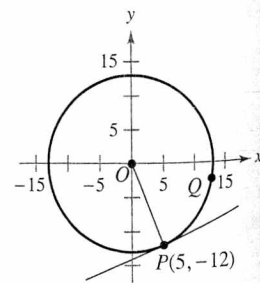


Figura para 5

5. **Recta tangente** Sea  $P(5, -12)$  un punto del círculo  $x^2 + y^2 = 169$ .

- (a) ¿Cuál es la pendiente de la recta que une a  $P$  con  $O(0, 0)$ ?  
 (b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en  $P$ .  
 (c) Sea  $Q(x, y)$  otro punto que se encuentra en el cuarto cuadrante y forma parte de la misma circunferencia. Calcule la pendiente  $m_x$  de la recta  $P$  con  $Q$  en términos de  $x$ .  
 (d) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 5} m_x$ . ¿Cómo se relaciona este número con la respuesta al inciso (b)?

6. Encuentre  $a$  y  $b$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

7. Encuentre  $f(x)$

$f(x)$

(a) 1

(b) 1

1

(c) 0

(d) 0

8. Hacer  $d$  en  $tc$

$f(x)$

9. Elegir  $g_2, g$

3

2

1

-

3

2

1

-

para gráfi

(a)

(b)

(c)

10. Limite

$f(x)$

(a)

(b)

(c)

6. **Encontrar valores** Encuentre los valores de las constantes  $a$  y  $b$  tales que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{3}}{x} = \sqrt{3}.$$

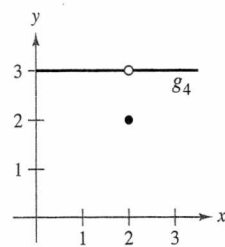
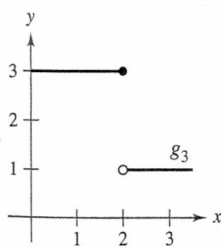
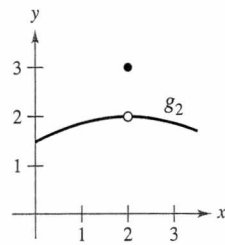
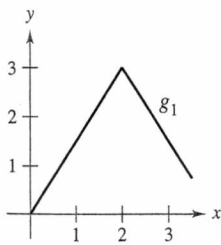
7. **Encontrar valores** Considere la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{3+x^{1/3}} - 2}{x-1}.$$

- (a) Encuentre el dominio de  $f$ .  
 (b) Utilice una herramienta de graficación para representar la función.  
 (c) Calcule  $\lim_{x \rightarrow -27^+} f(x)$ .  
 (d) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .
8. **Hacer una función continua** Determine todos los valores de la constante  $a$  tales que la siguiente función sea continua en todos los números reales

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x \geq 0 \\ \tan x, & x < 0 \\ a^2 - 2, & x < 0 \end{cases}$$

9. **Elegir gráficas** Considere las gráficas de las funciones  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  y  $g_4$ :



para cada una de las condiciones dadas de la función  $f$ , ¿cuál gráfica podría ser una gráfica de  $f$ ?

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$   
 (b)  $f$  es continua en 2.  
 (c)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$
10. **Límites y continuidad** Dibuje la gráfica de la función

$$f(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

- (a) Evalúe  $f(\frac{1}{4})$ ,  $f(3)$  y  $f(1)$ .  
 (b) Evalúe los límites  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .  
 (c) Analice la continuidad de la función.

11. **Límites y continuidad** Dibuje la gráfica de la función

$$f(x) = \llbracket x \rrbracket + \llbracket -x \rrbracket.$$

- (a) Evalúe  $f(1)$ ,  $f(0)$ ,  $f(\frac{1}{2})$  y  $f(-2.7)$ .  
 (b) Evalúe los límites  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 1/2} f(x)$ .  
 (c) Analice la continuidad de la función.

12. **Velocidad de escape** Para que un cohete escape del campo de gravedad de la Tierra, se debe lanzar con una velocidad inicial denominada **velocidad de escape**. Un cohete lanzado desde la superficie de la Tierra tiene una velocidad  $v$  (en millas por segundo) dada por:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r} + v_0^2 - \frac{2GM}{R}} \approx \sqrt{\frac{192,000}{r} + v_0^2 - 48}$$

donde  $v_0$  es la velocidad inicial,  $r$  es la distancia entre el cohete y el centro de la Tierra,  $G$  es la constante de gravedad,  $M$  es la masa de la Tierra y  $R$  es el radio de la tierra (4000 millas, aproximadamente).

- (a) Encuentre el valor de  $v_0$  para el que se obtiene un límite infinito para  $r$  cuando  $v$  tiende a cero. Este valor de  $v_0$  es la velocidad de escape para la Tierra.  
 (b) Un cohete lanzado desde la superficie de la Luna se desplaza con una velocidad  $v$  (millas por segundo) dada por

$$v = \sqrt{\frac{1920}{r} + v_0^2 - 2.17}.$$

Encuentre la velocidad de escape para la Luna.

- (c) Un cohete lanzado desde la superficie de un planeta se desplaza con una velocidad  $v$  (en millas por segundo) dada por

$$v = \sqrt{\frac{10,600}{r} + v_0^2 - 6.99}.$$

Encuentre la velocidad de escape de este planeta. ¿La masa de este planeta es mayor o menor que la de la Tierra? (Suponga que la densidad media de este planeta es igual a la de la Tierra.)

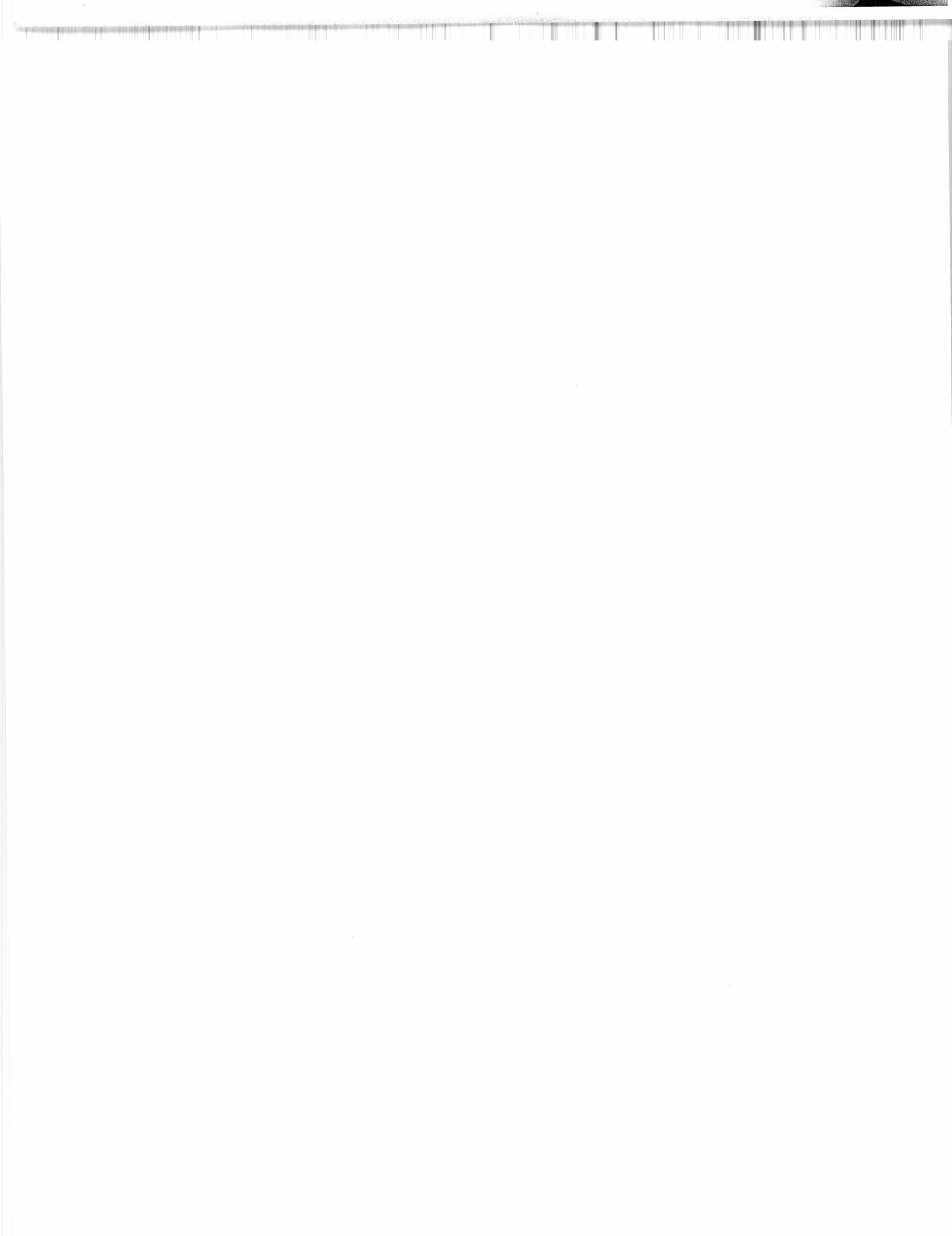
13. **Función pulso** Para los números positivos  $a < b$ , la **función pulso** se define como

$$P_{a,b}(x) = H(x-a) - H(x-b) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & a \leq x < b \\ 0, & x \geq b \end{cases}$$

donde  $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$  es la función de Heaviside.

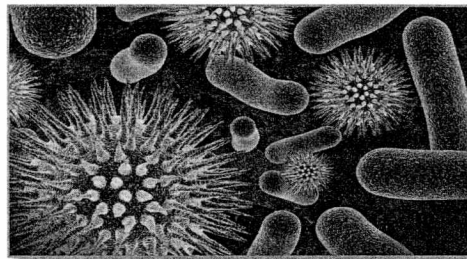
- (a) Trace la gráfica de la función pulso.  
 (b) Encuentre los siguientes límites:  
 (i)  $\lim_{x \rightarrow a^+} P_{a,b}(x)$       (ii)  $\lim_{x \rightarrow a^-} P_{a,b}(x)$   
 (iii)  $\lim_{x \rightarrow b^+} P_{a,b}(x)$       (iv)  $\lim_{x \rightarrow b^-} P_{a,b}(x)$   
 (c) Analice la continuidad de la función pulso.  
 (d) ¿Por qué  $U(x) = \frac{1}{b-a} P_{a,b}(x)$  recibe el nombre de **función de pulso unitario**?

14. **Demostración** Sea  $a$  una constante diferente de cero. Demuestre que si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} f(ax) = L$ . Demuestre por medio de un ejemplo que  $a$  debe ser distinta de cero.



# La derivada

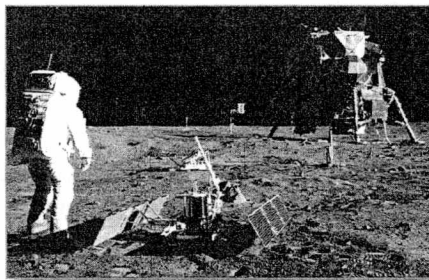
- 4.1 La derivada y su interpretación geométrica
- 4.2 Reglas básicas de derivación y razones de cambio
- 4.3 Reglas del producto, del cociente y derivadas trigonométricas
- 4.4 La regla de la cadena
- 4.5 Derivación implícita
- 4.6 Razones de cambio relacionadas
- 4.7 Derivada de la función inversa
- 4.8 Derivada de la función exponencial y de la función logaritmo natural
- 4.9 Derivada de la función exponencial de base  $a$  y de la función logaritmo en base  $a$
- 4.10 Derivada de las funciones trigonométricas inversas
- 4.11 Derivada de las funciones hiperbólicas e hiperbólicas inversas



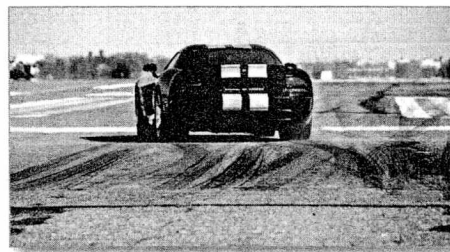
Bacteria



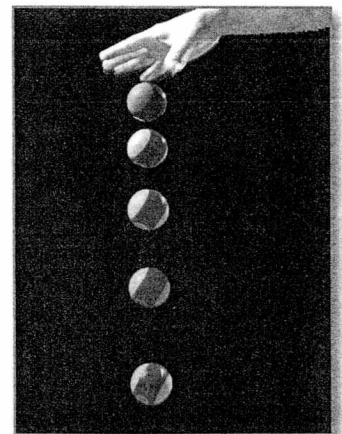
Razón de cambio



Aceleración de la gravedad




Distancia de frenado



Velocidad de un objeto que cae

# 4.1 La derivada y su interpretación geométrica



**ISAAC NEWTON**  
(1642-1727)

Además de sus trabajos relativos al cálculo, Newton aportó a la física contribuciones tan revolucionarias como la Ley de la Gravitación Universal y sus tres leyes del movimiento.  
*Consulte LarsonCalculus.com para leer más de esta biografía.*

- Hallar la pendiente de la recta tangente de una curva en un punto.
- Usar la definición de límite para calcular la derivada de una función.
- Entender la relación entre derivabilidad y continuidad.

## El problema de la recta tangente

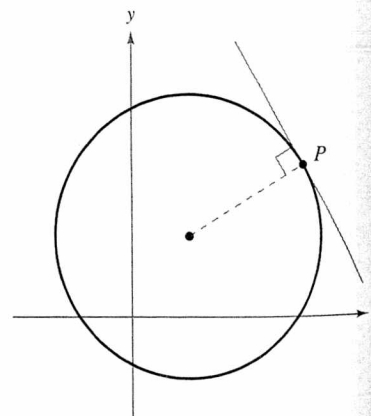
El cálculo se desarrolló a la sombra de cuatro grandes problemas en los que estaban trabajando los matemáticos europeos en el siglo XVII.

1. El problema de la recta tangente (sección 3.1 y en esta sección)
2. El problema de velocidad y aceleración (secciones 4.2 y 4.3)
3. El problema de máximos y mínimos (sección 3.1)
4. El problema del área (sección 3.1)

Cada uno de ellos involucra el concepto de un límite y podría servir como introducción al cálculo.

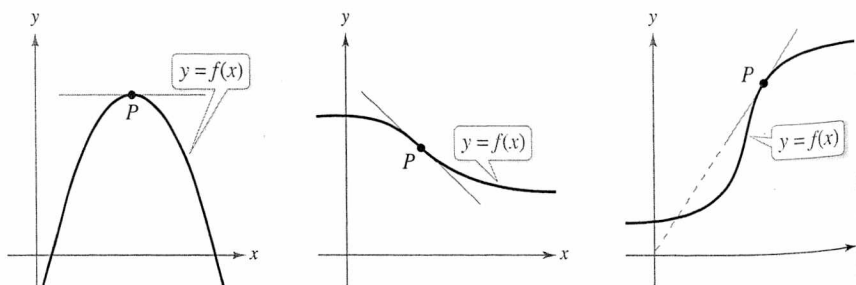
En la sección 3.1 se hizo una breve introducción al problema de la recta tangente. Aunque Pierre de Fermat (1601-1665), René Descartes (1596-1650), Christian Huygens (1629-1695) e Isaac Barrow (1630-1677) habían propuesto soluciones parciales, la primera solución generada se suele atribuir a Isaac Newton (1642-1727) y a Gottfried Leibniz (1646-1716). El trabajo de Newton respecto a este problema procedía de su interés por la refracción de la luz y la óptica.

¿Qué quiere decir que una recta es tangente a una curva en un punto? En una circunferencia, la recta tangente en un punto  $P$  es la recta perpendicular al radio que pasa por  $P$ , como se muestra en la figura 4.1.



Recta tangente a una circunferencia.  
**Figura 4.1**

Sin embargo, en una curva general el problema se complica. Por ejemplo, ¿cómo se podrían definir las rectas tangentes que se observan en la figura 4.2? Afirmando que una recta es tangente a una curva en un punto  $P$  si toca a la curva en  $P$  sin atravesarla. Tal definición sería correcta para la primera curva de la figura 4.2, pero no para la segunda. También se podría decir que una recta es tangente a una curva si la toca o hace intersección en ella exactamente en el punto  $P$ , definición que serviría para una circunferencia, pero no para curvas más generales, como sugiere la tercera curva de la figura 4.2.



Recta tangente a una curva en un punto.

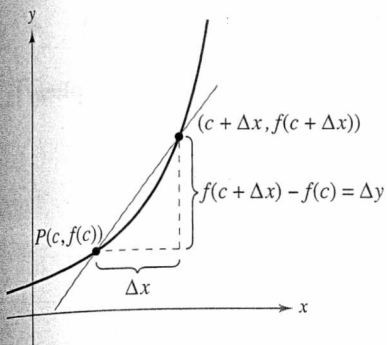
**Figura 4.2**

### Exploración

Utilice una herramienta de graficación para representar la función  $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ . En la misma pantalla, dibuje la gráfica  $y = x - 5$ ,  $y = 2x - 5$  y  $y = 3x - 5$ . ¿Cuál de estas rectas, si es que hay alguna, parece ser tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(0, -5)$ ? Explique su razonamiento.

$y$   
 $P(c, f(c))$   
Recta sec  
 $(c + \Delta x,$   
**Figura 4**

En 1637, Descartes resolvió el problema de la tangente.  
"Y no te atrevas a afirmar que el problema general de la tangente que se resuelve en esta obra es el mismo que el que se resuelve en la obra de Fermat."



Recta secante que pasa por  $(c, f(c))$  y  $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$ .

Figura 4.3

En esencia, el problema de encontrar la recta tangente en un punto  $P$  se reduce al de calcular su *pendiente* en ese punto. Se puede aproximar la pendiente de la recta tangente usando la **recta secante**\* que pasa por  $P$  y por otro punto cercano de la curva, como se muestra en la figura 4.3. Si  $(c, f(c))$  es el punto de tangencia y

$$(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$$

es el segundo punto de la gráfica de  $f$ , la pendiente de la recta secante que pasa por ambos puntos se encuentra sustituyendo en la fórmula de la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{(c + \Delta x) - c} \quad \begin{array}{l} \text{Cambio en } y \\ \text{Cambio en } x \end{array}$$

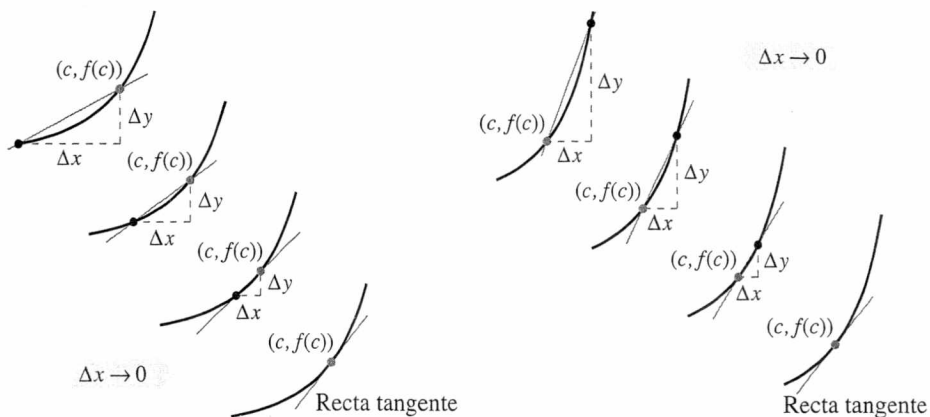
$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \quad \text{Pendiente de la recta secante}$$

El miembro de la derecha en esta ecuación es un **cociente de diferencias**. El denominador  $\Delta x$  es el **cambio** (o incremento) **en  $x$**  y el numerador

$$\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$$

es el **cambio en  $y$** .

La belleza de este procedimiento radica en que se pueden obtener más aproximaciones y más precisas de la pendiente de la recta tangente tomando puntos de la gráfica cada vez más próximos al punto  $P$  de tangencia, como se muestra en la figura 4.4.



Aproximaciones a la recta tangente.

Figura 4.4

**EL PROBLEMA DE LA RECTA TANGENTE**

En 1637 el matemático René Descartes afirmó lo siguiente respecto al problema de la recta tangente:

“Y no tengo inconveniente en afirmar que este no es solo el problema de geometría más útil y general que conozco, sino incluso el que siempre desearía conocer.”

**Definición de la recta tangente con pendiente  $m$**

Si  $f$  está definida en un intervalo abierto que contiene a  $c$  y además existe el límite,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m$$

entonces la recta que pasa por  $(c, f(c))$  con pendiente  $m$  es la **recta tangente** a la gráfica de  $f$  en el punto  $(c, f(c))$ .

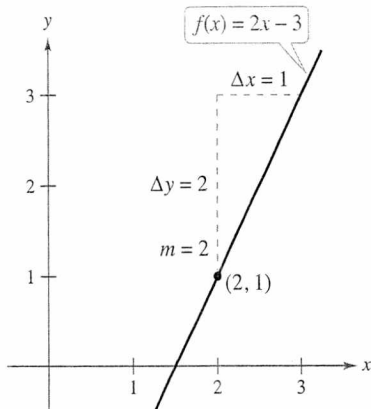
La pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(c, f(c))$  se llama también **pendiente de la gráfica de  $f$  en  $x = c$** .

\*El uso de la palabra secante procede del latín *secare*, que significa cortar, y no es una referencia a la función trigonométrica del mismo nombre.

**EJEMPLO 1**

**Pendiente de la gráfica de una función lineal**

Encuentre la pendiente de la gráfica de  $f(x) = 2x - 3$  cuando  $c = 2$ , se puede aplicar la definición de la pendiente de una recta tangente, como se muestra.



La pendiente de  $f$  en  $(2, 1)$  es  $m = 2$ .  
**Figura 4.5**

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[2(2 + \Delta x) - 3] - [2(2) - 3]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 + 2\Delta x - 3 - 4 + 3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

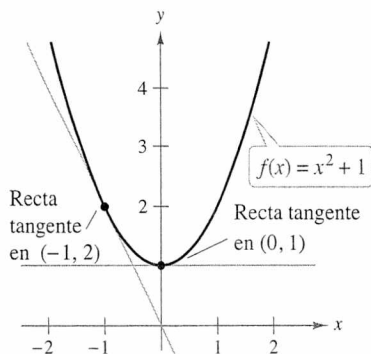
La pendiente de  $f$  en  $(c, f(c)) = (2, 1)$  es  $m = 2$ , como se observa en la figura 4.5.

La gráfica de una función lineal tiene la misma pendiente en todos sus puntos. Esto no sucede en las funciones no lineales, como se puede observar en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 2**

**Rectas tangentes a la gráfica de una función no lineal**

Calcule las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de  $f(x) = x^2 + 1$  en los puntos  $(0, 1)$  y  $(-1, 2)$ , que se ilustran en la figura 4.6.

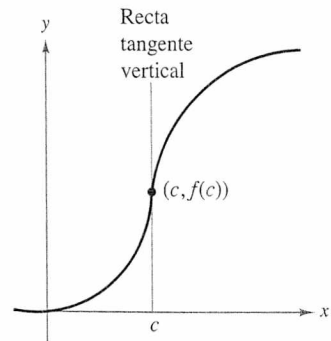


La pendiente de  $f$  en un punto cualquiera  $(c, f(c))$  es  $m = 2c$ .  
**Figura 4.6**

**Solución** Sea  $(c, f(c))$  que representan un punto arbitrario en la gráfica de  $f$ . Cuando la pendiente de la recta tangente en  $(c, f(c))$  se puede encontrar como se muestra a continuación. [Observe en el proceso de límite que  $c$  se mantiene constante (cuando  $\Delta x$  se aproxima a 0).]

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(c + \Delta x)^2 + 1] - (c^2 + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c^2 + 2c(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 1 - c^2 - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2c(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2c + \Delta x) \\ &= 2c \end{aligned}$$

De tal manera, la pendiente en *cualquier* punto  $(c, f(c))$  de la gráfica de  $f$  es  $m = 2c$ . En el punto  $(0, 1)$  la pendiente es  $m = 2(0) = 0$  y en  $(-1, 2)$  la pendiente es  $m = 2(-1) = -2$ .



La gráfica de  $f$  tiene una recta tangente vertical en  $(c, f(c))$ .  
**Figura 4.7**

La definición de la recta tangente a una curva no incluye la posibilidad de una recta tangente vertical. Para éstas, se usa la siguiente definición. Si  $f$  es continua en  $c$  y

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = -\infty$$

la recta vertical,  $x = c$ , que pasa por  $(c, f(c))$  es una **recta tangente vertical** a la gráfica de  $f$ . Por ejemplo, la función que se muestra en la figura 4.7 tiene tangente vertical en  $(c, f(c))$ . Si el dominio de  $f$  es el intervalo cerrado  $[a, b]$ , se puede ampliar la definición de recta tangente vertical de manera que incluya los extremos, considerando la continuidad y los límites por la derecha (para  $x = a$ ) y por la izquierda (para  $x = b$ ).

...  
•••COM  
ción,  
de  $x$ "

■ PARA I  
Para obter  
la acredita  
matemátic  
dores", co  
cal Firsts-  
H. William  
Mathemat  
artículo, v.

...•••COM  
• use la  
• la der  
• clave  
• expre  
• difere  
• no ap  
• denor

## Derivada de una función

Se ha llegado a un punto crucial en el estudio del cálculo. El límite utilizado para definir la pendiente de una recta tangente también se utiliza para definir una de las dos operaciones fundamentales del cálculo: la **derivación**.

### Definición de la derivada de una función

La **derivada** de  $f$  en  $x$  está dada por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que exista ese límite. Para todos los  $x$  para los que exista este límite,  $f'$  es una función de  $x$ .

.....▶  
**COMENTARIO** La notación  $f'(x)$  se lee como “*f* prima de  $x$ ”.

Observe que la derivada de una función de  $x$  también es una función de  $x$ . Esta “nueva” función proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(x, f(x))$ , siempre que la gráfica tenga una recta tangente en dicho punto. La derivada también puede ser utilizada para determinar la **razón de cambio instantánea** (o simplemente la **razón de cambio**) de una variable con respecto a otra.

El proceso de calcular la derivada de una función se llama **derivación**. Una función es **derivable** en  $x$  si su derivada en  $x$  existe, y es **derivable sobre un intervalo abierto**  $(a, b)$  cuando es derivable en todos y cada uno de los puntos de ese intervalo.

Además de  $f'(x)$ , se usan otras notaciones para la derivada de  $y = f(x)$ . Las más comunes son:

$$f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad y', \quad \frac{d}{dx}[f(x)], \quad D_x[y]. \quad \text{Notación de las derivadas}$$

La notación  $dy/dx$  se lee “derivada de  $y$  con respecto a  $x$ ” o simplemente “ $dy, dx$ ”. Usando notaciones de límites, se puede escribir

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

### EJEMPLO 3

### Calcular la derivada mediante el proceso de límite

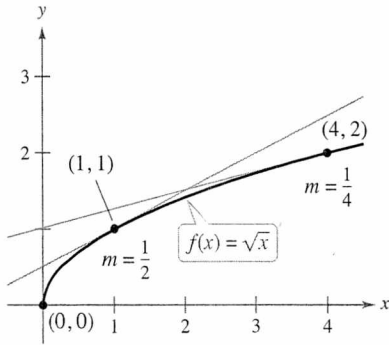
.....▶ Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Calcule la derivada de  $f(x) = x^3 + 2x$ , utilice la definición de la derivada como se muestra.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} && \text{Definición de derivada} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 + 2(x + \Delta x) - (x^3 + 2x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2x + 2\Delta x - x^3 - 2x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2] \\ &= 3x^2 + 2 \end{aligned}$$

.....▶  
**COMENTARIO** Cuando use la definición para encontrar la derivada de una función, la clave consiste en volver a expresar el cociente de diferencias, de manera que  $\Delta x$  no aparezca como factor del denominador.

**COMENTARIO** Recuerde que la derivada de una función  $f$  es en sí misma una función, que se puede utilizar para encontrar la pendiente de la recta tangente en el punto  $(x, f(x))$  en la gráfica de  $f$ .



La pendiente de  $f$  en  $(x, f(x))$ ,  $x > 0$ , es  $m = 1/(2\sqrt{x})$ .

Figura 4.8

**EJEMPLO 4**

**Usar la derivada para calcular la pendiente en un punto**

Encuentre  $f'(x)$  para  $f(x) = \sqrt{x}$ . A continuación, calcule la pendiente de la gráfica de  $f$  en los puntos  $(1, 1)$  y  $(4, 2)$ . Analice el comportamiento de  $f$  en  $(0, 0)$ .

**Solución** Racionalice el numerador, como se explicó en la sección 3.3.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} && \text{Definición de derivada} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \right) \left( \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

En el punto  $(1, 1)$  la pendiente es  $f'(1) = \frac{1}{2}$ . En el punto  $(4, 2)$  la pendiente  $f'(4) = \frac{1}{4}$ . Vea la figura 4.8. En el punto  $(0, 0)$  la pendiente no está definida. Además, la gráfica de  $f$  tiene tangente vertical en  $(0, 0)$

**EJEMPLO 5**

**Calcular la derivada de una función**

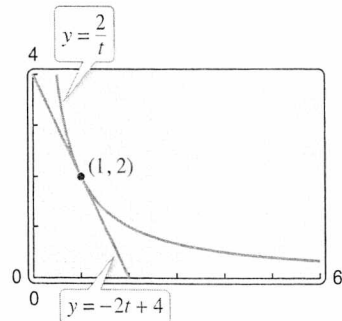
**COMENTARIO** En muchas aplicaciones, resulta conveniente usar una variable independiente distinta de  $x$ , como se manifiesta en el ejemplo 5.

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre la derivada de la función  $y = 2/t$  respecto a  $t$ .

**Solución** Considerando  $y = f(t)$ , obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} && \text{Definición de derivada} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{t + \Delta t} - \frac{2}{t}}{\Delta t} && f(t + \Delta t) = \frac{2}{t + \Delta t} \text{ y } f(t) = \frac{2}{t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2t - 2(t + \Delta t)}{t(t + \Delta t)\Delta t} && \text{Combine las fracciones del numerador.} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-2\Delta t}{\Delta t(t)(t + \Delta t)} && \text{Cancele el factor común de } \Delta t. \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-2}{t(t + \Delta t)} && \text{Simplifique.} \\ &= -\frac{2}{t^2}. && \text{Evalúe el límite cuando } \Delta t \rightarrow 0. \end{aligned}$$



En el punto  $(1, 2)$ , la recta  $y = -2t + 4$  es tangente a la gráfica de  $y = 2/t$ .

Figura 4.9

**TECNOLOGÍA**

Puede utilizar una herramienta de graficación para comprobar el resultado del ejemplo 5. Por ejemplo, usando la fórmula  $dy/dt = -2/t^2$ , usted sabe que la pendiente de la gráfica de  $y = 2/t$  en el punto  $(1, 2)$  es  $m = -2$ . Esto implica que, usando la forma punto-pendiente, una ecuación de la recta tangente a la gráfica en  $(1, 2)$  es  $y - 2 = -2(t - 1)$  o  $y = -2t + 4$ . Como se muestra en la figura 4.9.

CO  
apé  
dem  
de l  
deri  
Con.  
para  
Edw

-2 -1

La funci  
derivable  
es contin  
Figura 4

### Derivabilidad y continuidad

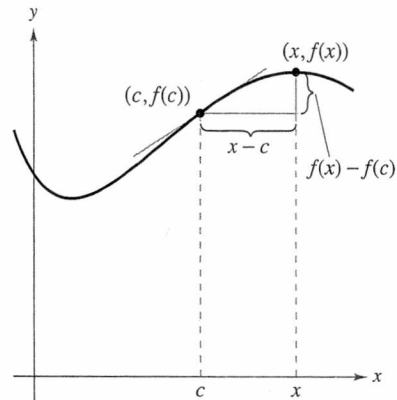
La forma alternativa del límite de la derivada es útil al investigar la relación que existe entre derivabilidad y continuidad. La derivada de  $f$  en  $c$  es

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Alternativa de la derivada

**COMENTARIO** En el apéndice A se presenta una demostración de la equivalencia de la forma alternativa de la derivada. Consulte *LarsonCalculus.com* para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

siempre que dicho límite exista (vea la figura 4.10)



Cuando  $x$  tiende a  $c$ , la recta secante se aproxima a la recta tangente.

**Figura 4.10**

Observe que la existencia del límite en esta forma alternativa requiere que los límites unilaterales

$$\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

y

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existan y sean iguales. Estos límites laterales se denominan **derivada por la izquierda** y **por la derecha**, respectivamente. Se dice que  $f$  es **derivable sobre un intervalo cerrado  $[a, b]$**  si es derivable en  $(a, b)$  y cuando existe tanto la derivada por la derecha en  $a$  como la derivada por la izquierda en  $b$ .

Cuando una función no es continua en  $x = c$ , no puede ser derivable en  $x = c$ . Por ejemplo, la función entera o mayor entero

$$f(x) = \llbracket x \rrbracket$$

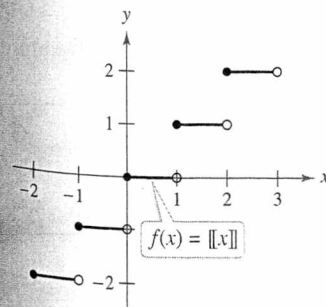
no es continua en  $x = 0$ , y en consecuencia no es derivable en  $x = 0$  (vea la figura 4.11). Usted puede verificar esto con solo observar que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\llbracket x \rrbracket - 0}{x} = \infty \quad \text{Derivada por la izquierda}$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\llbracket x \rrbracket - 0}{x} = 0. \quad \text{Derivada por la derecha}$$

Aunque es cierto que derivable implica continua (como se muestra en el teorema 4.1 de la página siguiente), el recíproco no es cierto. En otras palabras, puede ocurrir que una función sea continua en  $x = c$  y *no* sea derivable en  $x = c$ . Los ejemplos 6 y 7 ilustran tal posibilidad.



La función parte entera no es derivable en  $x = 0$  ya que no es continua en ese punto.

**Figura 4.11**

**EJEMPLO 6**

**Una gráfica con un punto angular**

•••► Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

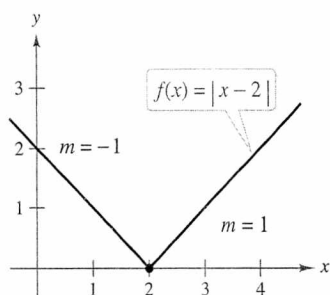
La función  $f(x) = |x - 2|$ , que se muestra en la figura 4.12 es continua en  $x = 2$ . Sin embargo, los límites unilaterales

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} = -1 \quad \text{Derivada por la izquierda}$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} = 1 \quad \text{Derivada por la derecha}$$

no son iguales. Por consiguiente,  $f$  no es derivable en  $x = 2$  y la gráfica de  $f$  no tiene una recta tangente en el punto  $(2, 0)$ .



$f$  no es derivable en  $x = 2$  porque las derivadas laterales no son iguales.

Figura 4.12

**EJEMPLO 7**

**Una gráfica con una recta tangente vertical**

La función  $f(x) = x^{1/3}$  es continua en  $x = 0$ , como se muestra en la figura 4.13. Sin embargo, como el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{1/3} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2/3}} = \infty$$

es infinito, puede concluir que la recta tangente en  $x = 0$  es vertical. Por tanto,  $f$  no es derivable en  $x = 0$ .

En los ejemplos 6 y 7 puede observar que una función no es derivable en un punto donde su gráfica cuenta con un punto angular o una tangente vertical.

**TEOREMA 4.1 Derivabilidad implica continuidad**

Si  $f$  es derivable en  $x = c$ , entonces  $f$  es continua en  $x = c$ .

**Demostración** Para comprobar que  $f$  es continua en  $x = c$  bastará con demostrar que  $f(x)$  tiende a  $f(c)$  cuando  $x \rightarrow c$ . Para tal fin, use la derivabilidad de  $f$  en  $x = c$  considerando el siguiente límite.

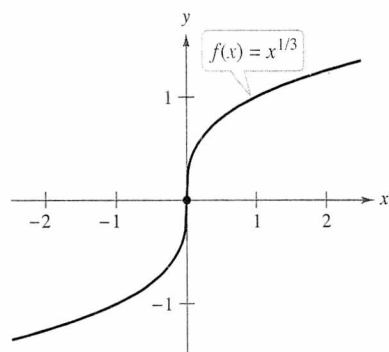
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} [f(x) - f(c)] &= \lim_{x \rightarrow c} \left[ (x - c) \left( \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) \right] \\ &= \left[ \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \right] \left[ \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right] \\ &= (0)[f'(c)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puesto que la diferencia  $f(x) - f(c)$  tiende a cero cuando  $x \rightarrow c$ , se puede concluir que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ . De tal manera,  $f$  es continua en  $x = c$ .

Consulte *LarsonCalculus.com* para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

Los siguientes enunciados expresan en forma resumida la relación que existe entre continuidad y derivabilidad:

1. Si una función es derivable en  $x = c$ , entonces es continua en  $x = c$ . Por tanto, derivabilidad implica continuidad.
2. Es posible que una función sea continua en  $x = c$  sin ser derivable. En otras palabras, continuidad no implica derivabilidad (vea el ejemplo 6).



$f$  no es derivable en  $x = 0$  porque tiene tangente vertical en ese punto.

Figura 4.13

► **TECNOLOGÍA** Algunas

- herramientas de graficación
- utilizan los programas de
- cálculo *Maple*, *Mathematica*
- y *Ti-nspire*, para realizar una
- derivación simbólica. Otras tal
- hacen *numérica*, calculando
- valores de la derivada mediante
- la fórmula

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

- donde  $\Delta x$  es un número pequeño
- como 0.0001. ¿Observa algún
- problema con esta definición?
- Por ejemplo, usándola, ¿cuál
- sería la derivada de  $f(x) = |x|$
- cuando  $x = 0$ ?

**4.**

Obtener diente de

1.



Pendiente  
lice la gr  
copia am

3. Identificar

(a)  $f$

(c)  $y$

4. Escribirlas

(a)  $\neq$

(b)  $=$

Encontrar los ejercicios de la gráfica d

5.  $f(x) =$

7.  $g(x) =$

9.  $f(t) =$

Encontrar los ejercicios de límite.

11.  $y$

13.  $y$

15.  $y$

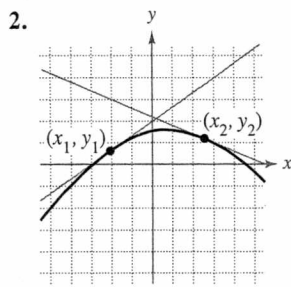
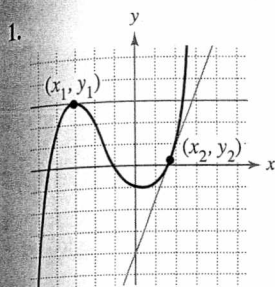
17.  $y$

19.  $y$

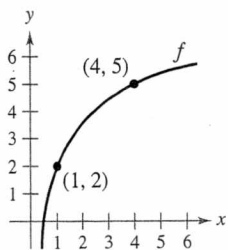
# 4.1 Ejercicios

Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Obtener pendiente** En los ejercicios 1 y 2, calcule la pendiente de la curva en los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ .



**Pendientes de rectas secantes** En los ejercicios 3 y 4, utilice la gráfica que se muestra en la figura. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite [MathGraphs.com](http://MathGraphs.com).



3. Identifique o trace en la figura cada una de las cantidades siguientes.

(a)  $f(1)$  y  $f(4)$                       (b)  $f(4) - f(1)$

(c)  $y = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}(x - 1) + f(1)$

4. Escriba un símbolo de desigualdad ( $<$  o  $>$ ) entre las cantidades dadas.

(a)  $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$    $\frac{f(4) - f(3)}{4 - 3}$

(b)  $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$    $f'(1)$

**Encontrar la pendiente de una recta tangente** En los ejercicios 5-10, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

5.  $f(x) = 3 - 5x$ ,  $(-1, 8)$       6.  $g(x) = \frac{3}{2}x + 1$ ,  $(-2, -2)$

7.  $g(x) = x^2 - 9$ ,  $(2, -5)$       8.  $f(x) = 5 - x^2$ ,  $(3, -4)$

9.  $f(t) = 3t - t^2$ ,  $(0, 0)$       10.  $h(t) = t^2 + 4t$ ,  $(1, 5)$

**Encontrar la derivada por el proceso de límite** En los ejercicios 11-24, encuentre la derivada mediante el proceso de límite.

11.  $f(x) = 7$

12.  $g(x) = -3$

13.  $f(x) = -10x$

14.  $f(x) = 7x - 3$

15.  $h(s) = 3 + \frac{2}{3}s$

16.  $f(x) = 5 - \frac{2}{3}x$

17.  $f(x) = x^2 + x - 3$

18.  $f(x) = x^2 - 5$

19.  $f(x) = x^3 - 12x$

20.  $f(x) = x^3 + x^2$

21.  $f(x) = \frac{1}{x - 1}$

22.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

23.  $f(x) = \sqrt{x + 4}$

24.  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$

**Encontrar la ecuación de una recta tangente** En los ejercicios 25-32, (a) encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto indicado, (b) utilice una herramienta de graficación para dibujar la gráfica, la función y su recta tangente en dicho punto y (c) aplique la función derivada de una herramienta de graficación con el fin de comprobar sus resultados.

25.  $f(x) = x^2 + 3$ ,  $(-1, 4)$       26.  $f(x) = x^2 + 2x - 1$ ,  $(1, 2)$

27.  $f(x) = x^3$ ,  $(2, 8)$       28.  $f(x) = x^3 + 1$ ,  $(-1, 0)$

29.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $(1, 1)$       30.  $f(x) = \sqrt{x - 1}$ ,  $(5, 2)$

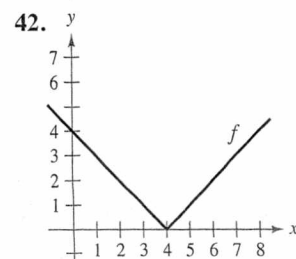
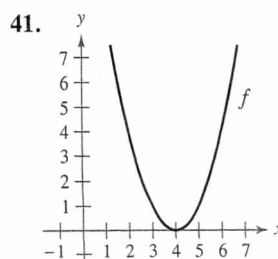
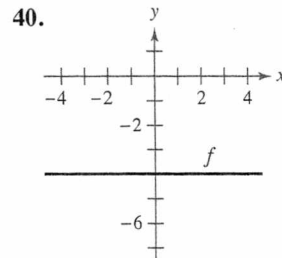
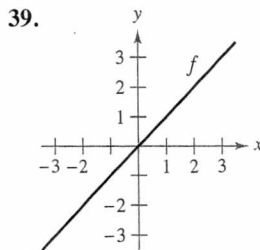
31.  $f(x) = x + \frac{4}{x}$ ,  $(-4, -5)$       32.  $f(x) = \frac{6}{x + 2}$ ,  $(0, 3)$

**Encontrar la ecuación de una recta tangente** En los ejercicios 33-38, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  y paralela a la recta dada.

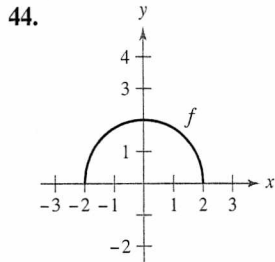
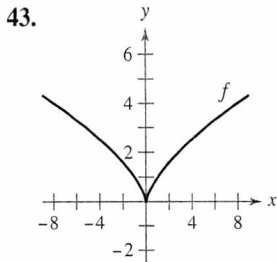
Función	Recta
33. $f(x) = x^2$	$2x - y + 1 = 0$
34. $f(x) = 2x^2$	$4x + y + 3 = 0$
35. $f(x) = x^3$	$3x - y + 1 = 0$
36. $f(x) = x^3 + 2$	$3x - y - 4 = 0$
37. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x + 2y - 6 = 0$
38. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$	$x + 2y + 7 = 0$

## DESARROLLO DE CONCEPTOS

**Trazar una derivada** En los ejercicios 39-44, construya la gráfica de  $f'$  y explique cómo se obtuvo la respuesta.



**DESARROLLO DE CONCEPTOS (continuación)**



45. **Trazar una gráfica** Dibuje la gráfica de una función cuya derivada siempre sea negativa. Explique su razonamiento.

46. **Trazar una gráfica** Dibuje la gráfica de una función cuya derivada siempre sea positiva. Explique su razonamiento.

47. **Usar una recta tangente** La recta tangente a la gráfica de  $y = g(x)$  en el punto  $(4, 5)$  pasa por el punto  $(7, 0)$ . Encuentre  $g(4)$  y  $g'(4)$ .

48. **Usar una recta tangente** La recta tangente a la gráfica de  $y = h(x)$  en el punto  $(-1, 4)$  pasa por el punto  $(3, 6)$ . Encuentre  $h(-1)$  y  $h'(-1)$ .

**Trabajando hacia atrás** En los ejercicios 49-52, el límite representa a  $f'(c)$  para una función  $f$  y un número  $c$ . Encuentre  $f$  y  $c$ .

49.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[5 - 3(1 + \Delta x)] - 2}{\Delta x}$

50.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(-2 + \Delta x)^3 + 8}{\Delta x}$

51.  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{-x^2 + 36}{x - 6}$

52.  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{2\sqrt{x} - 6}{x - 9}$

**Escribir una función utilizando derivadas** En los ejercicios 53 y 54, identifique una función  $f$  que tenga las características señaladas. Representéla gráficamente.

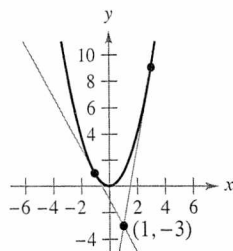
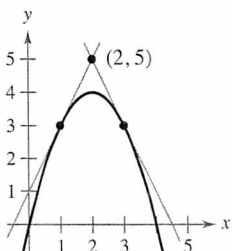
53.  $f(0) = 2; f'(x) = -3$  para  $-\infty < x < \infty$

54.  $f(0) = 4; f'(0) = 0; f'(x) < 0$  para  $x < 0; f'(x) > 0$  para  $x > 0$

**Encontrar la ecuación de una recta tangente** En los ejercicios 55 y 56, encuentre las ecuaciones de dos rectas tangentes a la gráfica de  $f$  que pasen por el punto que se indica.

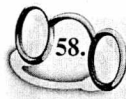
55.  $f(x) = 4x - x^2$

56.  $f(x) = x^2$

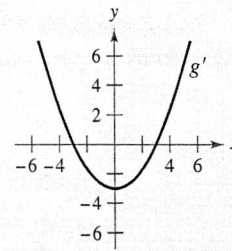


57. **Razonamiento gráfico** Utilice una herramienta de graficación para representar una de las siguientes funciones y sus rectas tangentes en  $x = -1, x = 0$  y  $x = 1$ . Con base en los resultados, determine si las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de una función para distintos valores de  $x$  siempre son distintas.

(a)  $f(x) = x^2$  (b)  $g(x) = x^3$



**¿CÓMO LO VE?** En la figura se muestra la gráfica de  $g'$ .



- (a)  $g'(0) =$   (b)  $g'(3) =$
- (c) ¿Qué puede concluir de la gráfica de  $g$  sabiendo que  $g'(1) = -\frac{8}{3}$ ?
- (d) ¿Qué puede concluir de la gráfica de  $g$  sabiendo que  $g'(-4) = \frac{7}{3}$ ?
- (e)  $g(6) - g(4)$  ¿es positiva o negativa? Explique su respuesta.
- (f) ¿Es posible encontrar  $g(2)$  a partir de la gráfica? Explique su respuesta.

59. **Análisis gráfico** Considere la función  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ .

- (a) Utilice una herramienta de graficación para representar la función y estime los valores de  $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1)$  y  $f'(2)$ .
- (b) Utilice los resultados del inciso (a) para determinar los valores de  $f'(-\frac{1}{2}), f'(-1)$  y  $f'(-2)$ .
- (c) Trace una posible gráfica de  $f'$ .
- (d) Utilice la definición de derivada para determinar  $f'(x)$ .

60. **Análisis gráfico** Considere la función  $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ .

- (a) Utilice una herramienta de graficación para representar la función y estimar los valores de  $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1), f'(2)$  y  $f'(3)$ .
- (b) Utilice los resultados del inciso (a) para determinar los valores de  $f'(-\frac{1}{2}), f'(-1), f'(-2)$  y  $f'(-3)$ .
- (c) Trace una posible gráfica de  $f'$ .
- (d) Utilice la definición de derivada para determinar  $f'(x)$ .

61. **Razonamiento gráfico** En los ejercicios 61 y 62, represente en una misma ventana de la herramienta de graficación de las gráficas  $f$  y  $g$  la relación entre ellas.

$$g(x) = \frac{f(x + 0.01) - f(x)}{0.01}$$

Clasifique las gráficas y describa la relación entre ellas.

61.  $f(x) = 2x - x^2$       62.  $f(x) = 3\sqrt{x}$

**Aproximar una derivada** En los ejercicios 63 y 64, evalúe  $f(2)$  y  $f(2.1)$ , y utilice los resultados para estimar  $f'(2)$ .

63.  $f(x) = x(4 - x)$       64.  $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

**Usar forma alternativa de la derivada** En los ejercicios 65-74 utilice la forma alternativa para calcular la derivada en  $x = c$  (si existe).

65.  $f(x) = x^2 - 5, c = 3$       66.  $g(x) = x^2 - x, c = 1$

67.  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1, c = -2$

68.  $f(x)$

69.  $g(x)$

71.  $f(x)$

72.  $g(x)$

73.  $h(x)$

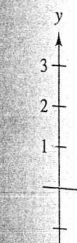
**Determine los valores**

75.  $f(x)$



77.  $f(x)$

79.  $f(x)$



**Razona**  
herramienta  
los valores

81.  $f(x)$

83.  $f(x)$

84.  $f(x)$

**Determine**  
las derivadas  
que existen

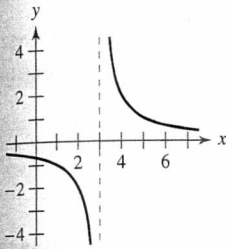
85.  $f(x)$

87.  $f(x)$

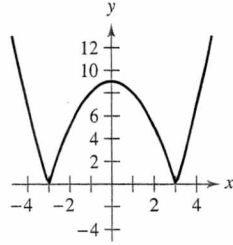
68.  $f(x) = x^3 + 6x$ ,  $c = 2$   
 69.  $g(x) = \sqrt{|x|}$ ,  $c = 0$       70.  $f(x) = 3/x$ ,  $c = 4$   
 71.  $f(x) = (x - 6)^{2/3}$ ,  $c = 6$   
 72.  $g(x) = (x + 3)^{1/3}$ ,  $c = -3$   
 73.  $h(x) = |x + 7|$ ,  $c = -7$       74.  $f(x) = |x - 6|$ ,  $c = 6$

**Determinar la derivabilidad** En los ejercicios 75-80, describa los valores  $x$  para los que  $f$  es derivable.

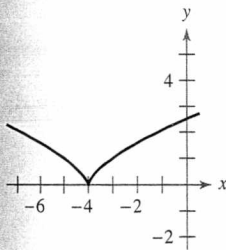
75.  $f(x) = \frac{2}{x-3}$



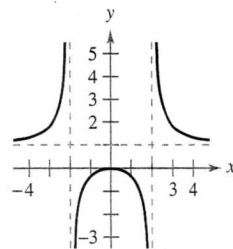
76.  $f(x) = |x^2 - 9|$



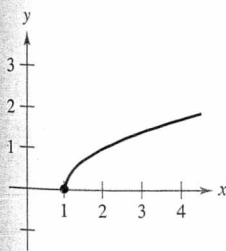
77.  $f(x) = (x + 4)^{2/3}$



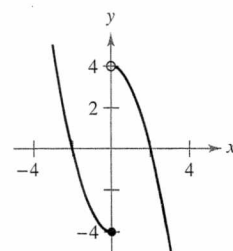
78.  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$



79.  $f(x) = \sqrt{x-1}$



80.  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 0 \\ 4 - x^2, & x > 0 \end{cases}$



**Razonamiento gráfico** En los ejercicios 81-84, utilice una herramienta de graficación para trazar la función y encontrar los valores en los cuales es derivable.

81.  $f(x) = |x - 5|$       82.  $f(x) = \frac{4x}{x-3}$   
 83.  $f(x) = x^{2/5}$   
 84.  $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x, & x \leq 1 \\ x^2 - 2x, & x > 1 \end{cases}$

**Determinar derivabilidad** En los ejercicios 85-88, encuentre las derivadas desde la izquierda y desde la derecha en  $x = 1$  (si es que existen). ¿La función es derivable en  $x = 1$ ?

85.  $f(x) = |x - 1|$       86.  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$   
 87.  $f(x) = \begin{cases} (x - 1)^3, & x \leq 1 \\ (x - 1)^2, & x > 1 \end{cases}$       88.  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

**Determinar derivabilidad** En los ejercicios 89 y 90, determine si la función es derivable en  $x = 2$ .

89.  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 2 \\ 4x - 3, & x > 2 \end{cases}$       90.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x < 2 \\ \sqrt{2x}, & x \geq 2 \end{cases}$

**91. Razonamiento gráfico** Una recta de pendiente  $m$  pasa por el punto  $(0, 4)$  y tiene la ecuación  $y = mx + 4$ .

- (a) Escriba la distancia  $d$  que hay entre la recta y el punto  $(3, 1)$  como función de  $m$ .  
 (b) Utilice una herramienta de graficación para representar la función  $d$  del inciso (a). Basándose en la gráfica, ¿es esa función derivable para todo valor de  $m$ ? Si no es así especifique en dónde no lo es.

**92. Conjetura** Considere las funciones  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = x^3$ .

- (a) Dibuje la gráfica  $f$  y  $f'$  sobre el mismo conjunto de ejes.  
 (b) Dibuje la gráfica  $g$  y  $g'$  sobre el mismo conjunto de ejes.  
 (c) Identifique un patrón entre  $f$  y  $g$  y sus respectivas derivadas. Utilícelo para hacer conjeturas respecto a  $h'(x)$  si  $h(x) = x^n$  donde  $n$  es un número entero y  $n \geq 2$ .  
 (d) Encuentre  $f'(x)$  si  $f(x) = x^4$ . Compare el resultado con la conjetura del inciso (c). ¿Esto comprueba la conjetura? Explique su respuesta.

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 93-96, determine si el enunciado es verdadero o falso. Para los que sean falsos, explique por qué o proporcione un ejemplo que lo demuestre.

93. La pendiente de la recta tangente a una función derivable  $f$  en el punto  $(2, f(2))$  es  $\frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ .  
 94. Si una función es continua en un punto, entonces es derivable en él.  
 95. Si una función tiene derivadas laterales por la derecha y por la izquierda en un punto, entonces es derivable en él.  
 96. Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en él.

**97. Derivabilidad y continuidad** Sean

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que  $f$  es continua, pero no derivable, en  $x = 0$ . Demuestre que  $g$  es derivable en 0 y calcule  $g'(0)$ .

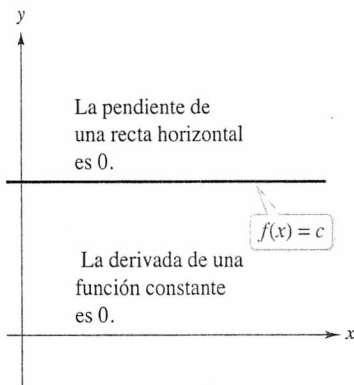
**98. Redacción** Utilice una herramienta de graficación para representar las funciones  $f(x) = x^2 + 1$  y  $g(x) = |x| + 1$  en la misma ventana. Utilice las funciones *zoom* y *trace* para analizarlas cerca del punto  $(0, 1)$ . ¿Qué observa? ¿Cuál función es derivable en ese punto? Escriba un pequeño párrafo describiendo el significado geométrico de la derivabilidad en un punto.

## 4.2 Reglas básicas de derivación y razones de cambio

- Encontrar la derivada de una función por la regla de la constante.
- Encontrar la derivada de una función por la regla de la potencia.
- Encontrar la derivada de una función por la regla del múltiplo constante.
- Encontrar la derivada de las funciones seno y coseno.
- Usar derivadas para calcular razones de cambio.

### La regla de la constante

En la sección 4.1 utilizó la definición límite para encontrar derivadas. En esta y en las siguientes dos secciones se presentarán varias “reglas de derivación” que le permiten encontrar derivadas sin el uso *directo* de la definición de límite.



Observe que la regla de la constante equivale a decir que la pendiente de una recta horizontal es 0. Esto demuestra la relación que existe entre derivada y pendiente.

Figura 4.14

#### TEOREMA 4.2 La regla de la constante

La derivada de una función constante es 0. Es decir, si  $c$  es un número real, entonces

$$\frac{d}{dx}[c] = 0. \quad (\text{Vea la figura 4.14.})$$

**Demostración** Sea  $f(x) = c$ . Entonces, por la definición de límite de la derivada,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[c] &= f'(x) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

#### EJEMPLO 1 Aplicar la regla de la constante

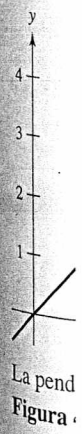
Función	Derivada
a. $y = 7$	$dy/dx = 0$
b. $f(x) = 0$	$f'(x) = 0$
c. $s(t) = -3$	$s'(t) = 0$
d. $y = k\pi^2$ , $k$ es constante	$y' = 0$

#### Exploración

**Escriba una conjetura** Utilice la definición de derivada de la sección 4.1 para encontrar la derivada de las siguientes funciones. ¿Qué patrones observa? Utilice los resultados para elaborar una conjetura acerca de la derivada de  $f(x) = x^n$ .

- |                 |                     |                    |
|-----------------|---------------------|--------------------|
| a. $f(x) = x^1$ | b. $f(x) = x^2$     | c. $f(x) = x^3$    |
| d. $f(x) = x^4$ | e. $f(x) = x^{1/2}$ | f. $f(x) = x^{-1}$ |

CO  
ejer  
se e  
f(x)  
x =  
en y  
x<sup>-2/</sup>  
inte



## La regla de la potencia

Antes de demostrar la próxima regla, es importante que revise el proceso de desarrollo de un binomio.

$$(x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$(x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$(x + \Delta x)^4 = x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4$$

$$(x + \Delta x)^5 = x^5 + 5x^4\Delta x + 10x^3(\Delta x)^2 + 10x^2(\Delta x)^3 + 5x(\Delta x)^4 + (\Delta x)^5$$

El desarrollo general del binomio para un entero positivo  $n$  cualquiera es

$$(x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \underbrace{\frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n}_{(\Delta x)^2 \text{ es un factor común en estos términos.}}$$

$(\Delta x)^2$  es un factor común en estos términos.

Este desarrollo del binomio se utilizará para demostrar un caso especial de la regla de la potencia.

### TEOREMA 4.3 La regla de la potencia

Si  $n$  es un número racional, entonces la función  $f(x) = x^n$  es derivable y

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}.$$

Para que  $f$  sea derivable en  $x = 0$ ,  $n$  debe ser un número tal que  $x^{n-1}$  se encuentre definido en un intervalo que contenga al 0.

**Demostración** Si  $n$  es un entero positivo mayor que 1, entonces del desarrollo del binomio resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^n] &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x) + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right] \\ &= nx^{n-1} + 0 + \dots + 0 \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

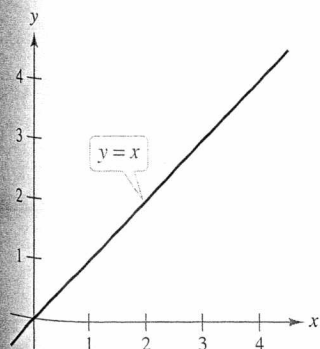
Esto demuestra el caso en el que  $n$  es un entero positivo mayor que 1. Se le deja al lector la demostración del caso  $n = 1$ . En el ejemplo 7 de la sección 4.3 se demuestra el caso para el que  $n$  es un entero negativo. En el ejercicio 71 de la sección 4.5 se le pide demostrar el caso en el cual  $n$  es racional (en la sección 4.5 la regla de la potencia se extenderá hasta abarcar los valores irracionales de  $n$ ).

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

Al utilizar la regla de la potencia, resulta conveniente separar el caso para el que  $n = 1$  como otra regla distinta de derivación, a saber

$$\frac{d}{dx}[x] = 1. \quad \text{Regla de las potencias para } n = 1$$

Esta regla es congruente con el hecho de que la pendiente de la recta  $y = x$  es 1, como se muestra en la figura 4.15.



La pendiente de la recta  $y = x$  es 1.

Figura 4.15

••••• **COMENTARIO** Del ejemplo 7 de la sección 4.1, se encontró que la función  $f(x) = x^{1/3}$  está definida en  $x = 0$  pero no es derivable en  $x = 0$ . Esto se debe a que  $x^{-2/3}$  no está definida sobre un intervalo que contenga al cero.

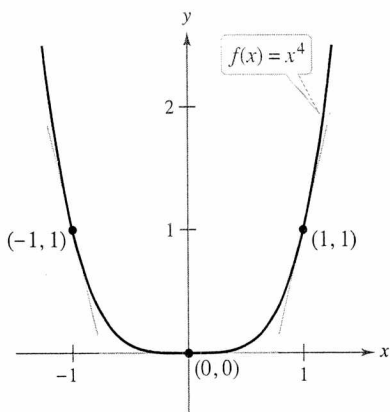
**EJEMPLO 2**

**Usar la regla de la potencia**

Función	Derivada
a. $f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
b. $g(x) = \sqrt[3]{x}$	$g'(x) = \frac{d}{dx}[x^{1/3}] = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}}$
c. $y = \frac{1}{x^2}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[x^{-2}] = (-2)x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

Observe que en el ejemplo 2c, antes de derivar se ha reescrito  $1/x^2$  como  $x^{-2}$ . En muchos problemas de derivación, el primer paso consiste en reescribir la función.

Dada:  $y = \frac{1}{x^2}$     $\Rightarrow$    Reescriba:  $y = x^{-2}$     $\Rightarrow$    Derive:  $\frac{dy}{dx} = (-2)x^{-3}$     $\Rightarrow$    Simplifique:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3}$



Observe que la pendiente es negativa en el punto  $(-1, 1)$ , cero en  $(0, 0)$  y positiva en  $(1, 1)$ .

Figura 4.16

**EJEMPLO 3**

**Pendiente de una gráfica**

Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Calcule la pendiente de la gráfica de

$f(x) = x^4$

para cada valor de  $x$ .

- a.  $x = -1$    b.  $x = 0$    c.  $x = 1$

**Solución** La pendiente de una gráfica en un punto es igual a la derivada en dicho punto. La derivada de  $f$  es  $f'(x) = 4x^3$ .

- a. Para  $x = -1$ , la pendiente es  $f'(-1) = 4(-1)^3 = -4$ . La pendiente es negativa.  
 b. Para  $x = 0$ , la pendiente es  $f'(0) = 4(0)^3 = 0$ . La pendiente es 0.  
 c. Para  $x = 1$ , la pendiente es  $f'(1) = 4(1)^3 = 4$ . La pendiente es positiva.

Vea la figura 4.16

**EJEMPLO 4**

**Encontrar la ecuación de una recta tangente**

Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = x^2$  cuando  $x = -2$ .

**Solución** Para encontrar el punto sobre la gráfica de  $f$ , evalúe la función en  $x = -2$ .

$(-2, f(-2)) = (-2, 4)$    Punto de la gráfica

Para calcular la pendiente de la gráfica en  $x = -2$ , evalúe la derivada,  $f'(x) = 2x$ , en  $x = -2$ .

$m = f'(-2) = -4$    Pendiente de la gráfica en  $(-2, 4)$

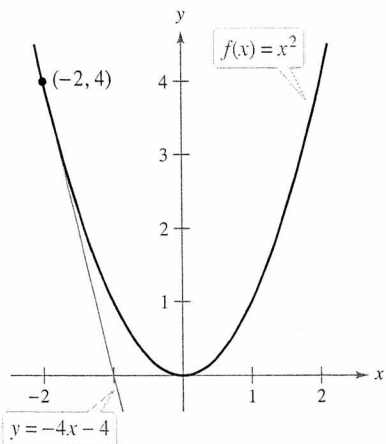
Ahora, utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, escriba

$y - y_1 = m(x - x_1)$    Forma punto-pendiente

$y - 4 = -4[x - (-2)]$    Sustituya para  $y_1, m$  y  $x_1$ .

$y = -4x - 4$    Simplifique.

Vea la figura 4.17



La recta tangente  $y = -4x - 4$  es tangente a la gráfica de  $f(x) = x^2$  en el punto  $(-2, 4)$ .

Figura 4.17

de d  
imp  
la fi  
rác

## La regla del múltiplo constante

### TEOREMA 4.4 La regla del múltiplo constante

Si  $f$  es una función derivable y  $c$  un número real, entonces  $cf$  también es derivable y  $\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$ .

#### Demostración

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[cf(x)] &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} && \text{Definición de derivada} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\ &= c \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] && \text{Aplique el teorema 3.2.} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

De manera informal, esta regla establece que las constantes se pueden sacar de la derivada, incluso cuando aparecen en un denominador.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[cf(x)] &= c \frac{d}{dx}[f(x)] = cf'(x) \\ \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{c}\right] &= \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{1}{c}\right)f(x)\right] = \left(\frac{1}{c}\right) \frac{d}{dx}[f(x)] = \left(\frac{1}{c}\right)f'(x) \end{aligned}$$

#### EJEMPLO 5

#### Aplicar la regla del múltiplo constante

Función	Derivada
a. $y = 5x^3$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[5x^3] = 5 \frac{d}{dx}[x^3] = 5(3)x^2 = 15x^2$
b. $y = \frac{2}{x}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[2x^{-1}] = 2 \frac{d}{dx}[x^{-1}] = 2(-1)x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$
c. $f(t) = \frac{4t^2}{5}$	$f'(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{5}t^2\right] = \frac{4}{5} \frac{d}{dt}[t^2] = \frac{4}{5}(2t) = \frac{8}{5}t$
d. $y = 2\sqrt{x}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[2x^{1/2}] = 2\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) = x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$
e. $y = \frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}x^{-2/3}\right] = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-5/3} = -\frac{1}{3x^{5/3}}$
f. $y = -\frac{3x}{2}$	$y' = \frac{d}{dx}\left[-\frac{3}{2}x\right] = -\frac{3}{2}(1) = -\frac{3}{2}$

••••• **COMENTARIO** Antes de diferenciar funciones que implican radicales, reescriba la función con exponentes racionales.

La regla del múltiplo constante y la de la potencia se pueden combinar en una sola. La regla resultante es

$$\frac{d}{dx}[cx^n] = cnx^{n-1}.$$

**EJEMPLO 6 Usar el paréntesis al derivar**

Función original	Reescriba	Derive	Simplifique
a. $y = \frac{5}{2x^3}$	$y = \frac{5}{2}(x^{-3})$	$y' = \frac{5}{2}(-3x^{-4})$	$y' = -\frac{15}{2x^4}$
b. $y = \frac{5}{(2x)^3}$	$y = \frac{5}{8}(x^{-3})$	$y' = \frac{5}{8}(-3x^{-4})$	$y' = -\frac{15}{8x^4}$
c. $y = \frac{7}{3x^{-2}}$	$y = \frac{7}{3}(x^2)$	$y' = \frac{7}{3}(2x)$	$y' = \frac{14x}{3}$
d. $y = \frac{7}{(3x)^{-2}}$	$y = 63(x^2)$	$y' = 63(2x)$	$y' = 126x$

**Las reglas de suma y resta**

**TEOREMA 4.5 Las reglas de suma y resta**

La derivada de la suma (o de la resta) de dos funciones derivables  $f$  y  $g$  es derivable en sí misma. Además, la derivada de  $f + g$  (o  $f - g$ ) es igual a la suma (o diferencia) de las derivadas de  $f$  y  $g$ .

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x) \quad \text{Regla de la suma}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x) \quad \text{Regla de la resta}$$

**Demostración** Una demostración de la regla de la suma se deduce del teorema 3.2. (La de la resta se demuestra de manera análoga).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

Las reglas de suma y resta pueden ampliarse en cualquier número finito de funciones. Por ejemplo, si  $F(x) = f(x) + g(x) - h(x)$ , entonces  $F'(x) = f'(x) + g'(x) - h'(x)$ .

**EJEMPLO 7 Aplicar las reglas de suma y resta**

**Función**

a.  $f(x) = x^3 - 4x + 5$

b.  $g(x) = -\frac{x^4}{2} + 3x^3 - 2x$

c.  $y = \frac{3x^2 - x + 1}{x} = 3x - 1 + \frac{1}{x}$

**Derivada**

$f'(x) = 3x^2 - 4$

$g'(x) = -2x^3 + 9x^2 - 2$

$y' = 3 - \frac{1}{x^2} = \frac{3x^2 - 1}{x^2}$

**COMENTARIO**

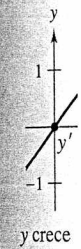
En el ejemplo 7(c), observe que antes de la derivación,

$$\frac{3x^2 - x + 1}{x}$$

fue reescrita como

$$3x - 1 + \frac{1}{x}$$

PAR  
El esbozo de la derivada de seno y el artículo Hesterl matics visite A



La derivada de la función  
Figura



$\frac{d}{dx}[a \sin x]$   
Figura

**PARA INFORMACIÓN ADICIONAL**

El esbozo de una demostración geométrica de las derivadas de las funciones seno y coseno puede consultarse en el artículo "The Spider's Spacewalk Derivation of sin' and cos'", de Tim Hesterberg, en *The College Mathematics Journal*. Para ver este artículo, visite *MathArticles.com*.

**Derivadas de las funciones seno y coseno**

En la sección 3.3 se vieron los límites siguientes:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \text{cos } \Delta x}{\Delta x} = 0.$$

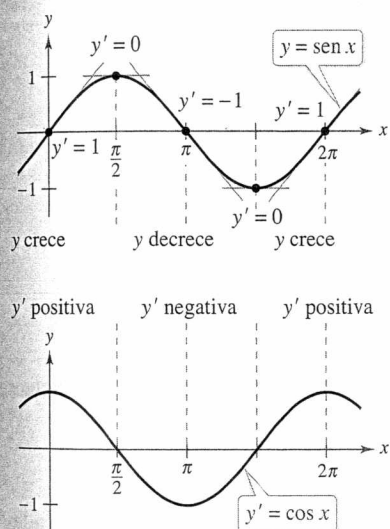
Estos dos límites pueden utilizarse para demostrar las reglas de derivación de las funciones seno y coseno (las derivadas de las demás funciones trigonométricas se analizan en la sección 4.3).

**TEOREMA 4.6 Derivadas de las funciones seno y coseno**

$$\frac{d}{dx}[\text{sen } x] = \text{cos } x \quad \frac{d}{dx}[\text{cos } x] = -\text{sen } x$$

**Demostración** A continuación se presenta una demostración de la primera regla. (La demostración de la segunda regla se le deja al lector como un ejercicio [vea el ejercicio 118].)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\text{sen } x] &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x}{\Delta x} && \text{Definición de derivada} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x \text{cos } \Delta x + \text{cos } x \text{sen } \Delta x - \text{sen } x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{cos } x \text{sen } \Delta x - (\text{sen } x)(1 - \text{cos } \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ (\text{cos } x) \left( \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x} \right) - (\text{sen } x) \left( \frac{1 - \text{cos } \Delta x}{\Delta x} \right) \right] \\ &= \text{cos } x \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x} \right) - \text{sen } x \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \text{cos } \Delta x}{\Delta x} \right) \\ &= (\text{cos } x)(1) - (\text{sen } x)(0) \\ &= \text{cos } x \end{aligned}$$



La derivada de la función seno es la función coseno.

Figura 4.18

Esta regla de derivación se ilustra en la figura 4.18. Observe que para cada  $x$ , la *pendiente* de la curva seno es igual al valor del coseno.

Consulte *LarsonCalculus.com* para ver el vídeo de Bruce Edwards de esta demostración.

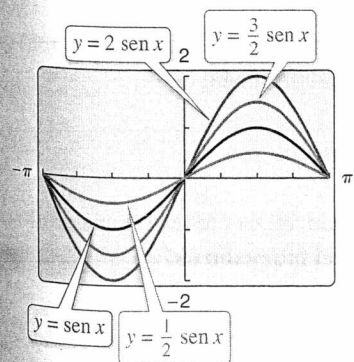
**EJEMPLO 8 Derivadas que contienen senos y cosenos**

Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Función	Derivada
a. $y = 2 \text{sen } x$	$y' = 2 \text{cos } x$
b. $y = \frac{\text{sen } x}{2} = \frac{1}{2} \text{sen } x$	$y' = \frac{1}{2} \text{cos } x = \frac{\text{cos } x}{2}$
c. $y = x + \text{cos } x$	$y' = 1 - \text{sen } x$
d. $y = \text{cos } x - \frac{\pi}{3} \text{sen } x$	$y' = -\text{sen } x - \frac{\pi}{3} \text{cos } x$

**TECNOLOGÍA** Una herramienta de graficación permite visualizar la interpretación de una derivada. Por ejemplo, en la figura 4.19 se muestran las gráficas de  $y = a \text{sen } x$

- Para  $a = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$  y 2. Calcule la pendiente de cada gráfica en el punto  $(0, 0)$ . Después
- verifique los cálculos de manera analítica mediante el cálculo de la derivada de cada
- función cuando  $x = 0$ .



$$\frac{d}{dx}[a \text{sen } x] = a \text{cos } x.$$

Figura 4.19

### Razón de cambio

Ya ha visto que la derivada se utiliza para calcular pendientes. Pero también sirve para determinar la razón del cambio de una variable respecto a otra, lo que le confiere utilidad en una amplia variedad de situaciones. Algunos ejemplos son las razones de crecimiento de poblaciones, las razones de producción, las razones de flujo de un líquido, la velocidad y la aceleración.

Un uso frecuente de la razón de cambio consiste en describir el movimiento de un objeto que va en línea recta. En tales problemas, la recta del movimiento se suele representar en posición horizontal o vertical, con un origen marcado en ella. Sobre tales rectas, el movimiento hacia la derecha (o hacia arriba) se considera de dirección positiva y el movimiento hacia la izquierda (o hacia abajo) de dirección negativa.

La función  $s$  que representa la posición (respecto al origen) de un objeto como función del tiempo  $t$  se denomina **función de posición**. Si durante cierto lapso de tiempo  $\Delta t$  el objeto cambia de su posición en una cantidad

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$$

entonces, empleando la consabida fórmula.

$$\text{Razón} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

la **velocidad promedio** es

$$\frac{\text{Cambio en distancia}}{\text{Cambio en tiempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{Velocidad promedio}$$

#### EJEMPLO 9

#### Velocidad promedio de un objeto en su caída

Si se deja caer una bola de billar desde una altura de 100 pies, su altura  $s$  en el instante  $t$  se representa mediante la función de posición.

$$s = -16t^2 + 100 \quad \text{Función de posición}$$

donde  $s$  se mide en pies y  $t$  en segundos. Encuentre su velocidad promedio para cada uno de estos intervalos

- a.  $[1, 2]$     b.  $[1, 1.5]$     c.  $[1, 1.1]$

#### Solución

- a. En el intervalo  $[1, 2]$ , el objeto cae desde una altura de  $s(1) = -16(1)^2 + 100 = 84$  pies hasta una altura de  $s(2) = -16(2)^2 + 100 = 36$  pies. La velocidad promedio es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{36 - 84}{2 - 1} = \frac{-48}{1} = -48 \text{ pies por segundo.}$$

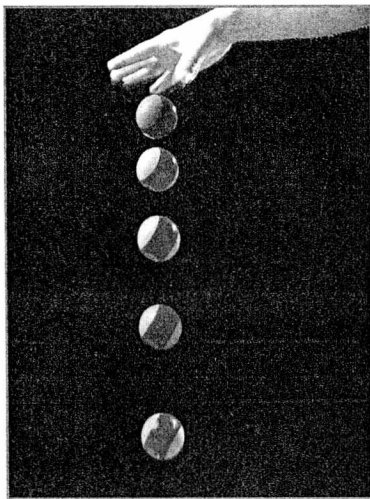
- b. En el intervalo  $[1, 1.5]$  el objeto cae desde una altura de 84 pies hasta una altura de  $s(1.5) = -16(1.5)^2 + 100 = 64$  pies. La velocidad promedio es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{64 - 84}{1.5 - 1} = \frac{-20}{0.5} = -40 \text{ pies por segundo.}$$

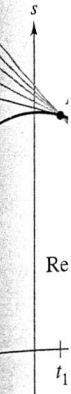
- c. En el intervalo  $[1, 1.1]$  el objeto cae desde una altura de 84 pies hasta una altura de  $s(1.1) = -16(1.1)^2 + 100 = 80.64$  pies. La velocidad promedio es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{80.64 - 84}{1.1 - 1} = \frac{-3.36}{0.1} = -33.6 \text{ pies por segundo.}$$

Observe que las velocidades promedio son *negativas*, lo que refleja el hecho de que el objeto se mueve hacia abajo.



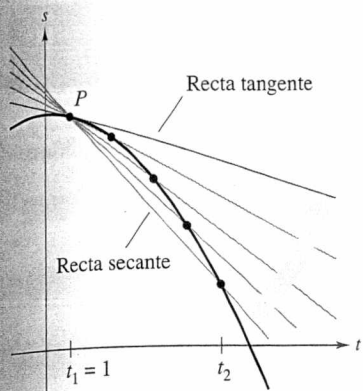
Exposición fotográfica de larga duración de una bola de billar en caída libre.



La velocidad es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto  $t_1$ .  
Figura 4



La velocidad promedio del objeto en su caída es la pendiente de la recta que conecta los puntos  $(1, 84)$  y  $(2, 36)$ . Cuando el objeto alcanza una altura de 36 pies, ha alcanzado una velocidad promedio de  $-48$  pies por segundo.  
Figura 4



La velocidad promedio entre  $t_1$  y  $t_2$  es igual a la pendiente de la recta secante. La velocidad instantánea en  $t_1$  es igual a la pendiente de la recta tangente.

Figura 4.20

Suponga que en el ejemplo 9 quiere encontrar la velocidad *instantánea* (o simplemente de la velocidad) del objeto cuando  $t = 1$ . Al igual que puede aproximar la pendiente de la recta tangente utilizando las pendientes de rectas secantes, también puede aproximar la velocidad en  $t = 1$  por medio de las velocidades promedio durante un pequeño intervalo  $[1, 1 + \Delta t]$  (vea la figura 4.20). Puede obtener dicha velocidad calculando el límite cuando  $\Delta t$  tiende a cero, obtiene la velocidad cuando  $t = 1$ . Al intentar hacerlo puede comprobar que la velocidad cuando  $t = 1$  es de  $-32$  pies por segundo.

En general, si  $s = s(t)$  es la función posición de un objeto en movimiento rectilíneo, su **velocidad** en el instante  $t$  es

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t). \quad \text{Función de velocidad}$$

En otras palabras, la función de velocidad es la derivada de la función de posición. La velocidad puede ser positiva, cero o negativa. La **rapidez** de un objeto se define como el valor absoluto de su velocidad, y nunca es negativa.

La posición de un objeto en caída libre (despreciando la resistencia del aire) bajo la influencia de la gravedad se obtiene mediante la ecuación

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0 \quad \text{Función de posición}$$

donde  $s_0$  es la altura inicial del objeto,  $v_0$  la velocidad inicial y  $g$  la aceleración de la gravedad. En la tierra, el valor de  $g$  es de aproximadamente  $-32$  pies por segundo al cuadrado o  $-9.8$  metros por segundo al cuadrado.

**EJEMPLO 10** Aplicar la derivada para calcular la velocidad

En el instante  $t = 0$ , un clavadista se lanza desde un trampolín que está a 32 pies sobre el nivel del agua de la piscina (vea la figura 4.21). Puesto que la velocidad inicial del clavadista es de 16 pies por segundo, la posición del clavadista está dada por

$$s(t) = -16t^2 + 16t + 32 \quad \text{Función de posición}$$

donde  $s$  se mide en pies y  $t$  en segundos.

- a. ¿Cuánto tarda el clavadista en llegar al agua?
- b. ¿Cuál es su velocidad al momento del impacto?

**Solución**

- a. Para determinar el momento en que toca el agua haga  $s = 0$  y despeje  $t$ .

$$\begin{aligned} -16t^2 + 16t + 32 &= 0 && \text{Igual a cero la función posición.} \\ -16(t + 1)(t - 2) &= 0 && \text{Factorice.} \\ t &= -1 \text{ o } 2 && \text{Despeje } t. \end{aligned}$$

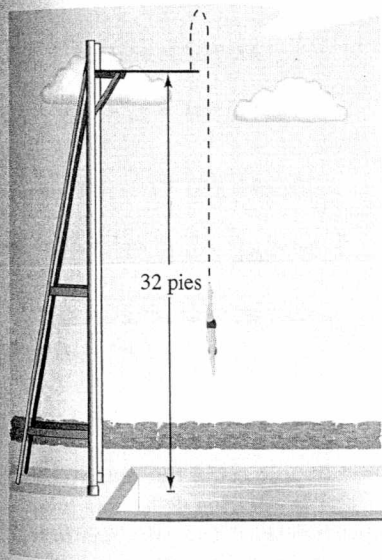
Como  $t \geq 0$ , seleccione el valor positivo, así que el clavadista llega en  $t = 2$  segundos.

- b. Su velocidad en el instante  $t$  está dada por la derivada

$$s'(t) = -32t + 16. \quad \text{Función de velocidad}$$

Por tanto, su velocidad en  $t = 2$  es

$$s'(2) = -32(2) + 16 = -48 \text{ pies por segundo.}$$



La velocidad es positiva cuando un objeto se eleva y negativa cuando descende. Se observa que el clavadista se mueve hacia arriba durante la primera mitad del segundo, porque la velocidad es positiva para  $0 < t < \frac{1}{2}$ . Cuando la velocidad es 0, el clavadista ha alcanzado la altura máxima de salto.

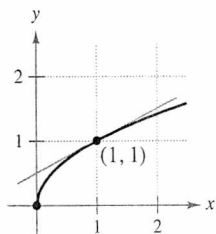
Figura 4.21

# 4.2 Ejercicios

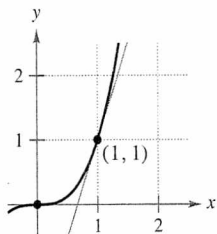
Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Calcular la pendiente** En los ejercicios 1 y 2, utilice la gráfica para calcular la pendiente de la recta tangente a  $y = x^n$  en el punto (1, 1). Verifique su respuesta de manera analítica. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite *Math-Graphs.com*.

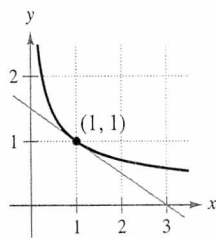
1. (a)  $y = x^{1/2}$



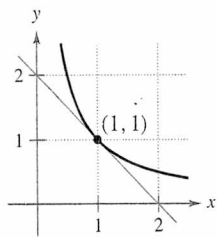
(b)  $y = x^3$



2. (a)  $y = x^{-1/2}$



(b)  $y = x^{-1}$



**Calcular la derivada** En los ejercicios 3-24, use las reglas de derivabilidad para calcular la derivada de la función.

- |   |                                       |
|---|---------------------------------------|
| 3. $y = 12$                                       | 4. $f(x) = -9$                        |
| 5. $y = x^7$                                      | 6. $y = x^{12}$                       |
| 7. $y = \frac{1}{x^5}$                            | 8. $y = \frac{3}{x^7}$                |
| 9. $f(x) = \sqrt[5]{x}$                           | 10. $g(x) = \sqrt[4]{x}$              |
| 11. $f(x) = x + 11$                               | 12. $g(x) = 6x + 3$                   |
| 13. $f(t) = -2t^2 + 3t - 6$                       | 14. $y = t^2 - 3t + 1$                |
| 15. $g(x) = x^2 + 4x^3$                           | 16. $y = 4x - 3x^3$                   |
| 17. $s(t) = t^3 + 5t^2 - 3t + 8$                  | 18. $y = 2x^3 + 6x^2 - 1$             |
| 19. $y = \frac{\pi}{2} \sin \theta - \cos \theta$ | 20. $g(t) = \pi \cos t$               |
| 21. $y = x^2 - \frac{1}{2} \cos x$                | 22. $y = 7 + \sin x$                  |
| 23. $y = \frac{1}{x} - 3 \sin x$                  | 24. $y = \frac{5}{(2x)^3} + 2 \cos x$ |

**Reescribir una función antes de la derivación** En los ejercicios 25-30, complete la tabla para encontrar la derivada de la función.

Función original	Reescriba	Derive	Simplifique
25. $y = \frac{5}{2x^2}$			
26. $y = \frac{3}{2x^4}$			
27. $y = \frac{6}{(5x)^3}$			

Función original	Reescriba	Derive	Simplifique
28. $y = \frac{\pi}{(3x)^2}$			
29. $y = \frac{\sqrt{x}}{x}$			
30. $y = \frac{4}{x^{-3}}$			

**Encontrar la pendiente de una gráfica** En los ejercicios 31-38, encuentre la pendiente de la gráfica de la función en el punto indicado. Utilice la función *derivative* de una herramienta de graficación para verificar los resultados

Función	Punto
31. $f(x) = \frac{8}{x^2}$	(2, 2)
32. $f(t) = 2 - \frac{4}{t}$	(4, 1)
33. $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{7}{5}x^3$	(0, -1/2)
34. $y = 2x^4 - 3$	(1, -1)
35. $y = (4x + 1)^2$	(0, 1)
36. $f(x) = 2(x - 4)^2$	(2, 8)
37. $f(\theta) = 4 \sin \theta - \theta$	(0, 0)
38. $g(t) = -2 \cos t + 5$	( $\pi$ , 7)

**Encontrar la derivada** En los ejercicios 39-52, encuentre la derivada de cada función.

- |   |   |
|---|---|
| 39. $f(x) = x^2 + 5 - 3x^{-2}$          | 40. $f(x) = x^3 - 2x + 3x^{-3}$               |
| 41. $g(t) = t^2 - \frac{4}{t^3}$        | 42. $f(x) = 8x + \frac{3}{x^2}$               |
| 43. $f(x) = \frac{4x^3 + 3x^2}{x}$      | 44. $f(x) = \frac{2x^4 - x}{x^3}$             |
| 45. $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$ | 46. $h(x) = \frac{4x^3 + 2x + 5}{x}$          |
| 47. $y = x(x^2 + 1)$                    | 48. $y = x^2(2x^2 - 3x)$                      |
| 49. $f(x) = \sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x}$    | 50. $f(t) = t^{2/3} - t^{1/3} + 4$            |
| 51. $f(x) = 6\sqrt{x} + 5 \cos x$       | 52. $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3 \cos x$ |

**Encontrar la ecuación de una recta tangente** En los ejercicios 53-56: (a) encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto indicado, (b) utilice una herramienta de graficación para representar la función y su recta tangente en el punto, y (c) verifique los resultados empleando la función *derivative* de su herramienta de graficación.

Función	Punto
53. $y = x^4 - 3x^2 + 2$	(1, 0)
54. $y = x^3 - 3x$	(2, 2)
55. $f(x) = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$	(1, 2)
56. $y = (x - 2)(x^2 + 3x)$	(1, -4)

Recta ta  
ne los pu  
una recta

57.  $y = :$

59.  $y = :$

61.  $y = :$

62.  $y = :$

Encontr  
tal que la

Func

63.  $f(x)$

64.  $f(x)$

65.  $f(x)$

66.  $f(x)$

67.  $f(x) :$

68.  $f(x) :$

69. Traza  
que  
sea c



(a)

(b)

(c)

DESA

Explor  
la rela  
 $f'$  y  $g'$ .

71.  $g(x)$

73.  $g(x)$

**Recta tangente horizontal** En los ejercicios 57-62, determine los puntos (si los hay) donde la gráfica de la función tiene una recta tangente horizontal.

57.  $y = x^4 - 2x^2 + 3$       58.  $y = x^3 + x$

59.  $y = \frac{1}{x^2}$       60.  $y = x^2 + 9$

61.  $y = x + \text{sen } x, 0 \leq x < 2\pi$

62.  $y = \sqrt{3}x + 2 \cos x, 0 \leq x < 2\pi$

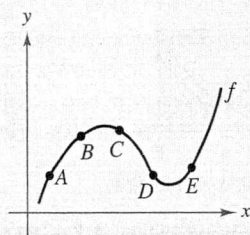
**Encontrar un valor** En los ejercicios 63-68, encuentre una  $k$  tal que la recta sea tangente a la gráfica de la función.

Función	Recta
63. $f(x) = k - x^2$	$y = -6x + 1$
64. $f(x) = kx^2$	$y = -2x + 3$
65. $f(x) = \frac{k}{x}$	$y = -\frac{3}{4}x + 3$
66. $f(x) = k\sqrt{x}$	$y = x + 4$
67. $f(x) = kx^3$	$y = x + 1$
68. $f(x) = kx^4$	$y = 4x - 1$

69. **Trazar una gráfica** Trace la gráfica de una función  $f$  tal que  $f' \geq 0$  para todas las  $x$  y la razón de cambio de la función sea decreciente.



**¿CÓMO LO VE?** Utilice la gráfica para responder a las siguientes preguntas. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite *MathGraphs.com*.



- (a) ¿Entre qué par de puntos consecutivos es mayor la razón de cambio promedio de la función?
- (b) ¿La razón de cambio promedio entre A y B es mayor o menor que la razón de cambio instantáneo en B?
- (c) Trace una recta tangente a la gráfica entre los puntos C y D cuya pendiente sea igual a la razón de cambio promedio de la función entre C y D.

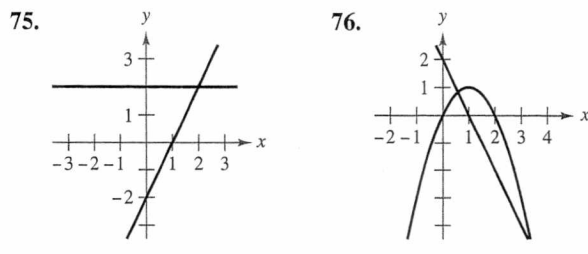
**DESARROLLO DE CONCEPTOS**

**Explorar la relación** En los ejercicios 71-74 se muestra la relación que existe entre  $f$  y  $g$ . Explique la relación entre  $f'$  y  $g'$ .

- 71.  $g(x) = f(x) + 6$       72.  $g(x) = 2f(x)$
- 73.  $g(x) = -5f(x)$       74.  $g(x) = 3f(x) - 1$

**DESARROLLO DE CONCEPTOS (continuación)**

**Una función y su derivada** En los ejercicios 75 y 76 se muestran las gráficas de la función  $f$  y su derivada  $f'$  en el mismo plano cartesiano. Clasifique las gráficas como  $f$  o  $f'$  y explique en un breve párrafo los criterios empleados para hacer tal selección. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite *MathGraphs.com*.



77. **Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes** Dibuje las gráficas de las ecuaciones  $y = x^2$  y  $y = -x^2 + 6x - 5$ , así como las dos rectas que son tangentes a ambas gráficas. Encuentre las ecuaciones de dichas rectas.

78. **Recta tangente** Demuestre que las gráficas de

$y = x$  y  $y = \frac{1}{x}$

tienen rectas tangentes perpendiculares entre sí en su punto de intersección.

79. **Rectas tangentes** Demuestre que la gráfica de la función  $f(x) = 3x + \text{sen } x + 2$  no tiene ninguna recta tangente horizontal.

80. **Recta tangente** Demuestre que la gráfica de la función  $f(x) = x^5 + 3x^3 + 5x$  no tiene una recta tangente con pendiente de 3.

**Encontrar la ecuación de la recta tangente** En los ejercicios 81 y 82, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f$  que pasa por el punto  $(x_0, y_0)$ , que no pertenece a la gráfica. Para determinar el punto de tangencia  $(x, y)$  en la gráfica de  $f$ , resuelva la ecuación.

$f'(x) = \frac{y_0 - y}{x_0 - x}$

- 81.  $f(x) = \sqrt{x}$        $(x_0, y_0) = (-4, 0)$
- 82.  $f(x) = \frac{2}{x}$        $(x_0, y_0) = (5, 0)$

**A** 83. **Aproximación lineal** En una ventana de la herramienta de graficación, aplique el *zoom* para aproximar la gráfica de

$f(x) = 4 - \frac{1}{2}x^2$

a fin de estimar  $f'(1)$ . Calcule  $f'(1)$  por derivación.

**A** 84. **Aproximación lineal** En una ventana cuadrada de la herramienta de graficación, aplique el *zoom* para aproximar la gráfica de

$f(x) = 4\sqrt{x} + 1$

a fin de estimar  $f'(4)$ . Calcule  $f'(4)$  por derivación.

**85. Aproximación lineal** Tomando en cuenta la función  $f(x) = x^{3/2}$  con el punto de solución (4, 8):

- (a) Utilice una herramienta de graficación para representar  $f$ . Use el *zoom* para ampliar el entorno del punto (4, 8). Tras varias ampliaciones, la gráfica aparecerá casi lineal. Utilice la función *trace* para determinar las coordenadas de un punto de la gráfica próximo al (4, 8). Encuentre la ecuación de la secante  $S(x)$  que une esos dos puntos.

- (b) Encuentre la ecuación de la recta

$$T(x) = f'(4)(x - 4) + f(4)$$

tangente a la gráfica de  $f$  que pasa por el punto dado. ¿Por qué las funciones lineales  $S$  y  $T$  son casi iguales?

- (c) Represente  $f$  y  $T$  en la misma ventana de la herramienta de graficación. Observe que  $T$  es una buena aproximación de  $f$  cuando  $x$  es cercano a 4. ¿Qué ocurre con la precisión de esta aproximación a medida que el punto de tangencia se aleja?

- (d) Demuestre la conclusión obtenida en el inciso (c) completando la tabla.

$\Delta x$	-3	-2	-1	-0.5	-0.1	0
$f(4 + \Delta x)$						
$T(4 + \Delta x)$						

$\Delta x$	0.1	0.5	1	2	3
$f(4 + \Delta x)$					
$T(4 + \Delta x)$					

**86. Aproximación lineal** Repita el ejercicio 85 empleando ahora la función  $f(x) = x^3$ , donde  $T(x)$  es la recta tangente en el punto (1, 1). Explique por qué la precisión de la aproximación lineal disminuye más rápido que en el ejercicio anterior.

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 87-92, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o proporcione un ejemplo que demuestre que lo es.

- 87. Si  $f'(x) = g'(x)$ , entonces  $f(x) = g(x)$ .
- 88. Si  $f(x) = g(x) + c$ , entonces  $f'(x) = g'(x)$ .
- 89. Si  $y = \pi^2$ , entonces  $dy/dx = 2\pi$ .
- 90. Si  $y = x/\pi$ , entonces  $dy/dx = 1/\pi$ .
- 91. Si  $g(x) = 3f(x)$ , entonces  $g'(x) = 3f'(x)$ .
- 92. Si  $f(x) = \frac{1}{x^n}$ , entonces  $f'(x) = \frac{1}{nx^{n-1}}$ .

**Encontrar razones de cambio** En los ejercicios 93-96, calcule la razón de cambio promedio de la función en el intervalo dado. Compárelo con las razones de cambio instantáneas en los extremos del intervalo.

- 93.  $f(t) = 4t + 5$ , [1, 2]
- 94.  $f(t) = t^2 - 7$ , [3, 3.1]
- 95.  $f(x) = \frac{-1}{x}$ , [1, 2]
- 96.  $f(x) = \sin x$ ,  $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

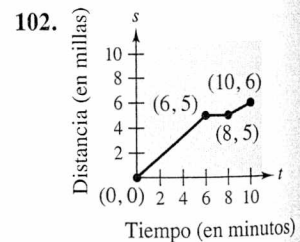
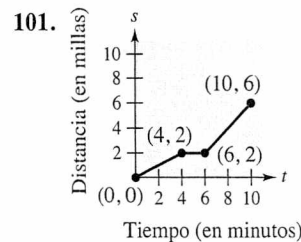
**Movimiento vertical** En los ejercicios 97 y 98, utilice la función de posición  $s(t) = -16t^2 + v_0 t + s_0$  para objetos en caída libre.

- 97. Se deja caer una moneda desde lo alto de un edificio que tiene una altura de 1362 pies.
  - (a) Determine las funciones que describen la posición y la velocidad de la moneda.
  - (b) Calcule su velocidad promedio en el intervalo [1, 2].
  - (c) Encuentre las velocidades instantáneas cuando  $t = 1$  y  $t = 2$ .
  - (d) Calcule el tiempo que tarda en llegar al suelo.
  - (e) Determine su velocidad al caer en el suelo.
- 98. Desde una altura de 220 pies, se lanza hacia abajo una bola con una velocidad inicial de -22 pies/s. ¿Cuál es su velocidad tras 3 segundos? ¿Y luego de descender 108 pies?

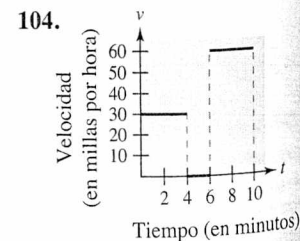
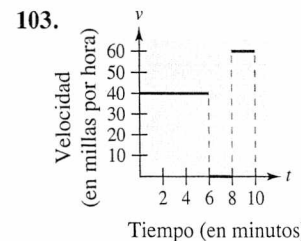
**Movimiento vertical** En los ejercicios 99 y 100, utilice la función posición  $s(t) = -4.9t^2 + v_0 t + s_0$  para objetos en caída libre.

- 99. Se lanza un proyectil hacia arriba desde la superficie terrestre con una velocidad inicial de 120 m/s. ¿Cuál es su velocidad a los 5 segundos? ¿Y a los 10?
- 100. Con el fin de estimar la altura de un edificio, se deja caer una piedra desde su parte más alta en el agua de una piscina que se encuentra al nivel del suelo. ¿Cuál es la altura del edificio, si el chapoteo se observa 5.6 segundos después de soltar la piedra?

**Piénselo** En los ejercicios 101 y 102 se muestra la gráfica de una función de posición, que representa la distancia recorrida en millas por una persona que conduce durante 10 minutos para llegar a su trabajo. Elabore un dibujo de la función velocidad correspondiente.



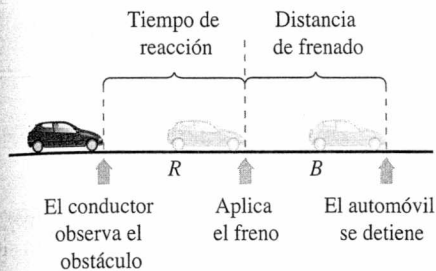
**Piénselo** En los ejercicios 103 y 104 se muestra la gráfica de una función velocidad, que representa la velocidad, en millas por hora, de una persona que conduce durante 10 minutos para llegar a su trabajo. Elabore un dibujo de la función posición correspondiente.



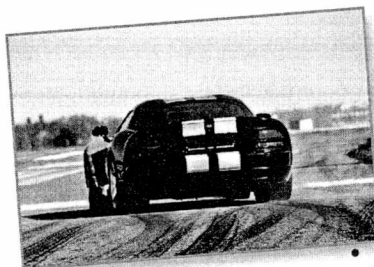
- 105. **Volumen** El volumen de un cubo con lado  $s$  es  $V = s^3$ . Calcule la razón de cambio del volumen respecto a  $s$  cuando  $s = 6$  centímetros.
- 106. **Área** El área de un cuadrado con lados  $s$  es  $A = s^2$ . Encuentre la razón de cambio del área respecto a  $s$  cuando  $s = 6$  metros.

107. Modelado de datos

La distancia de frenado de un automóvil que viaja a una velocidad  $v$  (kilómetros por hora), es la distancia  $R$  (metros) que recorre durante el tiempo de reacción del conductor más la distancia  $B$  (metros) que recorre una vez aplicados los frenos (vea la figura). La tabla muestra los resultados de un experimento al respecto.



Velocidad, $v$	20	40	60	80	100
Distancia durante el tiempo de reacción, $R$	8.3	16.7	25.0	33.3	41.7
Distancia durante el tiempo de frenado, $B$	2.3	9.0	20.2	35.8	55.9



- (a) Utilice las funciones de regresión de una herramienta de graficación para obtener un modelo lineal para el tiempo de reacción  $R$ .
- (b) Utilice las funciones de regresión de una herramienta de graficación para obtener un modelo cuadrático para la distancia aplicando los frenos  $B$ .
- (c) Encuentre el polinomio que expresa la distancia total  $T$  recorrida hasta que el vehículo se detiene por completo.
- (d) Utilice una herramienta de graficación para representar las funciones  $R$ ,  $B$  y  $T$  en una misma ventana.
- (e) Calcule la derivada de  $T$  y la razón de cambio de la distancia total de frenado para  $v = 40$ ,  $v = 80$  y  $v = 100$ .
- (f) A partir de los resultados de este ejercicio, elabore sus conclusiones acerca del comportamiento de la distancia total de frenado a medida que se aumenta la velocidad.

108. Costo del combustible Un automóvil viaja 15,000 millas al año y recorre  $x$  millas por galón. Suponiendo que el costo promedio del combustible es \$3.48 por galón, calcule el costo anual  $C$  del combustible consumido como función de  $x$  y utilice esta función para completar la tabla.

$x$	10	15	20	25	30	35	40
$C$							
$dC/dx$							

¿Quién se beneficiaría más con el aumento de 1 milla por galón en la eficiencia del vehículo: un conductor que obtiene 15 millas por galón o uno que obtiene 35 millas por galón? Explique su respuesta.

109. Velocidad Verifique que la velocidad promedio en el intervalo  $[t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t]$  es la misma que la velocidad instantánea en  $t = t_0$  para la función.

$$s(t) = -\frac{1}{2}at^2 + c.$$

110. Gestión de inventario El costo anual de inventario  $C$  de un fabricante es

$$C = \frac{1,008,000}{Q} + 6.3Q$$

donde  $Q$  es el tamaño del pedido cuando se reponen existencias. Calcule el cambio del costo anual cuando  $Q$  crece de 350 a 351 y compárelo con la razón de cambio instantáneo para  $Q = 350$ .

111. Encontrar la ecuación de la parábola Encuentre la ecuación de la parábola  $y = ax^2 + bx + c$  que pasa por el punto  $(0, 1)$  y es tangente a la recta  $y = x - 1$  en el punto  $(1, 0)$ .

112. Demostración Sea  $(a, b)$  un punto cualquiera de la gráfica de  $y = 1/x$ ,  $x \geq 0$ . Demuestre que el área del triángulo formado por la recta tangente que pasa por  $(a, b)$  y los ejes coordenados es 2.

113. Encontrar la(s) ecuación(es) de la(s) recta(s) tangente(s) Encuentre la(s) ecuación(es) de la(s) recta(s) tangente(s) a la curva  $y = x^3 - 9x$  que pasa por punto  $(1, -9)$  y que no está sobre la gráfica.

114. Encontrar la(s) ecuación(es) de la(s) recta(s) tangente(s) Encuentre la(s) ecuación(es) de la(s) recta(s) tangente(s) a la parábola  $y = x^2$  que pasa por el punto dado, que no está en la gráfica.

- (a)  $(0, a)$
- (b)  $(a, 0)$ .

¿Existe alguna restricción para la constante  $a$ ?

Hacer una función derivable En los ejercicios 115 y 116, encuentre  $a$  y  $b$  tales que  $f$  sea derivable en todos los puntos.

115.  $f(x) = \begin{cases} ax^3, & x \leq 2 \\ x^2 + b, & x > 2 \end{cases}$

116.  $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ ax + b, & x \geq 0 \end{cases}$

117. Determinantes derivables ¿Dónde son derivables las funciones  $f_1(x) = |\sin x|$  y  $f_2(x) = \sin|x|$ ?

118. Demostración Demuestre que  $\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$ .

■ PARA INFORMACIÓN ADICIONAL En el artículo "Sines and Cosines of the Times", de Victor J. Katz, publicado en *Math Horizons*, encontrará una interpretación geométrica de las derivadas de las funciones trigonométricas. Para consultar este artículo, visite [MathArticles.com](http://MathArticles.com).

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

119. Encontrar las funciones diferenciables  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de tal forma que

$$f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}$$

para todos los números reales  $x$  y los números enteros positivos  $n$ .

Este problema fue compuesto por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Reservados todos los derechos

# 4.3 Reglas del producto, del cociente y derivadas trigonométricas

- Encontrar la derivada de una función por la regla del producto.
- Encontrar la derivada de una función por la regla del cociente.
- Encontrar las derivadas de las funciones trigonométricas.
- Encontrar las derivadas de orden superior de una función.

## La regla del producto

En la sección 4.2 aprendió que la derivada de la suma de dos funciones es simplemente la suma de sus derivadas. La regla para derivar el producto de dos funciones no es tan simple.

.....▶  
 •• **COMENTARIO** Algunas personas prefieren la siguiente versión de la regla del producto

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

La ventaja de esta forma radica en que se puede generalizar con facilidad a multiplicaciones con tres o más factores.

### TEOREMA 4.7 La regla del producto

El producto de dos funciones derivables  $f$  y  $g$  también es derivable. Además, la derivada de  $fg$  es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la derivada de la primera por la segunda.

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

**Demostración** Algunas demostraciones matemáticas, como en el caso de la regla de la suma, son directas. Otras requieren pasos inteligentes cuyo motivo puede resultar imperceptible para el lector. Esta demostración presenta uno de esos pasos, sumar y restar una misma cantidad, la cual se muestra en distinto color.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ f(x + \Delta x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ f(x + \Delta x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ g(x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \end{aligned}$$

Observe que  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x)$  porque se considera que  $f$  es derivable y, por tanto, continua.

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

.....▶  
 •• **COMENTARIO** La demostración de la regla del producto para productos de más de dos factores se deja como ejercicio (vea el ejercicio 137).

La regla del producto es extensiva a multiplicaciones con más de dos factores. Por ejemplo, si  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones derivables de  $x$ , entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

Por ejemplo, la derivada de  $y = x^2 \sin x \cos x$  es

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2x \sin x \cos x + x^2 \cos x \cos x + x^2 \sin x (-\sin x) \\ &= 2x \sin x \cos x + x^2(\cos^2 x - \sin^2 x). \end{aligned}$$

L  
 Cuand  
 origina  
 regla d  
 por la  
  
 de la c  
 los des  
 diferen  
 tuvo cc  
 tradici  
 (Fuente  
 por Da

•• **CO**  
 • que  
 • gla  
 • fact  
 • mül  
 • de e  
 •••

**LA REGLA DEL PRODUCTO**

Cuando Leibniz elaboró originalmente una fórmula para la regla del producto, lo hizo motivado por la expresión

$$(x + dx)(y + dy) - xy$$

de la cual restó  $dx dy$  (considerándolos despreciables) y calculó la forma diferencial  $x dy + y dx$ . Esta derivación tuvo como resultado la forma tradicional de la regla del producto. (Fuente: *La historia de las matemáticas*, por David M. Burton)

La derivada del producto de dos funciones no está dada por el producto de sus derivadas. Para observarlo basta con comparar el producto de las derivadas de

$$f(x) = 3x - 2x^2$$

y

$$g(x) = 5 + 4x$$

con la derivada obtenida en el ejemplo 1.

**EJEMPLO 1 Aplicar la regla del producto**

Encuentre la derivada de  $h(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} h'(x) &= \overbrace{(3x - 2x^2)}^{\text{Primera}} \overbrace{\frac{d}{dx}[5 + 4x]}^{\text{Derivada de la segunda}} + \overbrace{(5 + 4x)}^{\text{Segunda}} \overbrace{\frac{d}{dx}[3x - 2x^2]}^{\text{Derivada de la primera}} \\ &= (3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x) \\ &= (12x - 8x^2) + (15 - 8x - 16x^2) \\ &= -24x^2 + 4x + 15 \end{aligned}$$

Aplique la regla del producto.

En el ejemplo 1 se encuentra con la opción de calcular la derivada con o sin la regla del producto. Para encontrar la derivada sin usar la regla del producto, se puede escribir

$$\begin{aligned} D_x[(3x - 2x^2)(5 + 4x)] &= D_x[-8x^3 + 2x^2 + 15x] \\ &= -24x^2 + 4x + 15. \end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo debe utilizar la regla del producto.

**EJEMPLO 2 Aplicar la regla del producto**

Encuentre la derivada de  $y = 3x^2 \operatorname{sen} x$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[3x^2 \operatorname{sen} x] &= 3x^2 \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}[3x^2] \\ &= 3x^2 \cos x + (\operatorname{sen} x)(6x) \\ &= 3x^2 \cos x + 6x \operatorname{sen} x \\ &= 3x(x \cos x + 2 \operatorname{sen} x) \end{aligned}$$

Aplique la regla del producto.

**EJEMPLO 3 Aplicar la regla del producto**

Encuentre la derivada de  $y = 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \overbrace{(2x) \left( \frac{d}{dx}[\cos x] \right) + (\cos x) \left( \frac{d}{dx}[2x] \right)}^{\text{Regla del producto}} - \overbrace{2 \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x]}^{\text{Regla del múltiplo constante}} \\ &= (2x)(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2) - 2(\cos x) \\ &= -2x \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

- **COMENTARIO** Observe
- que en el ejemplo 3 se usa la regla del producto cuando ambos factores son variables, y la del múltiplo constante cuando uno de ellos es constante.



## La regla del cociente

### TEOREMA 4.8 La regla del cociente

El cociente  $f/g$  de dos funciones derivables  $f$  y  $g$  también es derivable para todos los valores de  $x$  para los que  $g(x) \neq 0$ . Además, la derivada de  $f/g$  se obtiene mediante el denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$$

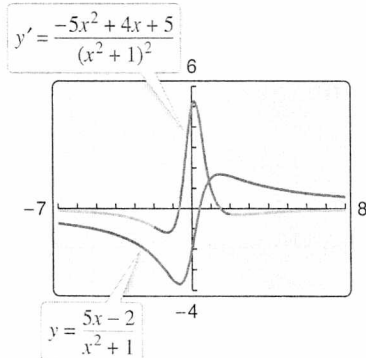


**COMENTARIO** De la regla del cociente, puede ver que la derivada de un cociente no es (en general) el cociente de las derivadas.

**Demostración** Al igual que en la demostración del teorema 4.7, la clave radica en sumar y restar una misma cantidad

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} && \text{Definición de derivada} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x)f(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x)}{\Delta x g(x)g(x + \Delta x)} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x)f(x + \Delta x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x + \Delta x)}{\Delta x g(x)g(x + \Delta x)} \\ &= \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x)[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [g(x)g(x + \Delta x)]} \\ &= \frac{g(x) \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] - f(x) \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [g(x)g(x + \Delta x)]} \\ &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$

**TECNOLOGÍA** Con una herramienta de graficación se pueden comparar las gráficas de una función y de su derivada. Por ejemplo, en la figura 4.22, la gráfica de la función del ejemplo 4 parece incluir dos puntos con rectas tangentes horizontales. ¿Cuáles son los valores de  $y'$  en dichos puntos?



Comparación gráfica de una función y su derivada.  
**Figura 4.22**

Observe que  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) = g(x)$ , porque se considera que  $g$  es derivable y por tanto es continua.

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

### EJEMPLO 4 Aplicar la regla del cociente

Encuentre la derivada de  $y = \frac{5x - 2}{x^2 + 1}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \frac{5x - 2}{x^2 + 1} \right] &= \frac{(x^2 + 1) \frac{d}{dx} [5x - 2] - (5x - 2) \frac{d}{dx} [x^2 + 1]}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{(x^2 + 1)(5) - (5x - 2)(2x)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{(5x^2 + 5) - (10x^2 - 4x)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-5x^2 + 4x + 5}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Aplique la regla del cociente.

-7 -6 -5

La recta y de  $f(x)$  es  
**Figura 4.**

**COM**  
distir  
del n  
tos c  
las d  
medi  
Lleg  
pero  
mayc

Observe el uso de los paréntesis en el ejemplo 4. Es recomendable utilizar paréntesis en *todos* los problemas de derivación. Por ejemplo, cuando se usa la regla del cociente, es conveniente encerrar todo factor y derivadas en un paréntesis y prestar especial atención a la resta exigida en el numerador.

Al presentar las reglas de derivación en la sección precedente, se hizo hincapié en la necesidad de reescribir *antes* de derivar. El ejemplo siguiente ilustra este aspecto en relación con la regla del cociente.

**EJEMPLO 5 Reescribir antes de derivar**

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = \frac{3 - (1/x)}{x + 5}$  en  $(-1, 1)$ .

**Solución** Comience por reescribir la función.

$$f(x) = \frac{3 - (1/x)}{x + 5}$$

$$= \frac{x(3 - \frac{1}{x})}{x(x + 5)}$$

$$= \frac{3x - 1}{x^2 + 5x}$$

Función original.

Multiplique por  $x$  al numerador y denominador.

Reescriba.

Ahora, aplique la regla del cociente

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 5x)(3) - (3x - 1)(2x + 5)}{(x^2 + 5x)^2}$$

$$= \frac{(3x^2 + 15x) - (6x^2 + 13x - 5)}{(x^2 + 5x)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 2x + 5}{(x^2 + 5x)^2}$$

Regla del cociente

Simplifique.

Con objeto de encontrar la pendiente en  $(-1, 1)$ , evalúe  $f'(-1)$ .

$$f'(-1) = 0$$

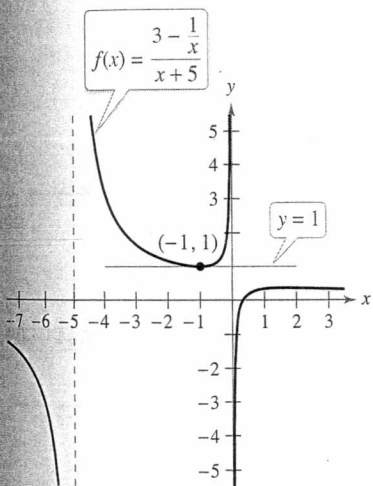
Pendiente de la gráfica en  $(-1, 1)$

Luego, utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, puede determinar que la ecuación de la recta tangente en  $(-1, 1)$  es  $y = 1$ . Vea la figura 4.23.

No todo cociente requiere ser derivado mediante la regla del cociente. Por ejemplo, cada uno de los cocientes del ejemplo siguiente se puede considerar como el producto de una constante por una función de  $x$ , de modo que es más sencillo aplicar la regla del múltiplo constante.

**EJEMPLO 6 Aplicar la regla del múltiplo constante**

Función original	Reescriba	Derive	Simplifique
a. $y = \frac{x^2 + 3x}{6}$	$y = \frac{1}{6}(x^2 + 3x)$	$y' = \frac{1}{6}(2x + 3)$	$y' = \frac{2x + 3}{6}$
b. $y = \frac{5x^4}{8}$	$y = \frac{5}{8}x^4$	$y' = \frac{5}{8}(4x^3)$	$y' = \frac{5}{2}x^3$
c. $y = \frac{-3(3x - 2x^2)}{7x}$	$y = -\frac{3}{7}(3 - 2x)$	$y' = -\frac{3}{7}(-2)$	$y' = \frac{6}{7}$
d. $y = \frac{9}{5x^2}$	$y = \frac{9}{5}(x^{-2})$	$y' = \frac{9}{5}(-2x^{-3})$	$y' = -\frac{18}{5x^3}$



La recta  $y = 1$  es tangente a la gráfica de  $f(x)$  en el punto  $(-1, 1)$ .

Figura 4.23

**COMENTARIO** Para distinguir la ventaja de la regla del múltiplo constante en ciertos cocientes, trate de calcular las derivadas del ejemplo 6 mediante la regla del cociente. Llegará al mismo resultado, pero con un esfuerzo mucho mayor.

En la sección 4.2 se demostró la regla de la potencia solo para exponentes  $n$  enteros mayores que 1. En el ejemplo que sigue se amplía esa demostración a exponentes enteros negativos.

**EJEMPLO 7** Regla de la potencia: exponentes enteros negativos

Si  $n$  es un entero negativo, existe un entero positivo  $k$  tal que  $n = -k$ . Por tanto, usando la regla del cociente se puede escribir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^n] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^k}\right] \\ &= \frac{x^k(0) - (1)(kx^{k-1})}{(x^k)^2} && \text{Regla del cociente y regla de la potencia} \\ &= \frac{0 - kx^{k-1}}{x^{2k}} \\ &= -kx^{-k-1} \\ &= nx^{n-1}. && n = -k \end{aligned}$$

Por lo que la regla de la potencia

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \quad \text{Regla de la potencia}$$

es válida para todo entero. En el ejercicio 71 de la sección 4.5 se le pide demostrar el caso en el que  $n$  es cualquier número racional.

**Derivadas de las funciones trigonométricas**

Conocidas las derivadas de las funciones seno y coseno, la regla del cociente permite establecer las de las cuatro funciones trigonométricas restantes.

**TEOREMA 4.9** Derivadas de las funciones trigonométricas

$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$

**COMENTARIO**

En la demostración del teorema 4.9, tenga en cuenta el uso de las identidades trigonométricas

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

y

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Estas identidades trigonométricas y otros se enumeran en el apéndice C y en las tarjetas de las fórmulas para este texto.

**Demostración** Considerando  $\tan = (\sin x / \cos x)$  y aplicando la regla del cociente obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\tan x] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] \\ &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} && \text{Aplique la regla del cociente.} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x. \end{aligned}$$

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

La demostración de las otras tres partes del teorema se le deja al lector como ejercicio (vea el ejercicio 87).

**EJEMPLO 8****Derivar funciones trigonométricas**

•••► Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Función	Derivada
a. $y = x - \tan x$	$\frac{dy}{dx} = 1 - \sec^2 x$
b. $y = x \sec x$	$y' = x(\sec x \tan x) + (\sec x)(1)$ $= (\sec x)(1 + x \tan x)$

**EJEMPLO 9****Diferentes formas de una derivada**

Derive ambas formas de

$$y = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \csc x - \cot x.$$

**Solución**

**Primera forma:**  $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin x)(\sin x) - (1 - \cos x)(\cos x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

**Segunda forma:**  $y = \csc x - \cot x$

$$y' = -\csc x \cot x + \csc^2 x$$

Para demostrar que ambas derivadas son idénticas, escriba

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} &= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{1}{\sin^2 x} - \left(\frac{1}{\sin x}\right)\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) \\ &= \csc^2 x - \csc x \cot x. \end{aligned}$$

El siguiente resumen muestra que gran parte del trabajo necesario para obtener la forma simplificada de una derivada se debe hacer *después* de derivar. Observe que dos características de una forma simplificada son la ausencia de exponentes negativos y el agrupamiento de términos semejantes.

Función	Derivada
a. $y = x - \tan x$	$\frac{dy}{dx} = 1 - \sec^2 x$
b. $y = x \sec x$	$y' = x(\sec x \tan x) + (\sec x)(1)$ $= (\sec x)(1 + x \tan x)$

**COMENTARIO** Debido a las identidades trigonométricas, la derivada de una función trigonométrica puede adoptar diversas formas. Esto complica la comparación de las soluciones obtenidas por usted con las propuestas al final del libro.

### Derivadas de orden superior

Así como al derivar una función posición usted obtiene una función velocidad, al derivar esta última obtiene una función de **aceleración**. En otras palabras, la función de aceleración es la *segunda* derivada de la función de posición.

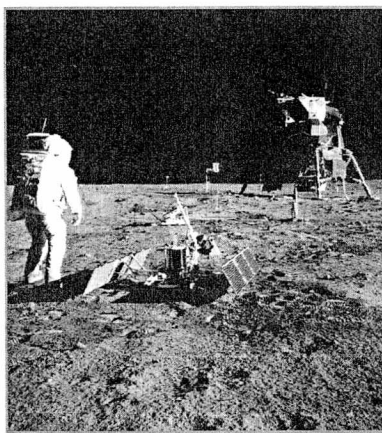
$$\begin{aligned} s(t) & \text{ Función posición} \\ v(t) = s'(t) & \text{ Función velocidad} \\ a(t) = v'(t) = s''(t) & \text{ Función aceleración} \end{aligned}$$

La función  $a(t)$  es la **segunda derivada** de  $s(t)$  y se denota como  $s''(t)$ .

La segunda derivada es un ejemplo de una **derivada de orden superior**. Se pueden definir derivadas de cualquier orden entero positivo. Por ejemplo, la **tercera derivada** es la derivada de la segunda derivada. Las derivadas de orden superior se denotan como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \text{Primera derivada: } & y', \quad f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d}{dx}[f(x)], \quad D_x[y] \\ \text{Segunda derivada: } & y'', \quad f''(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2}[f(x)], \quad D_x^2[y] \\ \text{Tercera derivada: } & y''', \quad f'''(x), \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \frac{d^3}{dx^3}[f(x)], \quad D_x^3[y] \\ \text{Cuarta derivada: } & y^{(4)}, \quad f^{(4)}(x), \quad \frac{d^4y}{dx^4}, \quad \frac{d^4}{dx^4}[f(x)], \quad D_x^4[y] \\ & \vdots \\ \text{n-ésima derivada: } & y^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^ny}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n}[f(x)], \quad D_x^n[y] \end{aligned}$$

..... ▷  
 •• **COMENTARIO** La segunda derivada de la función es la derivada de la primera derivada de la función.



La masa de la Luna es de  $7.349 \times 10^{22}$  kg y la de la Tierra  $5.976 \times 10^{24}$  kg. El radio de la Luna es 1737 km y el de la Tierra 6348 km. Puesto que la fuerza de gravedad de un planeta es directamente proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadrado de su radio, el cociente entre las fuerzas de gravedad en la Tierra y en la Luna es

$$\frac{(5.976 \times 10^{24})/6378^2}{(7.349 \times 10^{22})/1737^2} \approx 6.0.$$

#### EJEMPLO 10

#### Determinar la aceleración de la gravedad

Puesto que la Luna carece de atmósfera, un objeto que cae en ella no encuentra resistencia del aire. En 1971, el astronauta David Scott verificó que una pluma de ave y un martillo caen con la misma velocidad. La función de posición para cada uno de esos objetos es

$$s(t) = -0.81t^2 + 2$$

donde  $s(t)$  es la altura en metros y  $t$  el tiempo en segundos. ¿Cuál es la relación entre la fuerza de gravedad de la Tierra respecto a la Luna?

**Solución** Para calcular la aceleración, derive dos veces la función de posición.

$$\begin{aligned} s(t) &= -0.81t^2 + 2 && \text{Función de posición} \\ s'(t) &= -1.62t && \text{Función de velocidad} \\ s''(t) &= -1.62 && \text{Función de aceleración} \end{aligned}$$

De esta forma resulta que la aceleración de la gravedad en la Luna es de  $-1.62 \text{ m/s}^2$ . Puesto que la aceleración de la gravedad de la Tierra es de  $-9.8 \text{ m/s}^2$ , el cociente de la fuerza de gravedad de la Tierra respecto a la de la Luna es

$$\begin{aligned} \frac{\text{Fuerza de gravedad en la Tierra}}{\text{Fuerza de gravedad en la Luna}} &= \frac{-9.8}{-1.62} \\ &\approx 6.0. \end{aligned}$$

## 4.

Utilizar la regla del

1.  $g(x) =$
3.  $h(t) =$
5.  $f(x) =$

Utilizar la regla de

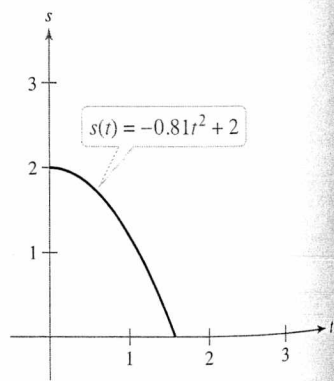
7.  $f(x) =$
9.  $h(x) =$
11.  $g(x) =$

Determinar

13.  $f(x) =$
14.  $y =$
15.  $f(x) =$
16.  $f(x) =$
17.  $f(x) =$
18.  $f(x) =$

Usar la regla completa

19.  $y =$
20.  $y =$
21.  $y =$
22.  $y =$
23.  $y =$
24.  $y =$



# 4.3 Ejercicios

Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Utilizar la regla del producto** En los ejercicios 1-6, utilice la regla del producto para derivar la función.

1.  $g(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 4x)$
2.  $y = (3x - 4)(x^3 + 5)$
3.  $h(t) = \sqrt{t}(1 - t^2)$
4.  $g(s) = \sqrt{s}(s^2 + 8)$
5.  $f(x) = x^3 \cos x$
6.  $g(x) = \sqrt{x} \sin x$

**Utilizar la regla del cociente** En los ejercicios 7-12, utilice la regla del cociente para derivar la función.

7.  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$
8.  $g(t) = \frac{3t^2 - 1}{2t + 5}$
9.  $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3 + 1}$
10.  $f(x) = \frac{x^2}{2\sqrt{x} + 1}$
11.  $g(x) = \frac{\sin x}{x^2}$
12.  $f(t) = \frac{\cos t}{t^3}$

**Determinar y evaluar una derivada** En los ejercicios 13-18, encuentre  $f'(x)$  y  $f'(c)$ .

Función	Valor de $c$
13. $f(x) = (x^3 + 4x)(3x^2 + 2x - 5)$	$c = 0$
14. $y = (x^2 - 3x + 2)(x^3 + 1)$	$c = 2$
15. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 3}$	$c = 1$
16. $f(x) = \frac{x - 4}{x + 4}$	$c = 3$
17. $f(x) = x \cos x$	$c = \frac{\pi}{4}$
18. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$	$c = \frac{\pi}{6}$

**Usar la regla del múltiplo constante** En los ejercicios 19-24, complete la tabla sin usar la regla del cociente.

Función original	Reescriba	Derive	Simplifique
19. $y = \frac{x^2 + 3x}{7}$			
20. $y = \frac{5x^2 - 3}{4}$			
21. $y = \frac{6}{7x^2}$			
22. $y = \frac{10}{3x^3}$			
23. $y = \frac{4x^{3/2}}{x}$			
24. $y = \frac{2x}{x^{1/3}}$			

**Encontrar una derivada** En los ejercicios 25-38, encuentre la derivada de la función algebraica

25.  $f(x) = \frac{4 - 3x - x^2}{x^2 - 1}$
26.  $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4}$
27.  $f(x) = x\left(1 - \frac{4}{x + 3}\right)$
28.  $f(x) = x^4\left(1 - \frac{2}{x + 1}\right)$
29.  $f(x) = \frac{3x - 1}{\sqrt{x}}$
30.  $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3)$
31.  $h(s) = (s^3 - 2)^2$
32.  $h(x) = (x^2 + 3)^3$
33.  $f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x}}{x - 3}$
34.  $g(x) = x^2\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x + 1}\right)$
35.  $f(x) = (2x^3 + 5x)(x - 3)(x + 2)$
36.  $f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x - 1)$
37.  $f(x) = \frac{x^2 + c^2}{x^2 - c^2}$ ,  $c$  es una constante
38.  $f(x) = \frac{c^2 - x^2}{c^2 + x^2}$ ,  $c$  es una constante

**Encontrar una derivada de una función trigonométrica** En los ejercicios 39-54, encuentre la derivada de la función trigonométrica.

39.  $f(t) = t^2 \sin t$
40.  $f(\theta) = (\theta + 1) \cos \theta$
41.  $f(t) = \frac{\cos t}{t}$
42.  $f(x) = \frac{\sin x}{x^3}$
43.  $f(x) = -x + \tan x$
44.  $y = x + \cot x$
45.  $g(t) = \sqrt[4]{t} + 6 \csc t$
46.  $h(x) = \frac{1}{x} - 12 \sec x$
47.  $y = \frac{3(1 - \sin x)}{2 \cos x}$
48.  $y = \frac{\sec x}{x}$
49.  $y = -\csc x - \sin x$
50.  $y = x \sin x + \cos x$
51.  $f(x) = x^2 \tan x$
52.  $f(x) = \sin x \cos x$
53.  $y = 2x \sin x + x^2 \cos x$
54.  $h(\theta) = 5\theta \sec \theta + \theta \tan \theta$

**Encontrar una derivada usando tecnología** En los ejercicios 55-58, use un programa de cálculo para derivar las funciones.

55.  $g(x) = \left(\frac{x + 1}{x + 2}\right)(2x - 5)$
56.  $f(x) = \left(\frac{x^2 - x - 3}{x^2 + 1}\right)(x^2 + x + 1)$
57.  $g(\theta) = \frac{\theta}{1 - \sin \theta}$
58.  $f(\theta) = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$

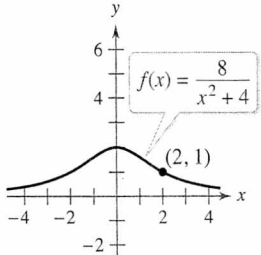
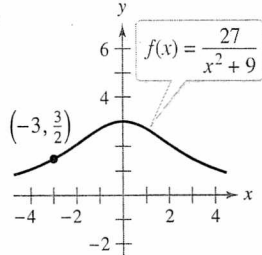
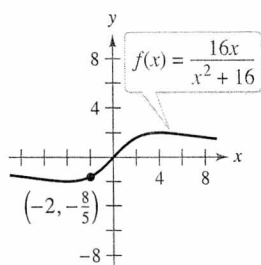
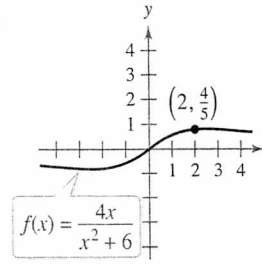
**Evaluar una derivada** En los ejercicios 59-62, evalúe la derivada de la función en el punto que se indica. Utilice una herramienta de graficación para verificar su resultado.

- | Función                                 | Punto                   |
|---|-------------------------|
| 59. $y = \frac{1 + \csc x}{1 - \csc x}$ | $(\frac{\pi}{6}, -3)$   |
| 60. $f(x) = \tan x \cot x$              | $(1, 1)$                |
| 61. $h(t) = \frac{\sec t}{t}$           | $(\pi, -\frac{1}{\pi})$ |
| 62. $f(x) = \sin x(\sin x + \cos x)$    | $(\frac{\pi}{4}, 1)$    |

**Encontrar una ecuación de la recta tangente** En los ejercicios 63-68: (a) encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto que se indica, (b) utilice una herramienta de graficación para representar la función y su recta tangente en ese punto, y (c) utilice la función *derivative* para confirmar los resultados.

63.  $f(x) = (x^3 + 4x - 1)(x - 2)$ ,  $(1, -4)$   
 64.  $f(x) = (x - 2)(x^2 + 4)$ ,  $(1, -5)$   
 65.  $f(x) = \frac{x}{x + 4}$ ,  $(-5, 5)$     66.  $f(x) = \frac{x + 3}{x - 3}$ ,  $(4, 7)$   
 67.  $f(x) = \tan x$ ,  $(\frac{\pi}{4}, 1)$     68.  $f(x) = \sec x$ ,  $(\frac{\pi}{3}, 2)$

**Curvas famosas** En los ejercicios 69-72, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto dado (las curvas de los ejercicios 69 y 70 se conocen como *brujas de Agnesi*. Las curvas de los ejercicios 71 y 72 se denominan *serpentinatas*).

69.  70. 
71.  72. 

**Recta tangente horizontal** En los ejercicios 73-76, determine el (los) punto(s) donde la gráfica tiene tangente horizontal.

73.  $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2}$     74.  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$   
 75.  $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$     76.  $f(x) = \frac{x - 4}{x^2 - 7}$

77. **Rectas tangentes** Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de  $f(x) = (x + 1)/(x - 1)$  paralelas a la recta  $2y + x = 6$ . A continuación, dibuje la gráfica de la función y las rectas tangentes.

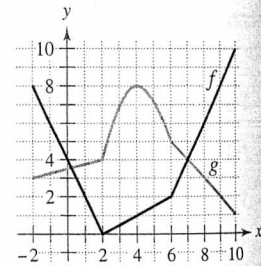
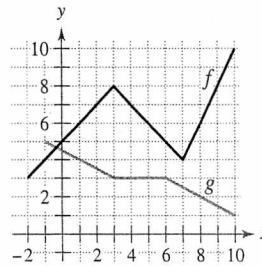
78. **Rectas tangentes** Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de  $f(x) = x/(x - 1)$  que pasan por el punto  $(-1, 5)$ . A continuación, dibuje la gráfica de la función y las rectas tangentes.

**Explorar una relación** En los ejercicios 79 y 80, verifique que  $f'(x) = g'(x)$ , y explique la relación que existe entre  $f$  y  $g$ .

79.  $f(x) = \frac{3x}{x + 2}$ ,  $g(x) = \frac{5x + 4}{x + 2}$   
 80.  $f(x) = \frac{\sin x - 3x}{x}$ ,  $g(x) = \frac{\sin x + 2x}{x}$

**Evaluar derivadas** En los ejercicios 81 y 82, utilice las gráficas de  $f$  y  $g$ , siendo  $p(x) = f(x)g(x)$  y  $q(x) = f(x)/g(x)$ .

81. (a) Encuentre  $p'(1)$ .    82. (a) Encuentre  $p'(4)$ .  
 (b) Encuentre  $q'(4)$ .    (b) Encuentre  $q'(7)$ .



83. **Área** La longitud de un rectángulo está dada por  $6t + 5$  y su altura es  $\sqrt{t}$ , donde  $t$  es el tiempo en segundos y las dimensiones están en centímetros. Encuentre la razón de cambio de área respecto al tiempo.

84. **Volumen** El radio de un cilindro recto circular está dado por  $\sqrt{t + 2}$  y su altura por  $\frac{1}{2}\sqrt{t}$ , donde  $t$  es el tiempo en segundos y las dimensiones se encuentran en pulgadas. Encuentre la razón de cambio del volumen respecto al tiempo.

85. **Reposición del inventario** El costo  $C$  de pedido y transporte de los elementos utilizados para la fabricación de un proceso es

$$C = 100\left(\frac{200}{x^2} + \frac{x}{x + 30}\right), \quad x \geq 1$$

donde  $C$  se mide en miles de dólares y  $x$  es el tamaño del pedido, en cientos. Encuentre la razón de cambio de  $C$  respecto a  $x$  cuando (a)  $x = 10$ , (b)  $x = 15$  y (c)  $x = 20$ . ¿Qué implican estas razones de cambio cuando el tamaño del pedido aumenta?

86. **Crecimiento demográfico** Una población de 500 bacterias se introduce en un cultivo y aumenta de número de acuerdo con la ecuación

$$P(t) = 500\left(1 + \frac{4t}{50 + t^2}\right)$$

donde  $t$  se mide en horas. Calcule la razón de cambio al que está creciendo la población cuando  $t = 2$ .

87. Den vacío

- (a)  $\frac{c}{a}$   
 (b)  $\frac{c}{a}$   
 (c)  $\frac{c}{a}$

88. Raz el int y de

89. Mo to h en E años a 20 vices

Af
h
p

- (a) 1  
 (b) 1  
 (c) 1  
 (d) 1

90. Sati nen cuen mue: satél

- (a) :  
 (b) :

Encontr encuentr

91.  $f(x)$  :  
 93.  $f(x)$  :  
 95.  $f(x)$  :  
 97.  $f(x)$  :

87.  **Demostración**  Demuestre las siguientes reglas de derivación.

(a)  $\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$

(b)  $\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$

(c)  $\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$

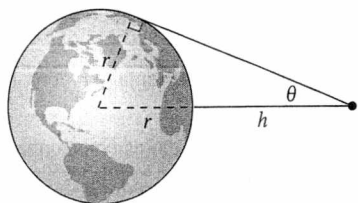
88.  **Razón de cambio**  Determine si existe algún valor de  $x$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$  tal que las razones de cambio de  $f(x) = \sec x$  y de  $g(x) = \csc x$  sean iguales.

89.  **Modelado de datos**  La siguiente tabla muestra los gastos  $h$  (en miles de millones de dólares) en cuidado de la salud en Estados Unidos y la población  $p$  (en millones) durante los años 2004 a 2009. La  $t$  representa el año, y  $t = 4$  corresponde a 2004. (Fuente: U.S. Centers for Medicare & Medicaid Services and U.S. Census Bureau.)

Año, $t$	4	5	6	7	8	9
$h$	1773	1890	2017	2135	2234	2330
$p$	293	296	299	302	305	307

- (a) Utilice una herramienta de graficación para encontrar los modelos cúbicos para los gastos en cuidado de la salud  $h(t)$  y la población  $p(t)$ .
- (b) Represente gráficamente cada uno de los modelos desarrollados al responder el inciso (a).
- (c) Encuentre  $A = h(t)/p(t)$ , para obtener la gráfica  $A$ . ¿Qué representa esta función?
- (d) Interprete  $A'(t)$  en el contexto de estos datos.

90.  **Satélites**  Cuando los satélites exploran la Tierra, solo tienen alcance para una parte de su superficie. Algunos de ellos cuentan con sensores que pueden medir el ángulo  $\theta$  que se muestra en la figura. Si  $h$  representa la distancia que hay entre el satélite y la superficie de la Tierra y  $r$  el radio de esta última:



- (a) Demuestre que  $h = r(\csc \theta - 1)$ .
- (b) Encuentre la velocidad a la que cambia  $h$  con respecto a  $\theta$  cuando  $\theta = 30^\circ$ . (Suponga que  $r = 3960$  millas.)

**Encontrar la segunda derivada**  En los ejercicios 91-98, encuentre la segunda derivada de la función.

91.  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - x$

92.  $f(x) = 4x^5 - 2x^3 + 5x^2$

93.  $f(x) = 4x^{3/2}$

94.  $f(x) = x^2 + 3x^{-3}$

95.  $f(x) = \frac{x}{x-1}$

96.  $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x-4}$

97.  $f(x) = x \sin x$

98.  $f(x) = \sec x$

**Encontrar la derivada de orden superior**  En los ejercicios 99-102, encuentre la segunda derivada de la función

99.  $f'(x) = x^2, f''(x)$

100.  $f''(x) = 2 - \frac{2}{x}, f'''(x)$

101.  $f'''(x) = 2\sqrt{x}, f^{(4)}(x)$

102.  $f^{(4)}(x) = 2x + 1, f^{(6)}(x)$

**Utilizar relaciones**  En los ejercicios 103-106, utilice la información dada para encontrar  $f'(2)$ .

$g(2) = 3$  y  $g'(2) = -2$

$h(2) = -1$  y  $h'(2) = 4$

103.  $f(x) = 2g(x) + h(x)$

104.  $f(x) = 4 - h(x)$

105.  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

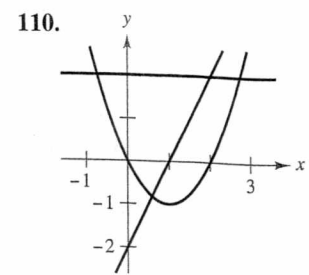
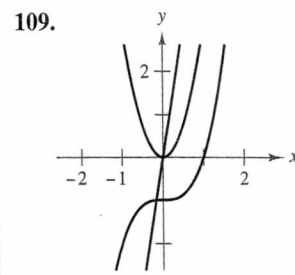
106.  $f(x) = g(x)h(x)$

**DESARROLLO DE CONCEPTOS**

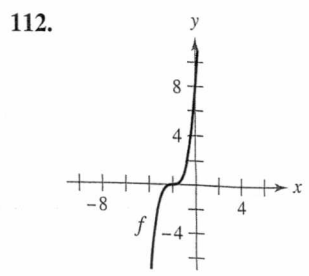
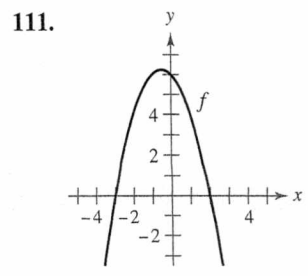
107.  **Trazar una gráfica**  Trace la gráfica de una función derivable  $f$  tal que  $f(2) = 0, f' < 0$  para  $-\infty < x < 2$  y  $f' > 0$  para  $2 < x < \infty$ . Explique su razonamiento.

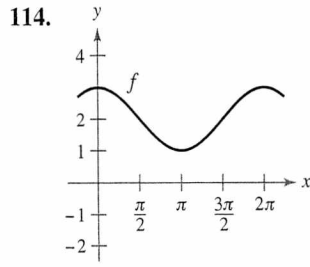
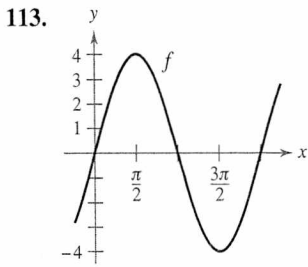
108.  **Trazar una gráfica**  Trace la gráfica de una función derivable  $f$  tal que  $f > 0$  y  $f' < 0$  para todos los números reales  $x$ . Explique su razonamiento.

**Identificar gráficas**  En los ejercicios 109-110 se muestran las gráficas de  $f, f'$  y  $f''$  sobre el mismo plano cartesiano. Identifique la gráfica. Explique su razonamiento. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite [MathGraphs.com](http://MathGraphs.com).



**Trazar gráficas**  En los ejercicios 111-114, se muestra la gráfica de  $f$ . Dibuje las gráficas de  $f'$  y  $f''$ . Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite [MathGraphs.com](http://MathGraphs.com).





115. **Aceleración** La velocidad, en m/s, de un objeto es  $v(t) = 36 - t^2$  para  $0 \leq t \leq 6$ . Calcule su velocidad y su aceleración cuando  $t = 3$ . ¿Qué puede decir acerca de la rapidez del objeto cuando la velocidad y aceleración tienen signos opuestos?

116. **Aceleración** La velocidad de un automóvil que parte del reposo es  $v(t) = \frac{100t}{2t + 15}$

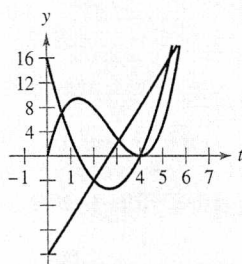
donde  $v$  se mide en pies por segundo. Calcule su aceleración en (a) 5 segundos, (b) 10 segundos y (c) 20 segundos.

117. **Distancia de frenado** Al momento de aplicar los frenos, un vehículo viaja a 66 pies/s (45 millas por hora). La función de posición del vehículo es  $s(t) = -8.25t^2 + 66t$ , donde  $s$  se mide en pies y  $t$  en segundos. Utilice esta función para completar la tabla y encontrar la velocidad media durante cada intervalo.

$t$	0	1	2	3	4
$s(t)$					
$v(t)$					
$a(t)$					



**118. ¿CÓMO LO VE?** En la figura se muestran las gráficas de las funciones posición, velocidad y aceleración de una partícula.



- (a) Copie las gráficas de las funciones. Identifique cada una de ellas. Explique su razonamiento. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite [MathGraphs.com](http://MathGraphs.com).
- (b) En la ilustración, identifique cuándo aumenta y disminuye la velocidad de la partícula. Explique su razonamiento.

**Determinar un patrón** En los ejercicios 119 y 120, desarrolle una fórmula general para  $f^{(n)}(x)$ , dada  $f(x)$ .

119.  $f(x) = x^n$       120.  $f(x) = \frac{1}{x}$
121. **Determinar un patrón** Considere la función  $f(x) = g(x)h(x)$ .
- (a) Utilice la regla del producto para elaborar una regla general para encontrar  $f''(x)$ ,  $f'''(x)$  y  $f^{(4)}(x)$ .
- (b) Empleando los resultados del inciso (a), redacte una regla general para  $f^{(n)}(x)$ .
122. **Determinar un patrón** Desarrolle una fórmula general para  $[xf(x)]^{(n)}$ , donde  $f$  es una función derivable de  $x$ .

**Determinar un patrón** En los ejercicios 123 y 124, encuentre las derivadas de la función  $f$  para  $n = 1, 2, 3$  y 4. Utilice los resultados para elaborar una regla general para  $f'(x)$  en términos de  $n$ .

123.  $f(x) = x^n \sin x$       124.  $f(x) = \frac{\cos x}{x^n}$

**Ecuaciones diferenciales** En los ejercicios 125-128, verifique que la función satisface la ecuación diferencial.

Función	Ecuación diferencial
125. $y = \frac{1}{x}, x > 0$	$x^3 y'' + 2x^2 y' = 0$
126. $y = 2x^3 - 6x + 10$	$-y''' - xy'' - 2y' = -24x^2$
127. $y = 2 \sin x + 3$	$y'' + y = 3$
128. $y = 3 \cos x + \sin x$	$y'' + y = 0$

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 129-134, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué es falso o proporcione un ejemplo que demuestre que lo es.

129. Si  $y = f(x)g(x)$ , entonces  $\frac{dy}{dx} = f'(x)g'(x)$ .
130. Si  $y = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$ , entonces  $\frac{d^5 y}{dx^5} = 0$ .
131. Si  $f'(c)$  y  $g'(c)$  son cero y  $h(x) = f(x)g(x)$ , entonces  $h'(c) = 0$ .
132. Si  $f(x)$  es un polinomio de  $n$ -ésimo grado, entonces  $f^{(n+1)}(x) = 0$ .
133. La segunda derivada representa la razón de cambio de la primera derivada.
134. Si la velocidad de un objeto es constante, entonces su aceleración es cero.
135. **Valor absoluto** Calcule la derivada de  $f(x) = x|x|$ . ¿Existe  $f''(0)$ ? (Sugerencia: Vuelva a escribir la función como una función por partes y luego derive cada parte.)
136. **Piénselo** Sean  $f$  y  $g$  funciones cuyas respectivas primera y segunda derivadas existen sobre el intervalo  $I$ . ¿Cuál de las siguientes fórmulas es verdadera?
- (a)  $fg'' - f''g = (fg' - f'g)'$       (b)  $fg'' + f''g = (fg)''$
137. **Demostración** Utilice la regla del producto dos veces para demostrar que si  $f, g$  y  $h$  son funciones derivables de  $x$ , entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$



Eje 1:  $y$  re  
Eje 2:  $u$  re  
Eje 3:  $x$  re  
Figura 4.

## 4.4 La regla de la cadena

- Encontrar la derivada de una función compuesta por la regla de la cadena.
- Encontrar la derivada de una función por la regla general de la potencia.
- Simplificar la derivada de una función por técnicas algebraicas.
- Aplicar la regla de la cadena a funciones trigonométricas.

### La regla de la cadena

Ahora es tiempo de analizar una de las reglas de derivación más potentes, la **regla de la cadena**. Ésta se aplica a las funciones compuestas y añade versatilidad a las reglas analizadas en las dos secciones precedentes. Por ejemplo, al comparar las funciones que se muestran a continuación: las de la izquierda se pueden derivar sin la regla de la cadena, mientras que las de la derecha se derivan mejor con dicha regla.

#### Sin la regla de la cadena

$$y = x^2 + 1$$

$$y = \text{sen } x$$

$$y = 3x + 2$$

$$y = x + \tan x$$

#### Con la regla de la cadena

$$y = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$y = \text{sen } 6x$$

$$y = (3x + 2)^5$$

$$y = x + \tan x^2$$

En esencia, la regla de la cadena establece que si  $y$  cambia  $dy/du$  veces más rápido que  $u$ , mientras que  $u$  cambia  $du/dx$  veces más rápido que  $x$ , entonces  $y$  cambia  $(dy/du)(du/dx)$  veces más rápido que  $x$ .

#### EJEMPLO 1

#### Derivar una función compuesta

Un juego de engranes está construido, como se muestra en la figura 4.24, de forma que el segundo y el tercer engranes giran sobre un eje común. Cuando gira el primer engrane, impulsa al segundo y este a su vez al tercero. Sean  $y$ ,  $u$  y  $x$  los números de revoluciones por minuto del primero, segundo y tercer ejes, respectivamente. Encuentre  $dy/du$ ,  $du/dx$  y  $dy/dx$ , y demuestre que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

**Solución** Puesto que la circunferencia del segundo engranaje es tres veces mayor que la del primero, el primer eje debe dar tres vueltas para que el segundo complete una: del mismo modo, el segundo eje debe dar dos vueltas para que el tercero complete una y, por tanto, se puede escribir

$$\frac{dy}{du} = 3 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx} = 2.$$

Combinando ambos resultados, se sabe que el primer eje debe dar seis vueltas para hacer girar una vez al tercer eje. Por lo que

$$\frac{dy}{dx} = \begin{array}{l} \text{Razón de cambio del primer} \\ \text{eje con respecto al segundo} \end{array} \cdot \begin{array}{l} \text{Razón de cambio del segundo} \\ \text{eje con respecto al tercero} \end{array}$$

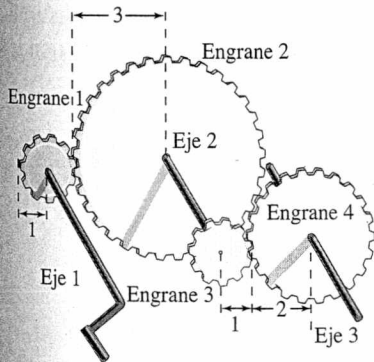
$$= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 3 \cdot 2$$

$$= 6$$

$$= \begin{array}{l} \text{Razón de cambio del primer} \\ \text{eje con respecto al tercero} \end{array}$$

En otras palabras, la razón de cambio de  $y$  respecto a  $x$  es igual al producto de la razón de cambio de  $y$  con respecto a  $u$  multiplicado por el de  $u$  con respecto a  $x$ .



Eje 1:  $y$  revoluciones por minuto  
Eje 2:  $u$  revoluciones por minuto  
Eje 3:  $x$  revoluciones por minuto

Figura 4.24

**Exploración**

**Aplicación de la regla de la cadena** Cada una de las siguientes funciones se pueden derivar utilizando las reglas de derivación estudiadas en las secciones 4.2 y 4.3. Calcular la derivada de cada función utilizando dichas reglas. Luego encontrar la derivada utilizando la regla de la cadena. Comparar los resultados. ¿Cuál de los dos métodos es más sencillo?

- a.  $\frac{2}{3x + 1}$
- b.  $(x + 2)^3$
- c.  $\sin 2x$

El ejemplo 1 ilustra un caso simple de la regla de la cadena. Su enunciado general es el siguiente teorema.

**TEOREMA 4.10 La regla de la cadena**

Si  $y = f(u)$  es una función derivable de  $u$  y además  $u = g(x)$  es una función derivable de  $x$ , entonces  $y = f(g(x))$  es una función derivable de  $x$  y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

o, su equivalente

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x).$$

**Demostración** Sea  $h(x) = f(g(x))$ . Usando la forma alternativa de la derivada, necesita demostrar que, para  $x = c$ ,

$$h'(c) = f'(g(c))g'(c).$$

Un aspecto importante en esta demostración es el comportamiento de  $g$  cuando  $x$  tiende a  $c$ . Se presentan dificultades cuando existen valores de  $x$ , distintos de  $c$ , tales que

$$g(x) = g(c).$$

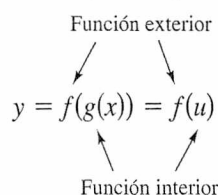
En el apéndice A se explica cómo utilizar la derivabilidad de  $f$  y  $g$  para superar este problema. Por ahora, suponga que  $g(x) \neq g(c)$  para valores de  $x$  distintos de  $c$ . En las demostraciones de las reglas del producto y del cociente sumó y restó una misma cantidad. Ahora recurrirá a un truco similar, multiplicar y dividir por una misma cantidad (distinta de cero). Observe que, como  $g$  es derivable, también es continua, por lo que  $g(x)$  tiende a  $g(c)$  cuando  $x$  tiende a  $c$ .

..... ▷  
**COMENTARIO** La forma alternativa del límite de la derivada se da al final de la sección 4.1.

$$\begin{aligned} h'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} && \text{Forma alterna de la derivada} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} \cdot \frac{g(x) - g(c)}{g(x) - g(c)} \right], \quad g(x) \neq g(c) \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right] \\ &= \left[ \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \right] \left[ \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right] \\ &= f'(g(c))g'(c) \end{aligned}$$

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

Al aplicar la regla de la cadena, es útil considerar que la función compuesta  $f \circ g$  está constituida por dos partes: una interior y otra exterior.



La derivada de  $y = f(u)$  es la derivada de la función exterior (en la función interior  $u$ ) multiplicada por la derivada de la función interior.

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

.....  
**COM**  
 plo 3 t  
 sin hac  
 cadena  
 y  
 y  
 y'  
 Compi  
 es la m  
 ¿Qué r  
 encont

$$\frac{d}{dx}$$

**EJEMPLO 2****Descomponer una función compuesta**

$y = f(g(x))$	$u = g(x)$	$y = f(u)$
a. $y = \frac{1}{x+1}$	$u = x+1$	$y = \frac{1}{u}$
b. $y = \sin 2x$	$u = 2x$	$y = \sin u$
c. $y = \sqrt{3x^2 - x + 1}$	$u = 3x^2 - x + 1$	$y = \sqrt{u}$
d. $y = \tan^2 x$	$u = \tan x$	$y = u^2$

**EJEMPLO 3****Aplicar la regla de la cadena**Encuentre  $dy/dx$ 

$$y = (x^2 + 1)^3.$$

**Solución** Para esta función, considere que la función interior es  $u = x^2 + 1$  y la función exterior es  $y = u^3$ . Por medio de la regla de la cadena obtiene

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2 + 1)^2(2x) = 6x(x^2 + 1)^2.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{dy}{du}} \quad \underbrace{\hspace{5em}}_{\frac{du}{dx}}$

**La regla general de la potencia**

La función del ejemplo 3 es uno de los tipos más comunes de funciones compuestas,  $y = [u(x)]^n$ . La regla para derivar estas funciones se llama **regla general de la potencia**, y no es sino un caso particular de la regla de la cadena.

**TEOREMA 4.11 La regla general de la potencia**

Si  $y = [u(x)]^n$ , donde  $u$  es una función derivable de  $x$  y  $n$  es un número racional, entonces

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1} \frac{du}{dx}$$

o su equivalente

$$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'.$$

**Demostración** Puesto que  $y = [u(x)]^n = u^n$ , aplique la regla de la cadena para obtener

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) \\ &= \frac{d}{du}[u^n] \frac{du}{dx}. \end{aligned}$$

Por medio de la regla (simple) de la potencia estudiada en la sección 4.2, tiene  $D_u[u^n] = nu^{n-1}$ , y puede deducir que

$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}.$$

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

**COMENTARIO** El ejemplo 3 también se puede resolver sin hacer uso de la regla de la cadena, si se observa que

$$y = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$$

y

$$y' = 6x^5 + 12x^3 + 6x.$$

Compruebe que esta derivada es la misma que la del ejemplo 3. ¿Qué método utilizaría para encontrar

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 1)^{50}?$$

**EJEMPLO 4** Aplicar la regla general de la potencia

Encuentre la derivada de  $f(x) = (3x - 2x^2)^3$ .

**Solución** Sea  $u = 3x - 2x^2$ . Entonces

$$f(x) = (3x - 2x^2)^3 = u^3$$

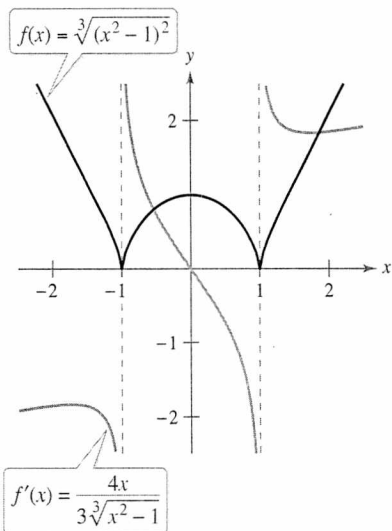
y, mediante la regla general de la potencia, la derivada es

$$f'(x) = \underbrace{3}_{n} \underbrace{(3x - 2x^2)^2}_{u^{n-1}} \underbrace{\frac{d}{dx}[3x - 2x^2]}_{u'}$$

Aplique la regla general de la potencia.

$$= 3(3x - 2x^2)^2(3 - 4x).$$

Derive  $3x - 2x^2$ .



La derivada de  $f$  es 0 en  $x = 0$  y no está definida en  $x = \pm 1$ .

Figura 4.25

**EJEMPLO 5** Derivar funciones radicales

Encuentre los puntos de la gráfica de

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$$

en los que  $f'(x) = 0$  y aquellos en los que  $f'(x)$  no existe.

**Solución** Reescriba la función como

$$f(x) = (x^2 - 1)^{2/3}.$$

Aplique ahora la regla general de las potencias (con  $u = x^2 - 1$ ), para obtener

$$f'(x) = \underbrace{2}_{n} \underbrace{(x^2 - 1)^{-1/3}}_{u^{n-1}} \underbrace{(2x)}_{u'}$$

Aplique la regla general de las potencias.

$$= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$

Expresé en forma radical.

De manera que  $f'(x) = 0$  cuando  $x = 0$  y  $f'(x)$  no existe en  $x = \pm 1$ , como se muestra en la figura 4.25.

**EJEMPLO 6** Derivar cocientes con numeradores constantes

Derive la función

$$g(t) = \frac{-7}{(2t - 3)^2}.$$

**Solución** Para empezar, reescriba la función como

$$g(t) = -7(2t - 3)^{-2}.$$

Después, con la regla general de la potencia (con  $u = 2t - 3$ ) se tiene

$$g'(t) = \underbrace{(-7)}_{\text{Regla del múltiplo constante}} \underbrace{(-2)}_{n} \underbrace{(2t - 3)^{-3}}_{u^{n-1}} \underbrace{(2)}_{u'}$$

Aplique la regla general de la potencia.

$$= 28(2t - 3)^{-3}$$

Simplifique.

$$= \frac{28}{(2t - 3)^3}.$$

Expresé con exponente positivo.

••• **COMENTARIO** Intente derivar la función del ejemplo 6 usando la regla del cociente. El resultado será el mismo, pero el método es menos eficiente que la regla general de la potencia.

▷ **TEC**  
 • herra  
 • con c  
 • capa  
 • muy  
 • suele  
 • en fo  
 • cuen  
 • ese ti  
 • deriv  
 • los e  
 • comp  
 • dado

## Simplificación de derivadas

Los siguientes tres ejemplos ponen de manifiesto algunas técnicas para simplificar las derivadas de funciones que involucran productos, cocientes y composiciones.

### EJEMPLO 7

#### Simplificar por factorización de la potencia mínima

Calcule la derivada de  $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$ .

#### Solución

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\sqrt{1-x^2} \\ &= x^2(1-x^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Escriba la función original.

Reescriba.

$$f'(x) = x^2 \frac{d}{dx} [(1-x^2)^{1/2}] + (1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} [x^2]$$

Regla del producto

$$= x^2 \left[ \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) \right] + (1-x^2)^{1/2}(2x)$$

Regla general de la potencia

$$= -x^3(1-x^2)^{-1/2} + 2x(1-x^2)^{1/2}$$

Simplifique.

$$= x(1-x^2)^{-1/2}[-x^2(1) + 2(1-x^2)]$$

Factorice.

$$= \frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Simplifique.

### EJEMPLO 8

#### Simplificar la derivada de un cociente

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}}$$

Función original

$$= \frac{x}{(x^2+4)^{1/3}}$$

Reescriba.

$$f'(x) = \frac{(x^2+4)^{1/3}(1) - x(1/3)(x^2+4)^{-2/3}(2x)}{(x^2+4)^{2/3}}$$

Regla del cociente

$$= \frac{1}{3}(x^2+4)^{-2/3} \left[ \frac{3(x^2+4) - (2x^2)(1)}{(x^2+4)^{2/3}} \right]$$

Factorice.

$$= \frac{x^2+12}{3(x^2+4)^{4/3}}$$

Simplifique.

### EJEMPLO 9

#### Simplificar la derivada de una potencia

•••► Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

$$y = \left( \frac{3x-1}{x^2+3} \right)^2$$

Función original

$$\begin{array}{c} n \quad u^{n-1} \quad u' \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}} \end{array}$$

$$y' = 2 \left( \frac{3x-1}{x^2+3} \right) \frac{d}{dx} \left[ \frac{3x-1}{x^2+3} \right]$$

Regla general de la potencia

$$= \left[ \frac{2(3x-1)}{x^2+3} \right] \left[ \frac{(x^2+3)(3) - (3x-1)(2x)}{(x^2+3)^2} \right]$$

Regla del cociente

$$= \frac{2(3x-1)(3x^2+9-6x^2+2x)}{(x^2+3)^3}$$

Multiplique.

$$= \frac{2(3x-1)(-3x^2+2x+9)}{(x^2+3)^3}$$

Simplifique.

- **TECNOLOGÍA** Las herramientas de graficación con derivación simbólica son capaces de derivar funciones muy complicadas. No obstante, suelen presentar el resultado en forma no simplificada. Si cuenta con una herramienta de ese tipo, úsela para calcular las derivadas de las funciones de los ejemplos 7, 8 y 9. Luego compare los resultados con los dados en estos ejemplos.

### Funciones trigonométricas y la regla de la cadena

A continuación se muestran las “versiones de la regla de la cadena” correspondientes a las derivadas de las funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\sin u] &= (\cos u)u' & \frac{d}{dx}[\cos u] &= -(\sin u)u' \\ \frac{d}{dx}[\tan u] &= (\sec^2 u)u' & \frac{d}{dx}[\cot u] &= -(\csc^2 u)u' \\ \frac{d}{dx}[\sec u] &= (\sec u \tan u)u' & \frac{d}{dx}[\csc u] &= -(\csc u \cot u)u' \end{aligned}$$

#### EJEMPLO 10 Aplicar la regla de la cadena a funciones trigonométricas

a.  $y = \sin 2x$   $y' = \cos 2x \frac{d}{dx}[2x] = (\cos 2x)(2) = 2 \cos 2x$

b.  $y = \cos(x - 1)$   $y' = -\sin(x - 1) \frac{d}{dx}[x - 1] = -\sin(x - 1)$

c.  $y = \tan 3x$   $y' = \sec^2 3x \frac{d}{dx}[3x] = (\sec^2 3x)(3) = 3 \sec^2(3x)$

Asegúrese de entender los convenios matemáticos que afectan a los paréntesis y las funciones trigonométricas. Así, en el ejemplo 10(a), se escribe  $\sin 2x$ , que significa  $\sin(2x)$ .

#### EJEMPLO 11 Paréntesis y funciones trigonométricas

a.  $y = \cos 3x^2 = \cos(3x^2)$   $y' = (-\sin 3x^2)(6x) = -6x \sin 3x^2$

b.  $y = (\cos 3)x^2$   $y' = (\cos 3)(2x) = 2x \cos 3$

c.  $y = \cos(3x)^2 = \cos(9x^2)$   $y' = (-\sin 9x^2)(18x) = -18x \sin 9x^2$

d.  $y = \cos^2 x = (\cos x)^2$   $y' = 2(\cos x)(-\sin x) = -2 \cos x \sin x$

e.  $y = \sqrt{\cos x} = (\cos x)^{1/2}$   $y' = \frac{1}{2}(\cos x)^{-1/2}(-\sin x) = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

Para calcular la derivada de una función con la forma  $k(x) = f(g(h(x)))$ , es necesario que aplique la regla de la cadena dos veces, como se ilustra en el ejemplo 12.

#### EJEMPLO 12 Aplicación reiterada de la regla de la cadena

$f(t) = \sin^3 4t$	Función original
$= (\sin 4t)^3$	Reescriba.
$f'(t) = 3(\sin 4t)^2 \frac{d}{dt}[\sin 4t]$	Aplique la regla de la cadena por primera vez.
$= 3(\sin 4t)^2(\cos 4t) \frac{d}{dt}[4t]$	Aplique la regla de la cadena por segunda vez.
$= 3(\sin 4t)^2(\cos 4t)(4)$	
$= 12 \sin^2 4t \cos 4t$	Simplifique.



Figura 4.

RESU  
Regla

Deriv  
algeb  
Deriv  
trigon

Regla

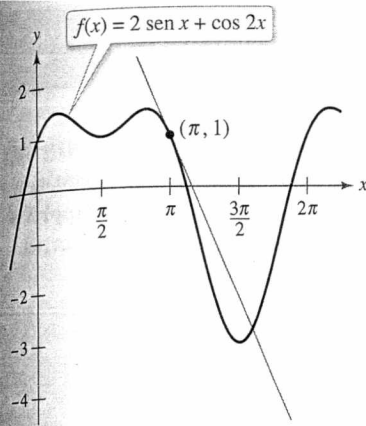


Figura 4.26

**EJEMPLO 13** Recta tangente a una función trigonométrica

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$  en el punto  $(\pi, 1)$ , como se muestra en la figura 4.26. A continuación, determine todos los valores de  $x$  sobre el intervalo  $(0, 2\pi)$  en los que la gráfica de  $f$  tiene una tangente horizontal.

**Solución** Comience por encontrar  $f'(x)$ .

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$$

Escriba la función original.

$$f'(x) = 2 \cos x + (-\operatorname{sen} 2x)(2)$$

Aplique la regla de la cadena a  $\cos 2x$ .

$$= 2 \cos x - 2 \operatorname{sen} 2x$$

Simplifique.

Para encontrar la ecuación de la recta tangente en  $(\pi, 1)$ , evalúe  $f'(\pi)$ .

$$f'(\pi) = 2 \cos \pi - 2 \operatorname{sen} 2\pi$$

Sustituya.

$$= -2$$

Pendiente de la gráfica en  $(\pi, 1)$

Ahora utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, escriba

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Forma punto-pendiente

$$y - 1 = -2(x - \pi)$$

Sustituya  $y_1, m$  y  $x_1$ .

$$y = 1 - 2x + 2\pi.$$

Ecuación de la recta tangente en  $(\pi, 1)$

Puede determinar que  $f'(x) = 0$  cuando  $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$  y  $\frac{3\pi}{2}$ . De tal modo,  $f$  tiene una tangente horizontal en  $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$  y  $\frac{3\pi}{2}$ .

Esta sección concluye con un resumen de las reglas de derivación estudiadas hasta este momento. Para adquirir mayor práctica en derivación, debe aprender cada regla con palabras, no con símbolos. Como ayuda para la memorización, considere que las cofunciones (coseno, cotangente y cosecante) tienen un signo menos como parte de sus derivadas.

**RESUMEN DE REGLAS DE DERIVACIÓN**

**Reglas generales de derivación** Sean  $f, g$  y  $u$  funciones derivables de  $x$ .

*Regla de múltiplo constante*

$$\frac{d}{dx}[cf] = cf'$$

*Regla de la suma o de la resta:*

$$\frac{d}{dx}[f \pm g] = f' \pm g'$$

*Regla del producto:*

$$\frac{d}{dx}[fg] = fg' + gf'$$

*Regla del cociente:*

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

**Derivadas de funciones algebraicas**

*Regla de la constante:*

$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

*Regla simple de la potencia:*

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}[x] = 1$$

**Derivadas de funciones trigonométricas**

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\operatorname{csc}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{csc} x] = -\operatorname{csc} x \cot x$$

**Regla de la cadena**

*Regla de la cadena*

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u) u'$$

*Regla general de la potencia:*

$$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1} u'$$

# 4.4 Ejercicios

Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Descomponer una función compuesta** En los ejercicios 1-6, complete la tabla.

$y = f(g(x))$	$u = g(x)$	$y = f(u)$
1. $y = (5x - 8)^4$		
2. $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$		
3. $y = \sqrt{x^3 - 7}$		
4. $y = 3 \tan(\pi x^2)$		
5. $y = \csc^3 x$		
6. $y = \sin \frac{5x}{2}$		

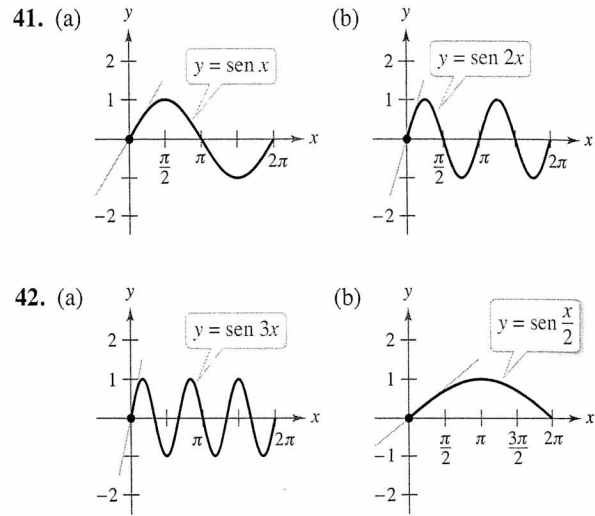
**Encontrar la derivada** En los ejercicios 7-34, encuentre la derivada de la función.

- |   |   |
|---|---|
| 7. $y = (4x - 1)^3$                               | 8. $y = 5(2 - x^3)^4$                               |
| 9. $g(x) = 3(4 - 9x)^4$                           | 10. $f(t) = (9t + 2)^{2/3}$                         |
| 11. $f(t) = \sqrt{5 - t}$                         | 12. $g(x) = \sqrt{4 - 3x^2}$                        |
| 13. $y = \sqrt[3]{6x^2 + 1}$                      | 14. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 2}$                    |
| 15. $y = 2\sqrt[4]{9 - x^2}$                      | 16. $f(x) = \sqrt[3]{12x - 5}$                      |
| 17. $y = \frac{1}{x - 2}$                         | 18. $s(t) = \frac{1}{4 - 5t - t^2}$                 |
| 19. $f(t) = \left(\frac{1}{t - 3}\right)^2$       | 20. $y = -\frac{3}{(t - 2)^4}$                      |
| 21. $y = \frac{1}{\sqrt{3x + 5}}$                 | 22. $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2}}$               |
| 23. $f(x) = x^2(x - 2)^4$                         | 24. $f(x) = x(2x - 5)^3$                            |
| 25. $y = x\sqrt{1 - x^2}$                         | 26. $y = \frac{1}{2}x^2\sqrt{16 - x^2}$             |
| 27. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$                | 28. $y = \frac{x}{\sqrt{x^4 + 4}}$                  |
| 29. $g(x) = \left(\frac{x + 5}{x^2 + 2}\right)^2$ | 30. $h(t) = \left(\frac{t^2}{t^3 + 2}\right)^2$     |
| 31. $f(v) = \left(\frac{1 - 2v}{1 + v}\right)^3$  | 32. $g(x) = \left(\frac{3x^2 - 2}{2x + 3}\right)^3$ |
| 33. $f(x) = ((x^2 + 3)^5 + x)^2$                  | 34. $g(x) = (2 + (x^2 + 1)^4)^3$                    |

**Cal** **Encontrar una derivada usando tecnología** En los ejercicios 35-40, utilice un sistema algebraico por computadora para encontrar la derivada de la función. Utilice el mismo mecanismo para representar gráficamente la función y su derivada en el mismo plano cartesiano. Describa el comportamiento de la función que corresponde a cualquier cero de la gráfica de la derivada.

- |  |  |
|--|--|
| 35. $y = \frac{\sqrt{x} + 1}{x^2 + 1}$ | 36. $y = \sqrt{\frac{2x}{x + 1}}$        |
| 37. $y = \sqrt{\frac{x + 1}{x}}$       | 38. $g(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}$ |
| 39. $y = \frac{\cos \pi x + 1}{x}$     | 40. $y = x^2 \tan \frac{1}{x}$           |

**Pendiente de una recta tangente** En los ejercicios 41 y 42, calcule la pendiente de la recta tangente a la función seno en el origen. Compare este valor con el número de ciclos completos en el intervalo  $[0, 2\pi]$ . ¿Cuál es su conclusión respecto a la pendiente de una función  $\sin ax$  en el origen?



**Encontrar la derivada** En los ejercicios 43-64, encuentre la derivada de la función.

- |  |   |
|--|---|
| 43. $y = \cos 4x$                            | 44. $y = \sin \pi x$  |
| 45. $g(x) = 5 \tan 3x$                       | 46. $h(x) = \sec x^2$   |
| 47. $y = \sin(\pi x)^2$                      | 48. $y = \cos(1 - 2x)^2$  |
| 49. $h(x) = \sin 2x \cos 2x$                 | 50. $g(\theta) = \sec\left(\frac{1}{2}\theta\right) \tan\left(\frac{1}{2}\theta\right)$ |
| 51. $f(x) = \frac{\cot x}{\sin x}$           | 52. $g(v) = \frac{\cos v}{\csc v}$  |
| 53. $y = 4 \sec^2 x$                         | 54. $g(t) = 5 \cos^2 \pi t$   |
| 55. $f(\theta) = \tan^2 5\theta$             | 56. $g(\theta) = \cos^2 8\theta$  |
| 57. $f(\theta) = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta$ | 58. $h(t) = 2 \cot^2(\pi t + 2)$  |
| 59. $f(t) = 3 \sec^2(\pi t - 1)$             | 60. $y = 3x - 5 \cos(\pi x)^2$  |
| 61. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{4} \sin(2x)^2$  | 62. $y = \sin \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x}$   |
| 63. $y = \sin(\tan 2x)$                      | 64. $y = \cos \sqrt{\sin(\tan \pi x)}$  |

**Evaluar una derivada** En los ejercicios 65-72, encuentre y evalúe la derivada de la función en el punto indicado. Utilice una herramienta de graficación para verificar los resultados.

- |  |   |
|--|---|
| 65. $y = \sqrt{x^2 + 8x}$ , (1, 3)                                   | 66. $y = \sqrt[3]{3x^3 + 4x}$ , (2, 2)  |
| 67. $f(x) = \frac{5}{x^3 - 2}$ , $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$     |   |
| 68. $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 3x)^2}$ , $\left(4, \frac{1}{16}\right)$ |   |
| 69. $f(t) = \frac{3t + 2}{t - 1}$ , (0, -2)                          | 70. $f(x) = \frac{x + 4}{2x - 5}$ , (9, 1)  |
| 71. $y = 26 - \sec^3 4x$ , (0, 25)                                   | 72. $y = \frac{1}{x} + \sqrt{\cos x}$ , $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{\pi}\right)$ |

Encontrar los ejercicios 73-74 gráficas de la derivada en ese punto derivative  
 73.  $f(x) =$   
 75.  $y =$   
 77.  $f(x) =$   
 79.  $f(x) =$   
 Curvas función de la recta utilice un y su recta  
 81. Mitac

83. Rec en el  $f(x)$  tiene  
 84. Rec los  $f(x)$  tiene  
 Determinar encuentre  
 85.  $f(x)$   
 87.  $f(x)$   
 89.  $f(x)$   
 Evaluar evalúe los Utilice u resultados  
 91.  $h(x)$   
 93.  $f(x)$

**Encontrar la ecuación de una recta tangente** En los ejercicios 73-80: (a) encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto que se indica, (b) utilice una herramienta de graficación para representar la función y la recta tangente en ese punto y (c) verifique los resultados empleando la función *derivative* de su herramienta de graficación.

73.  $f(x) = \sqrt{2x^2 - 7}$ , (4, 5)

74.  $f(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{x^2 + 5}$ , (2, 2)

75.  $y = (4x^3 + 3)^2$ , (-1, 1)

76.  $f(x) = (9 - x^2)^{2/3}$ , (1, 4)

77.  $f(x) = \text{sen } 2x$ , ( $\pi$ , 0)

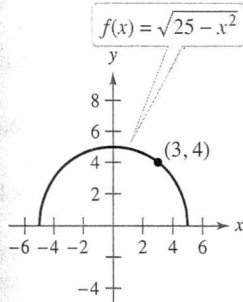
78.  $y = \text{cos } 3x$ , ( $\frac{\pi}{4}$ ,  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ )

79.  $f(x) = \tan^2 x$ , ( $\frac{\pi}{4}$ , 1)

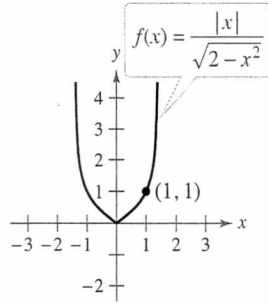
80.  $y = 2 \tan^3 x$ , ( $\frac{\pi}{4}$ , 2)

**Curvas famosas** En los ejercicios 81 y 82, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica del punto dado. Después utilice una herramienta de graficación para dibujar la función y su recta tangente en la misma ventana.

81. Mitad superior del círculo



82. Curva nariz de bala



83. **Recta tangente horizontal** Determine el (los) punto(s) en el intervalo  $(0, 2\pi)$  en los que la gráfica de

$f(x) = 2 \cos x + \text{sen } 2x$

tiene una tangente horizontal.

84. **Recta tangente horizontal** Determine el (los) punto(s) en los que la gráfica de

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x - 1}}$

tiene una tangente horizontal

**Determinar una segunda derivada** En los ejercicios 85-90, encuentre la segunda derivada de la función.

85.  $f(x) = 5(2 - 7x)^4$

86.  $f(x) = 6(x^3 + 4)^3$

87.  $f(x) = \frac{1}{x - 6}$

88.  $f(x) = \frac{8}{(x - 2)^2}$

89.  $f(x) = \text{sen } x^2$

90.  $f(x) = \text{sec}^2 \pi x$

**Evaluar una segunda derivada** En los ejercicios 91-94, evalúe la segunda derivada de la función en el punto dado. Utilice una herramienta de graficación para verificar los resultados.

91.  $h(x) = \frac{1}{9}(3x + 1)^3$ , ( $1, \frac{64}{9}$ )

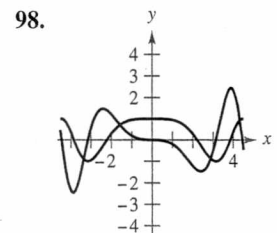
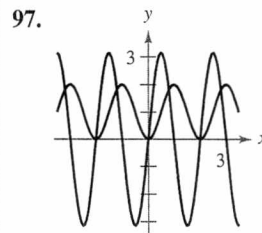
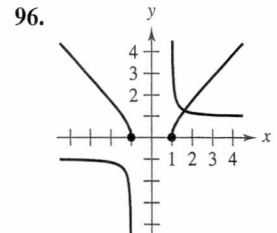
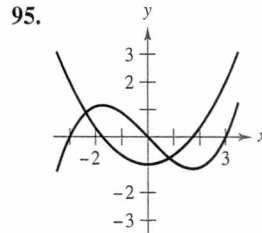
92.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 4}}$ , ( $0, \frac{1}{2}$ )

93.  $f(x) = \text{cos } x^2$ , (0, 1)

94.  $g(t) = \tan 2t$ , ( $\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}$ )

**DESARROLLO DE CONCEPTOS**

**Identificar gráficas** En los ejercicios 95-98, se muestran las gráficas de una función  $f$  y su derivada  $f'$ . Clasifique las gráficas según correspondan a  $f$  o  $f'$  y escriba en un breve párrafo los criterios que utilizó para hacer la selección. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite [MathGraphs.com](http://MathGraphs.com).



**Describir la relación** En los ejercicios 99 y 100 se da la relación que existe entre  $f$  y  $g$ . Explique la relación entre  $f'$  y  $g'$ .

99.  $g(x) = f(3x)$

100.  $g(x) = f(x^2)$

101. **Piénselo** La tabla muestra algunos valores de la derivada de una función desconocida  $f$ . Complete la tabla encontrando, si es posible, la derivada de cada una de las siguientes transformaciones de  $f$ .

- (a)  $g(x) = f(x) - 2$
- (b)  $h(x) = 2f(x)$
- (c)  $r(x) = f(-3x)$
- (d)  $s(x) = f(x + 2)$

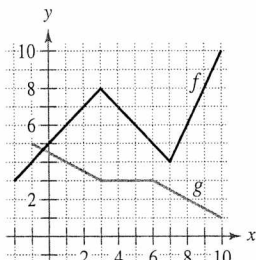
$x$	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	4	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-2	-4
$g'(x)$						
$h'(x)$						
$r'(x)$						
$s'(x)$						

102. **Usar relaciones** Dado que  $g(5) = -3$ ,  $g'(5) = 6$ ,  $h(5) = 3$  y  $h'(5) = -2$ , encuentre  $f'(5)$  si es posible para cada una de las siguientes funciones. Si no es posible, establezca la información adicional que se requiere.

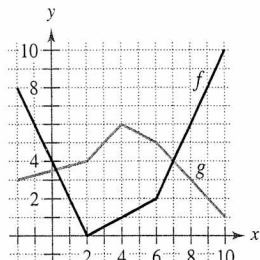
- (a)  $f(x) = g(x)h(x)$
- (b)  $f(x) = g(h(x))$
- (c)  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$
- (d)  $f(x) = [g(x)]^3$

**Calcular derivadas** En los ejercicios 103 y 104, se muestran las gráficas de  $f$  y  $g$ . Sea  $h(x) = f(g(x))$  y  $s(x) = g(f(x))$ . Calcule las derivadas, si es que existen. Si las derivadas no existen, explique por qué.

103. (a) Encuentre  $h'(1)$ .  
 (b) Encuentre  $s'(5)$ .



104. (a) Encuentre  $h'(3)$ .  
 (b) Encuentre  $s'(9)$ .



105. **Efecto Doppler** La frecuencia  $F$  de la sirena de un carro de bomberos oída por un observador en reposo está dada por

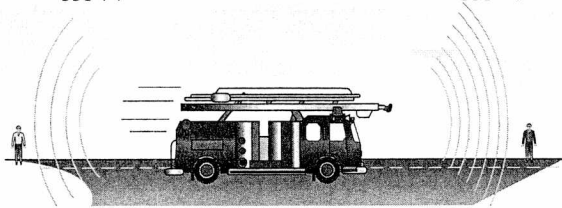
$$F = \frac{132,400}{331 \pm v}$$

donde  $\pm v$  representa la velocidad del carro de bomberos (observe la figura). Calcule la razón de cambio de  $F$  respecto de  $v$  cuando

- (a) el carro se acerca a una velocidad de 30 m/s (use  $-v$ ).  
 (b) el carro se aleja a una velocidad de 30 m/s (use  $+v$ ).

$$F = \frac{132,400}{331 + v}$$

$$F = \frac{132,400}{331 - v}$$



106. **Movimiento armónico** El desplazamiento de su posición de equilibrio para un objeto en movimiento armónico situado al extremo de un resorte es

$$y = \frac{1}{3} \cos 12t - \frac{1}{4} \sin 12t$$

donde  $y$  se mide en pies y  $t$  en segundos. Determine la posición y la velocidad del objeto cuando  $t = \pi/8$

107. **Péndulo** Un péndulo de 15 cm se mueve según la ecuación  $\theta = 0.2 \cos 8t$ , donde  $\theta$  es el desplazamiento angular de la vertical en radianes y  $t$  es el tiempo en segundos. Calcule el máximo desplazamiento angular y la razón de cambio de  $\theta$  cuando  $t = 3$  segundos.

108. **Movimiento ondulatorio** Una boya oscila con movimiento armónico simple dado por  $y = A \cos \omega t$ , mientras las olas pasan por ella. La boya se mueve verticalmente, desde el punto más bajo hasta el más alto, un total de 3.5 pies. Cada 10 segundos regresa a su punto de máxima altura.

- (a) Escriba una ecuación que explique el movimiento de esa boya si está en su máxima altura cuando  $t = 0$ .  
 (b) Calcule la velocidad de la boya en función de  $t$ .

109. **Modelar datos** En la siguiente tabla se muestra la temperatura máxima promedio (en grados Fahrenheit) correspondiente a la ciudad de Chicago, Illinois. (Fuente: National Oceanic and Atmospheric Administration)

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr
Temperatura	29.6	34.7	46.1	58.0

Mes	May	Jun	Jul	Ago
Temperatura	69.9	79.2	83.5	81.2

Mes	Sep	Oct	Nov	Dic
Temperatura	73.9	62.1	47.1	34.4

- (a) Utilice una herramienta de graficación para representar los datos y encontrar un modelo para esos datos con la forma

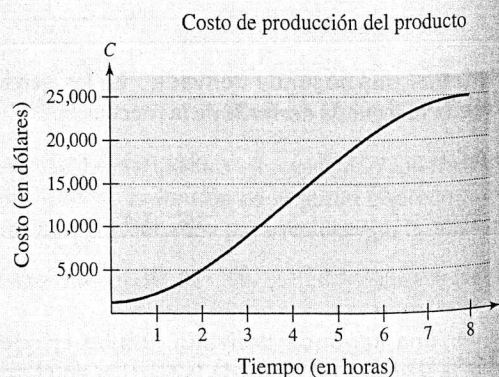
$$T(t) = a + b \sin(ct - d)$$

donde  $T$  es la temperatura y  $t$  el tiempo en meses, con  $t = 1$  correspondiente al mes de enero.

- (b) Represente el modelo en la herramienta de graficación. ¿Ajusta bien a los datos?  
 (c) Encuentre  $T'$  y utilice la herramienta de graficación para representar la derivada.  
 (d) Con base en la gráfica de la derivada, ¿cuándo cambia la temperatura de manera más rápida? ¿Y más lenta? ¿Coinciden las respuestas con las observaciones experimentales? Explique su respuesta.



110. **¿CÓMO LO VE?** El costo  $C$  (en dólares) de producción de  $x$  unidades de un artículo es  $C = 60x + 1350$ . Durante una semana, la gerencia observó que el número de  $x$  unidades producidas a lo largo de  $t$  horas puede ser modelado por la gráfica por  $x = -1.6t^3 + 19t^2 - 0.5t - 1$ . En la gráfica se muestra el costo  $C$  en términos del tiempo  $t$ .



- (a) Utilice la gráfica, ¿cuál es mayor, la velocidad de cambio del costo después de 1 hora, o la velocidad de cambio de costo después de 4 horas?  
 (b) Explique por qué la función de costo no se incrementa con una razón constante durante el turno de 8 horas.

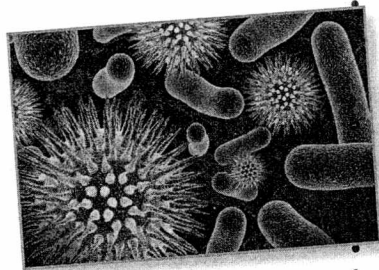
11. El se :  
 N :  
 En :  
 raz :  
 de :  
 cua :  
 (b) :  
 (d) :  
 (f) :  
 cor :  
 112. De :  
 pué :  
 cua :  
 (a) :  
 (b) :  
 (c) :  
 113. Bú :  
 una :  
 (a) :  
 (b) :  
 (c) :  
 114. Co :  
 (a) :  
 (b) :  
 115. Pié :  
 y g :  
 (b) :  
 116. Us :

111. **Biología**

El número  $N$  de bacterias en un cultivo después de  $t$  días se modela por

$$N = 400 \left[ 1 - \frac{3}{(t^2 + 2)^2} \right]$$

Encuentre las razones de cambio de  $N$  con respecto a  $t$  cuando (a)  $t = 0$ , (b)  $t = 1$ , (c)  $t = 2$ , (d)  $t = 3$  y (e)  $t = 4$ . (f) ¿Qué puede concluir?



112. **Depreciación** El valor  $V$  de una máquina de  $t$  años después de su adquisición es inversamente proporcional a la raíz cuadrada  $t + 1$ . El valor inicial de la máquina es de \$10,000.

- (a) Escriba  $V$  como una función de  $t$ .
- (b) Encuentre la razón de la depreciación cuando  $t = 1$ .
- (c) Encuentre la razón de la depreciación cuando  $t = 3$ .

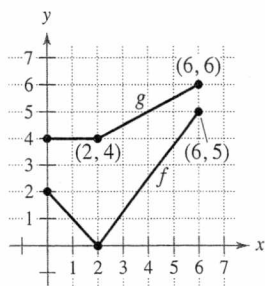
113. **Búsqueda de un patrón** Sea  $f(x) = \sin \beta x$ , donde  $\beta$  es una constante.

- (a) Calcule las cuatro primeras derivadas de la función.
- (b) Verifique que la función y su segunda derivada satisfacen la ecuación  $f''(x) + \beta^2 f(x) = 0$ .
- (c) Utilice los resultados del inciso (a) para desarrollar fórmulas generales para las derivadas de orden par e impar  $f^{(2k)}(x)$  y  $f^{(2k-1)}(x)$ . [Sugerencia:  $(-1)^k$  es positivo si  $k$  es par y negativo si  $k$  es impar.]

114. **Conjetura** Sea  $f$  una función derivable de periodo  $p$ .

- (a) ¿La función  $f'$  es periódica? Verifique su respuesta.
- (b) Considere la función  $g(x) = f(2x)$ , ¿la función  $g'(x)$  es periódica? Verifique su respuesta.

115. **Piénselo** Sean  $r(x) = f(g(x))$  y  $s(x) = g(f(x))$ , donde  $f$  y  $g$  se muestran en la figura adjunta. Calcule (a)  $r'(1)$  y (b)  $s'(4)$ .



116. **Usar las funciones trigonométricas**

- (a) Encuentre la derivada de  $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$  de dos maneras distintas.
- (b) Para  $f(x) = \sec^2 x$  y  $g(x) = \tan^2 x$ , demuestre que  $f'(x) = g'(x)$ .

117. **Funciones par e impar**

- (a) Demuestre que la derivada de una función impar es par. Esto es, si  $f(-x) = -f(x)$ , entonces  $f'(-x) = f'(x)$ .
- (b) Demuestre que la derivada de una función par es impar. Es decir, si  $f(-x) = f(x)$ , entonces  $f'(-x) = -f'(x)$ .

118. **Demostración** Sea  $u$  una función derivable de  $x$ . Considere que  $|u| = \sqrt{u^2}$  para demostrar que

$$\frac{d}{dx}[|u|] = u' \frac{u}{|u|}, \quad u \neq 0.$$

**Usar el valor absoluto** En los ejercicios 119-122, utilice el resultado del ejercicio 118 para encontrar la derivada de la función.

- 119.  $g(x) = |3x - 5|$
- 120.  $f(x) = |x^2 - 9|$
- 121.  $h(x) = |x| \cos x$
- 122.  $f(x) = |\sin x|$

**Aproximaciones lineal y cuadrática** Las aproximaciones lineal y cuadrática de una función  $f$  en  $x = a$  son

$$P_1(x) = f'(a)(x - a) + f(a) \quad y$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + f'(a)(x - a) + f(a).$$

En los ejercicios 123 y 124: (a) calcule las aproximaciones lineal y cuadrática de  $f$  que se especifican, (b) utilice una herramienta de graficación para representar  $f$  y sus aproximaciones, (c) determine cuál de las dos,  $P_1$  o  $P_2$ , es mejor aproximación y (d) establezca cómo varía la precisión a medida que se aleja de  $x = a$ .

123.  $f(x) = \tan x$ ;  $a = \frac{\pi}{4}$       124.  $f(x) = \sec x$ ;  $a = \frac{\pi}{6}$

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 125-128, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o proporcione un ejemplo que demuestre que lo es.

- 125. Si  $y = (1 - x)^{1/2}$ , entonces  $y' = \frac{1}{2}(1 - x)^{-1/2}$ .
- 126. Si  $f(x) = \sin^2(2x)$ , entonces  $f'(x) = 2(\sin 2x)(\cos 2x)$ .
- 127. Si  $y$  es una función derivable de  $u$ , y  $u$  es una función derivable de  $x$ , entonces  $y$  es una función derivable de  $x$ .
- 128. Si  $y$  es una función derivable de  $u$ ,  $u$  es una función derivable de  $v$  y  $v$  es una función derivable de  $x$ , entonces:  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$ .

**DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM**

- 129. Sea  $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx$ , donde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son números reales y  $n$  es un número entero positivo. Dado que  $|f(x)| \leq |\sin x|$ , para todo  $x$  real, demuestre que  $|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| \leq 1$ .
- 130. Sea  $k$  un número entero positivo fijo. La  $n$ -ésima derivada de  $\frac{1}{x^k - 1}$  tiene la forma  $\frac{P_n(x)}{(x^k - 1)^{n+1}}$  donde  $P_n(x)$  es un polinomio. Encuentre  $P_n(1)$ .

Estos problemas fueron preparados por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

## 4.5 Derivación implícita

- Distinguir entre funciones explícitas e implícitas.
- Hallar la derivada de una función por derivación implícita.

### Funciones explícitas e implícitas

Hasta este punto, la mayoría de las funciones estudiadas en el texto se enunciaron de **forma explícita**. Por ejemplo, en la ecuación  $y = 3x^2 - 5$ , la variable  $y$  está escrita explícitamente como función de  $x$ . Sin embargo, algunas funciones solo se enuncian de manera implícita en una ecuación. Por ejemplo, la función  $y = 1/x$  está definida **implícitamente** por la ecuación

$$xy = 1. \qquad \text{Forma implícita}$$

Para hallar  $dy/dx$  para esta ecuación, puede escribir  $y$  como función explícita de  $x$  y luego derivar.

Forma implícita	Forma explícita	Derivada
$xy = 1$	$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Esta estrategia funciona siempre que pueda resolver para la función de forma explícita. Sin embargo, no puede utilizar este procedimiento cuando no puede resolver para  $y$  en función de  $x$ . Por ejemplo, ¿cómo encuentra  $dy/dx$  para la ecuación

$$x^2 - 2y^3 + 4y = 2?$$

resulta muy difícil despejar  $y$  como función explícita de  $x$ . Para hallar  $dy/dx$  debe usar la llamada **derivación implícita**.

Para comprender cómo hallar  $dy/dx$  implícitamente, es preciso que tenga en cuenta que la derivación se efectúa *con respecto a  $x$* . Esto quiere decir que cuando tenga que derivar términos que solo contienen a  $x$ , la derivación será la habitual. Sin embargo, cuando haya que derivar un término donde aparezca  $y$ , será necesario aplicar la regla de la cadena, ya que está suponiendo que  $y$  está definida implícitamente como función derivable de  $x$ .

#### EJEMPLO 1

#### Derivar respecto de $x$

a.  $\frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$

Las variables coinciden

Las variables coinciden: use la regla simple de las potencias.

b.  $\frac{d}{dx}[y^3] = 3y^2 \frac{dy}{dx}$

Las variables no coinciden

Las variables no coinciden: use la regla de la cadena.

c.  $\frac{d}{dx}[x + 3y] = 1 + 3\frac{dy}{dx}$

Regla de la cadena:  $\frac{d}{dx}[3y] = 3y'$

d.  $\frac{d}{dx}[xy^2] = x \frac{d}{dx}[y^2] + y^2 \frac{d}{dx}[x]$

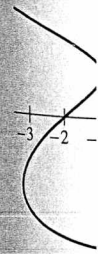
Regla del producto

$$= x \left( 2y \frac{dy}{dx} \right) + y^2(1)$$

Regla de la cadena

$$= 2xy \frac{dy}{dx} + y^2$$

Simplifique.



Puntos en la gráfica  
 (2, 0)  
 (1, -3)  
 $x = 0$   
 (1, 1)  
 La ecuación  
 $y^3 +$   
 tiene la de  
 $\frac{dy}{dx} =$   
 Figura 4.

## Derivación implícita

## ESTRATEGIAS PARA LA DERIVACIÓN IMPLÍCITA

1. Derive ambos lados de la ecuación *respecto de*  $x$ .
2. Agrupe todos los términos en que aparezca  $dy/dx$  en el lado izquierdo de la ecuación y pase todos los demás a la derecha.
3. Factorice  $dy/dx$  del lado izquierdo de la ecuación.
4. Despeje  $dy/dx$ .

Observe que en el ejemplo 2 la derivación implícita puede producir una expresión para  $dy/dx$  en la que aparezcan a la vez  $x$  y  $y$ .

## EJEMPLO 2

## Derivación implícita

Encuentre  $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$ .

## Solución

1. Derive los dos miembros de la ecuación respecto de  $x$ .

$$\frac{d}{dx}[y^3 + y^2 - 5y - x^2] = \frac{d}{dx}[-4]$$

$$\frac{d}{dx}[y^3] + \frac{d}{dx}[y^2] - \frac{d}{dx}[5y] - \frac{d}{dx}[x^2] = \frac{d}{dx}[-4]$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} - 5 \frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

2. Agrupe los términos con  $dy/dx$  en la parte izquierda y pase todos los demás al lado derecho.

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} - 5 \frac{dy}{dx} = 2x$$

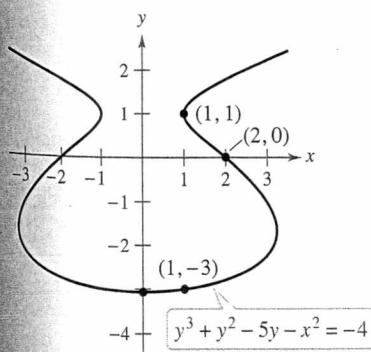
3. Factorice  $dy/dx$  en la parte izquierda.

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 + 2y - 5) = 2x$$

4. Despeje  $dy/dx$  dividiendo entre  $(3y^2 + 2y - 5)$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

Para ver cómo usar la derivación implícita, considere la gráfica de la figura 4.27. En ella puede observar que  $y$  no es una función de  $x$ . A pesar de ello, la derivada determinada en el ejemplo 2 proporciona una fórmula para la pendiente de la recta tangente en un punto de esta gráfica. Debajo de la gráfica se muestran las pendientes en varios puntos de la gráfica.



Puntos en la gráfica	Pendiente de la gráfica
(2, 0)	$-\frac{4}{5}$
(1, -3)	$\frac{1}{8}$
$x = 0$	0
(1, 1)	Indefinida

La ecuación implícita

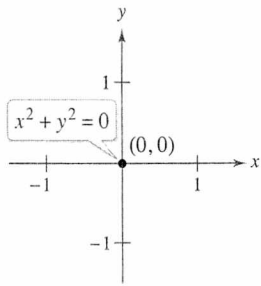
$$y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$$

tiene la derivada

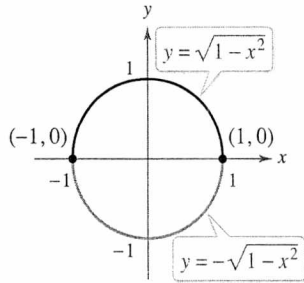
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

Figura 4.27

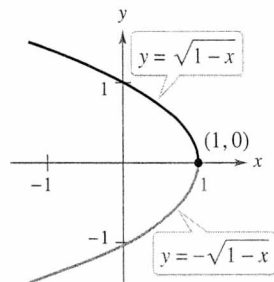
- **TECNOLOGIA** Con la mayoría de las herramientas de graficación es fácil representar una ecuación que exprese de manera explícita a  $y$  en función de  $x$ . Por el contrario, representar las gráficas asociadas a otras ecuaciones requiere cierto ingenio. Por ejemplo, tratar de representar la gráfica de la ecuación empleada en el ejemplo 2 configurando la herramienta de graficación en modo *paramétrico*, a fin de elaborar la gráfica de las representaciones paramétricas  $x = \sqrt{t^3 + t^2 - 5t + 4}$ ,  $y = t$ ,  $x = -\sqrt{t^3 + t^2 - 5t + 4}$ ,  $y = t$ , para  $-5 \leq t \leq 5$ . ¿Cómo se compara el resultado con la gráfica que se muestra en la figura 4.27?



(a)



(b)



(c)

Algunos segmentos de curva pueden representarse por medio de funciones derivables.

Figura 4.28

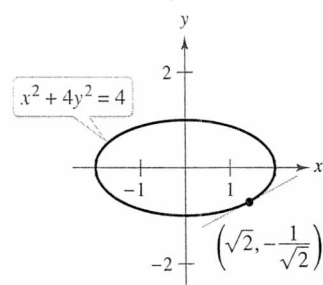


Figura 4.29

En una ecuación que no tiene puntos solución, por ejemplo  $x^2 + y^2 = -4$ , no tiene sentido despejar  $dy/dx$ . Sin embargo, si una porción de una gráfica puede representarse mediante una función derivable  $dy/dx$  tendrá sentido como pendiente en cada punto de esa porción. Recuerde que una función no es derivable en (a) los puntos con tangente vertical y (b) los puntos en los que la función no es continua.

**EJEMPLO 3 Gráficas y funciones derivables**

Si es posible, represente  $y$  como una función derivable de  $x$ .

- a.  $x^2 + y^2 = 0$     b.  $x^2 + y^2 = 1$     c.  $x + y^2 = 1$

**Solución**

- a. La gráfica de esta ecuación se compone de solo un punto. Por tanto, no define  $y$  como función derivable de  $x$ . Vea la figura 4.28(a).  
 b. La gráfica de esta ecuación es la circunferencia unitaria, centrada en  $(0, 0)$ . La semicircunferencia superior está dada por la función derivable

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1$$

y la semicircunferencia inferior por la función derivable

$$y = -\sqrt{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1.$$

En los puntos  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$ , la pendiente no está definida. Vea la figura 4.28(b).

- c. La mitad superior de esta parábola está dada por la función derivable.

$$y = \sqrt{1 - x}, \quad x < 1$$

y la inferior por la función derivable

$$y = -\sqrt{1 - x}, \quad x < 1.$$

En el punto  $(1, 0)$  la pendiente no está definida. Vea la figura 4.28(c).

**EJEMPLO 4 Calcular la pendiente de una gráfica implícita**

••••► Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $x^2 + 4y^2 = 4$  en el punto  $(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ . Vea la figura 4.29.

**Solución**

$x^2 + 4y^2 = 4$                       Ecuación original

$2x + 8y \frac{dy}{dx} = 0$                       Derive respecto de  $x$ .

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{8y}$                       Despeje términos con  $\frac{dy}{dx}$ .

$= \frac{-x}{4y}$                       Simplifique.

Evalúe  $(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ , cuando

••••►  $\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{2}}{-4/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ .                      Evalúe  $\frac{dy}{dx}$  cuando  $x = \sqrt{2}$  y  $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

••••• **COMENTARIO** Para observar las ventajas de la derivación implícita, intente rehacer el ejemplo 4 manejando la función explícita  $y = -\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$ .

Figura 4.28  
Lemniscata  
 $3(x^2 + y^2)^2$

Figura 4.29  
La derivada  
Figura 4.29

**EJEMPLO 5****Calcular la pendiente de una gráfica implícita**

Calcule la pendiente de la gráfica de

$$3(x^2 + y^2)^2 = 100xy$$

en el punto (3, 1).

**Solución**

$$\frac{d}{dx}[3(x^2 + y^2)^2] = \frac{d}{dx}[100xy]$$

$$3(2)(x^2 + y^2)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) = 100\left[x\frac{dy}{dx} + y(1)\right]$$

$$12y(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} - 100x\frac{dy}{dx} = 100y - 12x(x^2 + y^2)$$

$$[12y(x^2 + y^2) - 100x]\frac{dy}{dx} = 100y - 12x(x^2 + y^2)$$

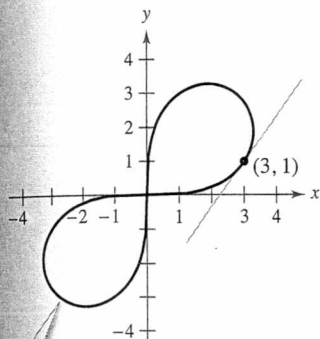
$$\frac{dy}{dx} = \frac{100y - 12x(x^2 + y^2)}{-100x + 12y(x^2 + y^2)}$$

$$= \frac{25y - 3x(x^2 + y^2)}{-25x + 3y(x^2 + y^2)}$$

En el punto (3, 1), la pendiente de la gráfica es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{25(1) - 3(3)(3^2 + 1^2)}{-25(3) + 3(1)(3^2 + 1^2)} = \frac{25 - 90}{-75 + 30} = \frac{-65}{-45} = \frac{13}{9}$$

como muestra la figura 4.30. Esta gráfica se denomina **lemniscata**.



$$3(x^2 + y^2)^2 = 100xy$$

Lemniscata.

Figura 4.30

**EJEMPLO 6****Determinar una función derivable**

Encuentre  $dy/dx$  implícitamente para la ecuación  $\text{sen } y = x$ . A continuación, determine el mayor intervalo de la forma  $-a < y < a$  en el que  $y$  es una función derivable de  $x$  (vea la figura 4.31).

**Solución**

$$\frac{d}{dx}[\text{sen } y] = \frac{d}{dx}[x]$$

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

El intervalo más grande cercano al origen en el que  $y$  es derivable respecto de  $x$  es  $-\pi/2 < y < \pi/2$ . Para verlo, observe que  $\cos y$  es positivo en ese intervalo y 0 en sus extremos. Si se restringe a ese intervalo  $-\pi/2 < y < \pi/2$ , es posible escribir  $dy/dx$  explícitamente como función de  $x$ . Para ello, puede utilizar

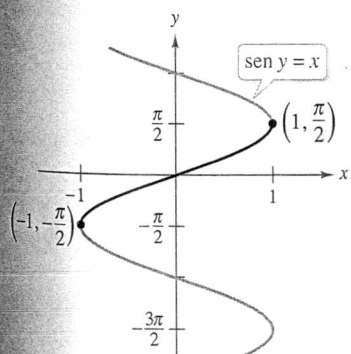
$$\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$$

$$= \sqrt{1 - x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

y concluir que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Más adelante estudiará este ejemplo cuando se definan las funciones trigonométricas inversas en la sección 4.6.



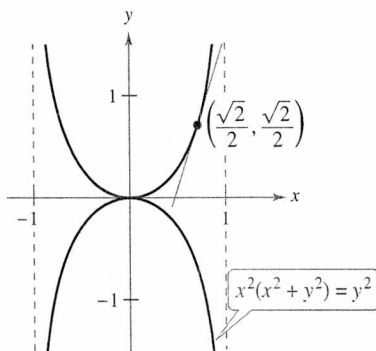
La derivada es  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ .

Figura 4.31



**ISAAC BARROW**  
(1630-1677)

La gráfica de la figura 4.32 se conoce como la **curva kappa** debido a su semejanza con la letra griega kappa,  $\kappa$ . La solución general para la recta tangente a esta curva fue descubierta por el matemático inglés Isaac Barrow. Newton fue su alumno y con frecuencia intercambiaron correspondencia relacionada con su trabajo en el entonces incipiente desarrollo del cálculo.  
Consulte *LarsonCalculus.com* para leer más de esta biografía.



La curva kappa.  
Figura 4.32

Al usar la derivación implícita, con frecuencia es posible simplificar la forma de la derivada (como en el ejemplo 6) utilizando de manera apropiada la ecuación *original*. Se puede emplear una técnica semejante para encontrar y simplificar las derivadas de orden superior obtenidas de forma implícita.

**EJEMPLO 7** Calcular la segunda derivada implícita

Dada  $x^2 + y^2 = 25$ , encuentre  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

**Solución** Derivando ambos términos respecto de  $x$  obtiene

$$\begin{aligned} 2x + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ 2y \frac{dy}{dx} &= -2x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-2x}{2y} \\ &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

Derivando por segunda vez respecto de  $x$  obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{(y)(1) - (x)(dy/dx)}{y^2} && \text{Regla del cociente} \\ &= -\frac{y - (x)(-x/y)}{y^2} && \text{Sustituya } -\frac{x}{y} \text{ para } \frac{dy}{dx}. \\ &= -\frac{y^2 + x^2}{y^3} && \text{Simplifique.} \\ &= -\frac{25}{y^3}. && \text{Sustituya 25 para } x^2 + y^2. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 8** Recta tangente a una gráfica

Encuentre la recta tangente a la gráfica dada por  $x^2(x^2 + y^2) = y^2$  en el punto  $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ , como se muestra en la figura 4.32.

**Solución** Reescribiendo y derivando implícitamente, resulta

$$\begin{aligned} x^4 + x^2y^2 - y^2 &= 0 \\ 4x^3 + x^2\left(2y \frac{dy}{dx}\right) + 2xy^2 - 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ 2y(x^2 - 1) \frac{dy}{dx} &= -2x(2x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{x(2x^2 + y^2)}{y(1 - x^2)} \end{aligned}$$

En el punto  $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ , la pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sqrt{2}/2)[2(1/2) + (1/2)]}{(\sqrt{2}/2)[1 - (1/2)]} = \frac{3/2}{1/2} = 3$$

y la ecuación de la recta tangente en ese punto es

$$\begin{aligned} y - \frac{\sqrt{2}}{2} &= 3\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ y &= 3x - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

**4.5**

Encuentra  $dy/dx$  por

1.  $x^2 + y$
3.  $x^{1/2} + y$
5.  $x^3 - y$
7.  $x^3y^3 - y$
9.  $x^3 - y^2$
11.  $\sin x - y$
13.  $\sin x - y^2$
15.  $y = \sec x$

Encuentra los ejercicios 17-20 en términos de  $x$  y  $y$ . Si  $y$  es una función de  $x$ , simplifique las expresiones. (c) derive  $y$  con respecto a  $x$  y  $dy/dx$  y de

17.  $x^2 + y^2$
19.  $16y^2 - x^2$
20.  $x^2 + y^2$

Calcular y simplificar  $dy/dx$  para la ecuación dada. Encuentre  $dy/dx$  para la ecuación dada.

21.  $xy = e^x$
23.  $y^2 = x^2 + 1$
25.  $(x + y)^2 = x^2 + y^2$
26.  $x^3 + y^3 = 1$
27.  $\tan(x + y) = x$

Curvas familiares. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

29. Bruja  $y = x^2 + 1$  en el punto  $(-2, 5)$

# 4.5 Ejercicios

Consulte [CalcChat.com](http://CalcChat.com) para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Encontrar la derivada** En los ejercicios 1-16, encuentre  $dy/dx$  por medio de la derivación implícita.

- |                               |                                       |
|-------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $x^2 + y^2 = 9$            | 2. $x^2 - y^2 = 25$                   |
| 3. $x^{1/2} + y^{1/2} = 16$   | 4. $2x^3 + 3y^3 = 64$                 |
| 5. $x^3 - xy + y^2 = 7$       | 6. $x^2y + y^2x = -2$                 |
| 7. $x^3y^3 - y = x$           | 8. $\sqrt{xy} = x^2y + 1$             |
| 9. $x^3 - 3x^2y + 2xy^2 = 12$ | 10. $4 \cos x \sin y = 1$             |
| 11. $\sin x + 2 \cos 2y = 1$  | 12. $(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$ |
| 13. $\sin x = x(1 + \tan y)$  | 14. $\cot y = x - y$                  |
| 15. $y = \sin xy$             | 16. $x = \sec \frac{1}{y}$            |

**Encontrar derivadas implícitas y explícitas** En los ejercicios 17-20: (a) encuentre dos funciones explícitas despejando y en términos de  $x$ , (b) construya la gráfica de la ecuación y clasifique las partes dadas por las respectivas funciones explícitas, (c) derive las funciones explícitas y (d) encuentre implícitamente  $dy/dx$  y demuestre que el resultado es equivalente al del inciso (c).

- |                                   |                           |
|-----------------------------------|---------------------------|
| 17. $x^2 + y^2 = 64$              | 18. $25x^2 + 36y^2 = 300$ |
| 19. $16y^2 - x^2 = 16$            |                           |
| 20. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$ |                           |

**Calcular y evaluar una derivada** En los ejercicios 21-28, encuentre  $dy/dx$  por medio de la derivación implícita y calcule la derivada en el punto indicado.

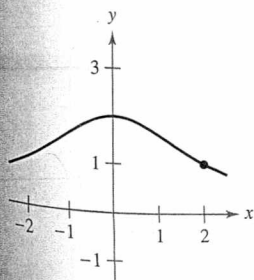
- |  |   |
|--|---|
| 21. $xy = 6$ , $(-6, -1)$                        | 22. $y^3 - x^2 = 4$ , $(2, 2)$            |
| 23. $y^2 = \frac{x^2 - 49}{x^2 + 49}$ , $(7, 0)$ | 24. $x^{2/3} + y^{2/3} = 5$ , $(8, 1)$    |
| 25. $(x + y)^3 = x^3 + y^3$ , $(-1, 1)$          |   |
| 26. $x^3 + y^3 = 6xy - 1$ , $(2, 3)$             |   |
| 27. $\tan(x + y) = x$ , $(0, 0)$                 | 28. $x \cos y = 1$ , $(2, \frac{\pi}{3})$ |

**Curvas famosas** En los ejercicios 29-32, calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto propuesto.

29. Bruja de Agnesi:

$$(x^2 + 4)y = 8$$

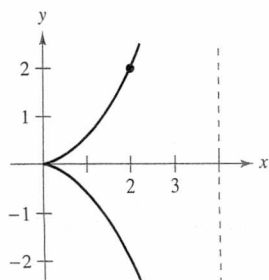
Punto:  $(2, 1)$



30. Cisoide:

$$(4 - x)y^2 = x^3$$

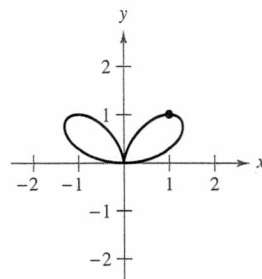
Punto:  $(2, 2)$



31. Bifolio:

$$(x^2 + y^2)^2 = 4x^2y$$

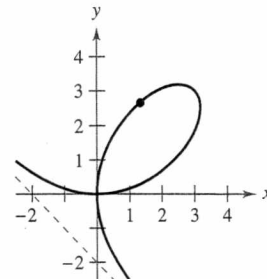
Punto:  $(1, 1)$



32. Folio de Descartes:

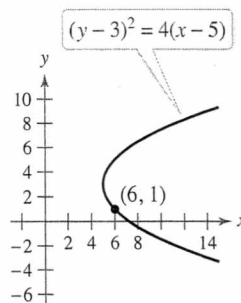
$$x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

Punto:  $(\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$

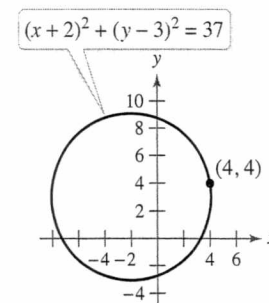


**Curvas famosas** En los ejercicios 33-40, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto dado.

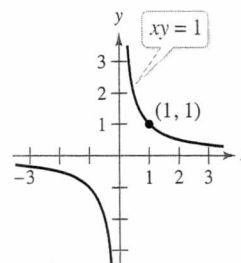
33. Parábola



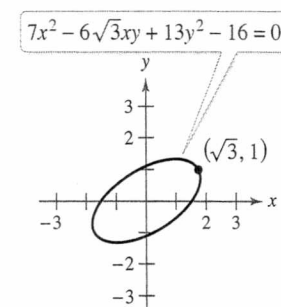
34. Circunferencia



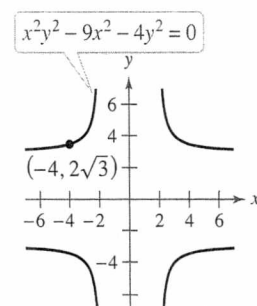
35. Hipérbola rotada



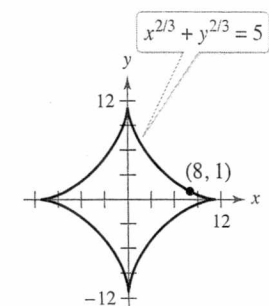
36. Elipse rotada



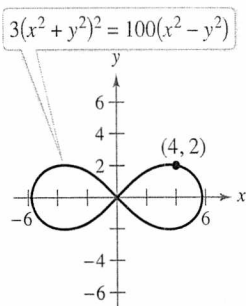
37. Cruciforme



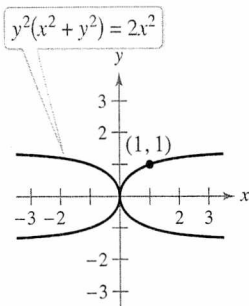
38. Astroide



39. Lemniscata



40. Curva kappa



41. Elipse

- (a) Utilice la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la elipse  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$  en  $(1, 2)$ .
- (b) Demuestre que la ecuación de la recta tangente a la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  en  $(x_0, y_0)$  es  $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ .

42. Hipérbola

- (a) Utilice la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola  $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1$  en  $(3, -2)$ .
- (b) Demuestre que la ecuación de la recta tangente a la hipérbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  en  $(x_0, y_0)$  es  $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ .

**Determinar una función diferenciable** En los ejercicios 43 y 44, calcule  $dy/dx$  de manera implícita y encuentre el mayor intervalo con la forma  $-a < y < a$  o  $0 < y < a$  tal que  $y$  sea una función derivable de  $x$ . Expresé  $dy/dx$  en función de  $x$ .

43.  $\tan y = x$                       44.  $\cos y = x$

**Encontrar la segunda derivada** En los ejercicios 45-50, encuentre  $d^2y/dx^2$  en términos de  $x$  y  $y$ .

45.  $x^2 + y^2 = 4$                       46.  $x^2 y - 4x = 5$   
 47.  $x^2 - y^2 = 36$                       48.  $xy - 1 = 2x + y^2$   
 49.  $y^2 = x^3$                               50.  $y^3 = 4x$

**Encontrar una ecuación de una recta tangente** En los ejercicios 51 y 52, use una herramienta de graficación para representar la ecuación. Encuentre la ecuación de la recta tangente en la gráfica obtenida en el punto y la gráfica en la recta tangente.

51.  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ ,  $(9, 4)$       52.  $y^2 = \frac{x-1}{x^2+1}$ ,  $(2, \frac{\sqrt{5}}{5})$

**Rectas tangentes y rectas normales** En los ejercicios 53 y 54, encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la circunferencia en el punto indicado (la recta normal en un punto es perpendicular a la tangente en ese punto). Utilice una herramienta de graficación para representar la ecuación, la recta tangente y la normal.

53.  $x^2 + y^2 = 25$                       54.  $x^2 + y^2 = 36$   
 $(4, 3), (-3, 4)$                                $(6, 0), (5, \sqrt{11})$

55. **Rectas normales** Demuestre que la recta normal a cualquier punto de la circunferencia  $x^2 + y^2 = r^2$  pasa por el origen.

56. **Círculos** Dos circunferencias de radio 4 son tangentes a la gráfica de  $y^2 = 4x$  en el punto  $(1, 2)$ . Encuentre las ecuaciones de esas dos circunferencias.

**Recta tangente horizontal y vertical** En los ejercicios 57 y 58, localice los puntos en los que la gráfica de la ecuación tiene recta tangente horizontal o vertical.

57.  $25x^2 + 16y^2 + 200x - 160y + 400 = 0$   
 58.  $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$

**Trayectorias ortogonales** En los ejercicios 59-62, utilice herramienta de graficación para representar las ecuaciones y demostrar que en sus intersecciones son ortogonales. (Dos gráficas son ortogonales en un punto de intersección si sus rectas tangentes en ese punto son perpendiculares entre sí.)

59.  $2x^2 + y^2 = 6$                       60.  $y^2 = x^3$   
 $y^2 = 4x$                                        $2x^2 + 3y^2 = 5$   
 61.  $x + y = 0$                               62.  $x^3 = 3(y - 1)$   
 $x = \sin y$                                        $x(3y - 29) = 3$

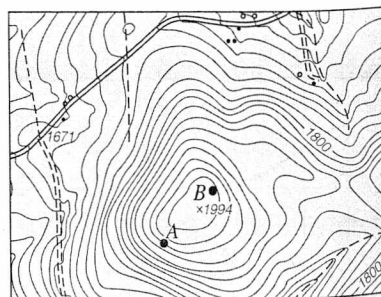
**Trayectorias ortogonales** En los ejercicios 63 y 64, verifique que las dos familias de curvas son ortogonales, siendo  $C$  y  $K$  números reales. Utilice una herramienta de graficación para representar ambas familias con dos valores de  $C$  y dos valores de  $K$ .

63.  $xy = C$ ,  $x^2 - y^2 = K$       64.  $x^2 + y^2 = C^2$ ,  $y = Kx$

**DESARROLLO DE CONCEPTOS**

- 65. **Funciones explícitas e implícitas** Describa la diferencia que existe entre la forma explícita de una ecuación y una ecuación implícita. Elabore un ejemplo de cada una.
- 66. **Derivación implícita** Con sus propias palabras, establezca las estrategias a seguir en la derivación implícita.

67. **Trayectorias ortogonales** En la siguiente figura se muestra un mapa topográfico realizado por un grupo de excursionistas. Ellos se encuentran en el área boscosa que está en la parte superior de la colina que se muestra en el mapa y deciden seguir la ruta de descenso menos empinada (trayectorias ortogonales a los contornos del mapa). Dibuje la ruta que deben seguir si parten desde el punto A y si lo hacen desde el punto B. Si su objetivo es llegar a la carretera que pasa por la parte superior del mapa, ¿cuál de esos puntos de partida deben utilizar?



68.

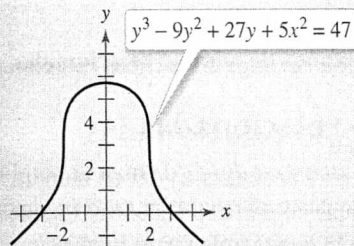
69. Encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto  $(1, 2)$  a la curva  $y^2 = 4x$ .  
 (a)  $2x - y = 0$   
 (b)  $2x + y = 4$   
 (c)  $x - 2y = 0$   
 (d)  $x + 2y = 4$

70. Recta tangente a la curva  $y = \sqrt{x} + 1$  en el punto  $(4, 3)$ .  
 Demuestre que la recta tangente es  $y - 3 = \frac{1}{4}(x - 4)$ .

**PRO Ilusión**  
 En cada una de las gráficas siguientes, trace una curva que sea tangente a todas las rectas que pasan por el punto  $(1, 1)$ .  
 (a) Circunferencia  $x^2 + y^2 = 2$   
 $x = 3$



**¿CÓMO LO VE?** Utilice la gráfica para contestar las preguntas.



- (a) ¿Qué es mayor, la pendiente de la recta tangente en  $x \nabla 3$  o en la pendiente de la recta tangente en  $x \nabla 1$ ?
- (b) Calcule el (los) punto(s) donde la gráfica tiene una tangente vertical.
- (c) Estime el (los) punto(s) donde la gráfica tiene una tangente horizontal.

**69. Encontrar ecuaciones de rectas tangentes** Considere la ecuación  $x^4 = 4(4x^2 - y^2)$ .

- (a) Utilice una herramienta de graficación para representarla.
- (b) Encuentre y represente gráficamente las cuatro rectas tangentes a la curva en  $y = 3$ .
- (c) Calcule las coordenadas exactas del punto de intersección de las dos rectas tangentes en el primer cuadrante.

**70. Rectas tangentes e intersecciones** Sea  $L$  una recta tangente a la curva

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}.$$

Demuestre que la suma de las intersecciones de  $L$  en los ejes  $x$  y  $y$  es  $c$ .

**71. Demostración** Demuestre (teorema 4.3) que

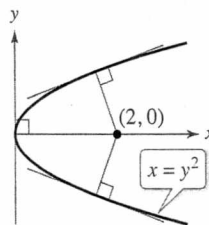
$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

para el caso donde  $n$  es un número racional. (Sugerencia: Escriba  $y = x^{p/q}$  en la forma  $y^q = x^p$  y derive de forma implícita. Suponga que  $p$  y  $q$  son enteros, con  $q \geq 0$ .)

**72. Pendiente** Encuentre todos los puntos de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 100$ , donde la pendiente es igual a  $\frac{3}{4}$ .

**73. Rectas tangentes** Encuentre las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  que pasa por el punto  $(4, 0)$ .

**74. Normales a una parábola** La gráfica muestra las rectas normales desde el punto  $(2, 0)$  a la gráfica de la parábola  $x = y^2$ . Encuentre cuántas rectas normales existen desde el punto  $(x_0, 0)$  a la gráfica de la parábola si (a)  $x_0 = \frac{1}{4}$ , (b)  $x_0 = \frac{1}{2}$  y (c)  $x_0 = 1$ ? ¿Para qué valor de  $x_0$  existen dos rectas normales perpendiculares entre sí?



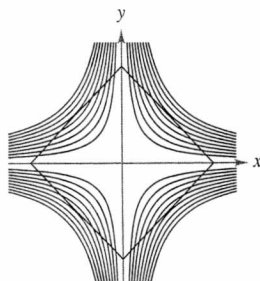
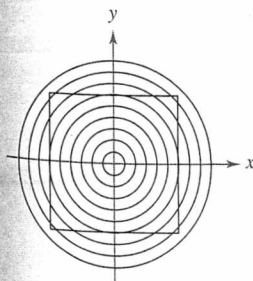
**75. Rectas normales** (a) Encuentre la ecuación de la recta normal a la elipse  $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{8} = 1$  en el punto  $(4, 2)$ . (b) Utilice una herramienta de graficación para representar la elipse y la recta normal. (c) ¿En qué otros puntos interseca esta recta normal a la elipse?

## PROYECTO DE TRABAJO

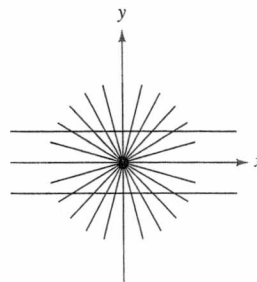
### Ilusiones ópticas

En cada una de las siguientes gráficas se genera una ilusión óptica por intersecciones de rectas con una familia de curvas. En todos los casos, las rectas parecen ser curvas. Encuentre el valor de  $dy/dx$  para los valores de  $x$  y  $y$ .

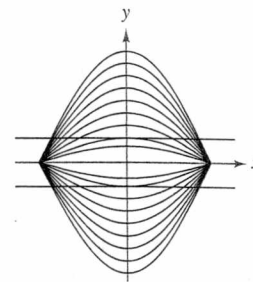
- (a) Circunferencias:  $x^2 + y^2 = C^2$       (b) Hipérbolas:  $xy = C$   
 $x = 3, y = 4, C = 5$                                $x = 1, y = 4, C = 4$



- (c) Rectas:  $ax = by$   
 $x = \sqrt{3}, y = 3,$   
 $a = \sqrt{3}, b = 1$

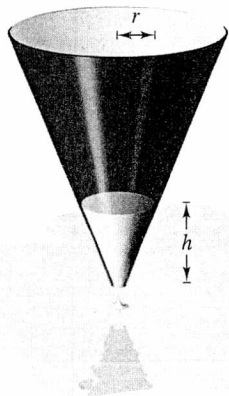
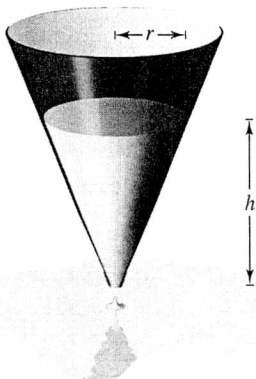
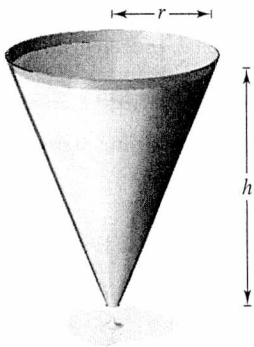


- (d) Curvas coseno:  $y = C \cos x$   
 $x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{1}{3}, C = \frac{2}{3}$



**PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para obtener más información sobre las matemáticas de las ilusiones ópticas, vea el artículo "Descriptive Models for Perception of Optical Illusions", de David A. Smith, en *The UMAP Journal*.

## 4.6 Razones de cambio relacionadas



- Hallar una razón de cambio relacionada.
- Resolver problemas de la vida real con razones de cambio relacionadas.

### Cálculo de razones de cambio relacionadas

Ya sabe cómo usar la regla de la cadena para encontrar  $dy/dx$  de manera implícita. Otra aplicación relevante de la regla de la cadena consiste en encontrar razones de cambio de dos o más variables relacionadas que están cambiando respecto al tiempo.

Por ejemplo, cuando sale agua de un depósito cónico (figura 4.33), el volumen  $V$ , el radio  $r$  y la altura  $h$  del nivel del agua son funciones de  $t$ . Sabiendo que estas magnitudes variables se relacionan mediante la ecuación.

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h \quad \text{Ecuación original}$$

puede derivar implícitamente con respecto a  $t$  a fin de obtener la ecuación de la razón relacionada.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[V] &= \frac{d}{dt}\left[\frac{\pi}{3} r^2 h\right] \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{\pi}{3} \left[ r^2 \frac{dh}{dt} + h \left( 2r \frac{dr}{dt} \right) \right] \quad \text{Derive con respecto a } t. \\ &= \frac{\pi}{3} \left( r^2 \frac{dh}{dt} + 2rh \frac{dr}{dt} \right). \end{aligned}$$

De esta ecuación puede ver que la razón de cambio de  $V$  está relacionada con la razón de cambio de  $h$  y  $r$ .

### Exploración

**Cálculo de una razón de cambio relacionada** Suponga que en el tanque cónico que se muestra en la figura 4.33, la altura está cambiando a un ritmo de  $-0.2$  pies por minuto y el radio lo está haciendo a un ritmo de  $-0.1$  pies por minuto. ¿Cuál es la razón de cambio de volumen cuando el radio es  $r = 1$  pie y la altura es  $h = 2$  pies? ¿La razón de cambio del volumen depende de los valores de  $r$  y  $h$ ? Explique su respuesta.

El volumen está relacionado con el radio y con la altura.

Figura 4.33

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para aprender más sobre la historia de los problemas de razones de cambio relacionadas, vea el artículo "The Lengthening Shadow: The Story of Related Rates", de Bill Austin, Don Barry y David Berman, en *Mathematics Magazine*. Para ver este artículo, visite [MathArticles.com](http://MathArticles.com).

### EJEMPLO 1 Dos razones de cambio relacionadas

Sean  $x$  y  $y$  dos funciones derivables de  $t$ , y relacionadas por la ecuación  $y = x^2 + 3$ . Calcule  $dy/dt$  para  $x = 1$ , sabiendo que  $dx/dt = 2$  para  $x = 1$ .

**Solución** Derive ambos lados *con respecto a  $t$* , utilizando la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 3 && \text{Ecuación original} \\ \frac{d}{dt}[y] &= \frac{d}{dt}[x^2 + 3] && \text{Derive con respecto a } t. \\ \frac{dy}{dt} &= 2x \frac{dx}{dt} && \text{Regla de la cadena} \end{aligned}$$

Cuando  $x = 1$  y  $dx/dt = 2$ , usted tiene

$$\frac{dy}{dt} = 2(1)(2) = 4.$$

El área que lo Figura

• • C  
• est  
• qu  
• ha  
• mi  
• co  
• de  
• res  
• in

Russ Bish

## Solución de problemas con razones de cambio relacionadas

En el ejemplo 1 se le *dio* la ecuación que relaciona las variables  $x$  y  $y$ , y se le pedía hallar la razón de cambio de  $y$  para  $x = 1$ .

**Ecuación:**  $y = x^2 + 3$

**Razón dada:**  $\frac{dx}{dt} = 2$  cuando  $x = 1$

**Hallar:**  $\frac{dy}{dt}$  cuando  $x = 1$

En los ejemplos restantes de esta sección, debe *crear* un modelo matemático a partir de una descripción verbal.

### EJEMPLO 2 Ondas en un lago

En un lago en calma se deja caer una piedra, lo que provoca ondas circulares, como se muestra en la figura 4.34. El radio  $r$  del círculo exterior está creciendo a una razón constante de 1 pie/s. Cuando el radio es 4 pies, ¿a qué razón está cambiando el área  $A$  de la región circular perturbada?



El área total se incrementa a medida que lo hace el radio del círculo exterior.  
Figura 4.34

**Solución** Las variables  $r$  y  $A$  están relacionadas por  $A = \pi r^2$ . La razón de cambio del radio  $r$  es  $dr/dt = 1$ .

**Ecuación:**  $A = \pi r^2$

**Ritmo dado:**  $\frac{dr}{dt} = 1$

**Hallar:**  $\frac{dA}{dt}$  cuando  $r = 4$

Con esta información, proceda como en el ejemplo 1.

$$\frac{d}{dt}[A] = \frac{d}{dt}[\pi r^2] \quad \text{Derive con respecto a } t.$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \quad \text{Regla de la cadena}$$

$$= 2\pi(4)(1) \quad \text{Sustituya 4 por } r \text{ y 1 por } \frac{dr}{dt}.$$

$$= 8\pi \text{ pies cuadrados por segundo} \quad \text{Simplifique.}$$

Cuando el radio es de 4 pies, el área cambia a razón de  $8\pi$  pies cuadrados por segundo.

- **COMENTARIO** Al utilizar
- esta estrategia, cerciórese de
- que el paso 4 no se realiza
- hasta que el paso 3 esté terminado. Sustituya los valores
- conocidos de las variables antes
- de derivarlas tendría como
- resultado final una derivada
- inapropiada.

### ESTRATEGIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS

1. Identifique todas las cantidades *dadas* y *por determinar*. Haga un dibujo y marque las cantidades.
2. Escriba una ecuación que incluya las variables cuyas razones de cambio se encuentran en la información dada o deben calcularse.
3. Utilizando la regla de la cadena, derive de manera implícita ambos lados de la ecuación con *respecto al tiempo*  $t$ .
4. Después de terminar el paso 3, sustituya en la ecuación resultante todos los valores conocidos de las variables y sus razones de cambio. Luego despeje la razón de cambio requerida.

La tabla siguiente contiene varios ejemplos de modelos matemáticos que incluyen razones de cambio. Por ejemplo, la razón de cambio del primer ejemplo es la velocidad de un automóvil.

Enunciado verbal	Modelo matemático
La velocidad de un automóvil tras una hora de viaje es de 50 millas por hora.	$x =$ distancia recorrida $\frac{dx}{dt} = 50$ mi/h cuando $t = 1$
Se introduce agua en una piscina a razón de 10 metros cúbicos por hora.	$V =$ volumen de agua en la piscina $\frac{dV}{dt} = 10$ m <sup>3</sup> /h
Una rueda gira a 25 revoluciones por minuto (1 revolución = $2\pi$ radianes).	$\theta =$ ángulo de giro $\frac{d\theta}{dt} = 25(2\pi)$ rad/min
Una población de bacterias está aumentando a una razón de 2000 por hora.	$x =$ cantidad de población $\frac{dx}{dt} = 2000$ bacterias por hora

### EJEMPLO 3 Inflado de un globo

Se bombea aire en el interior de un globo esférico (vea la figura 4.35) a razón de 4.5 pies cúbicos por minuto. Calcule la razón de cambio del radio del globo cuando el radio es de 2 pies.

**Solución** Sea  $V$  el volumen del globo y  $r$  su radio. Puesto que el volumen está creciendo a razón de 4.5 pies cúbicos por minuto, usted sabe que en el instante  $t$  la razón de cambio del volumen es  $dV/dt = \frac{9}{2}$ . De tal modo que el problema se puede formular de la siguiente manera:

**Razón dada:**  $\frac{dV}{dt} = \frac{9}{2}$  (razón constante)

**Calcular:**  $\frac{dr}{dt}$  cuando  $r = 2$

Para encontrar la razón de cambio del radio, encuentre una ecuación que relacione el radio  $r$  con el volumen  $V$ .

**Ecuación:**  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  Volumen de una esfera

Derive ambos lados de la ecuación con respecto a  $t$ , para obtener:

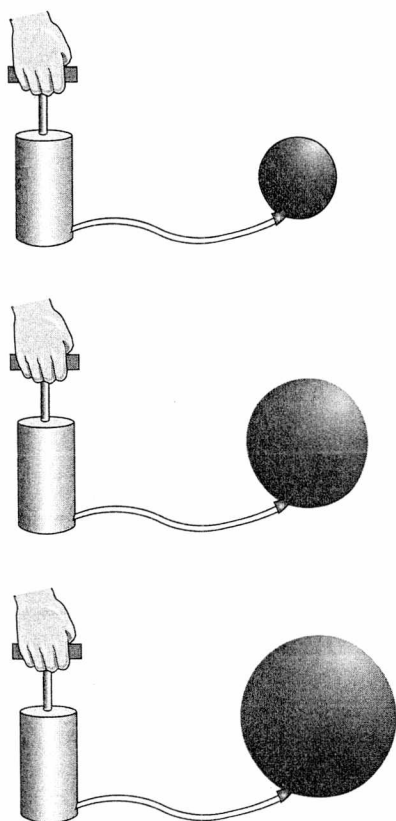
$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$  Derive con respecto a  $t$ .

$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2} \left( \frac{dV}{dt} \right)$  Despeje  $\frac{dr}{dt}$ .

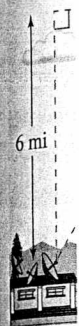
Por último, cuando  $r = 2$  la razón de cambio del radio resulta ser

$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(2)^2} \left( \frac{9}{2} \right) \approx 0.09$  pies por minuto.

Observe que en el ejemplo 3 el volumen está creciendo a razón *constante*, pero el radio cambia a razón *variable*. El hecho de que dos razones estén relacionadas no implica que sean proporcionales. En este caso en particular, el radio crece más y más lentamente con el paso del tiempo. ¿Por qué?



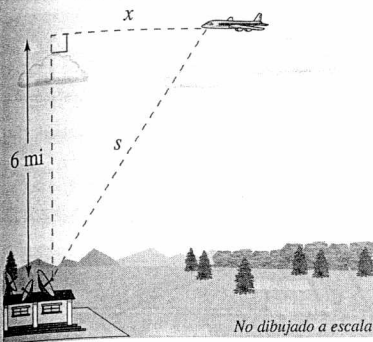
Inflando un globo.  
Figura 4.35



Un avión está a 6 millas de altura.  
Figura 4.36



Una cápsula de sonda se lanza verticalmente a 2000 pies por segundo.  
Figura 4.37



Un avión vuela a 6 millas de altura y está a  $s$  millas de la estación de radar.

Figura 4.36

### EJEMPLO 4

### Velocidad de un avión detectado por radar

•••► Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Un avión recorre una ruta de vuelo que lo llevará directamente sobre una estación de radar, como se muestra en la figura 4.36. Si  $s$  está decreciendo a razón de 400 millas por hora cuando  $s = 10$  millas. ¿Cuál es la velocidad del avión?

**Solución** Sea  $x$  la distancia horizontal al radar, como se ilustra en la figura 4.36. Observe que cuando  $s = 10$ ,  $x = \sqrt{10^2 - 36} = 8$ .

**Razón dada:**  $ds/dt = -400$  cuando  $s = 10$

**Encuentre:**  $dx/dt$  cuando  $s = 10$  y  $x = 8$

Encuentre la velocidad del avión de la siguiente manera:

**Ecuación:**  $x^2 + 6^2 = s^2$

Teorema de Pitágoras

$$2x \frac{dx}{dt} = 2s \frac{ds}{dt}$$

Derive con respecto a  $t$ .

$$\frac{dx}{dt} = \frac{s}{x} \left( \frac{ds}{dt} \right)$$

Despeje  $\frac{dx}{dt}$ .

$$= \frac{10}{8}(-400)$$

Sustituya  $s, x$  y  $\frac{ds}{dt}$ .

$$= -500 \text{ millas por hora}$$

Simplifique.

•••► Puesto que la velocidad es de  $-500$  millas por hora, la *rapidez* es 500 millas/h.

••••• **COMENTARIO** Observe en el ejemplo 4 que la velocidad es negativa porque  $x$  representa una distancia que disminuye.

### EJEMPLO 5

### Ángulo de elevación variable

Calcule la razón de cambio del ángulo de elevación de la cámara que se muestra en la figura 4.37, diez segundos después del despegue.

**Solución** Sea  $\theta$  el ángulo de elevación, como se muestra en la figura 4.37. Cuando  $t = 10$ , la altura  $s$  del cohete es  $s = 50t^2 = 50(10)^2 = 5000$  pies.

**Razón dada:**  $ds/dt = 100t =$  velocidad del cohete

**Encontrar:**  $d\theta/dt$  cuando  $t = 10$  y  $s = 5000$

Utilizando la figura 4.37, relacione  $s$  y  $\theta$  mediante la ecuación  $\tan \theta = s/2000$ .

**Ecuación:**  $\tan \theta = \frac{s}{2000}$

Vea la figura 2.37.

$$(\sec^2 \theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2000} \left( \frac{ds}{dt} \right)$$

Derive con respecto a  $t$ .

$$\frac{d\theta}{dt} = \cos^2 \theta \frac{100t}{2000}$$

Sustituya  $100t$  por  $\frac{ds}{dt}$ .

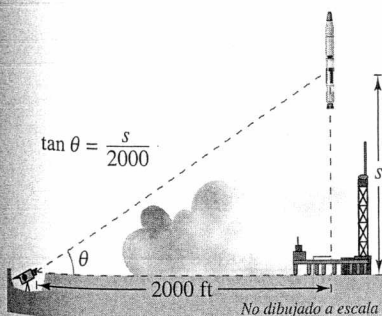
$$= \left( \frac{2000}{\sqrt{s^2 + 2000^2}} \right)^2 \frac{100t}{2000}$$

$$\cos \theta = \frac{2000}{\sqrt{s^2 + 2000^2}}$$

Cuando  $t = 10$  y  $s = 5000$ , se tiene

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2000(100)(10)}{5000^2 + 2000^2} = \frac{2}{29} \text{ radianes por segundo.}$$

De tal modo, cuando  $t = 10$ ,  $\theta$  cambia a razón de  $\frac{2}{29}$  radianes por segundo.



Una cámara de televisión, situada a ras de suelo, está filmando el despegue del transbordador espacial, que se mueve verticalmente de acuerdo con la ecuación de posición  $s = 50t^2$ , donde  $s$  se mide en pies y  $t$  en segundos. La cámara está a 2000 pies de la plataforma de lanzamiento.

Figura 4.37

**EJEMPLO 6** Velocidad de un pistón

En el motor que se muestra en la figura 4.38, una varilla de 7 pulgadas está conectada a un cigüeñal de 3 pulgadas de radio, que gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj, a 200 revoluciones por minuto. Calcule la velocidad del pistón cuando  $\theta = \pi/3$ .

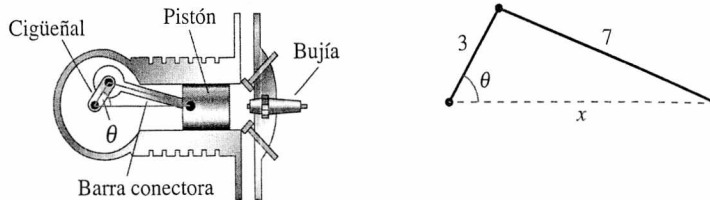
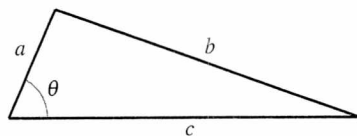


Figura 4.38

**Solución** Etiquete las distancias como se muestra en la figura 4.38. Puesto que una revolución completa equivale a  $2\pi$  radianes, se deduce que  $d\theta/dt = 200(2\pi) = 400\pi$  radianes por minuto.

**Razón dada:**  $\frac{d\theta}{dt} = 400\pi$  (razón constante)

**Encuentre:**  $\frac{dx}{dt}$  cuando  $\theta = \frac{\pi}{3}$



Ley de cosenos:  
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta$ .

Figura 4.39

Use la ley de los cosenos (figura 4.39) para encontrar una ecuación que relacione a  $x$  y a  $\theta$

**Ecuación:**

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 2(3)(x) \cos \theta$$

$$0 = 2x \frac{dx}{dt} - 6 \left( -x \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + \cos \theta \frac{dx}{dt} \right)$$

$$(6 \cos \theta - 2x) \frac{dx}{dt} = 6x \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6x \sin \theta}{6 \cos \theta - 2x} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)$$

De esta manera, cuando  $\theta = \pi/3$ , la velocidad del pistón es

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 2(3)(x) \cos \frac{\pi}{3}$$

$$49 = 9 + x^2 - 6x \left( \frac{1}{2} \right)$$

$$0 = x^2 - 3x - 40$$

$$0 = (x - 8)(x + 5)$$

$$x = 8$$

Elegir la solución positiva.

De esta manera, cuando  $x = 8$  y  $\theta = \pi/3$ , la velocidad del pistón es

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6(8)(\sqrt{3}/2)}{6(1/2) - 16} (400\pi)$$

$$= \frac{9600\pi\sqrt{3}}{-13}$$

.....▶  $\approx -4018$  pulgadas por minuto.

.....**COMENTARIO** Observe que la velocidad en el ejemplo 6 es negativa porque  $x$  representa una distancia que está decreciendo.

**4.6**

Usar valores de  $x$  y  $y$  señalados en la ecuación

1.  $y = \sqrt{x}$

2.  $y = 3x^2$

3.  $xy = 4$

4.  $x^2 + y^2$

**Movimiento** está moviéndose. Calcule  $dy$ ,

5.  $y = 2x^2$

(a)  $x =$

6.  $y = \frac{1}{1 +}$

(a)  $x =$

7.  $y = \tan$

(a)  $x =$

8.  $y = \cos$

(a)  $x =$

**DESARROLLO**

9. **Razonamiento**

$y = c$

¿Si  $x$  cambia, ¿cómo cambia  $y$ ? Explique.

10. **Razonamiento**

menor que  $c$

## 4.6 Ejercicios

Consulte [CalcChat.com](http://CalcChat.com) para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Usar valores relacionados En los ejercicios 1-4, suponga que  $x$  y  $y$  son funciones derivables de  $t$  y encuentre los valores señalados de  $dy/dt$  y  $dx/dt$ .

Ecuación	Encontrar	Dado
1. $y = \sqrt{x}$	(a) $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 4$	$\frac{dx}{dt} = 3$
	(b) $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 25$	$\frac{dy}{dt} = 2$
2. $y = 3x^2 - 5x$	(a) $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 3$	$\frac{dx}{dt} = 2$
	(b) $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 2$	$\frac{dy}{dt} = 4$
3. $xy = 4$	(a) $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 8$	$\frac{dx}{dt} = 10$
	(b) $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 1$	$\frac{dy}{dt} = -6$
4. $x^2 + y^2 = 25$	(a) $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 3, y = 4$	$\frac{dx}{dt} = 8$
	(b) $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 4, y = 3$	$\frac{dy}{dt} = -2$

Movimiento de un punto En los ejercicios 5-8, un punto se está moviendo sobre la gráfica de la función a la razón  $dx/dt$ . Calcule  $dy/dt$  para los valores dados de  $x$ .

5.  $y = 2x^2 + 1$ ;  $\frac{dx}{dt} = 2$  centímetros por segundo  
 (a)  $x = -1$  (b)  $x = 0$  (c)  $x = 1$
6.  $y = \frac{1}{1+x^2}$ ;  $\frac{dx}{dt} = 6$  pulgadas por segundo  
 (a)  $x = -2$  (b)  $x = 0$  (c)  $x = 2$
7.  $y = \tan x$ ;  $\frac{dx}{dt} = 3$  pies por segundo  
 (a)  $x = -\frac{\pi}{3}$  (b)  $x = -\frac{\pi}{4}$  (c)  $x = 0$
8.  $y = \cos x$ ;  $\frac{dx}{dt} = 4$  centímetros por segundo  
 (a)  $x = \frac{\pi}{6}$  (b)  $x = \frac{\pi}{4}$  (c)  $x = \frac{\pi}{3}$

## DESARROLLO DE CONCEPTOS

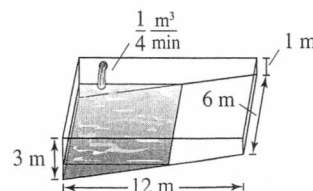
9. Razones relacionadas Considere la función lineal

$$y = ax + b.$$

¿Si  $x$  cambia a razón constante, ¿ $y$  también lo hace a razón constante? De ser así, ¿lo hace con la misma razón que  $x$ ? Explique su respuesta.

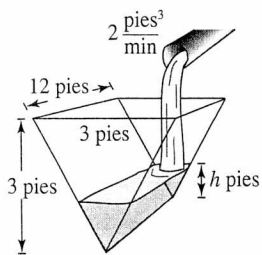
10. Razones relacionadas Con las propias palabras, mencione la estrategia para resolver problemas de razones de cambio relacionadas.

11. Área El radio  $r$  de una circunferencia se incrementa a una razón de 4 centímetros por minuto. Determine las razones de cambio del área cuando (a)  $r = 8$  centímetros y (b)  $r = 32$  centímetros.
12. Área El ángulo entre los dos lados iguales, con longitud  $s$ , de un triángulo isósceles es  $\theta$ .  
 (a) Demuestre que el área del triángulo se obtiene mediante  $A = \frac{1}{2}s^2 \sin \theta$ .  
 (b) El ángulo  $\theta$  está creciendo a razón de  $\frac{1}{2}$  radián por minuto, encuentre la razón de cambio del área cuando  $\theta = \pi/6$  y  $\theta = \pi/3$ .  
 (c) Explique por qué la razón de cambio del área del triángulo no es constante, a pesar de que  $d\theta/dt$  es constante.
13. Volumen El radio  $r$  de una esfera está creciendo a razón de 3 pulgadas por minuto.  
 (a) Calcule la razón de cambio del volumen cuando  $r = 9$  y  $r = 36$  pulgadas.  
 (b) Explique por qué la razón del cambio del volumen de la esfera no es constante, a pesar de que  $dr/dt$  es constante.
14. Volumen Se infla un globo esférico con gas a razón de 800 centímetros cúbicos por minuto. ¿A qué razón está aumentando su radio en el momento en el que éste está a (a) 30 centímetros y (b) 60 centímetros?
15. Volumen Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 6 centímetros por segundo. ¿Qué tan rápido está aumentando el volumen cuando cada arista mide (a) 2 cm y (b) 10 cm?
16. Área de una superficie Bajo las condiciones del problema anterior, determine la razón a la que cambia el área de la superficie cuando cada arista mide (a) 2 cm y (b) 10 cm.
17. Volumen En una planta de arena y grava, la arena cae de una cinta transportadora creando un montículo de forma cónica a razón de 10 pies cúbicos por minuto. El diámetro de la base del montículo es de aproximadamente tres veces la altura. ¿A qué razón cambia la altura del montón cuando su altura es 15 pies? (Sugerencia: La fórmula para el volumen de un cono es  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ .)
18. Profundidad Un depósito cónico (con el vértice abajo) mide 10 pies de ancho en su parte más alta y tiene 12 pies de profundidad. Si se le vierte agua a razón de 10 pies<sup>3</sup> por minuto, calcule la razón de cambio de la profundidad del agua cuando ésta es de 8 pies.
19. Profundidad Una piscina tiene 12 metros de largo, 6 de ancho y una profundidad que oscila desde 1 hasta 3 m (vea la figura). Se bombea agua en ella a razón de  $\frac{1}{4}$  de metro cúbico por minuto y ya hay 1 m de agua en el extremo más profundo.



- (a) ¿Qué porcentaje de la piscina está lleno?  
 (b) ¿A qué razón se eleva el nivel de agua?

**20. Profundidad** Una artesa tiene 12 pies de largo y 3 de ancho en su parte superior (vea la figura), sus extremos tienen forma de triángulo isósceles con una altura de 3 pies.



- (a) Si se vierte agua en ella a razón de 2 pies cúbicos por minuto, ¿a qué razón sube el nivel del agua cuando la profundidad  $h$  de agua es de 1 pie?
- (b) Si el agua sube a una razón de  $\frac{3}{8}$  de pulgada por minuto cuando  $h = 2$ , determine la razón a la que se está vertiendo agua en la artesa.

**21. Escalera deslizante** Una escalera de 25 pies de longitud está apoyada sobre una pared (vea la figura). Su base se desliza por la pared a razón de 2 pies por segundo.

- (a) ¿A qué razón está bajando su extremo superior por la pared cuando la base está a 7, 15 y 24 pies de la pared?
- (b) Determine la razón a la que cambia el área del triángulo formado por la escalera, el suelo y la pared, cuando la base de la primera está a 7 pies de la pared.
- (c) Calcule la razón de cambio del ángulo formado por la escalera y la pared cuando la base está a 7 pies de la pared.

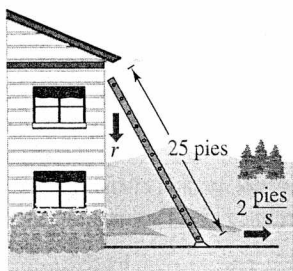


Figura para 21

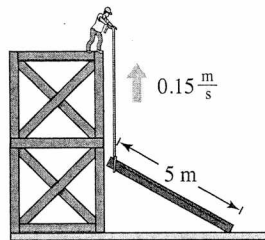


Figura para 22

**PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para obtener más información sobre las matemáticas relativas a las escaleras deslizantes, vea el artículo "The Falling Ladder Paradox", de Paul Scholten y Andrew Simoson, en *The College Mathematics Journal*.

**22. Construcción** Un obrero levanta, con ayuda de una soga, un tablón de cinco metros hasta lo alto de un edificio en construcción (vea la figura). Suponga que el otro extremo del tablón sigue una trayectoria perpendicular a la pared y que el obrero mueve el tablón a razón de 0.15 m/s. ¿Qué tan rápido se desliza por el suelo el extremo cuando está a 2.5 m de la pared?

**23. Construcción** Un cabrestante situado en lo alto de un edificio de 12 metros levanta un tubo de la misma longitud hasta colocarlo en posición vertical, como se muestra en la figura. El cabrestante recoge la cuerda a razón de  $-0.2$  m/s. Calcule las razones de cambio vertical y horizontal del extremo del tubo cuando  $y = 6$ .

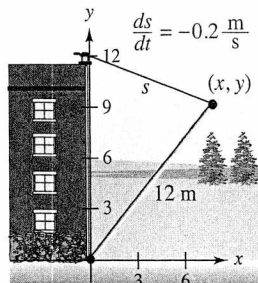


Figura para 23

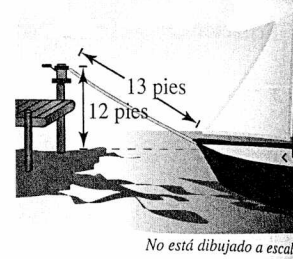


Figura para 24

**24. Navegación** Un velero es arrastrado hacia el muelle por medio de un cabrestante situado a una altura de 12 pies por encima de la cubierta del barco (vea la figura).

- (a) Si la cuerda se recoge a razón de 4 pies por segundo, determine la velocidad del velero cuando quedan 13 pies de cuerda sin recoger. ¿Qué ocurre con la velocidad del velero a medida que el barco se acerca más al muelle?
- (b) Suponiendo que el bote se mueve a una razón constante de 4 pies por segundo, determine la velocidad a la que el cabrestante recoge la cuerda cuando quedan 13 pies de ella por recoger. ¿Qué ocurre con la velocidad del cabrestante a medida que el barco se acerca más al muelle?

**25. Control de tráfico aéreo** Un controlador detecta que dos aviones que vuelan a la misma altura tienen trayectorias perpendiculares y convergen en un punto (vea la figura). Uno de ellos está a 225 millas de dicho punto y vuela a 450 millas por hora. El otro está a 300 millas y se desplaza a 600 millas/h.

- (a) ¿Con qué rapidez se reduce la distancia entre ellos?
- (b) ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para modificar la ruta de alguno de ellos?

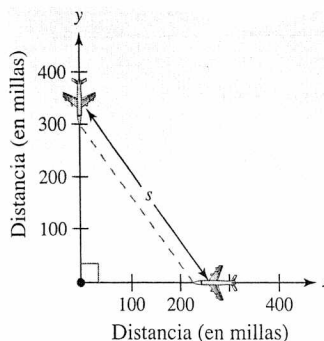


Figura para 25

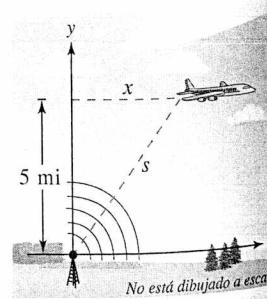


Figura para 26

**26. Control de tráfico aéreo** Un avión vuela a 5 millas de altura y pasa exactamente por encima de una antena de radar (vea la figura). Cuando el avión está a 10 millas ( $s = 10$ ), el radar detecta que la distancia  $s$  está cambiando a una velocidad de 240 millas/h. ¿Cuál es la velocidad del avión?

27. Def con segi pies dist



Figura pa

28. Def que pies con gun

29. Lor cam está (a)

(b)

30. Lor pon ésta



Figura p

31. Dis de figu

$x(t)$

don

(a)

(b)

(c)

32. Dis fun par

27. **Deportes** Un campo de béisbol tiene forma de un cuadrado con lados de 90 pies (vea la figura). Si un jugador corre de segunda a tercera a 25 pies por segundo y se encuentra a 20 pies de la tercera base, ¿con qué rapidez está cambiando su distancia  $s$  respecto al home?

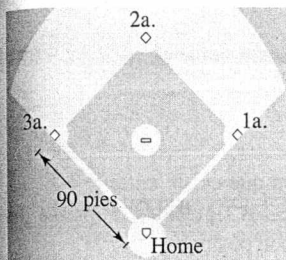


Figura para 27 y 28

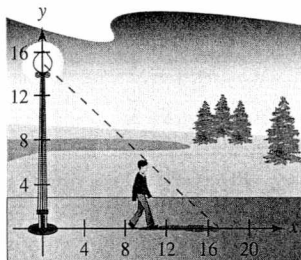


Figura para 29

28. **Deportes** En el campo de béisbol del ejercicio 27, suponga que el jugador corre desde primera hasta segunda base a 25 pies por segundo. Calcule la razón de cambio de su distancia con respecto a home cuando se encuentra a 20 pies de la segunda base.

29. **Longitud de una sombra** Un hombre de 6 pies de altura camina a 5 pies por segundo alejándose de una lámpara que está a 15 pies de altura sobre el suelo (vea la figura).

- (a) ¿Cuándo el hombre está a 10 pies de la base de la lámpara, a qué velocidad se mueve la punta del extremo de su sombra?
- (b) ¿Cuándo el hombre está a 10 pies de la base de la lámpara, con qué rapidez está cambiando la longitud de su sombra?

30. **Longitud de una sombra** Repita el ejercicio anterior, suponiendo ahora que el hombre camina *hacia* la lámpara y que ésta se encuentra situada a 20 pies de altura (vea la figura)

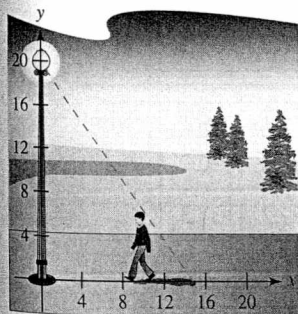


Figura para 30

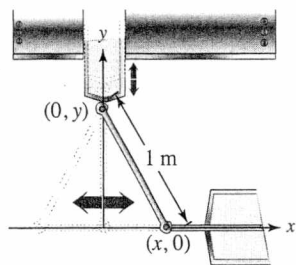


Figura para 31

31. **Diseño de máquinas** Los extremos de una varilla móvil de 1 m de longitud tienen coordenadas  $(x, 0)$  y  $(0, y)$  (vea la figura). La posición del extremo que se apoya en el eje  $x$  es

$$x(t) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi t}{6}$$

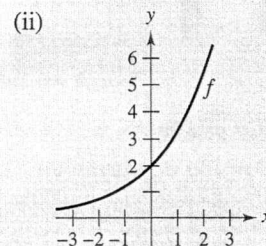
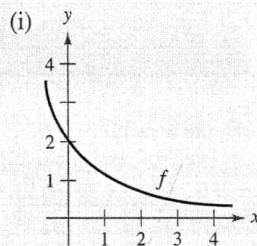
donde  $t$  se mide en segundos.

- (a) Calcule la duración de un ciclo completo de la varilla.
  - (b) ¿Cuál es el punto más bajo que alcanza el extremo de la varilla que está en el eje  $y$ ?
  - (c) Encuentre la velocidad del extremo que se mueve por el eje  $y$  cuando el otro está en  $(\frac{1}{4}, 0)$ .
32. **Diseño de máquinas** Repita el ejercicio anterior para una función de posición  $x(t) = \frac{3}{5} \sin \pi t$ . Utilice el punto  $(\frac{3}{10}, 0)$  para el inciso (c).

33. **Evaporación** Una gota esférica al caer alcanza una capa de aire seco y comienza a evaporarse a una razón proporcional a su área superficial ( $S = 4\pi r^2$ ). Demuestre que el radio de la gota decrece a razón constante.



**¿CÓMO LO VE?** Utilizando la gráfica de  $f$ , (a) determine si  $dy/dt$  es positiva o negativa dado que  $dx/dt$  es negativa y (b) determine si  $dx/dt$  es positiva o negativa dado que  $dy/dt$  es positiva.



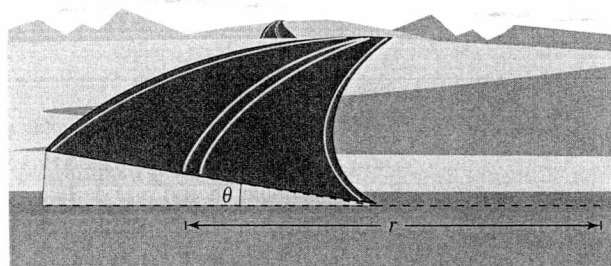
35. **Electricidad** La resistencia eléctrica combinada  $R$  de  $R_1$  y  $R_2$ , conectadas en paralelo, está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

donde  $R$ ,  $R_1$  y  $R_2$  se miden en ohms.  $R_1$  y  $R_2$  están creciendo a razón de 1 y 1.5 ohms por segundo, respectivamente. ¿Con qué rapidez está cambiando  $R$  cuando  $R_1 = 50$  ohms y  $R_2 = 75$  ohms?

36. **Expansión adiabática** Cuando cierto gas poliatómico sufre una expansión adiabática, su presión  $p$  y su volumen  $V$  satisfacen la ecuación  $pV^{1.3} = k$ , donde  $k$  es una constante. Encuentre la relación que existe entre las razones  $dp/dt$  y  $dV/dt$ .

37. **Diseño de autopistas** En cierta autopista, la trayectoria de los automóviles es un arco circular de radio  $r$ . Con el fin de no depender totalmente de la fricción para compensar la fuerza centrífuga, se construye un peralte con un ángulo de inclinación  $\theta$  sobre la horizontal (vea la figura). Este ángulo satisface la ecuación  $rg \tan \theta = v^2$ , donde  $v$  es la velocidad de los automóviles y  $g = 32$  pies por segundo al cuadrado es la aceleración de la gravedad. Encuentre la relación que existe entre las razones de cambio relacionadas  $dv/dt$  y  $d\theta/dt$ .



38. **Ángulo de elevación** Un globo asciende a 4 metros por segundo desde un punto del suelo a 50 m de un observador. Calcule la razón de cambio del ángulo de elevación del globo cuando está a 50 metros de altura.

39. **Ángulo de elevación** El pescador de la figura recoge el sedal para capturar su pieza a razón de 1 pie por segundo, desde un punto que está a 10 pies por encima del agua (vea la figura). ¿Con qué rapidez cambia el ángulo  $\theta$  entre el sedal y el agua cuando quedan por recoger 25 pies de sedal?

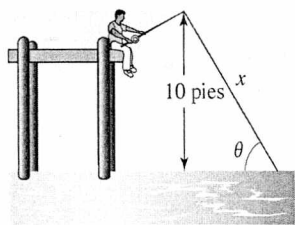


Figura para 39

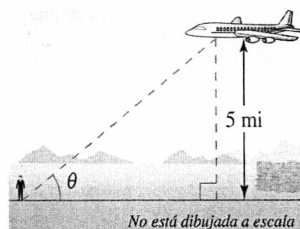


Figura para 40

40. **Ángulo de elevación** Un avión vuela a 5 millas de altitud y a una velocidad de 600 millas por hora, hacia un punto situado exactamente en la vertical de un observador (vea la figura). ¿Con qué rapidez está cambiando el ángulo de elevación  $\theta$  cuando el ángulo es
- (a)  $\theta = 30^\circ$ , (b)  $\theta = 60^\circ$  y (c)  $\theta = 75^\circ$ .

41. **Rapidez angular vs. rapidez lineal** La patrulla de la figura está estacionada a 50 pies de un largo almacén. La luz de su torreta gira a 30 revoluciones por minuto. ¿A qué velocidad se está moviendo la luz a lo largo del muro cuando el haz forma ángulos de (a)  $\theta = 30^\circ$ , (b)  $\theta = 60^\circ$  y (c)  $\theta = 70^\circ$  con la línea perpendicular desde la luz a la pared?



Figura para 41

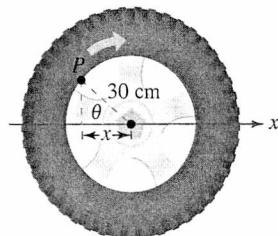


Figura para 42

42. **Rapidez lineal y rapidez angular** Una rueda de 30 cm de radio gira a razón de 10 vueltas por segundo. Se pinta un punto  $P$  en su borde (vea la figura).

- (a) Encuentre  $dx/dt$  como función de  $\theta$ .
- (b) Utilice una herramienta de graficación para representar la función del inciso (a).
- (c) ¿Cuándo es mayor el valor absoluto de la razón de cambio de  $x$ ?, ¿y el menor?
- (d) Calcule  $dx/dt$  cuando  $\theta = 30^\circ$  y  $\theta = 60^\circ$ .

43. **Control de vuelo** Un avión vuela en condiciones de aire en calma a una velocidad de 275 millas por hora. Si asciende con un ángulo de  $18^\circ$ , calcule la rapidez a la que está ganando altura.

44. **Cámara de vigilancia** Una cámara de vigilancia está a 50 pies de altura sobre un vestíbulo de 100 pies de largo (vea la figura). Es más fácil diseñar la cámara con una velocidad de rotación constante, pero en tal caso toma las imágenes del vestíbulo a velocidad variable. En consecuencia, es deseable diseñar un sistema con velocidad angular variable de modo tal que la velocidad de la toma a lo largo del vestíbulo sea constante. Encuentre un modelo para la velocidad variable de rotación adecuado si  $|dx/dt| = 2$  pies por segundo.

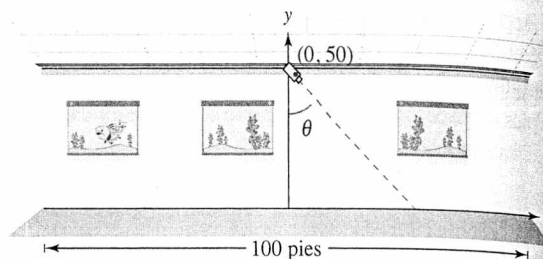


Figura para 44

45. **Piénselo** Describa la relación que existe entre la razón de cambio de  $y$  y la de  $x$  en los casos siguientes. Suponga que todas las variables y derivadas son positivas.

(a)  $\frac{dy}{dt} = 3 \frac{dx}{dt}$       (b)  $\frac{dy}{dt} = x(L - x) \frac{dx}{dt}$ ,  $0 \leq x \leq L$

**Aceleración** En los ejercicios 46 y 47, calcule la aceleración del objeto especificado. (Sugerencia: Recuerde que si una variable cambia a velocidad constante, su aceleración es nula.)

46. Calcule la aceleración del extremo superior a la escalera del ejercicio 21 cuando su base está a 7 pies de la pared.
47. Calcule la aceleración del velero del ejercicio 24(a) cuando faltan por recoger 13 pies de cuerda.
48. **Modelar datos** La siguiente tabla muestra el número de mujeres solteras  $s$  (nunca casadas) y casadas  $m$  (en millones) en el mundo laboral estadounidense desde 2003 hasta 2010. (Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics)

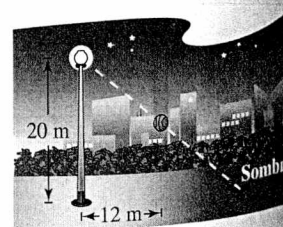
Año	2003	2004	2005	2006
$s$	18.4	18.6	19.2	19.5
$m$	36.0	35.8	35.9	36.3

Año	2007	2008	2009	2010
$s$	19.7	20.2	20.2	20.6
$m$	36.9	37.2	37.3	36.7

- (a) Utilice las funciones de regresión de su herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma  $m(s) = as^3 + bs^2 + cs + d$  para esos datos, donde  $t$  es el tiempo en años, siendo  $t = 3$  el año 2003.
- (b) Encuentre  $dm/dt$ . Después utilice ese modelo para estimar  $dm/dt$  para  $t = 7$ , si se supone que el número de mujeres solteras  $s$  que forman parte de la fuerza de trabajo va a crecer a razón de 0.75 millones al año.

49. **Sombra en movimiento** Se deja caer una pelota desde una altura de 20 m, a una distancia de 12 m de una lámpara (vea la figura). La sombra de la pelota se mueve a lo largo del suelo. ¿Con qué rapidez se está moviendo la sombra 1 segundo después de soltar la pelota? (Enviado por Dennis Gittinger, St. Phillips College, San Antonio, TX).



## 4.7 Derivada de la función inversa

■ Encontrar la derivada de una función inversa.

### Derivada de una función inversa

Los siguientes dos teoremas analizan la derivada de una función inversa. El razonamiento del teorema 4.12 se desprende de la propiedad reflexiva de las funciones inversas, como se muestra en la figura 2.24.

#### TEOREMA 4.12 Continuidad y derivabilidad de funciones inversas

Sea  $f$  una función cuyo dominio es un intervalo  $I$ . Si  $f$  tiene una función inversa, entonces las siguientes afirmaciones son ciertas.

1. Si  $f$  es continua en su dominio, entonces  $f^{-1}$  es continua en su dominio.
2. Si  $f$  es creciente en su dominio, entonces  $f^{-1}$  es creciente en su dominio.
3. Si  $f$  es decreciente en su dominio, entonces  $f^{-1}$  es decreciente en su dominio.
4. Si  $f$  es derivable en un intervalo que contiene  $c$  y  $f'(c) \neq 0$ , entonces  $f^{-1}$  es derivable en  $f(c)$ .

Una demostración de este teorema está en el apéndice A.

Consulte *LarsonCalculus.com* para el video de Bruce Edwards de esta demostración.

#### Exploración

Represente gráficamente la función inversa de  $f(x) = x^3$  y  $g(x) = x^{1/3}$ . Calcule las pendientes de  $f$  en  $(1, 1)$ ,  $(2, 8)$  y  $(3, 27)$ , y las pendientes de  $g$  en  $(1, 1)$ ,  $(8, 2)$  y  $(27, 3)$ . ¿Qué observa? ¿Qué sucede en  $(0, 0)$ ?

#### TEOREMA 4.13 La derivada de una función inversa

Sea  $f$  una función que es derivable en un intervalo  $I$ . Si tiene una función inversa  $g$ , entonces es derivable en cualquier  $x$  para el cual  $f'(g(x)) \neq 0$ . Por otra parte,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, \quad f'(g(x)) \neq 0.$$

Una demostración de este teorema está en el apéndice A.

Consulte *LarsonCalculus.com* para el video de Bruce Edwards de esta demostración.

#### EJEMPLO 1

#### Evaluar la derivada de una función inversa

Sea  $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x - 1$ . (a) ¿Cuál es el valor de  $f^{-1}(x)$  cuando  $x = 3$ ? (b) ¿Cuál es el valor de  $(f^{-1})'(x)$  cuando  $x = 3$ ?

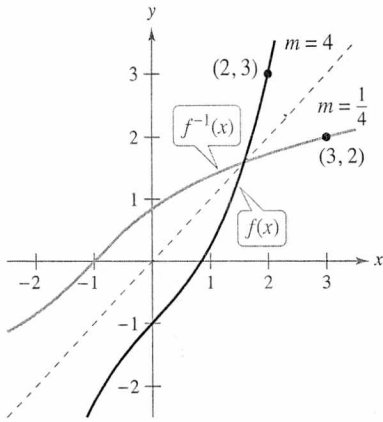
**Solución** Note que  $f$  es uno a uno y por lo tanto tiene una función inversa.

- Ya que  $f(x) = 3$  cuando  $x = 2$ , se sabe que  $f^{-1}(3) = 2$ .
- Dado que la función  $f$  es derivable y tiene una función inversa, se puede aplicar el teorema 5.9 para escribir

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(2)}.$$

Por otra parte, usando  $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 1$ , se puede concluir que

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{3}{4}(2^2) + 1} = \frac{1}{4}.$$



Las gráficas de las funciones inversas  $f$  y  $f^{-1}$  tienen pendientes recíprocas en el punto  $(a, b)$  y  $(b, a)$ .

Figura 4.40

En el ejemplo 1, observe que en el punto  $(2, 3)$  la pendiente de la gráfica de  $f$  es 4, y en el punto  $(3, 2)$  la pendiente de la gráfica de  $f^{-1}$  es

$$m = \frac{1}{4}$$

como se muestra en la figura 4.40. En general, si  $y = g(x) = f^{-1}(x)$ , entonces  $f(y) = x$  y

$f'(y) = \frac{dx}{dy}$ . Del teorema 4.13 se deduce que

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{(dx/dy)}.$$

Esta relación recíproca es a veces escrita como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}.$$

**EJEMPLO 2**

**Las gráficas de las funciones inversas tienen pendientes recíprocas**

Sea  $f(x) = x^2$  (para  $x \geq 0$ ), y sea  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ . Demuestre que las pendientes de las gráficas de  $f$  y  $f^{-1}$  son recíprocas en cada uno de los siguientes puntos.

- a.  $(2, 4)$  y  $(4, 2)$
- b.  $(3, 9)$  y  $(9, 3)$

**Solución** Las derivadas de  $f$  y  $f^{-1}$  son

$$f'(x) = 2x \quad \text{y} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

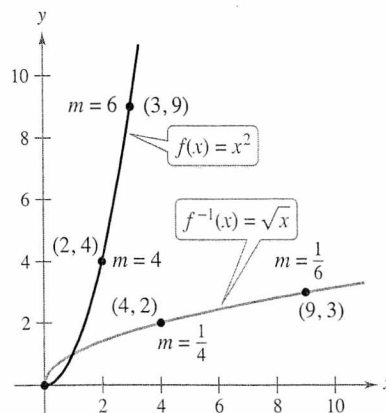
- a. En  $(2, 4)$ , la pendiente de la gráfica de  $f$  es  $f'(2) = 2(2) = 4$ . En  $(4, 2)$  la pendiente de la gráfica de  $f^{-1}$  es

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}.$$

- b. En  $(3, 9)$ , la pendiente de la gráfica de  $f$  es  $f'(3) = 2(3) = 6$ . En  $(9, 3)$  la pendiente de la gráfica de  $f^{-1}$  es

$$(f^{-1})'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{2(3)} = \frac{1}{6}.$$

Por tanto, en ambos casos las pendientes son recíprocas, como se muestra en la figura 4.41.



En  $(0, 0)$ , la derivada de  $f$  es 0, y la derivada de  $f^{-1}$  no existe.

Figura 4.41

**4.**  
**Evaluar**  
**cios 1-8,**  
**lice la fu**  
**(Sugere**  
 1.  $f(x)$   
 2.  $f(x)$   
 3.  $f(x)$   
 4.  $f(x)$   
 5.  $f(x)$   
 6.  $f(x)$   
 7.  $f(x)$   
 8.  $f(x)$   
**Usar la:**  
**tre los d**  
**gráfica c**  
**de  $f$  y  $f^{-1}$**   
**Fun**  
 9.  $f(x)$   
 $f^{-1}($   
 10.  $f(x)$   
 $f^{-1}($   
 11.  $f(x)$   
 $f^{-1}($   
 12.  $f(x)$   
 $f^{-1}($   
**Usar fi**  
**13-16, 1**  
**contrar**  
 13.  $(f^{-1}$   
 15.  $(f^{-1}$   
**Usar fi**  
**17-20,**  
**encont**  
 17.  $g^{-1}$   
 19.  $(f^{-1}$

# 4.7 Ejercicios

Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Evaluar la derivada de una función inversa** En los ejercicios 1-8, verifique que  $f$  tiene una inversa. A continuación, utilice la función  $f$  y el número dado real para encontrar  $(f^{-1})'(a)$ . (Sugerencia: consulte el ejemplo 5.)

1.  $f(x) = 5 - 2x^3, a = 7$
2.  $f(x) = x^3 + 2x - 1, a = 2$
3.  $f(x) = \frac{1}{27}(x^5 + 2x^3), a = -11$
4.  $f(x) = \sqrt{x - 4}, a = 2$
5.  $f(x) = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, a = \frac{1}{2}$
6.  $f(x) = \cos 2x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, a = 1$
7.  $f(x) = \frac{x + 6}{x - 2}, x > 2, a = 3$
8.  $f(x) = \frac{x + 3}{x + 1}, x > -1, a = 2$

**Usar las funciones inversas** En los ejercicios 9-12, (a) encuentre los dominios de  $y$ , (b) determine los rangos de  $f$  y  $f^{-1}$ , (c) trace la gráfica de  $f$  y  $f^{-1}$ , y (d) demuestre que las pendientes de las gráficas de  $f$  y  $f^{-1}$  son recíprocas en los puntos dados.

Funciones	Puntos
9. $f(x) = x^3$ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ $(\frac{1}{8}, \frac{1}{2})$
10. $f(x) = 3 - 4x$ $f^{-1}(x) = \frac{3 - x}{4}$	$(1, -1)$ $(-1, 1)$
11. $f(x) = \sqrt{x - 4}$ $f^{-1}(x) = x^2 + 4, x \geq 0$	$(5, 1)$ $(1, 5)$
12. $f(x) = \frac{4}{1 + x^2}, x \geq 0$ $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{4 - x}{x}}$	$(1, 2)$ $(2, 1)$

**Usar funciones compuestas e inversas** En los ejercicios 13-16, use las funciones  $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$  y  $g(x) = x^3$  para encontrar el valor dado.

- |                                |                                 |
|--------------------------------|---------------------------------|
| 13. $(f^{-1} \circ g^{-1})(1)$ | 14. $(g^{-1} \circ f^{-1})(-3)$ |
| 15. $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$ | 16. $(g^{-1} \circ g^{-1})(-4)$ |

**Usar funciones compuestas e inversas** En los ejercicios 17-20, use las funciones  $f(x) = x + 4$  y  $g(x) = 2x - 5$  para encontrar la función dada.

- |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| 17. $g^{-1} \circ f^{-1}$ | 18. $f^{-1} \circ g^{-1}$ |
| 19. $(f \circ g)^{-1}$    | 20. $(g \circ f)^{-1}$    |

## DESARROLLO DE CONCEPTOS

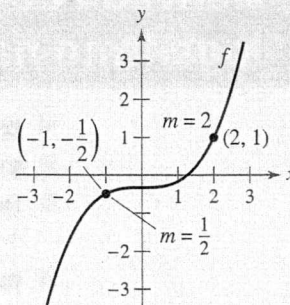
21. **En sus propias palabras** Describa cómo hallar la función inversa de una función uno a uno dada por una ecuación en  $x$  y  $y$ . Dé un ejemplo.
  22. **Una función y su inversa** Describa la relación entre la gráfica de una función y la gráfica de su función inversa.
- Explicar por qué una función no es uno a uno** En los ejercicios 23 y 24, la derivada de la función tiene el mismo signo para todas las  $x$  en su dominio, pero la función no es uno a uno. Explique.

- |                     |                                |
|---------------------|--------------------------------|
| 23. $f(x) = \tan x$ | 24. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ |
|---------------------|--------------------------------|

25. **Para pensar** La función  $f(x) = k(2 - x - x^3)$  es uno a uno y  $f^{-1}(3) = -2$ . Encuentre  $k$ .



**26. ¿CÓMO LO VE?** Utilice la información de la gráfica que se presenta a continuación.



- (a) ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f^{-1}$  en el punto  $(-\frac{1}{2}, -1)$ ? Explique.
- (b) ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f^{-1}$  en el punto  $(1, 2)$ ? Explique.

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 27-30, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falsa.

27. Si  $f$  es una función par, entonces  $f^{-1}$  existe.
28. Si existe la función inversa  $f$ , entonces la intersección  $y$  de  $f$  es una intersección  $x$  de  $f^{-1}$ .
29. Si  $f(x) = x^n$ , donde  $n$  es impar, entonces  $f^{-1}$  existe.
30. No existe una función  $f$  tal que  $f = f^{-1}$ .
31. Construir una función uno a uno
  - (a) Demuestre que  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$  no es uno a uno en  $(-\infty, \infty)$ .
  - (b) Determine el mayor valor de  $c$  tal que  $f$  sea uno a uno en  $(-c, c)$ .

**32. Demostración** Sean  $f$  y  $g$  funciones uno a uno. Demuestre que

- (a)  $f \circ g$  es uno a uno.
- (b)  $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ .

**33. Demostración** Demuestre que si  $f$  tiene una función inversa, entonces  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

**34. Demostración** Demuestre que si una función tiene una función inversa, la función inversa es única.

**35. Demostración** Demuestre que una función tiene una función inversa si y solo si se trata de una función uno a uno.

**36. Uso del teorema 2.2** ¿La inversa de la segunda parte del teorema 2.2 es cierta? Es decir, si una función es uno a uno (y por lo tanto tiene una función inversa), entonces la función debe ser estrictamente monótona? Si es así, demuéstrela. Si no es así, dé un contraejemplo.

**37. Concavidad** Sea  $f$  dos veces derivable y uno a uno en un intervalo abierto  $I$ . Demuestre que su función inversa  $g$  satisface

$$g''(x) = -\frac{f''(g(x))}{[f'(g(x))]^3}$$

Cuando  $f$  es creciente y cóncava hacia abajo, ¿cuál es la concavidad de  $f^{-1} = g$ ?

**38. Derivar una función inversa** Sea

$$f(x) = \int_2^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

Encuentre  $(f^{-1})'(0)$ .

**39. Derivar una función inversa** Demuestre que

$$f(x) = \int_2^x \sqrt{1+t^2} dt$$

es uno a uno, y encuentre  $(f^{-1})'(0)$ .

**40. Inversa de una función** Sea

$$y = \frac{x-2}{x-1}$$

Demuestre que  $y$  es su propia función inversa. ¿Qué puede concluir sobre la gráfica de  $f$ ? Explique.

**41. Usar una función** Sea  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ .

- (a) Demuestre que  $f$  es uno a uno si y solo si  $bc - ad \neq 0$ .
- (b) Dado que  $bc - ad \neq 0$ , halle  $f^{-1}$ .
- (c) Determine los valores de  $a, b, c$  y  $d$  tales que  $f = f^{-1}$ .

## 4.8 Derivada de la función exponencial y de la función logaritmo natural

- Establecer la definición de función exponencial natural y logaritmo natural.
- Comprender la definición del número  $e$ .
- Desarrollar las propiedades de la función logaritmo natural sin utilizar la definición formal con integrales.
- Encontrar la derivada de las funciones exponencial y logaritmo natural.

### La función exponencial

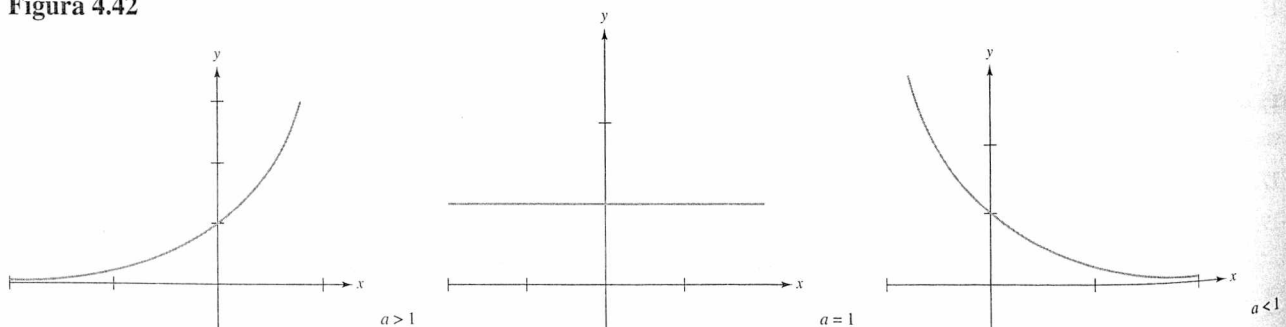
Si  $a$  es un número real positivo, la función exponencial es una expresión de la forma  $f(x) = a^x$ .

Si  $a \neq 1$  el dominio de la función está formado por todos los números reales y su rango por todos los reales positivos.

Si  $a = 1$ , entonces  $f(x) = 1^x = 1$  es la función constante, su dominio son todos los números reales y su rango es el 1. Su gráfica es una línea horizontal. Si  $a < 1$  la gráfica de función exponencial es decreciente (baja de izquierda a derecha). Si  $a > 1$  la gráfica es creciente (sube de izquierda a derecha).

La figura 4.42 muestra la gráfica de la función exponencial para diferentes valores de  $a$ .

Figura 4.42



En p  
eje  
tal d  
exp

0.1  
0.01  
0.00  
0.00  
0.00  
0.00

En el siguiente teorema se presentan los límites de la función exponencial. Estos límites pueden determinarse de manera intuitiva a partir de las gráficas mostradas en la figura 4.42 y demostrarse a partir de las definiciones formales de límite infinito y de límite al infinito.

#### TEOREMA 4.14 Límites al infinito de la función exponencial

1. Si  $a > 1$  entonces  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$
2. Si  $0 < a < 1$  entonces  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$

### Derivada de la función exponencial

Al aplicar la definición de derivada de una función a la función exponencial  $f(x) = a^x$  se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \end{aligned}$$

Y como  $f'(0) = a^0 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$ , entonces  $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$ .

Se tiene entonces que la función exponencial es derivable en todos los números reales y además

$$f'(x) = f'(0) a^x$$

En otra notación la derivada de la función exponencial  $f(x) = a^x$  está dada por

$$D_x(a^x) = f'(0) a^x$$

Es decir, la razón de cambio de toda exponencial es proporcional a la misma función exponencial.

Una expresión más precisa de la derivada de la función exponencial se desarrolla en la sección 4.9.

En el ejemplo 1 se realiza una aproximación al valor de  $f'(0)$  para los valores  $a = 2$  y  $a = 3$ .

#### EJEMPLO 1 Cálculo de $f'(0)$ para $a = 2$ y $a = 3$

Determinar una aproximación para el valor de  $f'(0)$  para los valores  $a = 2$  y  $a = 3$ .

#### Solución

Para  $a = 2$  se tiene  $f'(x) = f'(0) 2^x$ , donde  $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^h - 1}{h}$

Para  $a = 3$  se tiene  $f'(x) = f'(0) 3^x$ , donde  $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^h - 1}{h}$

En la tabla anexa se observa una aproximación numérica de los límites anteriores.

Con una aproximación de 4 decimales se tiene:

$$D_x(2^x) \approx (0.6932) 2^x$$

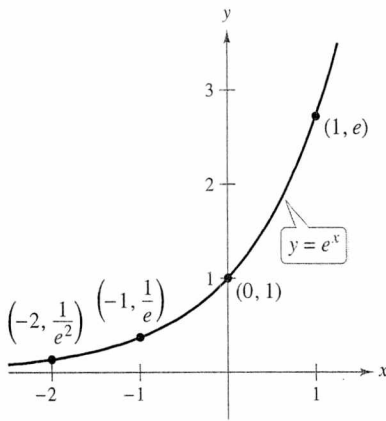
$$D_x(3^x) \approx (1.0987) 3^x$$

En particular cuando  $a \neq 1$ , el eje  $x$  es una asíntota horizontal de la gráfica de la función exponencial

$h$	$\frac{2^h - 1}{h}$	$\frac{3^h - 1}{h}$
0.1	0.717734	1.161232
0.01	0.695555	1.104669
0.001	0.693339	1.099216
0.0001	0.693171	1.098673
0.00001	0.693149	1.098618
0.000001	0.693147	1.098613

### EL NÚMERO $e$

El símbolo  $e$  fue utilizado por primera vez para representar la base de los logaritmos naturales por Leonhard Euler en una carta enviada a otro matemático Christian Goldbach en 1731.



La función exponencial natural es creciente y su gráfica es cóncava hacia arriba.

Figura 4.43

Dada la continuidad de la función exponencial, del ejemplo anterior podemos observar algo muy interesante: existe un valor  $2 < a < 3$  tal que  $0.6932 < f'(0) < 1.0987$ .

Es decir existe un valor  $a$  en el intervalo  $[2,3]$  tal que  $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$  y de manera entonces que  $D_x(a^x) = f'(0) a^x = a^x$ .

### La función exponencial natural

El único número real en el intervalo  $[2, 3]$  con la propiedad de que  $f'(0) = 1$  se conoce como el número  $e$ , y nos permite definir la función exponencial natural.

#### Definición del número $e$ y de la función exponencial natural

Se define al número  $e$  como el único número real tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Y la función exponencial  $f(x) = e^x$  se conoce como la *función exponencial natural*.

Algunas de las propiedades de la función exponencial se muestran en el siguiente teorema, la verificación de ellas se deja como un ejercicio al lector.

#### TEOREMA 4.15 Propiedades de la función exponencial natural $f(x) = e^x$

La función exponencial natural tiene las siguientes propiedades

1. El dominio es  $(-\infty, \infty)$  y el rango  $(0, \infty)$ .
2. La función es continua, creciente e inyectiva en todo su dominio.
3. La gráfica es cóncava hacia arriba en todo su dominio.
4.  $\lim_{h \rightarrow -\infty} e^x = 0$
5.  $\lim_{h \rightarrow \infty} e^x = \infty$

Cabe mencionar que las leyes de los exponentes siguen siendo válidas para el caso de la exponencial natural, en el teorema 4.16 se listan algunas de ellas.

#### TEOREMA 4.16 Propiedades de la función exponencial natural

Si  $a, b > 0$  y además  $n$  es racional, se cumplen las siguientes propiedades

- |                                |                             |
|--------------------------------|-----------------------------|
| 1. $e^0 = 1$                   | 4. $(e^a)^b = e^{ab}$       |
| 2. $e^{a+b} = e^a e^b$         | 5. $e^{-n} = \frac{1}{e^n}$ |
| 3. $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ | 6. $\frac{1}{e^{-n}} = e^n$ |

Las demostraciones de algunas de estas propiedades se incluyen en el apéndice A.

### Derivada de la función exponencial natural

Estamos en condición de enunciar el siguiente teorema que nos proporciona la derivada de la función exponencial natural  $f(x) = e^x$ .

La función y la regla

Si  $y = \frac{a}{x}$   
 $\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x^2}$

Una de los números

tes  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$   
 ¿Por qué? Profundamente

La gráfica muestra la tangencia

**TEOREMA 4.17** Derivada de la función exponencial natural

1.  $D_x(e^x) = e^x$
2.  $D_x(e^u) = e^u D_x u$

El inciso 2 del teorema 4.17 se obtiene al aplicar la regla de la cadena, pues si  $y = e^u$  y  $u = f(x)$  entonces  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$ . En otra notación  $D_x(e^u) = e^u D_x u$ .

**EJEMPLO 2** La derivada de una función exponencial natural

Derivar las funciones (a)  $y = e^{4x^2-5x+1}$ , (b)  $y = e^{\sin 3x}$  y (c)  $y = e^{4 \tan x}$

**Solución**

Se aplica de manera directa el teorema 4.17

- a)  $D_x(e^{4x^2-5x+1}) = e^{4x^2-5x+1} D_x(4x^2 - 5x + 1) = (8x - 5)e^{4x^2-5x+1}$
- b)  $D_x(e^{\sin 3x}) = e^{\sin 3x} D_x(\sin 3x) = 3 \cos 3x e^{\sin 3x}$
- c)  $D_x(e^{4 \tan x}) = e^{4 \tan x} D_x(4 \tan x) = 4 \sec^2 x e^{4 \tan x}$

En algunas aplicaciones resulta muy útil conocer un valor aproximado de  $e$ , en el ejemplo 3 se muestra una manera de aproximar este valor.

**EJEMPLO 3** Aproximando el valor de  $e$

Aproximar el valor de  $e$

**Solución**

Sabemos que  $e$  es el número en el intervalo  $[2, 3]$  tal que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$  o bien  $D_x(e^x) = e^x$ .

Supongamos que  $e = 2^c$ , entonces

$e^x = 2^{cx}$  Elevar a la potencia  $x$

$D_x(e^x) = D_x(2^{cx})$  Derivar

$D_x(e^x) \approx c(0.693147)2^{cx}$  Del ejemplo 1  $D_x(2^x) \approx (0.6932) 2^x$

$e^x \approx c(0.693147)2^{cx}$   $D_x(e^x) = e^x$

$2^{cx} \approx c(0.693147)2^{cx}$   $e^x = 2^{cx}$

$c(0.693147) \approx 1$  eliminar

$c \approx 1.442695$  resolver

$e \approx 2^{1.442695} \approx 2.718281$

Con esta técnica se puede encontrar una mejor aproximación de  $e$ . Sus primeros 40 decimales son

$e \approx 2.71828182845904523536028747135266249775724...$

**La función logaritmo natural**

Como  $e > 0$  y  $e \neq 1$  la función exponencial  $f(x) = e^x$  es creciente y además inyectiva. Por el teorema 2.2 se verifica que existe su función inversa.

La función exponencial natural y la regla de la cadena

Si  $y = e^u$  y  $u = f(x)$  entonces  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$

Una definición equivalente del número  $e$  está dada por los límites

$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$   
¿Por qué? En la sección 5.9 se profundiza en el tema.

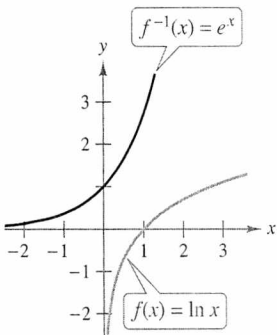
La gráfica de la función exponencial natural tiene la propiedad de que en el punto  $(0,1)$ , su tangente tiene pendiente 1.



**JOHN NAPIER (1550-1617)**

Los logaritmos fueron inventados por el matemático escocés John Napier. A partir de las dos palabras griegas *logos* (o proporción) y *arithmos* (o número), Napier inventó el término logaritmo, para describir la teoría que pasó 20 años desarrollando y que apareció por primera vez en el libro *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Una descripción de la regla de Marvelous de los logaritmos). Aunque él no introdujo la función logaritmo natural, a veces se le llama logaritmo neperiano.

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para leer más de esta biografía.



La función inversa de la función logaritmo natural es la función exponencial natural.

**Figura 4.44**

La función exponencial  $f(x) = e^x$  es una función inyectiva y por el teorema 2.2 tiene inversa.

La función exponencial es derivable en todos los números reales y tiene por función inversa a la función logaritmo natural, entonces la función logaritmo natural es derivable para todo valor  $x$  tal que  $f'(g(x)) \neq 0$  y además  $D_x(\ln x) = \frac{1}{x}$

La inversa de la función exponencial se conoce como la función logaritmo natural, se denota por  $f^{-1}(x) = \ln x$ . Su dominio son todos los reales positivos y su rango todos los números reales. En el siguiente teorema se resumen estas propiedades.

**Teorema 4.18 Propiedades de la función logaritmo natural  $f(x) = \ln x$**

La función logaritmo natural tiene las siguientes propiedades

1. El dominio es  $(0, \infty)$  y el rango  $(-\infty, \infty)$ .
2. La función es continua, creciente e inyectiva.
3. La gráfica es cóncava hacia abajo.

En la sección 4.7 se estableció que si  $f^{-1}(x) = y$  es la inversa de  $f$  entonces escribimos  $x = f(y)$ . En la notación de exponencial natural y logaritmo natural, se tiene

$$y = \ln x \text{ si y solo si } x = e^y$$

Se puede observar que la gráfica de la función logaritmo natural es simétrica a la gráfica de la función exponencial respecto a la recta  $y = x$ , como se ilustra en la figura 4.44.

Por definición se verifica que

$$\ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln x} = x \quad \forall x > 0$$

En particular se verifica que  $\ln(e) = 1$ .

El teorema 4.19 presentado sin demostración, muestra las propiedades de la función logaritmo natural, una demostración se basa en las propiedades de los exponentes y en la propia definición de la función logaritmo natural, otra se puede realizar en base a la definición de logaritmo natural como una integral definida y aplicando el teorema fundamental de cálculo, esta opción puede encontrarse en el siguiente libro de esta serie.

**TEOREMA 4.19 Propiedades de la función logaritmo natural**

Si  $a, b > 0$  y además  $n$  es racional, se cumplen las siguientes propiedades

- |                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| 1. $\ln(1) = 0$                      | 5. $\ln a^n = n \ln a$                          |
| 2. $\ln(e) = 1$                      | 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ |
| 3. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$         | 7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$   |
| 4. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ |   |

**Derivada de la función logaritmo natural**

Por el teorema 4.13 se garantiza que si una función  $f(x)$  derivable en un intervalo tiene una función inversa  $g(x)$ , entonces  $g(x)$  es derivable para todo valor  $x$  tal que  $f'(g(x)) \neq 0$

y además  $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ .

Por lo anterior, tomando  $f(x) = f'(x) = e^x$  y  $g(x) = \ln x$ , tenemos

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Estamos en condiciones de enunciar el teorema que nos proporciona la derivada de la función logaritmo natural.

La func  
la regla c  
 $u = f(x)$   
 $\frac{dy}{dx}$

De acue  
y consic  
exponer  
función  
ceversa,

La función logaritmo natural y la regla de la cadena. Si  $y = \ln u$  y  $u = f(x)$  entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

De acuerdo con el teorema 4.19 y considerando que la función exponencial es inversa de la función logaritmo natural y viceversa, se verifica que

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

### TEOREMA 4.20 Derivada de la función logaritmo natural

1.  $D_x(\ln x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$
2.  $D_x\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u} D_x u, \quad u > 0$

#### EJEMPLO 4

#### La derivada de una función logaritmo natural

En los siguientes ejercicios se aplican los teoremas 4.18, 4.19 y 4.20.

- a)  $D_x(\ln(\sec x)) = \frac{1}{\sec x} D_x(\sec x) = \frac{\sec x \tan x}{\sec x} = \tan x$
- b)  $D_x(\ln \sin x) = \frac{1}{\sin x} D_x(\sin x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$
- c)  $D_x(\ln(\sec x + \tan x)) = \frac{D_x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} = \sec x$
- d)  $D_x(\ln(\csc x - \cot x)) = \frac{D_x(\csc x - \cot x)}{\csc x - \cot x} = \frac{-\csc x \cot x + \csc^2 x}{\csc x - \cot x} = \csc x$
- e)  $D_x(a^x) = D_x(e^{\ln a^x}) = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} D_x(x \ln a) = a^x \ln a$
- f)  $D_x(a^u) = D_x(e^{\ln a^u}) = (e^{u \ln a})' = e^{u \ln a} D_x(u \ln a) = a^u \ln a D_x u$

#### EJEMPLO 5

#### Derivar funciones logarítmicas

•••► Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

- a.  $\frac{d}{dx}[\ln(2x)] = \frac{u'}{u} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x} \quad u = 2x$
- b.  $\frac{d}{dx}[\ln(x^2 + 1)] = \frac{u'}{u} = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad u = x^2 + 1$
- c.  $\frac{d}{dx}[x \ln x] = x \left( \frac{d}{dx}[\ln x] \right) + (\ln x) \left( \frac{d}{dx}[x] \right)$  Regla del producto  
 $= x \left( \frac{1}{x} \right) + (\ln x)(1)$   
 $= 1 + \ln x$
- d.  $\frac{d}{dx}[(\ln x)^3] = 3(\ln x)^2 \frac{d}{dx}[\ln x]$  Regla de la cadena  
 $= 3(\ln x)^2 \frac{1}{x}$

Napier utilizó propiedades logarítmicas para simplificar *los cálculos* que implican productos, cocientes y potencias. Por supuesto, dada la disponibilidad de calculadoras, ahora hay poca necesidad para esta aplicación particular de los logaritmos. Sin embargo, hay un gran valor en el uso de las propiedades logarítmicas para simplificar la *derivación* que implica productos, cocientes y potencias.

#### EJEMPLO 6

#### Propiedades logarítmicas como ayuda a la derivación

Derive

$$f(x) = \ln \sqrt{x+1}.$$

**Solución** Ya que

$$f(x) = \ln \sqrt{x+1} = \ln(x+1)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln(x+1) \quad \text{Reescriba antes de derivar.}$$

puede escribir

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{2(x+1)}. \quad \text{Derive.}$$

### EJEMPLO 7

### Propiedades logarítmicas como ayuda a la derivación

Derive

$$f(x) = \ln \frac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}}$$

**Solución** Ya que

$$f(x) = \ln \frac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}} \quad \text{Escriba la función original.}$$

$$= \ln x + 2 \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \ln(2x^3-1) \quad \text{Reescriba antes de derivar.}$$

se puede escribir como

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2 \left( \frac{2x}{x^2+1} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{6x^2}{2x^3-1} \right) \quad \text{Derive.}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{4x}{x^2+1} - \frac{3x^2}{2x^3-1}. \quad \text{Simplifique.}$$

En los ejemplos 6 y 7 se puede ver la ventaja de aplicar las propiedades de los logaritmos *antes* de derivar. Considérese, por ejemplo, la dificultad de derivar directamente la función del ejemplo 7.

En ocasiones es conveniente usar los logaritmos como ayuda para derivar funciones *no logarítmicas*. Este procedimiento se llama **derivación logarítmica**.

### EJEMPLO 8

### Derivación logarítmica

Encuentre la derivada de

$$y = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \neq 2.$$

**Solución** Observe que  $y > 0$  para todo  $x \neq 2$ . Así, se define  $\ln y$ . Comience tomando el logaritmo natural de cada lado de la ecuación. A continuación aplique las propiedades logarítmicas y derive de manera implícita. Por último, resuelva para  $y'$ .

$$y = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \neq 2 \quad \text{Escriba la ecuación original.}$$

$$\ln y = \ln \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{Tome el logaritmo natural de cada lado.}$$

$$\ln y = 2 \ln(x-2) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \quad \text{Propiedades logarítmicas}$$

$$\frac{y'}{y} = 2 \left( \frac{1}{x-2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{2x}{x^2+1} \right) \quad \text{Derive.}$$

$$\frac{y'}{y} = 2\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$$

Derive.

$$\frac{y'}{y} = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x-2)(x^2+1)}$$

Simplifique.

$$y' = y \left[ \frac{x^2 + 2x + 2}{(x-2)(x^2+1)} \right]$$

Despeje  $y'$ .

$$y' = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}} \left[ \frac{x^2 + 2x + 2}{(x-2)(x^2+1)} \right]$$

Sustituya  $y$ .

$$y' = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 2)}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

Simplifique.

Debido a que el logaritmo natural no está definido para números negativos, a menudo se encontrará con expresiones de la forma  $\ln|u|$ . El siguiente teorema establece que se pueden derivar funciones de la forma  $y = \ln|u|$  como si la notación de valor absoluto no estuviera presente.

#### TEOREMA 4.21 Derivada que involucra valor absoluto

Si  $u$  es una función derivable de  $x$  tal que  $u \neq 0$ , entonces

$$\frac{d}{dx} [\ln|u|] = \frac{u'}{u}.$$

**Demostración** Si  $u > 0$ , entonces  $|u| = u$ , y el resultado se obtiene del teorema 4.20. Si  $u < 0$ , entonces  $|u| = -u$ , y usted tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\ln|u|] &= \frac{d}{dx} [\ln(-u)] \\ &= \frac{-u'}{-u} \\ &= \frac{u'}{u}. \end{aligned}$$

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para el video de Bruce Edwards de esta demostración.

#### EJEMPLO 9

#### Derivada que involucra valor absoluto

Encuentre la derivada de

$$f(x) = \ln|\cos x|.$$

**Solución** Usando el teorema 4.21, haga  $u = \cos x$  y escriba

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\ln|\cos x|] &= \frac{u'}{u} & \frac{d}{dx} [\ln|u|] &= \frac{u'}{u} \\ &= \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} & u &= \cos x \\ &= -\tan x. & & \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

#### EJEMPLO 10

#### Encontrar extremos relativos

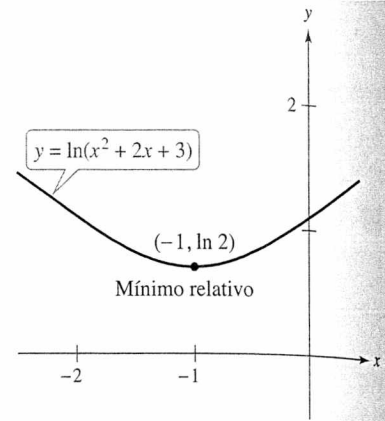
Localice el extremo relativo de

$$y = \ln(x^2 + 2x + 3).$$

**Solución** Derivando  $y$ , obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3}$$

Ya que  $dy/dx = 0$  cuando  $x = -1$ , cuando aplica el criterio de la primera derivada puede concluir que el punto  $(-1, \ln 2)$  es un mínimo relativo. Debido a que no hay otros puntos críticos, se deduce que este es el único extremo relativo. (Vea la figura 4.45.)



La derivada de  $y$  cambia de negativa a positiva en  $x = -1$ .

Figura 4.45

## 4.8 Ejercicios

Consulte [CalcChat.com](http://CalcChat.com) para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Resolver una ecuación exponencial o logarítmica** En los ejercicios 1-16, resuelva para  $x$  con una precisión de tres decimales.

- |                                     |                                   |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $e^{\ln x} = 4$                  | 2. $e^{\ln 3x} = 24$              |
| 3. $e^x = 12$                       | 4. $5e^x = 36$                    |
| 5. $9 - 2e^x = 7$                   | 6. $8e^x - 12 = 7$                |
| 7. $50e^{-x} = 30$                  | 8. $100e^{-2x} = 35$              |
| 9. $\frac{800}{100 - e^{x/2}} = 50$ | 10. $\frac{5000}{1 + e^{2x}} = 2$ |
| 11. $\ln x = 2$                     | 12. $\ln x^2 = 10$                |
| 13. $\ln(x - 3) = 2$                | 14. $\ln 4x = 1$                  |
| 15. $\ln\sqrt{x+2} = 1$             | 16. $\ln(x - 2)^2 = 12$           |

**Dibujar una gráfica** En los ejercicios 17-22, dibuje la gráfica de la función.

- |                    |                          |
|--------------------|--------------------------|
| 17. $y = e^{-x}$   | 18. $y = \frac{1}{2}e^x$ |
| 19. $y = e^x + 2$  | 20. $y = e^{x-1}$        |
| 21. $y = e^{-x^2}$ | 22. $y = e^{-x/2}$       |

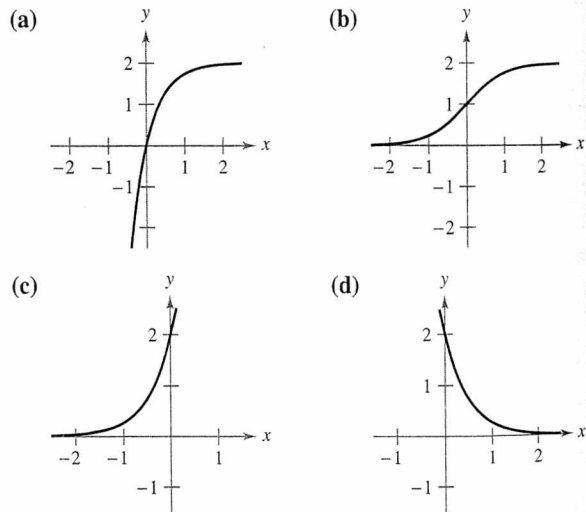
**23. Comparar las gráficas** Utilice un programa de graficación para graficar  $f(x) = e^x$  y la función dada en la misma ventana de visualización. ¿Cómo se relacionan las dos gráficas?

(a)  $g(x) = e^{x-2}$     (b)  $h(x) = -\frac{1}{2}e^x$     (c)  $q(x) = e^{-x} + 3$

**24. Asíntotas** Utilice un programa de graficación para representar gráficamente la función. Use la gráfica para determinar las asíntotas de la función.

(a)  $f(x) = \frac{8}{1 + e^{-0.5x}}$     (b)  $g(x) = \frac{8}{1 + e^{-0.5/x}}$

**Correspondencia** En los ejercicios 25-28, relacione la ecuación con la gráfica correcta. Suponga que  $a$  y  $C$  son números reales positivos. [Las gráficas están etiquetadas (a), (b), (c) y (d).]



- |                          |                                 |
|--------------------------|---------------------------------|
| 25. $y = Ce^{ax}$        | 26. $y = Ce^{-ax}$              |
| 27. $y = C(1 - e^{-ax})$ | 28. $y = \frac{C}{1 + e^{-ax}}$ |

**Funciones inversas** En los ejercicios 29-32, ilustre qué funciones son inversas entre sí graficando ambas funciones en el mismo conjunto de ejes coordenados.

- |   |  |
|---|--|
| 29. $f(x) = e^{2x}$<br>$g(x) = \ln\sqrt{x}$ | 30. $f(x) = e^{x/3}$<br>$g(x) = \ln x^3$   |
| 31. $f(x) = e^x - 1$<br>$g(x) = \ln(x + 1)$ | 32. $f(x) = e^{x-1}$<br>$g(x) = 1 + \ln x$ |

**Encontrar una derivada** En los ejercicios 33-54, encuentre la derivada.

- |                        |                      |
|------------------------|----------------------|
| 33. $f(x) = e^{2x}$    | 34. $y = e^{-8x}$    |
| 35. $y = e^{\sqrt{x}}$ | 36. $y = e^{-2x^3}$  |
| 37. $y = e^{x-4}$      | 38. $y = 5e^{x^2+5}$ |

39.  $y = \dots$   
41.  $y = \dots$   
43.  $g(t) = \dots$   
45.  $y = \dots$   
47.  $y = \dots$   
49.  $y = \dots$   
51.  $y = \dots$   
53.  $F(x) = \dots$   
Encontrar el ejercicio: la gráfica:  
55.  $f(x) = \dots$   
56.  $f(x) = \dots$   
57.  $f(x) = \dots$   
58.  $y = \dots$   
59.  $f(x) = \dots$   
60.  $y = \dots$   
61.  $y = \dots$   
62.  $y = \dots$   
Derivación:  
63.  $xe^{y-1}$   
Encontrar los ejercicios 65:  
65.  $xe^{y-1}$   
Encontrar la solución:  
67.  $f(x) = \dots$   
Ecuación:  
69.  $y = \dots$   
71.  $f(x) = \dots$   
73.  $g(x) = \dots$   
75.  $f(x) = \dots$   
77.  $g(t) = \dots$

39.  $y = e^x \ln x$

41.  $y = x^3 e^x$

43.  $g(t) = (e^{-t} + e^t)^3$

45.  $y = \ln(1 + e^{2x})$

47.  $y = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

49.  $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

51.  $y = e^x(\sin x + \cos x)$

53.  $F(x) = \int_{\pi}^{\ln x} \cos e^t dt$

40.  $y = xe^{4x}$

42.  $y = x^2 e^{-x}$

44.  $g(t) = e^{-3/t^2}$

46.  $y = \ln\left(\frac{1 + e^x}{1 - e^x}\right)$

48.  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

50.  $y = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

52.  $y = e^{2x} \tan 2x$

54.  $F(x) = \int_0^{e^{2x}} \ln(t + 1) dt$

**Encontrar una ecuación de una recta tangente** En los ejercicios 55-62, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

55.  $f(x) = e^{3x}$ , (0, 1)

56.  $f(x) = e^{-2x}$ , (0, 1)

57.  $f(x) = e^{1-x}$ , (1, 1)

58.  $y = e^{-2x+x^2}$ , (2, 1)

59.  $f(x) = e^{-x} \ln x$ , (1, 0)

60.  $y = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , (0, 0)

61.  $y = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x$ , (1, e)

62.  $y = xe^x - e^x$ , (1, 0)

**Derivación implícita** En los ejercicios 63 y 64, utilice la derivación implícita para encontrar  $dy/dx$ .

63.  $xe^y - 10x + 3y = 0$

64.  $e^{xy} + x^2 - y^2 = 10$

**Encontrar la ecuación de una recta tangente** En los ejercicios 65 y 66, halle una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

65.  $xe^y + ye^x = 1$ , (0, 1)

66.  $1 + \ln xy = e^{x-y}$ , (1, 1)

**Encontrar una segunda derivada** En los ejercicios 67 y 68, halle la segunda derivada de la función.

67.  $f(x) = (3 + 2x)e^{-3x}$

68.  $g(x) = \sqrt{x} + e^x \ln x$

**Ecuaciones diferenciales** En los ejercicios 69 y 70, demuestre que la función  $y = f(x)$  es una solución de la ecuación diferencial.

69.  $y = 4e^{-x}$

70.  $y = e^{3x} + e^{-3x}$

$y'' - y = 0$

$y'' - 9y = 0$

**Encontrar extremos y puntos de inflexión** En los ejercicios 71-78, halle los extremos y los puntos de inflexión (si existen) de la función. Utilice un programa de graficación para trazar la función y confirmar sus resultados.

71.  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

72.  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

73.  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-2)^2/2}$

74.  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/2}$

75.  $f(x) = x^2 e^{-x}$

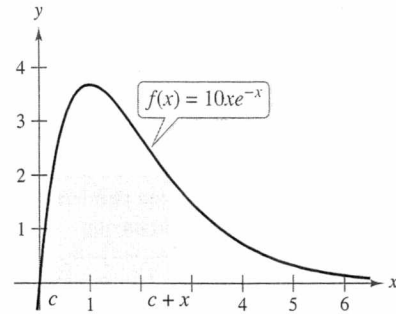
76.  $f(x) = xe^{-x}$

77.  $g(t) = 1 + (2 + t)e^{-t}$

78.  $f(x) = -2 + e^{3x}(4 - 2x)$

79. **Área** Encuentre el área del rectángulo más grande que puede ser inscrito bajo la curva  $y = e^{-x^2}$  en el primer y segundo cuadrantes.

**80. Área** Realice los siguientes pasos para encontrar el área máxima del rectángulo que se muestra en la figura.

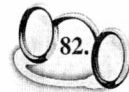


- (a) Resuelva en la ecuación  $f(c) = f(c + x)$ .
- (b) Utilice el resultado del inciso (a) para escribir el área en función de  $x$ . [Sugerencia:  $A = xf(c)$ .]
- (c) Utilice un programa de graficación para trazar la función de área. Use la gráfica para aproximar las dimensiones del rectángulo de área máxima. Determine el área máxima.
- (d) Utilice un programa de graficación para trazar la expresión que se encuentra en el inciso (a). Use la gráfica para aproximar

$\lim_{x \rightarrow 0^+} c$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} c$ .

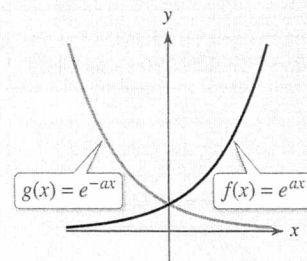
Utilice este resultado para describir los cambios en las dimensiones y la posición del rectángulo para  $0 < x < \infty$ .

**81. Encontrar una ecuación de una recta tangente** Encuentre un punto de la gráfica de la función  $f(x) = e^{2x}$  tal que la recta tangente a la gráfica en ese punto pasa por el origen. Utilice un programa de graficación para trazar la recta tangente  $f$  en la misma ventana de visualización.



82.

**¿CÓMO LO VE?** La figura muestra las gráficas de  $f$  y  $g$ , donde  $a$  es un número real positivo. Identifique el (los) intervalo(s) abierto(s) en el (los) que las gráficas de  $f$  y  $g$ : (a) crecen o decrecen, y (b) son cóncavas hacia arriba o cóncavas hacia abajo.



**83. Depreciación** El valor  $V$  de un artículo  $t$  años después de su adquisición es  $V = 15,000e^{-0.6286t}$ ,  $0 \leq t \leq 10$ .

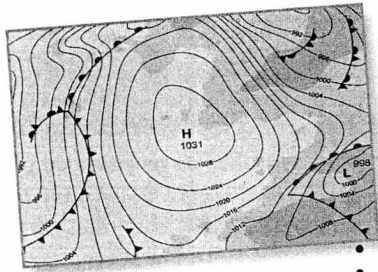
- (a) Utilice un programa de graficación para trazar la función.
- (b) Halle las tasas de variación de  $V$  con respecto a  $e$  cuando  $t = 1$  y  $t = 5$ .
- (c) Utilice un programa de graficación para trazar las rectas tangentes a la función cuando  $t = 1$  y  $t = 5$ .

**84. Movimiento armónico** El desplazamiento del equilibrio de una masa oscilante en el extremo de un resorte suspendido de un techo es  $y = 1.56e^{-0.22t} \cos 4.9t$ , donde  $y$  es el desplazamiento (en pies) y  $t$  es el tiempo (en segundos). Utilice un programa de graficación para trazar la función de desplazamiento sobre el intervalo  $[0, 10]$ . Encuentre un valor de  $t$  en el que el desplazamiento es menor que 3 pulgadas desde la posición de equilibrio.

**85. Presión atmosférica** Un meteorólogo mide la presión atmosférica  $P$  (en kilogramos por pie cuadrado) a una altura  $h$  (en kilómetros). Los datos se muestran a continuación.

$h$	0	5	10	15	20
$P$	10,332	5583	2376	1240	517

- (a) Utilice un programa de graficación para trazar los puntos  $(h, \ln P)$ . Utilice las capacidades de regresión de la utilería de graficación para encontrar un modelo lineal de los puntos de los datos revisados.
- (b) La recta en el inciso (a) tiene la forma  $\ln P = ah + b$ . Escriba la ecuación en forma exponencial.
- (c) Utilice un programa de graficación para trazar los datos originales y graficar el modelo exponencial en el inciso (b).
- (d) Encuentre la tasa de cambio de la presión cuando  $h = 5$  y  $h = 18$ .



**86. Modelado de datos** La tabla muestra los valores aproximados de un sedán de tamaño medio para los años 2006 a 2012. La variable  $t$  representa el tiempo (en años), con  $t = 6$  correspondiente a 2006.

$t$	6	7	8	9
$V$	\$23,046	\$20,596	\$18,851	\$17,001

$t$	10	11	12
$V$	\$15,226	\$14,101	\$12,841

- (a) Utilice las capacidades de regresión de un programa de graficación para ajustar modelos lineales y cuadráticos a los datos. Grafique los datos y los modelos.
- (b) ¿Qué representa la pendiente en el modelo lineal en el inciso (a)?
- (c) Utilice la capacidad de regresión de un programa de graficación para adaptarse a un modelo exponencial a los datos.

- (d) Determine la asíntota horizontal del modelo exponencial encontrado en el inciso (c). Interprete su significado en el contexto del problema.
- (e) Utilice el modelo exponencial para encontrar la tasa de disminución en el valor del sedán cuando  $t = 7$  y  $t = 11$ .

**Aproximación lineal y cuadrática** En los ejercicios 87 y 88, utilice un programa de graficación para representar gráficamente la función. A continuación grafique

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) \text{ y}$$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{1}{2}f''(0)(x - 0)^2$$

en la misma ventana de visualización. Compare los valores de  $f$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  y sus primeras derivadas en  $x = 0$ .

87.  $f(x) = e^x$

88.  $f(x) = e^{x/2}$

**Fórmula de Stirling** Para valores grandes de  $n$ ,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n - 1) = n$$

se puede aproximar por la fórmula de Stirling,

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

En los ejercicios 89 y 90, encuentre el valor exacto de  $n!$  y luego aproxime con la fórmula de Stirling.

89.  $n = 12$

90.  $n = 15$

**Evaluar un logaritmo** En los ejercicios 91-94, utilice un programa de graficación para evaluar el logaritmo (a) con la tecla logaritmo natural y (b) usando las herramientas de integración para calcular la integral  $\int_1^x (1/t) dt$ .

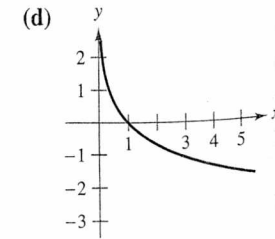
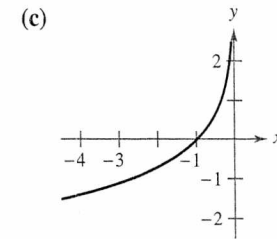
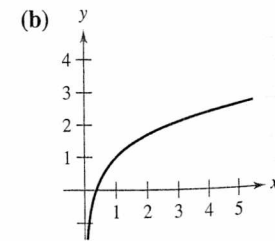
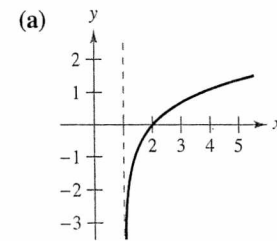
91.  $\ln 45$

92.  $\ln 8.3$

93.  $\ln 0.8$

94.  $\ln 0.6$

**Relación** En los ejercicios 95-98, relacione la función con su gráfica. [Las gráficas están etiquetadas (a), (b), (c) y (d).]



95.  $f(x) = \ln x + 1$

96.  $f(x) = -\ln x$

97.  $f(x) = \ln(x - 1)$

98.  $f(x) = -\ln(-x)$

Dibujar de la fu

99.  $f(x)$

101.  $f(x)$

103.  $f(x)$

105.  $h(x)$

Usar la 107 y 10 mar los 1.0986.

107. (a)

108. (a)

Desarr 109-118 llar la e

109.  $\ln$

111.  $\ln$

113.  $\ln$

115.  $\ln$

117.  $\ln$

Expres escriba

119.  $\ln$

120. 3 ]

121.  $\frac{1}{3}$  ]

122. 2 [

123. 2 ]

124.  $\frac{3}{2}$  ]

Compr ejerci una her ventana  $f = g$ .

125.  $f(x)$

126.  $f(x)$

Determin encuent

127.  $\lim_{x \rightarrow 1}$

129.  $\lim_{x \rightarrow 1}$

**Dibujar una gráfica** En los ejercicios 99-106, trace la gráfica de la función y establezca su dominio.

99.  $f(x) = 3 \ln x$       100.  $f(x) = -2 \ln x$   
 101.  $f(x) = \ln 2x$       102.  $f(x) = \ln|x|$   
 103.  $f(x) = \ln(x - 3)$       104.  $f(x) = \ln x - 4$   
 105.  $h(x) = \ln(x + 2)$       106.  $f(x) = \ln(x - 2) + 1$

**Usar las propiedades de los logaritmos** En los ejercicios 107 y 108, utilice las propiedades de los logaritmos para aproximar los logaritmos indicados, dado que  $\ln 2 \approx 0.6931$  y  $\ln 3 \approx 1.0986$ .

107. (a)  $\ln 6$       (b)  $\ln \frac{2}{3}$       (c)  $\ln 81$       (d)  $\ln \sqrt{3}$   
 108. (a)  $\ln 0.25$       (b)  $\ln 24$       (c)  $\ln \sqrt[3]{12}$       (d)  $\ln \frac{1}{72}$

**Desarrollar una expresión logarítmica** En los ejercicios 109-118, utilice las propiedades de los logaritmos para desarrollar la expresión logarítmica.

109.  $\ln \frac{x}{4}$       110.  $\ln \sqrt{x^5}$   
 111.  $\ln \frac{xy}{z}$       112.  $\ln(xyz)$   
 113.  $\ln(x\sqrt{x^2 + 5})$       114.  $\ln \sqrt{a - 1}$   
 115.  $\ln \sqrt{\frac{x - 1}{x}}$       116.  $\ln(3e^2)$   
 117.  $\ln z(z - 1)^2$       118.  $\ln \frac{1}{e}$

**Expresar como una sola cantidad** En los ejercicios 119-124, escriba la expresión como el logaritmo de una sola cantidad.

119.  $\ln(x - 2) - \ln(x + 2)$   
 120.  $3 \ln x + 2 \ln y - 4 \ln z$   
 121.  $\frac{1}{3}[2 \ln(x + 3) + \ln x - \ln(x^2 - 1)]$   
 122.  $2[\ln x - \ln(x + 1) - \ln(x - 1)]$   
 123.  $2 \ln 3 - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$   
 124.  $\frac{3}{2}[\ln(x^2 + 1) - \ln(x + 1) - \ln(x - 1)]$

**Comprobar las propiedades de los logaritmos** En los ejercicios 125 y 126, (a) compruebe que  $f = g$  mediante el uso de una herramienta de graficación para trazar  $f$  y  $g$  en la misma ventana de visualización, y (b) compruebe algebraicamente que  $f = g$ .

125.  $f(x) = \ln \frac{x^2}{4}$ ,  $x > 0$ ,  $g(x) = 2 \ln x - \ln 4$   
 126.  $f(x) = \ln \sqrt{x(x^2 + 1)}$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}[\ln x + \ln(x^2 + 1)]$

**Determinar el valor de un límite** En los ejercicios 127-130, encuentre el límite.

127.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x - 3)$       128.  $\lim_{x \rightarrow 6^-} \ln(6 - x)$   
 129.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \ln[x^2(3 - x)]$       130.  $\lim_{x \rightarrow 5^+} \ln \frac{x}{\sqrt{x - 4}}$

**Determinar la derivada** En los ejercicios 131-154, encuentre la derivada de la función.

131.  $f(x) = \ln(3x)$       132.  $f(x) = \ln(x - 1)$   
 133.  $g(x) = \ln x^2$       134.  $h(x) = \ln(2x^2 + 1)$   
 135.  $y = (\ln x)^4$       136.  $y = x^2 \ln x$   
 137.  $y = \ln(t + 1)^2$       138.  $y = \ln \sqrt{x^2 - 4}$   
 139.  $y = \ln(x\sqrt{x^2 - 1})$       140.  $y = \ln[t(t^2 + 3)^3]$   
 141.  $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$       142.  $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x + 3}\right)$   
 143.  $g(t) = \frac{\ln t}{t^2}$       144.  $h(t) = \frac{\ln t}{t}$   
 145.  $y = \ln(\ln x^2)$       146.  $y = \ln(\ln x)$   
 147.  $y = \ln \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}$       148.  $y = \ln \sqrt[3]{\frac{x - 1}{x + 1}}$   
 149.  $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{4 + x^2}}{x}\right)$       150.  $f(x) = \ln(x + \sqrt{4 + x^2})$   
 151.  $y = \ln|\sin x|$       152.  $y = \ln|\csc x|$   
 153.  $y = \ln\left|\frac{\cos x}{\cos x - 1}\right|$       154.  $y = \ln|\sec x + \tan x|$

**Determinar la ecuación de una recta tangente** En los ejercicios 155-162, (a) encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto dado, (b) use una graficadora para representar gráficamente la función y su recta tangente en el punto y (c) use la función derivada de una herramienta de graficación para confirmar sus resultados.

155.  $y = \ln x^4$ ,  $(1, 0)$   
 156.  $y = \ln x^{3/2}$ ,  $(1, 0)$   
 157.  $f(x) = 3x^2 - \ln x$ ,  $(1, 3)$   
 158.  $f(x) = 4 - x^2 - \ln\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$ ,  $(0, 4)$   
 159.  $f(x) = \ln \sqrt{1 + \sin^2 x}$ ,  $\left(\frac{\pi}{4}, \ln \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$   
 160.  $f(x) = \sin 2x \ln x^2$ ,  $(1, 0)$   
 161.  $f(x) = x^3 \ln x$ ,  $(1, 0)$   
 162.  $f(x) = \frac{1}{2}x \ln x^2$ ,  $(-1, 0)$

**Determinar la derivada implícita** En los ejercicios 163-166, use la derivación implícita para encontrar  $dx/dy$ .

163.  $x^2 - 3 \ln y + y^2 = 10$       164.  $\ln xy + 5x = 30$   
 165.  $4x^3 + \ln y^2 + 2y = 2x$       166.  $4xy + \ln x^2 y = 7$

**Ecuación diferencial** En los ejercicios 167 y 168, demuestre que la función es una solución de la ecuación diferencial.

- | Función                 | Ecuación diferencial |
|-------------------------|----------------------|
| 167. $y = 2 \ln x + 3$  | $xy'' + y' = 0$      |
| 168. $y = x \ln x - 4x$ | $x + y - xy' = 0$    |

**Extremos relativos y puntos de inflexión** En los ejercicios 169-174, localice cualquier extremo relativo y punto de inflexión. Utilice un programa de graficación para confirmar sus resultados.

169.  $y = \frac{x^2}{2} - \ln x$       170.  $y = 2x - \ln(2x)$   
 171.  $y = x \ln x$       172.  $y = \frac{\ln x}{x}$   
 173.  $y = \frac{x}{\ln x}$       174.  $y = x^2 \ln \frac{x}{4}$

**Aproximación lineal y cuadrática** En los ejercicios 175 y 176, utilice un programa de graficación para representar gráficamente la función. Después grafique

$P_1(x) = f(1) + f'(1)(x - 1)$

y

$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{1}{2}f''(1)(x - 1)^2$

en la misma ventana de visualización. Compare los valores de  $f, P_1, P_2$  y sus primeras derivadas en  $x = 1$ .

175.  $f(x) = \ln x$       176.  $f(x) = x \ln x$

**Usar el método de Newton** En los ejercicios 177 y 178, utilice el método de Newton para aproximar, con tres decimales, la coordenada del punto de intersección de las gráficas de las dos ecuaciones. Utilice un programa de graficación para verificar su resultado.

177.  $y = \ln x, y = -x$       178.  $y = \ln x, y = 3 - x$

**Derivación logarítmica** En los ejercicios 179-184, utilice la derivación logarítmica para encontrar  $dy/dx$ .

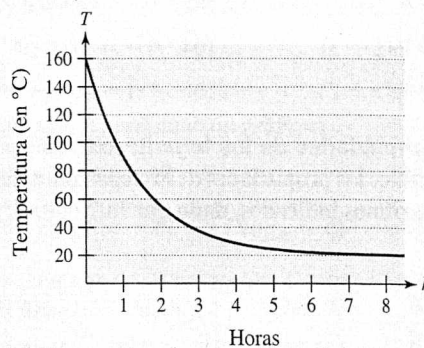
179.  $y = x\sqrt{x^2 + 1}, x > 0$   
 180.  $y = \sqrt{x^2(x + 1)(x + 2)}, x > 0$   
 181.  $y = \frac{x^2\sqrt{3x - 2}}{(x + 1)^2}, x > \frac{2}{3}$   
 182.  $y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}, x > 1$   
 183.  $y = \frac{x(x - 1)^{3/2}}{\sqrt{x + 1}}, x > 1$   
 184.  $y = \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 2)}, x > 2$

**DESARROLLO DE CONCEPTOS**

185. **Propiedades** En sus propias palabras, escriba las propiedades de la función logaritmo natural.  
 186. **Base** Defina la base para la función logaritmo natural.  
 187. **Comparar funciones** Sea  $f$  una función positiva y derivable en toda la recta real. Sea  $g(x) = \ln f(x)$ .  
 (a) Cuando  $g$  aumenta, ¿ $f$  debe aumentar? Explique.  
 (b) ¿Cuando la gráfica de  $f$  es cóncava hacia arriba, la gráfica de  $g$  debe ser cóncava hacia arriba? Explique.



**¿CÓMO LO VE?** La gráfica muestra la temperatura  $T$  (en °C) de un objeto  $h$  horas después de haberlo sacado de un horno.



- (a) Encuentre  $\lim_{h \rightarrow \infty} T$ . ¿Qué representa este límite?  
 (b) ¿Cuándo cambia la temperatura más rápidamente?

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 189-192, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falsa.

189.  $\ln(x + 25) = \ln x + \ln 25$   
 190.  $\ln xy = \ln x \ln y$   
 191. Si  $y = \ln \pi$ , entonces  $y' = 1/\pi$ .  
 192. Si  $y = \ln e$ , entonces  $y' = 1$ .

**A 193. Hipoteca casera** El término  $t$  (en años) de una hipoteca de una casa de 200 000 dólares a un interés del 7.5% se puede aproximar por

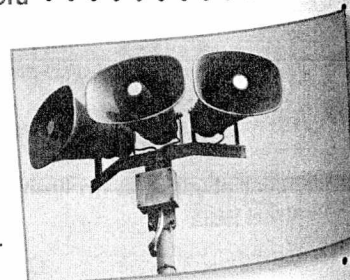
$t = 13.375 \ln\left(\frac{x}{x - 1250}\right), x > 1250$

- donde  $x$  es el pago mensual en dólares.  
 (a) Utilice un programa de graficación para trazar el modelo.  
 (b) Utilice el modelo para aproximar el plazo de la hipoteca de la casa para que el pago mensual sea de \$1398.43. ¿Cuál es el monto total que se paga?  
 (c) Utilice el modelo para aproximar el plazo de la hipoteca de la casa para que el pago mensual sea de \$1611.19. ¿Cuál es el monto total que se paga?  
 (d) Determine las tasas instantáneas de cambio de  $t$  respecto a  $x$ , cuando  $x = \$1398.43$  y  $x = \$1611.19$ .  
 (e) Escriba un breve párrafo describiendo el beneficio del pago mensual más alto.

**194. Intensidad sonora**

La relación entre el número de decibeles y la intensidad de un sonido en watts por centímetro cuadrado es

$$\beta = \frac{10}{\ln 10} \ln\left(\frac{I}{10^{-16}}\right)$$



- (a) Utilice las propiedades de los logaritmos para escribir la fórmula en forma más sencilla.  
 (b) Determine el número de decibeles de un sonido con una intensidad de  $10^{-5}$  watts por centímetro cuadrado.

195. Mo (en boo

P T P T

Un T = (a) (b) (c)

196. Mc alti una do) des

h P

(a) (b) (c)

4.

La raza ponencia misma

195. **Modelar datos** La tabla muestra las temperaturas  $T$  (en  $^{\circ}\text{F}$ ) en las que el agua hierve a presiones  $p$  seleccionadas (en libras por pulgada cuadrada). (Fuente: *Standard Handbook of Mechanical Engineers*)

$p$	5	10	14.696 (1 atm)	20
$T$	162.24 $^{\circ}$	193.21 $^{\circ}$	212.00 $^{\circ}$	227.96 $^{\circ}$

$p$	30	40	60	80	100
$T$	250.33 $^{\circ}$	267.25 $^{\circ}$	292.71 $^{\circ}$	312.03 $^{\circ}$	327.81 $^{\circ}$

Un modelo que aproxima a los datos es

$$T = 87.97 + 34.96 \ln p + 7.91 \sqrt{p}.$$

- (a) Utilice un programa de graficación para trazar los datos y graficar el modelo.  
 (b) Determine las tasas de variación de  $T$  respecto a  $p$  cuando  $p = 10$  y  $p = 70$ .  
 (c) Utilice un programa de graficación para graficar  $T'$ . Encuentre  $\lim_{p \rightarrow \infty} T'(p)$  e interprete el resultado en el contexto del problema.
196. **Modelar datos** La presión atmosférica disminuye con la altitud. A nivel del mar, la presión promedio del aire es de una atmósfera (1.033227 kilogramos por centímetro cuadrado). La tabla muestra las presiones (en atmósferas) a altitudes  $h$  seleccionadas (en kilómetros).

$h$	0	5	10	15	20	25
$p$	1	0.55	0.25	0.12	0.06	0.02

- (a) Utilice un programa de graficación para encontrar un modelo de la forma  $p = a + b \ln h$  para los datos. Explique por qué el resultado es un mensaje de error.  
 (b) Utilice un programa de graficación para encontrar el modelo logarítmico  $h = a + b \ln p$  para los datos.  
 (c) Utilice un programa de graficación para trazar los datos y graficar el modelo.

- (d) Utilice el modelo para estimar la altitud cuando  $p = 0.75$ .  
 (e) Utilice el modelo para estimar la presión cuando  $h = 13$ .  
 (f) Utilice el modelo para encontrar las tasas de cambio de presión cuando  $h = 5$  y  $h = 20$ . Interprete los resultados.

197. **Tractriz** Una persona que camina a lo largo de un muelle arrastra un barco con una cuerda de 10 metros. El barco se desplaza a lo largo de un camino conocido como *tractriz* (vea la figura). La ecuación de este camino es

$$y = 10 \ln \left( \frac{10 + \sqrt{100 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{100 - x^2}.$$

- (a) Utilice un programa de graficación para trazar la función.  
 (b) ¿Cuáles son las pendientes de esta trayectoria cuando  $x = 5$  y  $x = 9$ ?  
 (c) ¿Qué significa la pendiente de la trayectoria de aproximación cuando  $x \rightarrow 10$ ?

198. **Teorema de los números primos** Hay 25 números primos menores que 100. El teorema de los números primos establece que el número de primos menores que  $x$  es aproximadamente

$$p(x) \approx \frac{x}{\ln x}.$$

Utilice esta aproximación para estimar la tasa (números primos por 100 enteros) en los que se producen los números primos cuando

- (a)  $x = 1000$   
 (b)  $x = 1,000,000$ .  
 (c)  $x = 1,000,000,000$ .

199. **Conjetura** Utilice un programa de graficación para representar  $f$  y  $g$  gráficamente en la misma ventana de visualización y determinar cuál está aumentando a mayor velocidad para grandes valores de  $x$ . ¿Qué puede concluir acerca de la tasa de crecimiento de la función logaritmo natural?

- (a)  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$   
 (b)  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = \sqrt[4]{x}$

Christopher Dodge/Shutterstock.com

## 4.9 Derivada de la función exponencial de base $a$ y de la función logaritmo en base $a$

- Desarrollar propiedades para derivar la función exponencial de base  $a$ .
- Desarrollar propiedades para derivar la función logaritmo de base  $a$ .
- Determinar el cambio de base de un logaritmo.
- Utilizar las propiedades de la derivación logarítmica para determinar la derivada de funciones de la forma  $f(x)^{g(x)}$ .

### La derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$

En la sección anterior se definió a la función exponencial como una función de la forma  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$ . Su dominio son todos los números reales y si  $a \neq 1$  el rango está formado por todos los reales positivos.

La razón de cambio de toda exponencial es proporcional a la misma función exponencial.

En la sección 4.8 se verificó la propiedad  $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$

Se determinó además que la razón de cambio de toda exponencial es proporcional a la misma función exponencial, es decir

$$f'(x) = f'(0)a^x$$

Estamos en condiciones de determinar con precisión la derivada de la función exponencial  $f(x) = a^x$ .

En la sección anterior se estableció la propiedad  $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$  de manera que

$$D_x(a^x) = D_x(e^{\ln a^x}) = D_x(e^{x \ln a}) = e^{x \ln a} D_x(x \ln a) = a^x \ln a$$

En general, se tiene que

$$D_x(a^u) = D_x(e^{\ln a^u}) = D_x(e^{u \ln a}) = e^{u \ln a} D_x(u \ln a) = a^u \ln a D_x u$$

**TEOREMA 4.22 Derivada de la función exponencial  $f(x) = a^x$**

1.  $D_x(a^x) = a^x \ln a$
2.  $D_x(a^u) = a^u \ln a D_x u$

**EJEMPLO 1 Derivada de funciones exponenciales**

En este ejemplo se muestra la derivada de algunas funciones exponenciales

1.  $D_x(\pi^x) = \pi^x(\ln \pi)$
2.  $D_x(2^{3x}) = 2^{3x}(\ln 2) D_x(3x) = (3 \ln 2)2^{3x}$
3.  $D_x(3^{2 \sin x}) = 3^{2 \sin x}(\ln 3) D_x(2 \sin x) = 2 \ln 3(\cos x)3^{2 \sin x}$
4.  $D_x(5^{\tan 6x}) = 5^{\tan 6x}(\ln 5) D_x(\tan 6x) = 6 \ln 5(\sec^2 6x)5^{\tan 6x}$
5.  $D_x(7^{3x^2-4x+2}) = 7^{3x^2-4x+2}(\ln 7) D_x(3x^2 - 4x + 2) = 2 \ln 7(3x - 2)7^{3x^2-4x+2}$
6.  $D_x(10^{\sec x}) = 10^{\sec x}(\ln 10) D_x(\sec x) = \ln 10(\sec x \tan x)10^{\sec x}$

**La función logaritmo en base  $a$ :  $f(x) = \log_a x$**

Si consideramos que para  $a > 0, a \neq 1$  la función exponencial  $f(x) = a^x$  es monótona y por tanto inyectiva, entonces por el teorema 2.2 existe su función inversa (esta es la generalización de la definición de función logaritmo natural).

La inversa de la función exponencial  $f(x) = a^x$  se conoce como la *función logaritmo en base  $a$*  y se representa por  $f^{-1}(x) = \log_a x$ . Su dominio son todos los reales positivos y su rango todos los números reales, y se satisface que

$$y = \log_a x \text{ si y solo si } x = a^y$$

Al ser funciones inversas una de otra, la gráfica de la función logaritmo en base  $a$  es simétrica a la gráfica de la función exponencial respecto a la recta  $y = x$ . Figura 4.45

Por definición se verifica que

$$\begin{aligned} \log_a(a^x) &= x & \forall x \in \mathbb{R} \\ a^{\log_a x} &= x & \forall x > 0 \end{aligned}$$

Para el caso particular en que  $a = 10$  se define  $\log_{10} x = \log x$  y se lee simplemente logaritmo de  $x$ , y se tiene

$$\begin{aligned} y &= \log x \text{ si y solo si } x = 10^y \\ \log(10^x) &= x & \forall x \in \mathbb{R} \\ 10^{\log x} &= x & \forall x > 0 \end{aligned}$$

Para el caso particular en que  $a = e$  se define  $\log_e x = \ln x$  y se lee logaritmo natural de  $x$ , y se cumple como ya hemos estudiado

Si  $x > 0$  entonces  $\log_a x$  es el exponente al que debe elevarse la base  $a$  para obtener  $x$

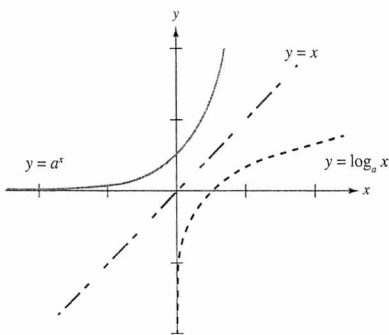


Figura 4.45

Se ti

Una f  
funci

1

Se tiene la siguiente notación

$$\log_e x = \ln x$$

$$\log_{10} x = \log x$$

$$y = \ln x \text{ si y solo si } x = e^y$$

$$\ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln x} = x \quad \forall x > 0$$

En el siguiente teorema, presentado sin demostración, se enlistan algunas propiedades de la función logaritmo en base  $a$ . Se considera que la función logaritmo  $y = \log_a x$  es inyectiva, continua y creciente en todo su dominio.

#### TEOREMA 4.23 Propiedades de la función logaritmo en base $a$

Para todo número real  $a > 1$ , se cumplen las siguientes propiedades para todos los valores  $x, y > 0$ .

$$1. \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$2. \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$3. \log_a x^y = y \log_a x$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

$$6. \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$7. \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\log x}{\log a}$$

#### Demstración

La demostración se deja al lector como ejercicio y basta aplicar la definición de la función logaritmo y las leyes de los exponentes. Por ejemplo, para demostrar (6) si  $y = \log_a x$  entonces por definición  $x = a^y$ , tenemos

$$x = a^y \quad \text{Aplicando logaritmo en base } b$$

$$\log_b x = \log_b a^y \quad \text{Teorema 4.23 inciso 3}$$

$$\log_b x = y \log_b a \quad \text{Como } a \neq 1 \text{ entonces } \log_b a \neq 0$$

$$y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\text{De donde } \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

La demostración de (7) es el caso particular de (6) para  $b = e$  y  $b = 10$ , recordando que  $\log_e x = \ln x$  y  $\log_{10} x = \log x$ .

#### Derivada de la función logaritmo en base $a$ : $f(x) = \log_a x$

Para hallar la derivada de la función logaritmo en base  $a$  se puede proceder como en la sección anterior aplicando el teorema 4.13 y utilizando el hecho de que la función  $y = \log_a x$  es la inversa de  $y = a^x$ . Sin embargo, en esta ocasión utilizaremos el teorema 4.23 para resolver este problema.

De acuerdo con el inciso 1 del teorema 4.23, se verifica

$$y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Una propiedad importante de la función logaritmo en base  $a$  es

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\log x}{\log a}$$

La función logaritmo y la regla de la cadena

Si  $y = \log_a u$  y  $u = f(x)$  entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

De donde  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\ln a)u} \frac{du}{dx}$

De manera que

$$D_x y = D_x(\log_a x) = D_x \left( \frac{\ln x}{\ln a} \right) \quad \text{Derivar}$$

$$D_x(\log_a x) = \frac{1}{\ln a} D_x(\ln x) \quad \text{Simplificar}$$

$$D_x(\log_a x) = \frac{1}{(\ln a)x}$$

Para resumir estos resultados, presentamos el siguiente teorema.

#### TEOREMA 4.24 Derivada de la función logaritmo en base $a$

$$1. D_x(\log_a x) = \frac{1}{(\ln a)x}$$

$$2. D_x(\log_a x) = \frac{D_x u}{(\ln a)u}$$

#### EJEMPLO 2

#### La derivada de una función logaritmo

En el presente ejemplo se muestra la derivada de algunas funciones de la forma  $\log_a x$ .

$$1. D_x(\log_7(4x)) = \frac{D_x(4x)}{(\ln 7)(4x)} = \frac{1}{(\ln 7)(x)}$$

$$2. D_x(\log_4 \sin x) = \frac{D_x(\sin x)}{(\ln 4)\sin x} = \frac{\cos x}{(\ln 4)\sin x} = \frac{1}{\ln 4} \cot x$$

$$3. D_x(\log_5(\sec x)) = \frac{D_x(\sec x)}{(\ln 5)\sec x} = \frac{1}{\ln 5} \tan x$$

$$4. D_x(\log_3(x^2 + 4x)) = \frac{D_x(x^2 + 4x)}{(\ln 3)(x^2 + 4x)} = \frac{2x + 4}{(\ln 3)(x^2 + 4x)}$$

#### La función logaritmo en base 10

Para estudiar la función logaritmo en base 10, consideramos el teorema anterior para el caso  $a = 10$ . De esta manera tenemos el teorema 4.25.

#### TEOREMA 4.25 Derivada de la función logaritmo en base 10

$$1. D_x(\log x) = \frac{1}{(\ln 10)x}, \quad x > 0$$

$$2. D_x(\log u) = \frac{D_x u}{(\ln 10)u}, \quad u > 0$$

#### Derivación logarítmica

Con ayuda de la regla de la cadena, podemos derivar funciones de la forma

$$y = (f(x))^n \quad D_x y = n(f(x))^{n-1} D_x(f(x))$$

$$y = a^{f(x)} \quad D_x y = a^{f(x)}(\ln a) D_x(f(x))$$

Sin embargo, las fórmulas y procedimientos anteriores no pueden aplicarse para derivar funciones de la forma función elevada a otra función.

Es posible utilizar logaritmos para determinar la derivada de funciones del tipo  $f(x)^{g(x)}$ , a este procedimiento se le conoce como derivación logarítmica y se presenta en el siguiente teorema.

**Teorema 4.26 Derivación logarítmica**

$$D_x(f^g) = f^g \left[ g \frac{f'}{f} + g' \ln f \right]$$

**Demostración**

Dada la función  $y = f(x)^{g(x)}$ , tenemos

$y = f(x)^{g(x)}$	Aplicar logaritmos
$\ln y = \ln(f(x)^{g(x)})$	Teorema 4.19
$\ln y = g(x) \ln f(x)$	Derivar implícitamente
$\frac{y'}{y} = g(x) D_x(\ln f(x)) + D_x(g(x)) \ln f(x)$	Simplificar
$y' = y \left[ g(x) \frac{D_x(f(x))}{f(x)} + D_x(g(x)) \ln f(x) \right]$	Despejar
$y' = f(x)^{g(x)} \left[ g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x) \ln f(x) \right]$	

**EJEMPLO 3****Derivación logarítmica**

Calcular  $D_x((5x + 1)^{\sec x})$

**Solución**

$y = (5x + 1)^{\sec x}$	Aplicar logaritmo
$\ln y = \ln(5x + 1)^{\sec x}$	Teorema 4.19
$\ln y = \sec x \ln(5x + 1)$	Derivar implícitamente
$\frac{y'}{y} = \sec x D_x(\ln(5x + 1)) + D_x(\sec x) \ln(5x + 1)$	Regla de la cadena
$\frac{y'}{y} = \sec x \frac{D_x(5x + 1)}{5x + 1} + \sec x \tan x \ln(5x + 1)$	Regla de la cadena
$\frac{y'}{y} = \frac{5 \sec x}{5x + 1} + \ln(5x + 1)^{\sec x \tan x}$	Simplificar
$y' = y \left( \frac{5 \sec x}{5x + 1} + \ln(5x + 1)^{\sec x \tan x} \right)$	Despejar
$y' = (5x + 1)^{\sec x} \left( \frac{5 \sec x}{5x + 1} + \ln(5x + 1)^{\sec x \tan x} \right)$	

**EJEMPLO 4****Derivada logarítmica  $D_x(u^u)$** 

Si  $u = u(x)$  calcular  $D_x(u^u)$

**Solución**

$y = u^u$	Aplicar logaritmo
$\ln y = \ln u^u$	Teorema 4.19
$\ln y = u \ln(u)$	Derivar implícitamente
$\frac{y'}{y} = u D_x(\ln u) + D_x u(\ln u)$	Regla de la cadena

$$D_x(u^u) = u^u \ln(eu) D_x u$$

$$\frac{y'}{y} = u \frac{D_x u}{u} + D_x u (\ln u)$$

$$\frac{y'}{y} = D_x u + D_x u (\ln u)$$

$$y' = y(1 + \ln u) D_x u$$

$$y' = u^u (1 + \ln u) D_x u$$

$$y' = u^u (\ln e + \ln u) D_x u$$

$$y' = u^u \ln e u D_x u$$

Regla de la cadena

Simplificar

Despejar

$$\ln e = 1$$

$$\ln xy = \ln x + \ln y$$

**EJEMPLO 5**

**Derivada de la función  $f(x) = x^x$**

**Solución**

$$D_x(x^x) = x^x \ln ex$$

Si  $y = x^x$  entonces del ejemplo 4 tenemos  $D_x(x^x) = x^x \ln(ex)$

**4.9 Ejercicios**

Consulte [CalcChat.com](http://CalcChat.com) para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Evaluar una expresión logarítmica** En los ejercicios 1-4, evalúe la expresión sin usar una calculadora.

1.  $\log_2 \frac{1}{8}$

2.  $\log_{27} 9$

3.  $\log_7 1$

4.  $\log_a \frac{1}{a}$

**Formas exponenciales y logarítmicas de ecuaciones** En los ejercicios 5-8, escriba la ecuación exponencial como una ecuación logarítmica, o viceversa.

5. (a)  $2^3 = 8$

6. (a)  $27^{2/3} = 9$

(b)  $3^{-1} = \frac{1}{3}$

(b)  $16^{3/4} = 8$

7. (a)  $\log_{10} 0.01 = -2$

8. (a)  $\log_3 \frac{1}{9} = -2$

(b)  $\log_{0.5} 8 = -3$

(b)  $49^{1/2} = 7$

**Dibujar una gráfica** En los ejercicios 9-14, dibuje a mano la gráfica de la función.

9.  $y = 2^x$

10.  $y = 4^{x-1}$

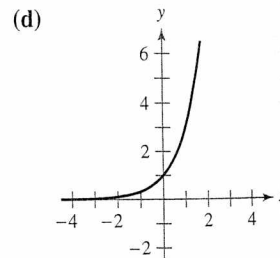
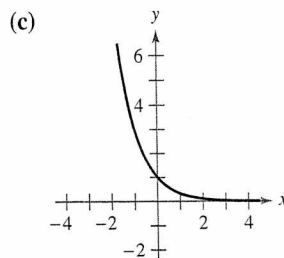
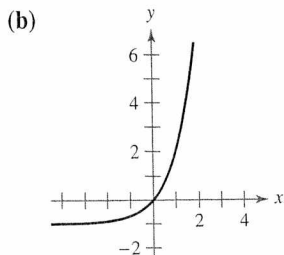
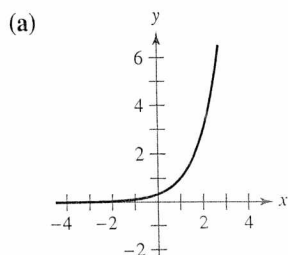
11.  $y = (\frac{1}{3})^x$

12.  $y = 2^{x^2}$

13.  $h(x) = 5^{x-2}$

14.  $y = 3^{-|x|}$

**Correspondencia** En los ejercicios 15-18, relacione la función con su gráfica. [Las gráficas están etiquetadas (a), (b), (c) y (d).]



15.  $f(x) = 3^x$

16.  $f(x) = 3^{-x}$

17.  $f(x) = 3^x - 1$

18.  $f(x) = 3^{x-1}$

**Resolver una ecuación** En los ejercicios 19-24, resuelva para  $x$  o  $b$ .

19. (a)  $\log_{10} 1000 = x$

20. (a)  $\log_3 \frac{1}{81} = x$

(b)  $\log_{10} 0.1 = x$

(b)  $\log_6 36 = x$

21. (a)  $\log_3 x = -1$

22. (a)  $\log_b 27 = 3$

(b)  $\log_2 x = -4$

(b)  $\log_b 125 = 3$

23. (a)  $x^2 - x = \log_5 25$

(b)  $3x + 5 = \log_2 64$

24. (a)  $\log_3 x + \log_3(x - 2) = 1$

(b)  $\log_{10}(x + 3) - \log_{10} x = 1$

**Resolver una ecuación** En los ejercicios 25-34, resuelva la ecuación a tres cifras decimales de precisión.

25.  $3^{2x} = 75$

26.  $5^{6x} = 8320$

27.  $2^{3-z} = 625$

28.  $3(5^{x-1}) = 86$

29.  $(1 + \frac{0.09}{12})^{12t} = 3$

30.  $(1 + \frac{0.10}{365})^{365t} = 2$

31.  $\log_2(x)$   
 33.  $\log_3(x^2)$   
 Verificar  
 muestre  
 otra al dil  
 denados.  
 35.  $f(x) =$   
 $g(x) =$   
 Encuentra  
 la derivac  
 puede que  
 de derivac  
 37.  $f(x) =$   
 39.  $y = 5$   
 41.  $f(x) =$   
 43.  $g(t) =$   
 45.  $h(\theta) =$   
 47.  $y = k$   
 49.  $h(t) =$   
 51.  $y = k$   
 53.  $f(x) =$   
 55.  $h(x) =$   
 57.  $g(t) =$   
 Encuentra  
 cios 59-62  
 de la func  
 59.  $y = 2$   
 61.  $y = k$   
 Derivaci  
 derivaci  
 63.  $y = x$   
 65.  $y = ($   
 Encuentra  
 cios 67-70  
 de la func  
 67.  $y = x$   
 69.  $y = ($   
 En los ej  
 propuest  
 71.  $y = ($   
 72.  $y = ($   
 73.  $y = ($

31.  $\log_2(x-1) = 5$

32.  $\log_{10}(t-3) = 2.6$

33.  $\log_3 x^2 = 4.5$

34.  $\log_5 \sqrt{x-4} = 3.2$

**Verificar funciones inversas** En los ejercicios 35 y 36, muestre que las funciones son funciones inversas una de la otra al dibujar sus gráficas en el mismo conjunto de ejes coordenados.

35.  $f(x) = 4^x$

36.  $f(x) = 3^x$

$g(x) = \log_4 x$

$g(x) = \log_3 x$

**Encontrar una derivada** En los ejercicios 37-58, encuentre la derivada de la función. (*Sugerencia:* En algunos ejercicios, puede que le resulte útil aplicar propiedades logarítmicas antes de derivar.)

37.  $f(x) = 4^x$

38.  $f(x) = 3^{4x}$

39.  $y = 5^{-4x}$

40.  $y = 6^{3x-4}$

41.  $f(x) = x^{9^x}$

42.  $y = x(6^{-2x})$

43.  $g(t) = t^{2^{2t}}$

44.  $f(t) = \frac{3^{2t}}{t}$

45.  $h(\theta) = 2^{-\theta} \cos \pi\theta$

46.  $g(\alpha) = 5^{-\alpha/2} \sin 2\alpha$

47.  $y = \log_4(5x+1)$

48.  $y = \log_3(x^2-3x)$

49.  $h(t) = \log_5(4-t)^2$

50.  $g(t) = \log_2(t^2+7)^3$

51.  $y = \log_5 \sqrt{x^2-1}$

52.  $f(x) = \log_2 \sqrt[3]{2x+1}$

53.  $f(x) = \log_2 \frac{x^2}{x-1}$

54.  $y = \log_{10} \frac{x^2-1}{x}$

55.  $h(x) = \log_3 \frac{x\sqrt{x-1}}{2}$

56.  $g(x) = \log_5 \frac{4}{x^2\sqrt{1-x}}$

57.  $g(t) = \frac{10 \log_4 t}{t}$

58.  $f(t) = t^{3/2} \log_2 \sqrt{t+1}$

**Encontrar la ecuación de una recta tangente** En los ejercicios 59-62, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

59.  $y = 2^{-x}$ ,  $(-1, 2)$

60.  $y = 5^{x-2}$ ,  $(2, 1)$

61.  $y = \log_3 x$ ,  $(27, 3)$

62.  $y = \log_{10} 2x$ ,  $(5, 1)$

**Derivación logarítmica** En los ejercicios 63-66, utilice la derivación logarítmica para encontrar  $dy/dx$ .

63.  $y = x^{2/x}$

64.  $y = x^{x-1}$

65.  $y = (x-2)^{x+1}$

66.  $y = (1+x)^{1/x}$

**Encontrar la ecuación de una recta tangente** En los ejercicios 67-70, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

67.  $y = x^{\sin x}$ ,  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

68.  $y = (\sin x)^{2x}$ ,  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

69.  $y = (\ln x)^{\cos x}$ ,  $(e, 1)$

70.  $y = x^{1/x}$ ,  $(1, 1)$

En los ejercicios 71-82, encontrar la derivada de la función propuesta.

71.  $y = (\cos x)^x$

72.  $y = (\cos x)^{\cos x}$

73.  $y = (3x^3 - 2x^2 + 2x + 2)^{3x+4}$

74.  $y = (\sec x)^{\tan x}$

75.  $y = (e^x)^{e^x}$

76.  $y = (xe^x)^{\sin x}$

77.  $y = (\ln x)^{\ln x}$

78.  $f(r) = (r^2 - 1)^{r \sin r}$

79.  $g(\theta) = (\sin \theta)^{\cos \theta}$

80.  $f(u) = (u + \sqrt{u})^{u-1}$

81.  $w(t) = (3^t)^{4t}$

82.  $h(a) = (\log_2 a)^a$

**Área** En los ejercicios 83 y 84, encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones.

83.  $y = 3^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$

84.  $y = 3^{\cos x} \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pi$

### DESARROLLO DE CONCEPTOS

**85. Analizar una ecuación logarítmica** Considere la función  $f(x) = \log_{10} x$ .

(a) ¿Cuál es el dominio de  $f$ ?

(b) Halle  $f^{-1}$ .

(c) Sea  $x$  un número real entre 1000 y 10,000. Determine el intervalo en el que se encuentra  $f(x)$ .

(d) Determine el intervalo en el que se encuentra  $x$ , si  $f(x)$  es negativa.

(e) Cuando  $f(x)$  se aumenta en una unidad, ¿en qué factor debe haberse incrementado  $x$ ?

(f) Calcule la razón de  $x_1$  a  $x_2$ , dado que  $f(x_1) = 3n$  y  $f(x_2) = n$ .

**86. Comparar las tasas de crecimiento** Ordene las funciones

$$f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = x^x, \quad h(x) = x^2 \quad \text{y} \quad k(x) = 2^x$$

de la que tiene la mayor tasa de crecimiento a la que tiene la menor tasa de crecimiento para valores grandes de  $x$ .

**87. Inflación** Cuando la tasa anual de inflación promedia 5% en los próximos 10 años, el costo  $C$  aproximado de bienes o servicios en cualquier año en esa década es

$$C(t) = P(1.05)^t$$

donde  $t$  es el tiempo en años y  $P$  es el costo actual.

(a) El precio de un cambio de aceite para su coche actualmente es de \$24.95. Estime el precio dentro de 10 años.

(b) Determine la rapidez de cambio de  $C$  respecto a  $t$  cuando  $t = 1$  y  $t = 8$ .

(c) Compruebe que la rapidez de cambio de  $C$  es proporcional a  $C$ . ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

**88. Depreciación** Después de  $t$  años, el valor de un automóvil comprado por 25,000, dólares es

$$V(t) = 25,000\left(\frac{3}{4}\right)^t.$$

(a) Utilice un programa de graficación para trazar la función y determinar el valor del coche 2 años después de que fue comprado.

- (b) Determine las tasas de variación de  $V$  respecto a  $t$  cuando  $t = 1$  y  $t = 4$ .
- (c) Utilice un programa de graficación para trazar  $V'(t)$  y determinar la asíntota horizontal de  $V'(t)$ . Interprete su significado en el contexto del problema.

**Interés compuesto** En los ejercicios 89-92, complete la tabla para determinar el saldo  $A$  para  $P$  dólares invertidos a la tasa  $r$  durante  $t$  años y capitalizados  $n$  veces por año.

$n$	1	2	4	12	365	Capitalización continua
$A$						

- 89.  $P = \$1000$   
 $r = 3\frac{1}{2}\%$   
 $t = 10$  años
- 90.  $P = \$2500$   
 $r = 6\%$   
 $t = 20$  años
- 91.  $P = \$1000$   
 $r = 5\%$   
 $t = 30$  años
- 92.  $P = \$4000$   
 $r = 4\%$   
 $t = 15$  años

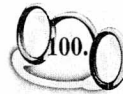
**Interés compuesto** En los ejercicios 93-96, complete la tabla mediante la determinación de la cantidad de dinero  $P$  (valor presente) que debe invertirse a una tasa  $r$  para producir un saldo de \$100,000 en el año  $t$ .

$t$	1	10	20	30	40	50
$P$						

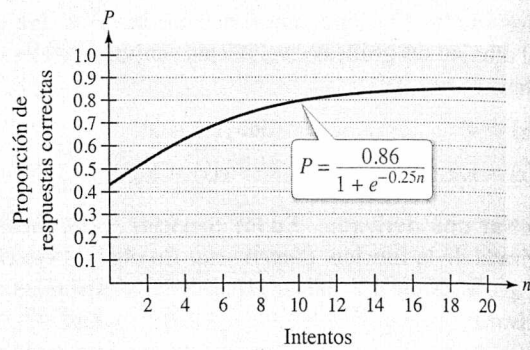
- 93.  $r = 5\%$   
Capitalización continua
- 94.  $r = 3\%$   
Capitalización continua
- 95.  $r = 5\%$   
Capitalización mensual
- 96.  $r = 2\%$   
Capitalización diaria
- 97. **Interés compuesto** Suponga que usted puede ganar un 6% de una inversión, capitalizado diariamente. ¿Cuál de las siguientes opciones proporcionaría el mayor saldo al cabo de 8 años?  
(a) \$20,000 ahora (b) \$30,000 después de 8 años  
(c) \$8000 ahora y \$20,000 después de 4 años  
(d) \$9000 ahora, \$9000 después de 4 años y \$9000 después de 8 años

**98. Interés compuesto** Considere un depósito de \$100 que se coloca en una cuenta durante 20 años con capitalización continua. Utilice un programa de graficación para trazar las funciones exponenciales que describen el crecimiento de la inversión en los 20 años para las siguientes tasas de interés. Compare los saldos finales para las tres tasas.  
(a)  $r = 3\%$  (b)  $r = 5\%$  (c)  $r = 6\%$

- 99. **Rendimiento boscoso** El rendimiento  $V$  (en millones de pies cúbicos por acre) para la madera en pie a la edad  $t$  es  $V = 6.7 e^{(-48.1)/t}$ , donde  $t$  es medido en años.  
(a) Determine el volumen limitante de madera por acre cuando  $t$  tiende a infinito.  
(b) Determine la rapidez a la que el rendimiento está cambiando cuando  $t = 20$  años y  $t = 60$  años.



**¿CÓMO LO VE?** La gráfica muestra el porcentaje  $P$  de respuestas correctas después de  $n$  intentos en un proyecto grupal en la teoría del aprendizaje.



- 100. (a) ¿Cuál es la proporción limitante de respuestas correctas cuando  $n$  tiende a infinito?  
(b) ¿Qué ocurre con la tasa de variación de la proporción en el largo plazo?

**101. Crecimiento de la población** Un lago es abastecido con 500 peces, y la población aumenta de acuerdo a la curva logística

$$p(t) = \frac{10,000}{1 + 19e^{-t/5}}$$

donde  $t$  se mide en meses.

- 102. Modelar datos** En la tabla se muestran las resistencias a la rotura (en toneladas) de los cables de acero de varios diámetros (en pulgadas).  
(a) Utilice un programa de graficación para trazar la función.  
(b) ¿Cuál es el tamaño limitante de la población de peces?  
(c) ¿A qué tasas está cambiando la población de peces al final de 1 mes y al final de 10 meses?  
(d) ¿Después de cuántos meses la población está aumentando más rápido?

$d$	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75
$B$	9.85	21.8	38.3	59.2	84.4	114.0

- (a) Utilice las capacidades de regresión de un programa de graficación para ajustar los datos a un modelo exponencial.  
(b) Utilice un programa de graficación para trazar los datos y graficar el modelo.  
(c) Determine las tasas de crecimiento del modelo cuando  $d = 0.8$  y  $d = 1.5$ .

**103. Comparar modelos** En la tabla se muestra el número de trasplantes de páncreas y en Estados Unidos para los años 2004 a 2010, con  $x = 4$  correspondiente a 2004. (Fuente: Organ Procurement and Transplantation Network.)

$x$	4	5	6	7	8	9	10
$y$	603	542	466	468	436	376	350

(a) U  
g  
l  
y  
y  
(b) U  
y  
c  
(c) I  
d  
(d) E  
P  
n  
104. Apr  
tamb  
lím  
 $x \rightarrow 0^+$   
x  
(1  
Modelar  
función ex  
recolectad  
105.  
t  
y  
106.  
t  
y  
Usar las p  
107-110, en  
107.  $5^{1/\ln 5}$   
109.  $9^{1/\ln 3}$   
¿Verdade  
la afirmaci  
o dé un eje  
111.  $e =$   
112. Si  $f(x)$   
valor  
113. Las t  
inver  
114. La ft  
difer  
 $\frac{d^n y}{dx^n}$   
115. Las g  
116. Si  $f(x)$   
de  $g$ .  
117. Con  
(a) I



- (c) Escriba un breve párrafo explicando por qué la función  $f$  es continua para todos los números reales.
- (d) Estime visualmente la pendiente de  $f$  en el punto  $(0, 1)$ .
- (e) Explique por qué la derivada de una función se puede aproximar por la fórmula

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

para valores pequeños de  $\Delta x$ . Utilice esta fórmula para aproximar la pendiente de  $f$  en el punto  $(0, 1)$ .

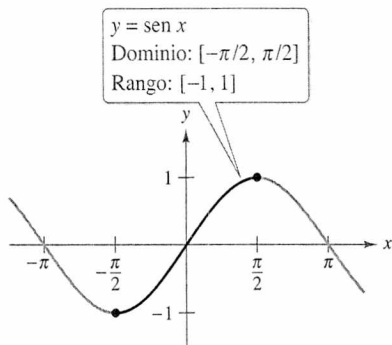
$$\begin{aligned} f'(0) &\approx \frac{f(0 + \Delta x) - f(0 - \Delta x)}{2\Delta x} \\ &= \frac{f(\Delta x) - f(-\Delta x)}{2\Delta x} \end{aligned}$$

- ¿Por qué cree que la pendiente de la gráfica de  $f$  está en  $(0, 1)$ ?
- (f) Encuentre una fórmula para la derivada de  $f$  y determine  $f'(0)$ . Escriba un breve párrafo explicando cómo una herramienta de graficación podría llevar a la aproximación de la pendiente de una gráfica de forma incorrecta.
- (g) Use la fórmula para la derivada de  $f$  para encontrar el extremo relativo de  $f$ . Verifique su respuesta usando un programa de graficación.

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para más información sobre el uso de las utilidades gráficas para estimar la pendiente, vea el artículo "Computer-Aided Delusions", de Richard L. Hall, en *The College Mathematics Journal*. Para ver este artículo, visite [MathArticles.com](http://MathArticles.com).

## 4.10 Derivada de las funciones trigonométricas inversas

- Desarrollar propiedades de las seis funciones trigonométricas inversas.
- Derivar una función trigonométrica inversa.
- Resumir las reglas básicas para la derivación de las funciones elementales.



La función seno es uno a uno en  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

Figura 4.46

### Funciones trigonométricas inversas

Esta sección comienza con una declaración sorprendente: *Ninguna de las seis funciones trigonométricas básicas tiene una función inversa*. Esta afirmación es cierta, porque las seis funciones trigonométricas son periódicas y por lo tanto no son uno a uno. En esta sección se examinarán estas seis funciones para ver si sus dominios se pueden redefinir de manera tal que tengan funciones inversas en los *dominios restringidos*.

En el ejemplo 4 de la sección 2.3, se vio que la función seno es creciente (y por lo tanto es uno a uno) sobre el intervalo

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

como se muestra en la figura 4.46. En este intervalo se puede definir la inversa de la función seno *restringida* como

$$y = \arcsen x \quad \text{si y solo si} \quad \sen y = x$$

donde  $-1 \leq x \leq 1$  y  $-\pi/2 \leq \arcsen x \leq \pi/2$

Bajo las restricciones adecuadas, cada una de las seis funciones trigonométricas es uno a uno y por lo tanto tiene una función inversa, como se muestra en la siguiente definición.

#### Definiciones de las funciones trigonométricas inversas

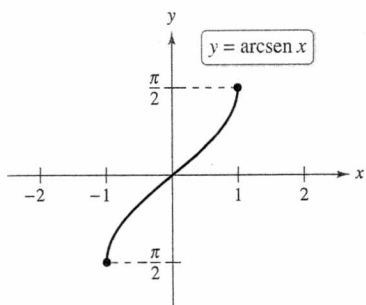
Función	Dominio	Rango
$y = \arcsen x$ si y solo si $\sen y = x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$ si y solo si $\cos y = x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \arctan x$ si y solo si $\tan y = x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \text{arccot } x$ si y solo si $\cot y = x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$
$y = \text{arcsec } x$ si y solo si $\sec y = x$	$ x  \geq 1$	$0 \leq y \leq \pi, y \neq \frac{\pi}{2}$
$y = \text{arccsc } x$ si y solo si $\csc y = x$	$ x  \geq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, y \neq 0$

..... ➤  
 ••• **COMENTARIO** El término "arcsen" se lee como "el arco seno de  $x$ " o a veces "el ángulo cuyo seno es  $x$ ". Una notación alternativa para la función inversa del seno es " $\sen^{-1} x$ ".

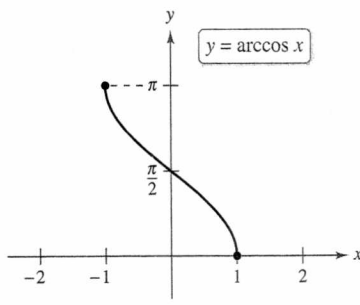
**Exploración**

**La función inversa de la secante** En las definiciones de las funciones trigonométricas inversas, la función secante inversa se define mediante la restricción del dominio de la función secante a los intervalos  $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ . La mayoría de los otros textos y libros de consulta están de acuerdo con esto, pero algunos no. ¿Qué otros dominios podrían tener sentido? Explique su razonamiento gráficamente. La mayoría de las calculadoras no tienen una tecla para la función secante inversa. ¿Cómo puede usar una calculadora para evaluar la función secante inversa?

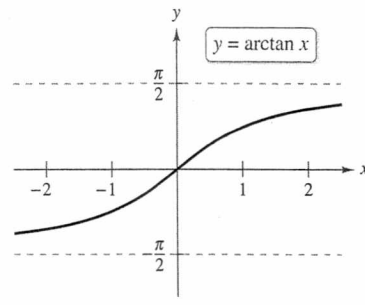
Las gráficas de las seis funciones trigonométricas inversas se muestran en la figura 4.47.



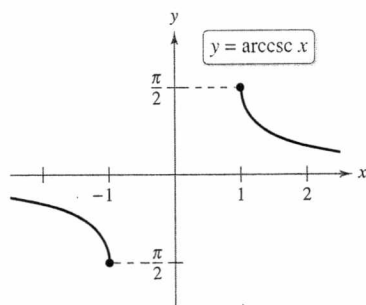
Dominio:  $[-1, 1]$   
Rango:  $[-\pi/2, \pi/2]$



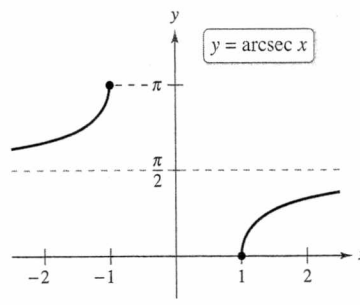
Dominio:  $[-1, 1]$   
Rango:  $[0, \pi]$



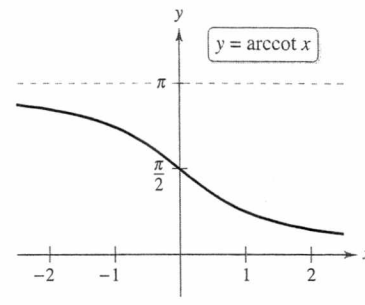
Dominio:  $(-\infty, \infty)$   
Rango:  $(-\pi/2, \pi/2)$



Dominio:  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$   
Rango:  $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$



Dominio:  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$   
Rango:  $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$



Dominio:  $(-\infty, \infty)$   
Rango:  $(0, \pi)$

Figura 4.47

Al evaluar las funciones trigonométricas inversas, recuerde que denotan los ángulos en *radianes*.

**EJEMPLO 1**

**Evaluar funciones trigonométricas inversas**

Evalúe cada una de las funciones.

- a.  $\arcsen\left(-\frac{1}{2}\right)$     b.  $\arccos 0$     c.  $\arctan \sqrt{3}$     d.  $\arcsen(0.3)$

**Solución**

- a. Por definición,  $y = \arcsen\left(-\frac{1}{2}\right)$  implica que  $\sen y = -\frac{1}{2}$ . Sobre el intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ , el valor correcto de  $y$  es  $-\pi/6$ .

$$\arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

- b. Por definición,  $y = \arccos 0$  implica que  $\cos y = 0$ . En el intervalo  $[0, \pi]$ , tiene que  $y = \pi/2$ .

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

- c. Por definición,  $y = \arctan \sqrt{3}$  implica que  $\tan y = \sqrt{3}$ . Sobre el intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$ , tiene que  $y = \pi/3$ .

$$\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

- d. Usando una calculadora ajustada en el modo de radianes produce

$$\arcsen(0.3) \approx 0.305$$

Las funciones inversas tienen las propiedades  $f(f^{-1}(x)) = x$  y  $f^{-1}(f(x)) = x$ . Al aplicar estas propiedades para invertir las funciones trigonométricas, recuerde que las funciones trigonométricas tienen funciones inversas solo en dominios restringidos. Para valores fuera de estos dominios, estas dos propiedades no se sostienen. Por ejemplo,  $\arcsen(\sen \pi)$  es igual a 0, no  $\pi$ .

### Propiedades de las funciones trigonométricas inversas

Si  $-1 \leq x \leq 1$  y  $\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ , entonces

$$\sen(\arcsen x) = x \quad \text{y} \quad \arcsen(\sen y) = y.$$

Si  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ , entonces

$$\tan(\arctan x) = x \quad \text{y} \quad \arctan(\tan y) = y.$$

Si  $|x| \geq 1$  y  $0 \leq y < \pi/2$  o  $\pi/2 < y \leq \pi$ , entonces

$$\sec(\operatorname{arcsec} x) = x \quad \text{y} \quad \operatorname{arcsec}(\sec y) = y.$$

Propiedades similares también son válidas para las otras funciones trigonométricas inversas.

### EJEMPLO 2

### Resolver una ecuación

$$\arctan(2x - 3) = \frac{\pi}{4}$$

Ecuación original

$$\tan[\arctan(2x - 3)] = \tan \frac{\pi}{4}$$

Tome la tangente de cada lado.

$$2x - 3 = 1$$

$\tan(\arctan x) = x$

$$x = 2$$

Resuelva para  $x$ .

Algunos problemas en cálculo requieren que evalúe expresiones como  $\cos(\arcsen x)$ , como se muestra en el ejemplo 3.

### EJEMPLO 3

### Usar triángulos rectángulos

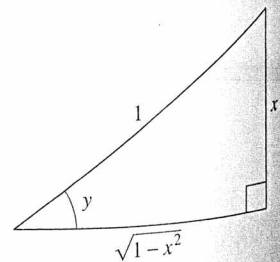
- a. Dada  $y = \arcsen x$ , donde  $0 < y < \pi/2$ , encuentre  $\cos y$ .  
 b. Dada  $y = \operatorname{arcsec}(\sqrt{5}/2)$ , encuentre  $\tan y$ .

### Solución

- a. Como  $y = \arcsen x$ , usted sabe que  $y = \sen x$ . Esta relación entre  $x$  y  $y$  puede ser representada por un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura de la derecha.

$$\cos y = \cos(\arcsen x) = \frac{\text{ca}}{\text{hip}} = \sqrt{1 - x^2}$$

(Este resultado es también válido para  $-\pi/2 < y < 0$ .)  $y = \arcsen x$



$y = \arcsen$

•••CO

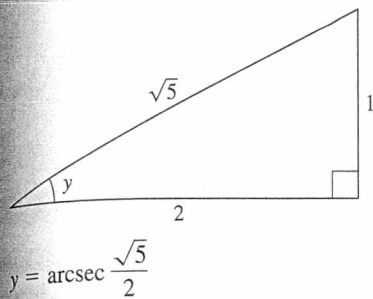
• un a  
• nició  
• para  
• Cua.  
• arco  
• var l

• Una  
• ción  
• penc  
• x en  
• 4.47  
• de v  
• para

▷ TE

• prog  
• func  
• su g

■ PARA  
Para má  
da de la  
artículo  
gent Dir  
College  
este artí



b. Utilice el triángulo rectángulo que se muestra en la figura de la izquierda.

$$\begin{aligned}\tan y &= \tan \left[ \operatorname{arcsec} \left( \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \right] \\ &= \frac{\text{co}}{\text{ca}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

**COMENTARIO** No existe un acuerdo común sobre la definición de  $\operatorname{arcsec} x$  (o  $\operatorname{arccsc} x$ ) para valores negativos de  $x$ . Cuando definimos el rango del arco secante, se optó por preservar la identidad recíproca

$$\operatorname{arcsec} x = \arccos \frac{1}{x}$$

Una consecuencia de esta definición es que su gráfica tiene una pendiente positiva para cada valor  $x$  en su dominio. (Vea la figura 4.47.) Esto cuenta para el signo de valor absoluto en la fórmula para la derivada de  $\operatorname{arcsec} x$ .

## Derivadas de funciones trigonométricas inversas

En la sección 5.8 usted vio que la derivada de la función *trascendente*  $f(x) = \ln x$  es la función *algebraica*  $f'(x) = 1/x$ . Ahora verá que las derivadas de las funciones trigonométricas inversas también son algebraicas (a pesar de que las funciones trigonométricas inversas son ellas mismas trascendentales).

El siguiente teorema enumera las derivadas de las seis funciones trigonométricas inversas. Observe que las derivadas de  $\arccos u$ ,  $\operatorname{arccot} u$  y  $\operatorname{arccsc} u$  son los *negativos* de las derivadas de  $\arctan u$ ,  $\operatorname{arsen} u$  y  $\operatorname{arcsec} u$ , respectivamente.

### TEOREMA 4.27 Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Sea  $u$  una función derivable de  $x$ .

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [\operatorname{arsen} u] &= \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} & \frac{d}{dx} [\arccos u] &= \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \\ \frac{d}{dx} [\arctan u] &= \frac{u'}{1+u^2} & \frac{d}{dx} [\operatorname{arccot} u] &= \frac{-u'}{1+u^2} \\ \frac{d}{dx} [\operatorname{arcsec} u] &= \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} & \frac{d}{dx} [\operatorname{arccsc} u] &= \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}\end{aligned}$$

Las demostraciones para  $\operatorname{arsen} u$  y  $\arccos u$  se proporcionan en el apéndice A. [Las demostraciones para las otras reglas se dejan como ejercicio (vea el ejercicio 98).] Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para el video de Bruce Edwards de esta demostración.

**TECNOLOGÍA** Aunque el programa de gráficos no tiene la función  $\operatorname{arcsec}$ , puede obtener su gráfica utilizando

$$f(x) = \operatorname{arcsec} x = \arccos \frac{1}{x}$$

### EJEMPLO 4

#### Derivar funciones trigonométricas inversas

- $\frac{d}{dx} [\operatorname{arsen}(2x)] = \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$
- $\frac{d}{dx} [\arctan(3x)] = \frac{3}{1+(3x)^2} = \frac{3}{1+9x^2}$
- $\frac{d}{dx} [\operatorname{arsen} \sqrt{x}] = \frac{(1/2)x^{-1/2}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} [\operatorname{arcsec} e^{2x}] = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}\sqrt{(e^{2x})^2-1}} = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}\sqrt{e^{4x}-1}} = \frac{2}{\sqrt{e^{4x}-1}}$

El signo de valor absoluto no es necesario, porque  $e^{-2x} > 0$ .

### EJEMPLO 5

#### Simplificar una derivada

$$\begin{aligned}y &= \operatorname{arsen} x + x\sqrt{1-x^2} \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + x \left( \frac{1}{2} \right) (-2x)(1-x^2)^{-1/2} + \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} \\ &= \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} \\ &= 2\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

**PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para más información sobre la derivada de la función arco tangente, vea el artículo "Differentiating the Arctangent Directly", por Eric Clave, en *The College Mathematics Journal*. Para ver este artículo, visite [MathArticles.com](http://MathArticles.com).

**EJEMPLO 6**

**Analizar la gráfica de una función trigonométrica inversa**

Analice la gráfica de  $y = (\arctan x)^2$ .

**Solución** A partir de la derivada

$$y' = 2(\arctan x) \left( \frac{1}{1+x^2} \right)$$

$$= \frac{2 \arctan x}{1+x^2}$$

puede ver que solo  $x = 0$  es un número crítico. Por el criterio de la primera derivada, este valor corresponde a un mínimo relativo. De la segunda derivada

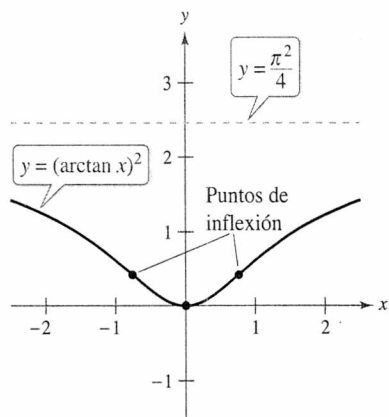
$$y'' = \frac{(1+x^2) \left( \frac{2}{1+x^2} \right) - (2 \arctan x)(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2(1-2x \arctan x)}{(1+x^2)^2}$$

se tiene que los puntos de inflexión ocurren cuando  $2x \arctan x = 1$ . Utilizando el método de Newton, estos puntos ocurren cuando  $x \approx \pm 0.765$ . Por último, debido a que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\arctan x)^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

se tiene que la gráfica presenta una asíntota horizontal en  $y = \pi^2/4$ . En la figura 4.48 se muestra la gráfica.



La gráfica de  $y = (\arctan x)^2$  tiene una asíntota horizontal en  $y = \pi^2/4$ .

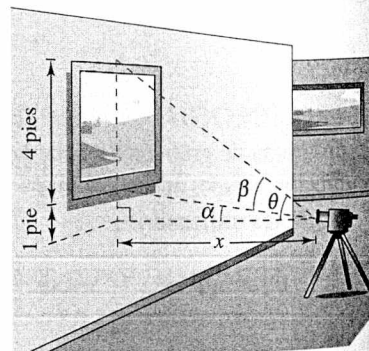
Figura 4.48

**EJEMPLO 7**

**Maximizar un ángulo**

•••► Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Un fotógrafo está tomando una fotografía de un cuadro colgado en una galería de arte. La altura de la pintura es de 4 pies. La lente de la cámara está 1 pie por debajo del borde inferior de la pintura, como se muestra en la figura de la derecha. ¿Hasta dónde debe alejarse la cámara de la pintura para maximizar el ángulo subtendido por el lente de la cámara?



No está dibujado a escala

La cámara debe estar a 2.236 pies de la pared para maximizar el ángulo  $\beta$ .

**Solución** En la figura, sea  $\beta$  el ángulo que se maximiza.

$$\beta = \theta - \alpha$$

$$= \operatorname{arccot} \frac{x}{5} - \operatorname{arccot} x$$

Al derivar se obtiene

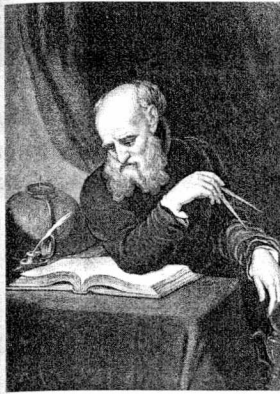
$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{-1/5}{1+(x^2/25)} - \frac{-1}{1+x^2}$$

$$= \frac{-5}{25+x^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{4(5-x^2)}{(25+x^2)(1+x^2)}$$

Debido a que  $d\beta/dx = 0$  cuando  $x = \sqrt{5}$ , se puede concluir a partir de la primera prueba de derivada que con esta distancia se obtiene un valor máximo de  $\beta$ . Por lo tanto, la distancia es  $x \approx 2.236$  pies y el ángulo  $\beta \approx 0.7297$  radianes  $\approx 41.81^\circ$ .

**GAL**  
El enfó  
partió  
aristot  
cualid:  
la "flui  
eligió  
térmir  
tales c  
fuerza  
Cons  
para



**GALILEO GALILEI (1564-1642)**

El enfoque científico de Galileo partió de la aceptación de la visión aristotélica de que la naturaleza tenía cualidades descriptibles, tales como la "fluidez" y la "potencialidad". Él eligió describir el mundo físico en términos de cantidades mensurables, tales como el tiempo, la distancia, la fuerza y la masa.

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para leer más de esta biografía.

## Revisión de las reglas básicas de derivación

En la década de 1600, Europa fue conducida a la era científica por grandes pensadores, como Descartes, Galileo, Huygens, Newton y Kepler. Estos hombres creían que la naturaleza se rige por leyes básicas que pueden, en su mayor parte, escribirse en términos de ecuaciones matemáticas. Una de las publicaciones más influyentes de este periodo, *Diálogo sobre los grandes sistemas del mundo*, por Galileo Galilei, se ha convertido en una descripción clásica del pensamiento científico moderno.

Así como las matemáticas se han desarrollado durante los últimos cien años, un pequeño número de funciones elementales han demostrado ser suficientes para modelar la mayoría\* de los fenómenos de la física, la química, la biología, la ingeniería, la economía y una variedad de otros campos. Una **función elemental** es una función de la siguiente lista o es una que se puede formar como la suma, producto, cociente, o la composición de funciones en la lista.

### Funciones algebraicas

Funciones polinomiales

Funciones racionales

Funciones que implican radicales

### Funciones trascendentes

Funciones logarítmicas

Funciones exponenciales

Funciones trigonométricas

Funciones trigonométricas inversas

Con las reglas de derivación introducidas hasta el momento en el texto, se puede derivar *cualquier* función elemental. Por conveniencia, a continuación se resumen estas reglas de derivación.

## REGLAS BÁSICAS PARA DERIVAR FUNCIONES ELEMENTALES

$$1. \frac{d}{dx}[cu] = cu'$$

$$3. \frac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$$

$$5. \frac{d}{dx}[c] = 0$$

$$7. \frac{d}{dx}[x] = 1$$

$$9. \frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{u'}{u}$$

$$11. \frac{d}{dx}[\log_a u] = \frac{u'}{(\ln a)u}$$

$$13. \frac{d}{dx}[\sin u] = (\cos u)u'$$

$$15. \frac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)u'$$

$$17. \frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \tan u)u'$$

$$19. \frac{d}{dx}[\arcsen u] = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$21. \frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$23. \frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

$$2. \frac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$$

$$4. \frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$6. \frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$$

$$8. \frac{d}{dx}[|u|] = \frac{u}{|u|}(u'), \quad u \neq 0$$

$$10. \frac{d}{dx}[e^u] = e^u u'$$

$$12. \frac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u u'$$

$$14. \frac{d}{dx}[\cos u] = -(\sin u)u'$$

$$16. \frac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u)u'$$

$$18. \frac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u \cot u)u'$$

$$20. \frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$22. \frac{d}{dx}[\operatorname{arccot} u] = \frac{-u'}{1+u^2}$$

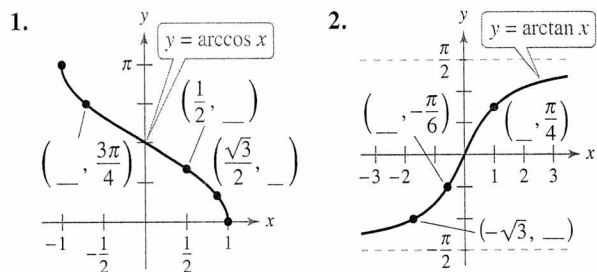
$$24. \frac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

\*Algunas de las funciones importantes que se utilizan en la ingeniería y la ciencia (por ejemplo, funciones de Bessel y funciones gamma) no son funciones elementales.

# 4.10 Ejercicios

Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Encontrar coordenadas** En los ejercicios 1 y 2, determine las coordenadas que faltan de los puntos de la gráfica de la función.



**Evaluar funciones trigonométricas inversas** En los ejercicios 3-10, evalúe la expresión sin necesidad de utilizar una calculadora.

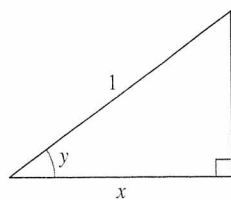
- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| 3. $\arcsen \frac{1}{2}$              | 4. $\arcsen 0$                         |
| 5. $\arccos \frac{1}{2}$              | 6. $\arccos 1$                         |
| 7. $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$       | 8. $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3})$  |
| 9. $\operatorname{arccsc}(-\sqrt{2})$ | 10. $\operatorname{arcsec}(-\sqrt{2})$ |

**Aproximar funciones trigonométricas inversas** En los ejercicios 11-14, use una calculadora para aproximar el valor. Redondee su respuesta a dos decimales.

11.  $\arccos(-0.8)$
12.  $\arcsen(-0.39)$
13.  $\operatorname{arcsec} 1.269$
14.  $\arctan(-5)$

**Usar un triángulo rectángulo** En los ejercicios 15-20, use la figura para escribir la expresión en forma algebraica dada  $y = \arccos x$ , donde  $0 < y < \pi/2$ .

15.  $\cos y$
16.  $\sen y$
17.  $\tan y$
18.  $\cot y$
19.  $\sec y$
20.  $\csc y$



**Evaluar una expresión** En los ejercicios 21-24, evalúe cada expresión sin necesidad de utilizar una calculadora. (Sugerencia: consulte el ejemplo 3.)

- |   |   |
|---|---|
| 21. (a) $\sen\left(\arctan \frac{3}{4}\right)$              | 22. (a) $\tan\left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$       |
| (b) $\sec\left(\arcsen \frac{4}{5}\right)$                  | (b) $\cos\left(\arcsen \frac{5}{13}\right)$                 |
| 23. (a) $\cot\left[\arcsen\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ | 24. (a) $\sec\left[\arctan\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$ |
| (b) $\csc\left[\arctan\left(-\frac{5}{12}\right)\right]$    | (b) $\tan\left[\arcsen\left(-\frac{5}{6}\right)\right]$     |

**Simplificar una expresión usando un triángulo rectángulo** En los ejercicios 25-32, escriba la expresión en forma algebraica. (Sugerencia: Dibuje un triángulo rectángulo, como se demostró en el ejemplo 3.)

- |  |  |
|--|--|
| 25. $\cos(\arcsen 2x)$                                   | 26. $\sec(\arctan 4x)$                       |
| 27. $\sen(\operatorname{arcsec} x)$                      | 28. $\cos(\operatorname{arccot} x)$          |
| 29. $\tan\left(\operatorname{arcsec} \frac{x}{3}\right)$ | 30. $\sec[\arcsen(x-1)]$                     |
| 31. $\csc\left(\arctan \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$        | 32. $\cos\left(\arcsen \frac{x-h}{r}\right)$ |

**Resolver una ecuación** En los ejercicios 33-36, resuelva la ecuación para  $x$ .

- |  |   |
|--|---|
| 33. $\arcsen(3x - \pi) = \frac{1}{2}$      | 34. $\arctan(2x - 5) = -1$                |
| 35. $\arcsen \sqrt{2x} = \arccos \sqrt{x}$ | 36. $\arccos x = \operatorname{arcsec} x$ |

**Verificar identidades** En los ejercicios 37 y 38, compruebe cada identidad.

37. (a)  $\operatorname{arccsc} x = \arcsen \frac{1}{x}, x \geq 1$   
 (b)  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, x > 0$
38. (a)  $\arcsen(-x) = -\arcsen x, |x| \leq 1$   
 (b)  $\arccos(-x) = \pi - \arccos x, |x| \leq 1$

**Encontrar una derivada** En los ejercicios 39-58, halle la derivada de la función.

- |  |  |
|--|--|
| 39. $f(x) = 2 \arcsen(x-1)$  | 40. $f(t) = \arcsen t^2$                           |
| 41. $g(x) = 3 \arccos \frac{x}{2}$   | 42. $f(x) = \operatorname{arcsec} 2x$              |
| 43. $f(x) = \arctan e^x$   | 44. $f(x) = \arctan \sqrt{x}$                      |
| 45. $g(x) = \frac{\arcsen 3x}{x}$  | 46. $h(x) = x^2 \arctan 5x$                        |
| 47. $h(t) = \sen(\arccos t)$   | 48. $f(x) = \arcsen x + \operatorname{arccos} x$   |
| 49. $y = 2x \arccos x - 2\sqrt{1-x^2}$   |  |
| 50. $y = \ln(t^2 + 4) - \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2}$                               |  |
| 51. $y = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} + \arctan x \right)$       |  |
| 52. $y = \frac{1}{2} \left[ x\sqrt{4-x^2} + 4 \arcsen\left(\frac{x}{2}\right) \right]$ |  |
| 53. $y = x \arcsen x + \sqrt{1-x^2}$   |  |
| 54. $y = x \arctan 2x - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2)$                                       |  |
| 55. $y = 8 \arcsen \frac{x}{4} - \frac{x\sqrt{16-x^2}}{2}$                             |  |
| 56. $y = 25 \arcsen \frac{x}{5} - x\sqrt{25-x^2}$                                      |  |
| 57. $y = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$  | 58. $y = \arctan \frac{x}{2} - \frac{1}{2(x^2+4)}$ |

Encontrar coordenadas 59.  $y =$   
 60.  $y =$   
 61.  $y =$   
 62.  $y =$   
 63.  $y =$   
 64.  $y =$   
 Aproximar 65-68, utilizar la gráfica  
 $P_1(x)$   
 y la aproximación  
 $P_2(x)$   
 de la función  
 65.  $f(x)$   
 67.  $f(x)$   
 Encontrar 69.  $f(x)$   
 71.  $f(x)$   
 72.  $h(x)$   
 Analizar 73.  $f(x)$   
 75.  $f(x)$   
 Derivación 77.  $x^2 +$   
 78.  $\operatorname{arct}$   
 79.  $\operatorname{arcs}$   
 80.  $\operatorname{arct}$

**Encontrar la ecuación de una recta tangente** En los ejercicios 59-64, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

59.  $y = 2 \arcsen x$ ,  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$

60.  $y = \frac{1}{2} \arccos x$ ,  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{8}\right)$

61.  $y = \arctan \frac{x}{2}$ ,  $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$

62.  $y = \operatorname{arcsec} 4x$ ,  $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

63.  $y = 4x \arccos(x-1)$ ,  $(1, 2\pi)$

64.  $y = 3x \arcsen x$ ,  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

**Aproximaciones lineales y cuadráticas** En los ejercicios 65-68, utilice un sistema de álgebra computacional para encontrar la aproximación lineal

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y la aproximación cuadrática

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

de la función  $f$  en  $x = a$ . Dibuje la gráfica de la función y de sus aproximaciones lineales y cuadráticas.

65.  $f(x) = \arctan x$ ,  $a = 0$

66.  $f(x) = \arccos x$ ,  $a = 0$

67.  $f(x) = \arcsen x$ ,  $a = \frac{1}{2}$

68.  $f(x) = \arctan x$ ,  $a = 1$

**Encontrar extremos relativos** En los ejercicios 69-72, encuentre cualquier extremo relativo de la función.

69.  $f(x) = \operatorname{arcsec} x - x$

70.  $f(x) = \arcsen x - 2x$

71.  $f(x) = \arctan x - \arctan(x-4)$

72.  $h(x) = \arcsen x - 2 \arctan x$

**Analizar gráficas de funciones trigonométricas inversas** En los ejercicios 73-76, analice y dibuje una gráfica de la función. Identifique cualquier extremo relativo, puntos de inflexión y asíntotas. Utilice un programa de graficación para verificar sus resultados.

73.  $f(x) = \arcsen(x-1)$

74.  $f(x) = \arctan x + \frac{\pi}{2}$

75.  $f(x) = \operatorname{arcsec} 2x$

76.  $f(x) = \arccos \frac{x}{4}$

**Derivación implícita** En los ejercicios 77-80, utilice derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación en el punto dado.

77.  $x^2 + x \arctan y = y - 1$ ,  $\left(-\frac{\pi}{4}, 1\right)$

78.  $\arctan(xy) = \arcsen(x+y)$ ,  $(0, 0)$

79.  $\arcsen x + \arcsen y = \frac{\pi}{2}$ ,  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

80.  $\arctan(x+y) = y^2 + \frac{\pi}{4}$ ,  $(1, 0)$

## DESARROLLO DE CONCEPTOS

**81. Dominios restringidos** Explique por qué los dominios de las funciones trigonométricas se restringen al encontrar las funciones trigonométricas inversas.

**82. Funciones trigonométricas inversas** Explique por qué  $\tan \pi = 0$  no implica que  $\arctan 0 = \pi$ .

**83. Determinar valores**

**A** (a) Utilice un programa de graficación para evaluar  $\arcsen(\arcsen 0.5)$  y  $\arcsen(\arcsen 1)$ .

(b) Sea

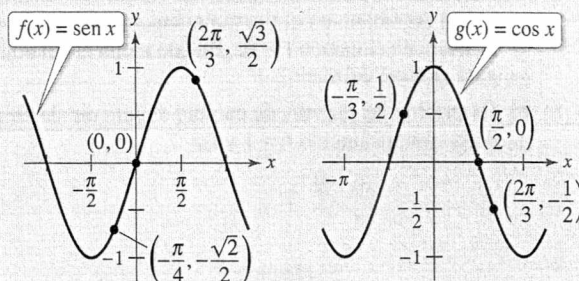
$$f(x) = \arcsen(\arcsen x)$$

Encuentre los valores de  $x$  sobre el intervalo  $-1 \leq x \leq 1$  tal que  $f(x)$  sea un número real.



84.

**¿CÓMO LO VE?** Abajo se muestran las gráficas de  $f(x) = \sen x$  y  $g(x) = \cos x$ .



(a) Explique si los puntos

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{4}\right), (0, 0) \text{ y } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$$

yacen en la gráfica de  $y = \arcsen x$ .

(b) Explique si los puntos

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{2\pi}{3}\right), \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ y } \left(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{3}\right)$$

Se encuentran en la gráfica de  $y = \arccos x$ .

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 85-90, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falsa.

85. Debido a que  $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ , se tiene que  $\arccos \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}$ .

86.  $\arcsen \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

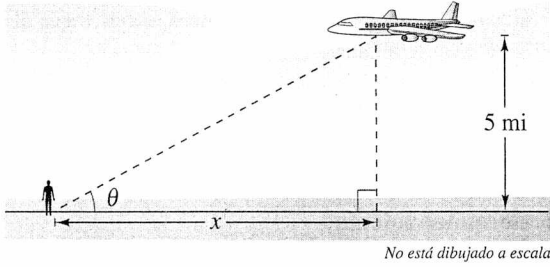
87. La pendiente de la gráfica de la función tangente inversa es positiva para toda  $x$ .

88. El rango de  $y = \arcsen x$  es  $[0, \pi]$ .

89.  $\frac{d}{dx}[\arctan(\tan x)] = 1$  para toda  $x$  en el dominio.

90.  $\arcsen^2 x + \arccos^2 x = 1$

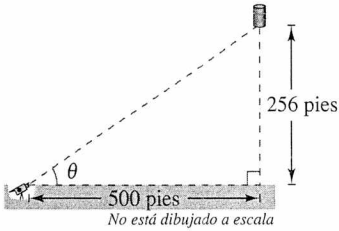
**91. Razón de cambio angular** Un avión vuela a una altitud de 5 millas hacia un punto directamente sobre un observador. Considere  $\theta$  y  $x$  como se muestra en la figura.



No está dibujado a escala

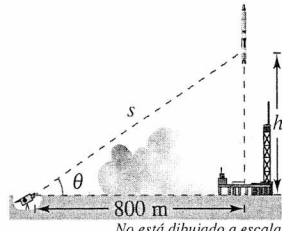
- (a) Escriba  $\theta$  como una función de  $x$ .
  - (b) La rapidez del avión es de 400 millas por hora. Encuentre  $d\theta/dt$  cuando  $x = 10$  millas y  $x = 3$  millas.
- 92. Escribir** Repita el ejercicio 91 para una altura de 3 millas y describa cómo la altitud afecta la razón de cambio de  $\theta$ .

**93. Razón de cambio angular** En un experimento de caída libre, un objeto se deja caer desde una altura de 256 pies. Una cámara en el suelo a 500 pies del punto de impacto registra la caída del objeto (vea la figura).



No está dibujado a escala

Figura para 93

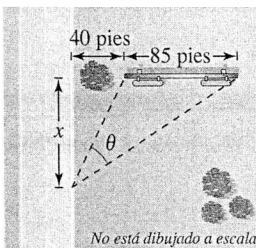


No está dibujado a escala

Figura para 94

**94. Razón de cambio angular** Una cámara de televisión en la planta baja se encuentra filmando el despegue de un cohete en un punto a 800 metros de la plataforma de lanzamiento. Sea  $\theta$  el ángulo de elevación del cohete y sea  $s$  la distancia entre la cámara y el cohete (vea la figura). Escriba  $\theta$  como una función de  $s$  para el periodo cuando el cohete se mueve verticalmente. Derive el resultado para encontrar  $d\theta/dt$  en términos de  $s$  y  $ds/dt$ .

**95. Maximizar un ángulo** Una cartelera de 85 pies de ancho es perpendicular a un camino recto y se encuentra a 40 metros de la carretera (vea la figura). Encuentre el punto de la carretera en que el ángulo  $\theta$  subtendido por la cartelera es un máximo.



No está dibujado a escala

Figura para 95

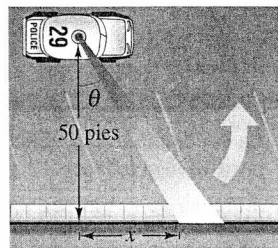


Figura para 96

**96. Rapidez angular** Un coche patrulla se estacionó a 50 pies de un gran almacén (vea la figura). La luz giratoria en la parte superior del coche gira a razón de 30 revoluciones por minuto. Escriba  $\theta$  como una función de  $x$ . ¿Qué tan rápido se está moviendo el haz de luz a lo largo de la pared cuando el haz forma un ángulo de  $\theta = 45^\circ$  con la línea perpendicular de la luz a la pared?

**97. Demostración**

- (a) Demuestre que  $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ ,  $xy \neq 1$ .
- (b) Utilice la fórmula en el inciso (a) para demostrar que  $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ .

**98. Demostración** Demuestre cada una de las fórmulas de derivación.

- (a)  $\frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{u'}{1+u^2}$
- (b)  $\frac{d}{dx}[\operatorname{arccot} u] = \frac{-u'}{1+u^2}$
- (c)  $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$
- (d)  $\frac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

**99. Describir una gráfica**

- (a) Represente gráficamente la función  $f(x) = \arccos x + \arcsen x$  sobre el intervalo  $[-1, 1]$ .
- (b) Describa la gráfica de  $f$ .
- (c) Verifique el resultado del inciso (b) analíticamente.

**100. Para pensar** Utilice un programa de graficación para graficar  $f(x) = \operatorname{sen} x$  y  $g(x) = \arcsen(\operatorname{sen} x)$ .

- (a) ¿Por qué la gráfica de  $g$  no es la recta  $y = x$ ?
- (b) Determine los extremos de  $g$ .

**101. Maximizar un ángulo** En la figura, determine el valor de  $c$  en el intervalo  $[0, 4]$  sobre el eje  $x$  que maximiza el ángulo  $\theta$ .

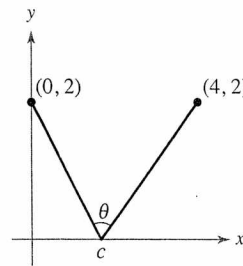


Figura para 101

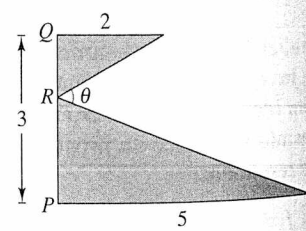


Figura para 102

**102. Encontrar una distancia** En la figura, encuentre  $PR$  tal que  $0 \leq PR \leq 3$  y  $m \angle \theta$  es un máximo.

**103. Demostración** Demostrar que  $\arcsen x = \arctan \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$ ,  $|x| < 1$ .

**104. Función secante inversa** Algunos libros de texto de cálculo definen la función secante inversa utilizando el intervalo  $[0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2]$ .

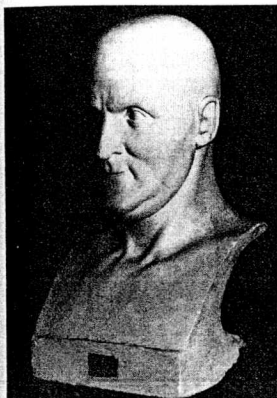
- (a) Trace la gráfica  $y = \operatorname{arcsec} x$  utilizando este rango.
- (b) Demuestre que  $y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ .

## 4.11 Derivada de las funciones hiperbólicas e hiperbólicas inversas

- Desarrollar propiedades de las funciones hiperbólicas.
- Derivar e integrar funciones hiperbólicas.
- Desarrollar propiedades de las funciones hiperbólicas inversas.
- Derivar e integrar funciones que implican funciones hiperbólicas inversas.

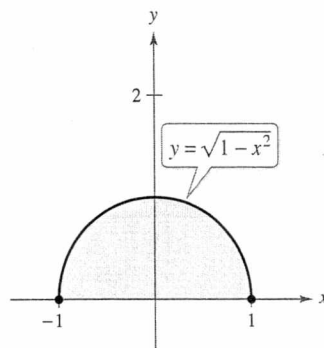
### Funciones hiperbólicas

En esta sección se analizará una clase especial de funciones exponenciales llamadas **funciones hiperbólicas**. El nombre *función hiperbólica* surgió de la comparación de la zona de una región semicircular, como se muestra en la figura 4.49, con el área de una región bajo una hipérbola, como se muestra en la figura 4.50.



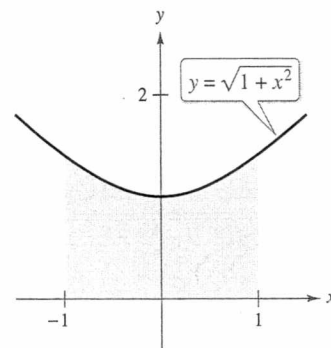
**JOHANN HEINRICH LAMBERT**  
(1728-1777)

La primera persona en publicar un estudio completo sobre las funciones hiperbólicas fue Johann Heinrich Lambert, matemático suizo-alemán y colega de Euler. Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para leer más de esta biografía.



Círculo:  $x^2 + y^2 = 1$ .

Figura 4.49



Hipérbola:  $-x^2 + y^2 = 1$ .

Figura 4.50

Se estudiará en un segundo curso de cálculo qué área de la región semicircular implica una función trigonométrica inversa (circular). Y que el área de la región hiperbólica implica una función hiperbólica inversa.

Ésta es solo una de las muchas maneras en que las funciones hiperbólicas son similares a las funciones trigonométricas.

#### Definiciones de las funciones hiperbólicas

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}, \quad x \neq 0$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

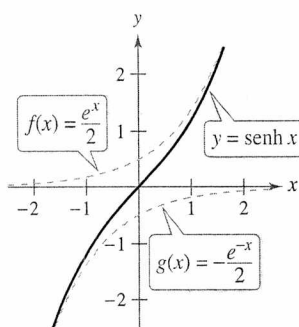
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\operatorname{coth} x = \frac{1}{\tanh x}, \quad x \neq 0$$

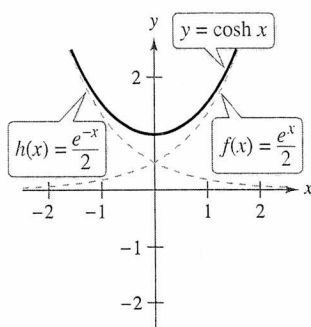
...**COMENTARIO** La notación  $\sinh x$  se lee como “el seno hiperbólico de  $x$ ”,  $\cosh x$  “el coseno hiperbólico de  $x$ ”, y así sucesivamente.

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para más información sobre el desarrollo de las funciones hiperbólicas, vea el artículo “An Introduction to Hyperbolic Functions in Elementary Calculus”, por Jerome Rosenthal, en *Mathematics Teacher*. Para ver este artículo, visite [MathArticles.com](http://MathArticles.com).

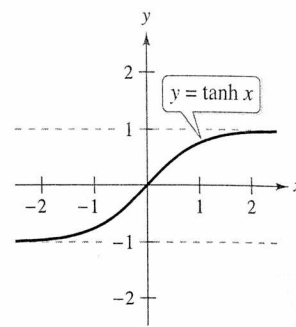
Las gráficas de las seis funciones hiperbólicas y sus dominios y los intervalos se muestran en la figura 4.51. Observe que la gráfica de  $\sinh x$  se puede obtener mediante la adición de las coordenadas y correspondientes de las funciones exponenciales  $f(x) = \frac{1}{2}e^x$  y  $g(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$ . Del mismo modo, la gráfica de  $\cosh x$  se puede obtener mediante la adición de las correspondientes coordenadas y de las funciones exponenciales  $f(x) = \frac{1}{2}e^x$  y  $h(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$ .



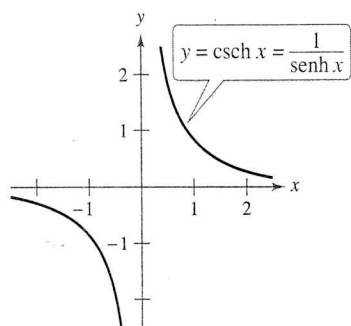
Dominio:  $(-\infty, \infty)$   
Rango:  $(-\infty, \infty)$



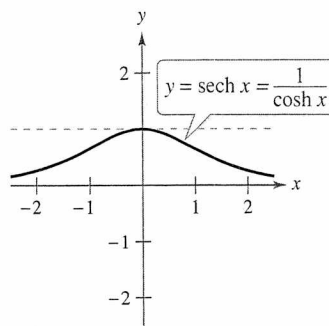
Dominio:  $(-\infty, \infty)$   
Rango:  $[1, \infty)$



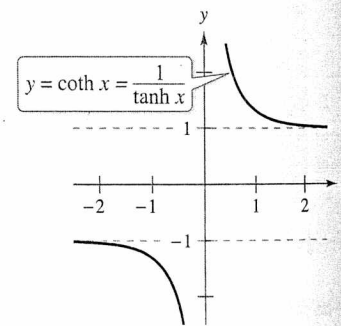
Dominio:  $(-\infty, \infty)$   
Rango:  $(-1, 1)$



Dominio:  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$   
Rango:  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



Dominio:  $(-\infty, \infty)$   
Rango:  $(0, 1]$



Dominio:  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$   
Rango:  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Figura 4.51

Muchas de las identidades trigonométricas tienen *identidades hiperbólicas* correspondientes. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

### IDENTIDADES HIPERBÓLICAS

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$$

$$\operatorname{coth}^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$$

$$\sinh^2 x = \frac{-1 + \cosh 2x}{2}$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$$

$$\cosh^2 x = \frac{1 + \cosh 2x}{2}$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

#### ■ PARA INFORMACIÓN ADICIONAL

Para entender geoméricamente la relación entre las funciones hiperbólicas y exponenciales, vea el artículo "A Short Proof Linking the Hyperbolic and Exponential Functions", por Michael J. Seery, en *The AMATYC Review*.

## Derivación de las funciones hiperbólicas

Debido a que las funciones hiperbólicas están escritas en términos de  $e^x$  y  $e^{-x}$ , usted puede fácilmente deducir las reglas de sus derivadas. El siguiente teorema enumera estas derivadas.

### TEOREMA 4.28 Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas

Sea  $u$  una función derivable de  $x$ .

$$\frac{d}{dx} [\sinh u] = (\cosh u)u'$$

$$\frac{d}{dx} [\cosh u] = (\sinh u)u'$$

$$\frac{d}{dx} [\tanh u] = (\operatorname{sech}^2 u)u'$$

$$\frac{d}{dx} [\coth u] = -(\operatorname{csch}^2 u)u'$$

$$\frac{d}{dx} [\operatorname{sech} u] = -(\operatorname{sech} u \tanh u)u'$$

$$\frac{d}{dx} [\operatorname{csch} u] = -(\operatorname{csch} u \coth u)u'$$

**Demostración** He aquí una demostración de dos de las reglas de derivación. (Se le pedirá que demuestre algunas de las otras reglas de derivación en los ejercicios 103-105.)


$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\sinh x] &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right] \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \cosh x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\tanh x] &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{\sinh x}{\cosh x} \right] \\ &= \frac{\cosh x(\cosh x) - \sinh x(\sinh x)}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} \\ &= \operatorname{sech}^2 x \end{aligned}$$

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para el video de Bruce Edwards de esta demostración. 

### EJEMPLO 1

### Derivar funciones hiperbólicas

- $\frac{d}{dx} [\sinh(x^2 - 3)] = 2x \cosh(x^2 - 3)$
  - $\frac{d}{dx} [\ln(\cosh x)] = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x$
  - $\frac{d}{dx} [x \sinh x - \cosh x] = x \cosh x + \sinh x - \sinh x = x \cosh x$
  - $\frac{d}{dx} [(x - 1) \cosh x - \sinh x] = (x - 1) \sinh x + \cosh x - \cosh x = (x - 1) \sinh x$
- 

**EJEMPLO 2**

**Encontrar los extremos relativos**

Encuentre los extremos relativos de

$$f(x) = (x - 1) \cosh x - \sinh x.$$

**Solución** Utilizando el resultado del ejemplo 1(d), iguale la primera derivada de  $f$  a 0.

$$(x - 1) \sinh x = 0$$

Por lo tanto, los números críticos son  $x = 1$  y  $x = 0$ . Usando la segunda derivada, se puede verificar que en el punto  $(0, -1)$  se obtiene un máximo relativo y en el punto  $(1, -\sinh 1)$  se obtiene un mínimo relativo, como se muestra en la figura 4.53. Trate de usar un programa de graficación para confirmar este resultado. Si su utilidad gráfica no tiene funciones hiperbólicas, puede utilizar las funciones exponenciales, como se muestra.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 1) \left( \frac{1}{2} \right) (e^x + e^{-x}) - \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2} (xe^x + xe^{-x} - e^x - e^{-x} - e^x + e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2} (xe^x + xe^{-x} - 2e^x) \end{aligned}$$

Cuando un cable flexible uniforme, como un cable de teléfono, se suspende a partir de dos puntos, toma la forma de una *catenaria*, como se analiza en el ejemplo 3.

**EJEMPLO 3**

**Cables de energía colgantes**

•••► Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Los cables de alimentación están suspendidos entre dos torres, formando la catenaria que se muestra en la figura 4.53. La ecuación para esta catenaria es

$$y = a \cosh \frac{x}{a}.$$

La distancia entre las dos torres es  $2b$ . Encuentre la pendiente de la catenaria en el punto donde el cable se une con la torre de la derecha.

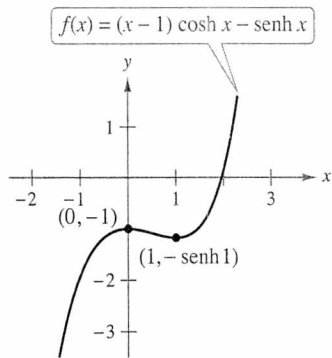
**Solución** Al derivar se obtiene

$$y' = a \left( \frac{1}{a} \right) \sinh \frac{x}{a} = \sinh \frac{x}{a}.$$

En el punto  $(b, a \cosh (b/a))$ , la pendiente (desde la izquierda) es  $m = \sinh \frac{b}{a}$ .

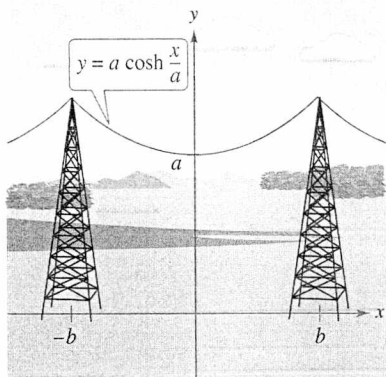
**Funciones hiperbólicas inversas**

A diferencia de las funciones trigonométricas, las funciones hiperbólicas no son periódicas. De hecho, al revisar la figura 4.51 se puede ver que cuatro de las seis funciones hiperbólicas son en realidad uno a uno (seno, tangente, cosecante y cotangente hiper-



$f''(0) < 0$ , por lo que  $(0, -1)$  es un máximo relativo.  $f''(1) > 0$ , por lo que  $(1, -\sinh 1)$  es un mínimo relativo.

Figura 4.52



Catenaria.  
Figura 4.53

**PARA INFORMACIÓN ADICIONAL**

En el ejemplo 3, el cable es una catenaria entre dos soportes a la misma altura. Para obtener información sobre la forma de un cable colgante entre los apoyos de diferentes alturas, vea el artículo "Reexamining the Catenary", de Paul Cella, en *The College Mathematics Journal*. Para ver este artículo, visite [MathArticles.com](http://MathArticles.com).

bólicos). Así, se puede aplicar el teorema 2.2 para concluir que estas cuatro funciones tienen funciones inversas. Las otras dos (el coseno y la secante hiperbólicos) son uno a uno cuando sus dominios están restringidos a los números reales positivos, y para este dominio restringido también tienen funciones inversas. Debido a que las funciones hiperbólicas están definidas en términos de funciones exponenciales, no es sorprendente encontrar que las funciones hiperbólicas inversas se pueden escribir en términos de funciones logarítmicas, como se muestra en el teorema 4.29.

**TEOREMA 4.29 Funciones hiperbólicas inversas**

Función	Dominio
$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$(-\infty, \infty)$
$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$[1, \infty)$
$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$(-1, 1)$
$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}$	$(0, 1]$
$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln \left( \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{ x } \right)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

**Demostración** La demostración de este teorema es una aplicación directa de las propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas. Por ejemplo, para

$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

y

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

puede demostrar que

$$f(g(x)) = x \quad \text{y} \quad g(f(x)) = x$$

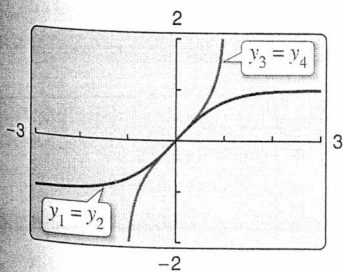
lo que implica que  $g$  es la función inversa de  $f$ .

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para el video de Bruce Edwards de esta demostración.

**TECNOLOGÍA** Puede utilizar una herramienta de graficación para confirmar gráficamente los resultados del teorema 4.29. Por ejemplo, grafique las siguientes funciones.

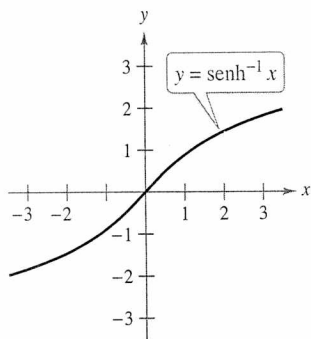
- $y_1 = \tanh x$  Tangente hiperbólica
- $y_2 = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  Definición de tangente hiperbólica
- $y_3 = \tanh^{-1} x$  Tangente hiperbólica inversa
- $y_4 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$  Definición de tangente hiperbólica inversa

En la figura 4.54 se muestra la pantalla resultante. Como puede ver en las gráficas trazadas, advierta que  $y_1 = y_2$  y  $y_3 = y_4$ . Observe también que la gráfica de  $y_1$  es la reflexión de la gráfica de  $y_3$  en la recta  $y = x$ .

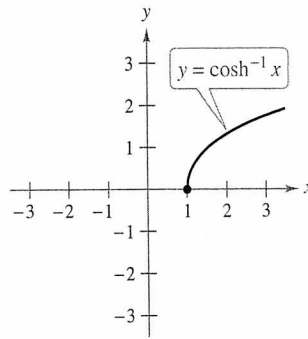


Gráficas de la función tangente hiperbólica y la función tangente hiperbólica inversa.  
**Figura 4.54**

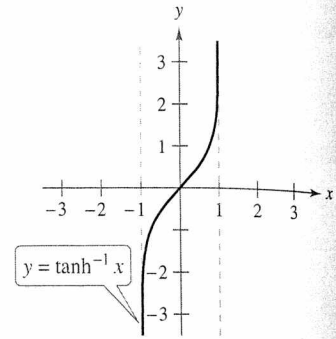
Las gráficas de las funciones hiperbólicas inversas se muestran en la figura 4.55.



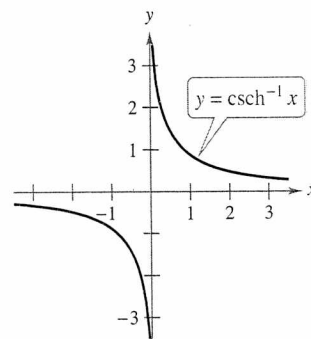
Dominio:  $(-\infty, \infty)$   
Rango:  $(-\infty, \infty)$



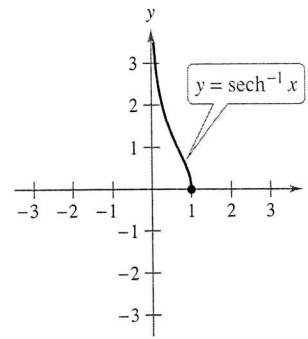
Dominio:  $[1, \infty)$   
Rango:  $[0, \infty)$



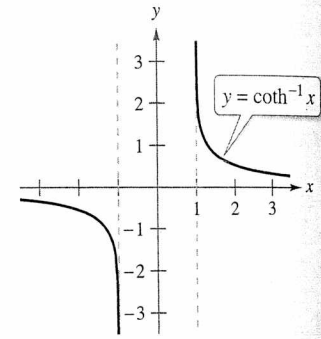
Dominio:  $(-1, 1)$   
Rango:  $(-\infty, \infty)$



Dominio:  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$   
Rango:  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



Dominio:  $(0, 1]$   
Rango:  $[0, \infty)$



Dominio:  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$   
Rango:  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Figura 4.55

La secante hiperbólica inversa se puede utilizar para definir una curva llamada *tractriz* o *curva de seguimiento*, como se analiza en el ejemplo 5.

**EJEMPLO 4** Tractriz

Una persona sostiene una cuerda que está atada a un barco, como se muestra en la figura 4.56. A medida que la persona camina a lo largo del muelle, el barco viaja a lo largo de una tractriz, dada por la ecuación

$$y = a \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

donde  $a$  es la longitud de la cuerda. Para  $a = 20$  pies, encuentre la distancia que la persona tiene que caminar para llevar el barco a una posición a 5 pies del muelle.

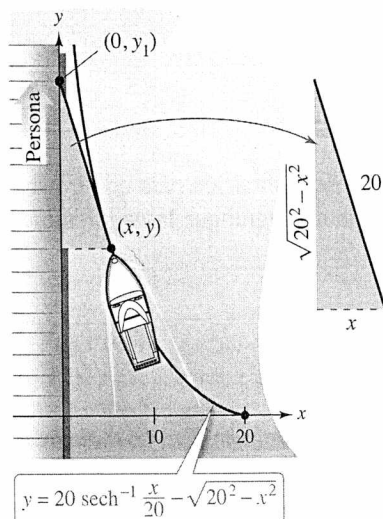
**Solución** En la figura 4.56, observe que la distancia que la persona ha caminado es

$$\begin{aligned} y_1 &= y + \sqrt{20^2 - x^2} \\ &= \left( 20 \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{20} - \sqrt{20^2 - x^2} \right) + \sqrt{20^2 - x^2} \\ &= 20 \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{20}. \end{aligned}$$

Cuando  $x = 5$  esta distancia es

$$y_1 = 20 \operatorname{sech}^{-1} \frac{5}{20} = 20 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - (1/4)^2}}{1/4} = 20 \ln(4 + \sqrt{15}) \approx 41.27 \text{ pies.}$$

Por lo tanto, la persona debe caminar unos 41.27 pies para llevar el barco a una posición a 5 pies del muelle.



Una persona tiene que caminar unos 41.27 pies para llevar el barco a una posición a 5 pies del muelle.

Figura 4.56

**4.1**

- Evaluar un Si el valor tres cifras c
- (a)  $\sinh$
  - (b)  $\tanh$
  - (a)  $\operatorname{csch}$
  - (b)  $\operatorname{coth}$
  - (a)  $\cosh$
  - (b)  $\operatorname{sech}$

## Funciones hiperbólicas inversas: derivación e integración

Las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas, que se asemejan a las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, se enumeran en el teorema 4.30 con las fórmulas de integración correspondientes (en forma logarítmica). Puede verificar cada una de estas fórmulas, según las definiciones logarítmicas de las funciones hiperbólicas inversas. (Consulte los ejercicios 106-108.)

### TEOREMA 4.30 Derivación e integración que involucran funciones hiperbólicas inversas

Sea  $u$  una función derivable de  $x$

$$\frac{d}{dx}[\sinh^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dx}[\cosh^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}[\tanh^{-1} u] = \frac{u'}{1 - u^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\coth^{-1} u] = \frac{u'}{1 - u^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sech}^{-1} u] = \frac{-u'}{u\sqrt{1 - u^2}}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{csch}^{-1} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1 + u^2}}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + u}{a - u} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{|u|} + C$$

### EJEMPLO 5

### Derivar funciones hiperbólicas inversas

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{d}{dx}[\sinh^{-1}(2x)] &= \frac{2}{\sqrt{(2x)^2 + 1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{d}{dx}[\tanh^{-1}(x^3)] &= \frac{3x^2}{1 - (x^3)^2} \\ &= \frac{3x^2}{1 - x^6} \end{aligned}$$

## 4.11 Ejercicios

Consulte [CalcChat.com](http://CalcChat.com) para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Evaluar una función** En los ejercicios 1-6, evalúe la función. Si el valor no es un número racional, redondee su respuesta a tres cifras decimales.

- (a)  $\sinh 3$   
(b)  $\tanh(-2)$
- (a)  $\cosh(\ln 2)$   
(b)  $\coth(\ln 5)$
- (a)  $\cosh^{-1} 2$   
(b)  $\operatorname{sech}^{-1} \frac{2}{3}$
- (a)  $\cosh 0$   
(b)  $\operatorname{sech} 1$
- (a)  $\sinh^{-1} 0$   
(b)  $\tanh^{-1} 0$
- (a)  $\operatorname{csch}^{-1} 2$   
(b)  $\coth^{-1} 3$

**Verificar una identidad** En los ejercicios 7-14, verifique la identidad.

- $\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$
- $\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$
- $\cosh^2 x = \frac{1 + \cosh 2x}{2}$
- $\sinh^2 x = \frac{-1 + \cosh 2x}{2}$
- $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

12.  $e^{2x} = \sinh 2x + \cosh 2x$   
 13.  $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$   
 14.  $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$

**Encontrar los valores de funciones hiperbólicas** En los ejercicios 15 y 16, utilice el valor de la función hiperbólica dada para encontrar los valores de las otras funciones hiperbólicas en  $x$ .

15.  $\sinh x = \frac{3}{2}$                       16.  $\tanh x = \frac{1}{2}$

**Obtener un límite** En los ejercicios 17-22, encuentre el límite.

17.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x$                       18.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x$   
 19.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{sech} x$                       20.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{csch} x$   
 21.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}$                       22.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \coth x$

**Encontrar una derivada** En los ejercicios 23-32, encuentre la derivada de la función.

23.  $f(x) = \sinh 3x$                       24.  $f(x) = \cosh(8x + 1)$   
 25.  $y = \operatorname{sech}(5x^2)$                       26.  $f(x) = \tanh(4x^2 + 3x)$   
 27.  $f(x) = \ln(\sinh x)$                       28.  $y = \ln\left(\tanh \frac{x}{2}\right)$   
 29.  $h(x) = \frac{1}{4} \sinh 2x - \frac{x}{2}$   
 30.  $y = x \cosh x - \sinh x$   
 31.  $f(t) = \arctan(\sinh t)$   
 32.  $g(x) = \operatorname{sech}^2 3x$

**Encontrar la ecuación de una recta tangente** En los ejercicios 33-36, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

33.  $y = \sinh(1 - x^2)$ ,  $(1, 0)$   
 34.  $y = x^{\cosh x}$ ,  $(1, 1)$   
 35.  $y = (\cosh x - \sinh x)^2$ ,  $(0, 1)$   
 36.  $y = e^{\sinh x}$ ,  $(0, 1)$

**Encontrar el extremo relativo** En los ejercicios 37-40, encuentre cualquier extremo relativo de la función. Utilice un programa de graficación para confirmar el resultado.

37.  $f(x) = \sin x \sinh x - \cos x \cosh x$ ,  $-4 \leq x \leq 4$   
 38.  $f(x) = x \sinh(x - 1) - \cosh(x - 1)$   
 39.  $g(x) = x \operatorname{sech} x$   
 40.  $h(x) = 2 \tanh x - x$

**Catenaria** En los ejercicios 41 y 42 se da un modelo para un cable de alimentación suspendido entre dos torres. (a) Grafique el modelo, (b) encuentre las alturas de los cables en las torres y en el punto medio entre las torres y (c) halle la pendiente del modelo en el punto donde el cable se une con la torre de la derecha.

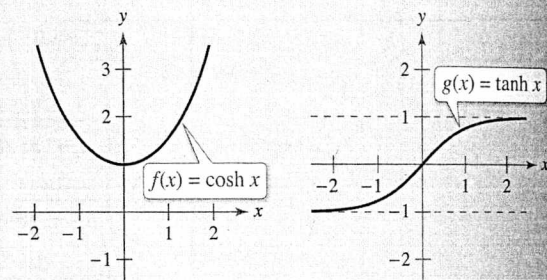
41.  $y = 10 + 15 \cosh \frac{x}{15}$ ,  $-15 \leq x \leq 15$   
 42.  $y = 18 + 25 \cosh \frac{x}{25}$ ,  $-25 \leq x \leq 25$

**DESARROLLO DE CONCEPTOS**

43. **Comparar funciones** Explique varias maneras en que las funciones hiperbólicas son similares a las funciones trigonométricas.  
 44. **Funciones hiperbólicas** ¿Qué funciones hiperbólicas toman solo valores positivos? ¿Qué funciones hiperbólicas son crecientes en sus dominios?  
 45. **Comparar fórmulas de derivación** ¿Las fórmulas de derivación hiperbólicas difieren de sus homólogas trigonométricas por un signo negativo?



**46. ¿CÓMO LO VE?** Utilice las gráficas de  $f$  y  $g$  que se muestran en las figuras para responder a lo siguiente.



- (a) Identifique el (los) intervalo(s) abierto(s) en el (los) que las gráficas de  $f$  y  $g$  son crecientes o decrecientes.  
 (b) Determine el (los) intervalo(s) abierto(s) en el(los) que las gráficas de  $f$  y  $g$  son cóncavas hacia arriba o cóncavas hacia abajo.

**Encontrar una derivada** En los ejercicios 47-56, encuentre la derivada de la función.

47.  $y = \cosh^{-1}(3x)$   
 48.  $y = \tanh^{-1} \frac{x}{2}$   
 49.  $y = \tanh^{-1} \sqrt{x}$                       50.  $f(x) = \coth^{-1}(x^2)$   
 51.  $y = \sinh^{-1}(\tan x)$                       52.  $y = \tanh^{-1}(\sin 2x)$   
 53.  $y = (\operatorname{csch}^{-1} x)^2$   
 54.  $y = \operatorname{sech}^{-1}(\cos 2x)$ ,  $0 < x < \pi/4$   
 55.  $y = 2x \sinh^{-1}(2x) - \sqrt{1 + 4x^2}$   
 56.  $y = x \tanh^{-1} x + \ln \sqrt{1 - x^2}$

**Ecuaciones diferenciales** En los ejercicios 57-60, resuelva la ecuación diferencial.

57.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{80 + 8x - 16x^2}}$   
 58.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{-4x^2 + 8x - 1}}$   
 59.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 21x}{5 + 4x - x^2}$   
 60.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x}{4x - x^2}$

61.  $y =$

63.  $y =$

65. **Movim**  
tura de

(a) Enc  
(ig

(b) Uti  
de

(c) Si l  
loc

seg  
y k

una  
rea  
sul

(d) Us  
su

(e) Int  
mi

una  
po

inc  
el t

ce  
des

(f) Es  
si l

66. **Tractri**  
 $y = a$

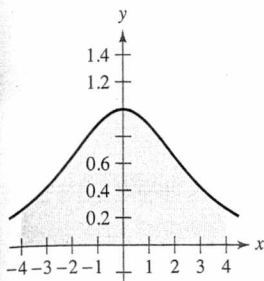
(a) Ha

(b) Se  
se

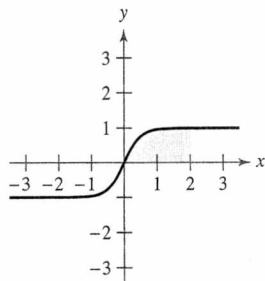
cia

Área En los ejercicios 61-64, halle el área de la región.

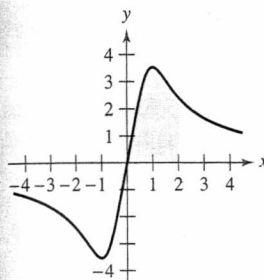
61.  $y = \operatorname{sech} \frac{x}{2}$



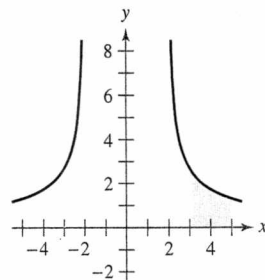
62.  $y = \tanh 2x$



63.  $y = \frac{5x}{\sqrt{x^4 + 1}}$



64.  $y = \frac{6}{\sqrt{x^2 - 4}}$



65. **Movimiento vertical** Se deja caer un objeto desde una altura de 400 pies.

- (a) Encuentre la velocidad del objeto en función del tiempo (ignore la resistencia del aire sobre el objeto).
- (b) Utilice el resultado del inciso (a) para encontrar la función de posición.
- (c) Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, entonces  $dv/dt = -32 + kv^2$ , donde  $-32$  pies por segundo por segundo es la aceleración debida a la gravedad y  $k$  es una constante. Demuestre que la velocidad  $v$  como una función de tiempo es  $v(t) = -\sqrt{32/k} \tanh(\sqrt{32k} t)$  realizando  $\int dv/(32 - kv^2) = -\int dt$  y simplificando el resultado.
- (d) Use el resultado del inciso (c) para encontrar  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$  y dé su interpretación.
- (e) Integre la función de velocidad en el inciso (c) y determine la posición  $s$  del objeto como una función de  $t$ . Use una herramienta de graficación para trazar la función de posición cuando  $k = 0.01$  y la función de posición en el inciso (b) en la misma ventana de visualización. Estime el tiempo adicional necesario para que el objeto alcance el nivel del suelo cuando la resistencia del aire no se desprecia.
- (f) Escriba una descripción de lo que usted cree que pasaría si  $k$  se incrementara. A continuación demuestre su afirmación con un determinado valor de  $k$ .

66. **Tractriz** Considere la ecuación de la tractriz

$y = a \operatorname{sech}^{-1}(x/a) - \sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > 0.$

- (a) Halle  $dy/dx$ .
- (b) Sea  $L$  la recta tangente a la tractriz en el punto  $P$ . Cuando  $L$  se cruza con el eje  $y$  en el punto  $Q$ , muestre que la distancia entre  $P$  y  $Q$  es  $a$ .

67. **Tractriz** Demuestre que el barco en el ejemplo 5 siempre está apuntando hacia la persona.

68. **Demostración** Demuestre que

$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad -1 < x < 1.$

69. **Demostración** Demuestre que

$\operatorname{senh}^{-1} t = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}).$

70. **Uso de un triángulo rectángulo** Demuestre que

$\arctan(\operatorname{senh} x) = \operatorname{arcsen}(\tanh x).$

**Demostración** En los ejercicios 71-73, demuestre la fórmula de derivación.

71.  $\frac{d}{dx} [\cosh x] = \operatorname{senh} x$

72.  $\frac{d}{dx} [\coth x] = -\operatorname{csch}^2 x$

73.  $\frac{d}{dx} [\operatorname{sech} x] = -\operatorname{sech} x \tanh x$

**Verificar una regla de derivación** En los ejercicios 74-76, verifique la fórmula de derivación.

74.  $\frac{d}{dx} [\cosh^{-1} x] = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

75.  $\frac{d}{dx} [\operatorname{senh}^{-1} x] = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

76.  $\frac{d}{dx} [\operatorname{sech}^{-1} x] = \frac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}}$

**DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM**

77. Desde el vértice  $(0, c)$  de la catenaria  $y = c \cosh(x/c)$  se traza una recta  $L$ , perpendicular a la tangente a la catenaria en el punto  $P$ . Demuestre que la longitud de  $L$  intersecado por los ejes es igual a la ordenada  $Y$  del punto  $P$ .

78. Demostrar o refutar: hay por lo menos una recta perpendicular a la gráfica de  $y = \cosh x$  en un punto  $(a, \cosh a)$  y que además es normal a la gráfica de  $y = \operatorname{senh} x$  en un punto  $(c, \operatorname{senh} c)$ .

[En un punto sobre una gráfica, la recta normal es la perpendicular a la tangente en ese punto. Además,  $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$  y  $\operatorname{senh} x = (e^x - e^{-x})/2$ .]

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Reservados todos los derechos

**PROYECTO DE TRABAJO**

**Arco de St. Louis**

El arco de entrada a St. Luis, Missouri, fue diseñado utilizando la función coseno hiperbólico. La ecuación utilizada para la construcción del arco fue

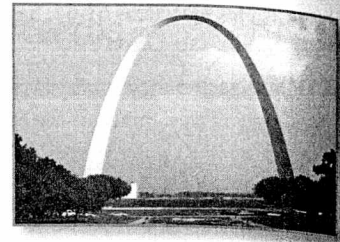
$y = 693.8597 - 68.7672 \cosh 0.0100333x,$   
 $-299.2239 \leq x \leq 299.2239$

donde  $x$  y  $y$  se miden en pies. Las secciones transversales del arco son triángulos equiláteros, y  $(x, y)$  traza la ruta de los centros de masa de los triángulos de la sección transversal. Para cada valor de  $x$ , el área del triángulo de la sección transversal es

$$A = 125.1406 \cosh 0.0100333x.$$

(Fuente: *Owner's Manual for the Gateway Arch, Saint Louis, MO*, por William Thayer.)

Ken Nyborg/Shutterstock.com



- (a) ¿A qué altura sobre el suelo está el centro del triángulo más alto? (A nivel del suelo,  $y = 0$ .)
- (b) ¿Cuál es la altura del arco? (Sugerencia: Para un triángulo equilátero,  $A = \sqrt{3}c^2$ , donde  $c$  es la mitad de la base del triángulo, y el centro de masa del triángulo está situado a dos tercios de la altura del triángulo.)
- (c) ¿Qué tan ancho es el arco al nivel del suelo?

## Ejercicios de repaso

Consulte [CalcChat.com](http://CalcChat.com) para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Encontrar la derivada por el proceso del límite** En los ejercicios 1-4, encuentre la derivada de la función usando la propia definición de derivada por el proceso límite.

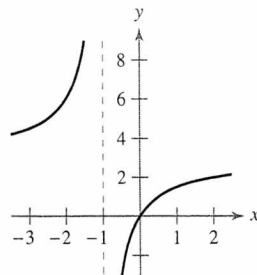
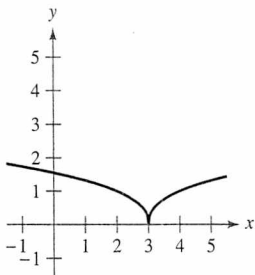
- 1.  $f(x) = 12$
- 2.  $f(x) = 5x - 4$
- 3.  $f(x) = x^2 - 4x + 5$
- 4.  $f(x) = \frac{6}{x}$

**Encontrar la derivada por el proceso del límite** En los ejercicios 5 y 6, use la forma alternativa de la derivada para encontrar la derivada en  $x = c$  (si es que existe)

- 5.  $g(x) = 2x^2 - 3x$ ,  $c = 2$
- 6.  $f(x) = \frac{1}{x + 4}$ ,  $c = 3$

**Determinar la derivabilidad** En los ejercicios 7 y 8, determine los valores de  $x$  en los que  $f$  es derivable.

- 7.  $f(x) = (x - 3)^{2/5}$
- 8.  $f(x) = \frac{3x}{x + 1}$



**Encontrar la derivada** En los ejercicios 9-20, use las reglas de derivación para encontrar la derivada de la función.

- 9.  $y = 25$
- 10.  $f(t) = 4t^4$
- 11.  $f(x) = x^3 - 11x^2$
- 12.  $g(s) = 3s^5 - 2s^4$
- 13.  $h(x) = 6\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$
- 14.  $f(x) = x^{1/2} - x^{-1/2}$
- 15.  $g(t) = \frac{2}{3t^2}$
- 16.  $h(x) = \frac{8}{5x^4}$
- 17.  $f(\theta) = 4\theta - 5 \sin \theta$
- 18.  $g(\alpha) = 4 \cos \alpha + 6$
- 19.  $f(\theta) = 3 \cos \theta - \frac{\sin \theta}{4}$
- 20.  $g(\alpha) = \frac{5 \sin \alpha}{3} - 2\alpha$

**Encontrar la pendiente de un gráfico** En los ejercicios 21-24, encuentre la pendiente de la gráfica de las funciones en el punto dado.

- 21.  $f(x) = \frac{27}{x^3}$ ,  $(3, 1)$
- 22.  $f(x) = 3x^2 - 4x$ ,  $(1, -1)$
- 23.  $f(x) = 2x^4 - 8$ ,  $(0, -8)$
- 24.  $f(\theta) = 3 \cos \theta - 2\theta$ ,  $(0, 3)$

**25. Cuerda vibrante** Cuando se pulsa la cuerda de una guitarra, ésta vibra con una frecuencia  $F = 200\sqrt{T}$ , donde  $F$  se mide en vibraciones por segundo y la tensión  $T$  se mide en libras. Encuentre las razones de cambio en  $F$  cuando (a)  $T = 4$  y (b)  $T = 9$ .

**26. Volumen** El área de la superficie de un cubo con lados de longitud  $\ell$  es dada por  $S = 6\ell^2$ . Encuentre las razones de variación del área de la superficie con respecto a  $\ell$  cuando (a)  $\ell = 3$  pulgadas y (b)  $\ell = 5$  pulgadas.

**Movimiento vertical** En los ejercicios 27 y 28, utilice la función  $s(t) = -16t^2 + v_0t + s_0$  de posición de objetos de caída libre.

- 27. Se lanza una pelota hacia abajo desde la parte alta de un edificio de 600 pies con una velocidad inicial de  $-30$  pies por segundo.
  - (a) Determine las funciones de posición y velocidad de la pelota.
  - (b) Determine la velocidad promedio en el intervalo  $[1, 3]$ .
  - (c) Encuentre las velocidades instantáneas cuándo  $t = 1$  y  $t = 3$ .
  - (d) Encuentre el tiempo necesario para que la pelota llegue a nivel de suelo.
  - (e) Determine la velocidad de la pelota en el impacto.
- 28. Para calcular la altura de un edificio, se deja caer un peso desde la parte superior del edificio en una piscina a nivel del suelo. El chapoteo es visto 9.2 segundos después de que cayó el peso. ¿Cuál es la altura (en pies) del edificio?

**Encontrar la derivada** En los ejercicios 29-40, utilice la regla del producto o la regla del cociente para encontrar la derivada de la función.

- 29.  $f(x) = (5x^2 + 8)(x^2 - 4x - 6)$
- 30.  $g(x) = (2x^3 + 5x)(3x - 4)$

31.  $h(x) =$   
 33.  $f(x) =$   
 35.  $y =$   
 37.  $y =$   
 39.  $y =$   
 40.  $g(x) =$   
**Encontrar**  
**cios 41-**  
**gráfica de**  
 41.  $f(x) =$   
 42.  $f(x) =$   
 43.  $f(x) =$   
 44.  $f(x) =$   
**Encontrar**  
**encuentra**  
 45.  $g(t) =$   
 47.  $f(x) =$   
 49.  $f(\theta) =$   
 51. **Acel**  
 gund  
 y ace  
 52. **Acel**  
 te de  
 $v(t) =$   
 donde  
 acele  
 tiemp  
**Encontrar**  
**derivada**  
 53.  $y =$   
 55.  $y =$   
 57.  $y =$   
 59.  $y =$   
 61.  $y =$   
 63.  $f(x) =$   
**Evaluaci**  
**tre y eval**  
 65.  $f(x) =$   
 67.  $f(x) =$

31.  $h(x) = \sqrt{x} \sin x$

32.  $f(t) = 2t^5 \cos t$

33.  $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$

34.  $f(x) = \frac{2x + 7}{x^2 + 4}$

35.  $y = \frac{x^4}{\cos x}$

36.  $y = \frac{\sin x}{x^4}$

37.  $y = 3x^2 \sec x$

38.  $y = 2x - x^2 \tan x$

39.  $y = x \cos x - \sin x$

40.  $g(x) = 3x \sin x + x^2 \cos x$

**Encontrar una ecuación de la recta tangente** En los ejercicios 41-44, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto dado.

41.  $f(x) = (x + 2)(x^2 + 5)$ ,  $(-1, 6)$

42.  $f(x) = (x - 4)(x^2 + 6x - 1)$ ,  $(0, 4)$

43.  $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$ ,  $(\frac{1}{2}, -3)$

44.  $f(x) = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$ ,  $(\frac{\pi}{2}, 1)$

**Encontrar una segunda derivada** En los ejercicios 45-50, encuentre la segunda derivada de la función.

45.  $g(t) = -8t^3 - 5t + 12$

46.  $h(x) = 6x^{-2} + 7x^2$

47.  $f(x) = 15x^{5/2}$

48.  $f(x) = 20\sqrt[3]{x}$

49.  $f(\theta) = 3 \tan \theta$

50.  $h(t) = 10 \cos t - 15 \sin t$

**51. Aceleración** La velocidad de un objeto en metros por segundo es  $v(t) = 20 - t^2$ ,  $0 \leq t \leq 6$ . Encuentre la velocidad y aceleración de un objeto cuando  $t = 3$ .

**52. Aceleración** La velocidad inicial de un automóvil que parte del reposo es

$$v(t) = \frac{90t}{4t + 10}$$

donde  $v$  se mide en pies por segundo. Calcule la velocidad y aceleración del vehículo una vez transcurridos los siguientes tiempos: (a) 1 segundo, (b) 5 segundos y (c) 10 segundos.

**Encontrar la derivada** En los ejercicios 53-64, encuentre la derivada de la función.

53.  $y = (7x + 3)^4$

54.  $y = (x^2 - 6)^3$

55.  $y = \frac{1}{x^2 + 4}$

56.  $f(x) = \frac{1}{(5x + 1)^2}$

57.  $y = 5 \cos(9x + 1)$

58.  $y = 1 - \cos 2x + 2 \cos^2 x$

59.  $y = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$

60.  $y = \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{\sec^5 x}{5}$

61.  $y = x(6x + 1)^5$

62.  $f(s) = (s^2 - 1)^{5/2}(s^3 + 5)$

63.  $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

64.  $h(x) = \left(\frac{x + 5}{x^2 + 3}\right)^2$

**Evaluación de una derivada** En los ejercicios 65-70, encuentre y evalúe la derivada de la función en el punto dado.

65.  $f(x) = \sqrt{1 - x^3}$ ,  $(-2, 3)$

66.  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ ,  $(3, 2)$

67.  $f(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$ ,  $(-1, 2)$

68.  $f(x) = \frac{3x + 1}{4x - 3}$ ,  $(4, 1)$

69.  $y = \frac{1}{2} \csc 2x$ ,  $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$

70.  $y = \csc 3x + \cot 3x$ ,  $(\frac{\pi}{6}, 1)$

**Encontrar una segunda derivada** En los ejercicios 71-74, encuentre la segunda derivada de la función.

71.  $y = (8x + 5)^3$

72.  $y = \frac{1}{5x + 1}$

73.  $f(x) = \cot x$

74.  $y = \sin^2 x$

**75. Refrigeración** La temperatura  $T$  (en grados Fahrenheit) de la comida que está en un congelador es

$$T = \frac{700}{t^2 + 4t + 10}$$

donde  $t$  es el tiempo en horas. Encuentre la razón de cambio respecto a  $t$  en cada uno de los siguientes tiempos.

(a)  $t = 1$  (b)  $t = 3$  (c)  $t = 5$  (d)  $t = 10$

**76. Movimiento armónico** El desplazamiento del equilibrio de un objeto en movimiento armónico en el extremo de un resorte es

$$y = \frac{1}{4} \cos 8t - \frac{1}{4} \sin 8t$$

donde  $y$  se mide en pies y el tiempo  $t$  en segundos. Determine la posición y velocidad del objeto cuando  $t = \pi/4$ .

**Encontrar una derivada** En los ejercicios 77-82, encuentre  $dy/dx$  por derivación implícita.

77.  $x^2 + y^2 = 64$

78.  $x^2 + 4xy - y^3 = 6$

79.  $x^3y - xy^3 = 4$

80.  $\sqrt{xy} = x - 4y$

81.  $x \sin y = y \cos x$

82.  $\cos(x + y) = x$

**Rectas tangentes y normales** En los ejercicios 83 y 84, encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la ecuación en el punto dado. Utilice una herramienta de graficación para representar la ecuación, la recta tangente y la normal.

83.  $x^2 + y^2 = 10$ ,  $(3, 1)$

84.  $x^2 - y^2 = 20$ ,  $(6, 4)$

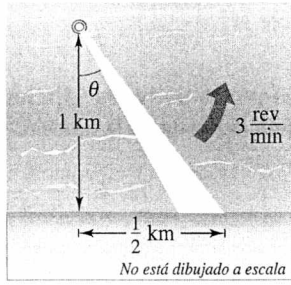
**85. Razón de cambio** Un punto se mueve sobre la curva  $y = \sqrt{x}$  de manera tal que el valor en  $y$  aumenta con un ritmo de dos unidades por segundo. ¿A qué ritmo cambia  $x$  en cada uno de los siguientes valores?

(a)  $x = \frac{1}{2}$  (b)  $x = 1$  (c)  $x = 4$

**86. Área superficial** Las aristas de un cubo se expanden a un ritmo de 8 centímetros por segundo. ¿Con qué rapidez cambia el área de su superficie cuando sus aristas tienen 6.5 centímetros?

**87. Rapidez lineal y angular** Un faro giratorio se localiza a 1 kilómetro en línea recta de una playa (vea la figura). Si el faro gira a razón de 3 revoluciones por minuto, ¿a qué velocidad parece moverse el haz de luz (en kilómetros por

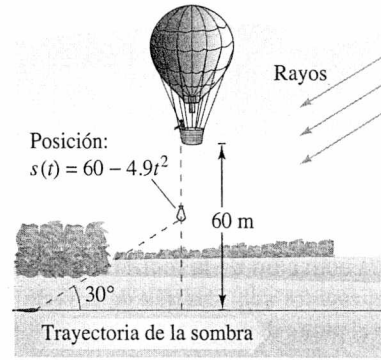
hora) para un espectador que se encuentra a  $\frac{1}{2}$  kilómetro sobre la playa?



88. **Sombra en movimiento** Se deja caer un costal de arena desde un globo aerostático que se encuentra a 60 metros de altura; en ese momento el ángulo de elevación del Sol es de  $30^\circ$  (vea la figura). La posición del costal está dada por

$$s(t) = 60 - 4.9t^2.$$

Encuentre la rapidez a la que se mueve la sombra sobre el piso cuando el costal está a una altura de 35 metros.



## Solución de problemas

Consulte [CalcChat.com](http://CalcChat.com) para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

1. **Encontrar ecuaciones de círculos** Tomando en cuenta la gráfica de la parábola  $y = x^2$ .

- (a) Encuentre el radio  $r$  del círculo más grande posible centrado sobre el eje  $x$  que es tangente a la parábola en el origen, como se muestra en la figura. Este círculo se denomina **círculo de curvatura**. Encuentre la ecuación de este círculo y la parábola en la misma ventana, con el fin de verificar la respuesta.
- (b) Encuentre el centro  $(0, b)$  del círculo con radio 1 centrado sobre el eje  $y$  que es la tangente a la parábola en dos puntos, como se muestra en la figura. Encuentre la ecuación de este círculo. Utilice una herramienta de graficación para representar el círculo y la parábola en la misma ventana, con el fin de verificar la respuesta.

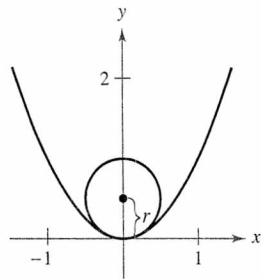


Figura para 1(a)

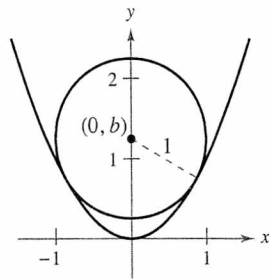


Figura para 1(b)

2. **Encontrar ecuaciones de las rectas tangentes** Represente las dos parábolas

$$y = x^2 \quad \text{y} \quad y = -x^2 + 2x - 5$$

en el mismo plano cartesiano. Encuentre las ecuaciones de las dos rectas igualmente tangentes a ambas parábolas.

3. **Encontrar un polinomio** Encuentre un polinomio de tercer grado  $p(x)$  tangente a la recta  $y = 14x - 13$  en el

punto  $(1, 1)$ , y tangente a la recta  $y = -2x - 5$  en el punto  $(-1, -3)$ .

4. **Encontrar una función** Encuentre una función de la forma  $f(x) = a + b \cos cx$  tangente a la recta  $y = 1$  en el punto  $(0, 1)$  y tangente a la recta

$$y = x + \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$$

en el punto  $(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{2})$ .

5. **Recta tangente y recta normal**

- (a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola  $y = x^2$  en el punto  $(2, 4)$ .
- (b) Encuentre la ecuación de la recta normal a  $y = x^2$  en el punto  $(2, 4)$ . (La *recta normal* es perpendicular a la tangente.) ¿Dónde corta esta recta a la parábola por segunda vez?
- (c) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a  $y = x^2$  en el punto  $(0, 0)$ .
- (d) Demuestre que para todo punto  $(a, b) \neq (0, 0)$  sobre la parábola  $y = x^2$ , la recta normal corta a la gráfica una segunda vez.

6. **Encontrar polinomios**

- (a) Encuentre el polinomio  $P_1(x) = a_0 + a_1x$  cuyo valor y pendiente coinciden con el valor y la pendiente de  $f(x) = \cos x$  en el punto  $x = 0$ .
- (b) Encuentre el polinomio  $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  cuyo valor y primeras dos derivadas coinciden con el valor y las dos primeras derivadas de  $f(x) = \cos x$  en el punto  $x = 0$ . Este polinomio se denomina polinomio de Taylor de segundo grado de  $f(x) = \cos x$  en  $x = 0$ .
- (c) Complete la siguiente tabla comparando los valores de  $f(x) = \cos x$  y  $P_2(x)$ . ¿Qué es lo que observa?

$x$
$\cos x$
$P_2(x)$

(d)

7. **Cur**

$$x^4 =$$

se m

(a)

(b)

(c)

Figura 1

8. **Cur de p**

$$b^2y^2$$

se m

(a)

(b)

(c)

9. **Lon tatur farol**

figu

10 p

del r

(a)

(b)

(c)

(d)

$x$	-1.0	-0.1	-0.001	0	0.001	0.1	1.0
$\cos x$							
$P_2(x)$							

(d) Encuentre el polinomio de Taylor de tercer grado de  $f(x) = \sin x$  en  $x = 0$ .

**7. Curvas famosas** La gráfica de la **curva ocho**

$$x^4 = a^2(x^2 - y^2), \quad a \neq 0$$

se muestra a continuación.

- (a) Explique cómo podría utilizar una herramienta de graficación para representar esta curva.
- (b) Utilice una herramienta de graficación para representar la curva para diversos valores de la constante  $a$ . Describa cómo influye en la forma de la curva.
- (c) Determine los puntos de la curva donde la recta tangente es horizontal.

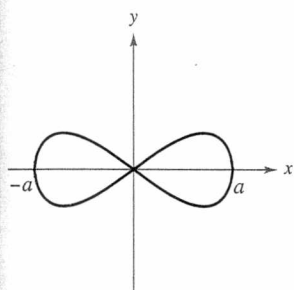


Figura para 7

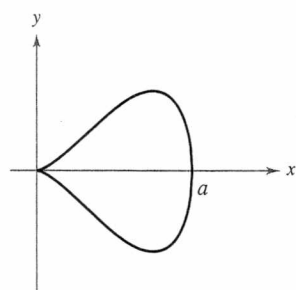


Figura para 8

**8. Curvas famosas** La gráfica de la curva **cuártica en forma de pera**

$$b^2y^2 = x^3(a - x), \quad a, b > 0$$

se muestra a continuación

- (a) Explique cómo podría utilizar una herramienta de graficación para representar esta curva.
- (b) Utilice una herramienta de graficación para representar la curva para diversos valores de las constantes  $a$  y  $b$ . Describa cómo influyen en la forma de la curva.
- (c) Determine los puntos de la curva donde la recta tangente es horizontal.

**9. Longitud de la sombra** Un hombre que mide 6 pies de estatura camina con una rapidez de 5 pies por segundo hacia una farola del alumbrado público que tiene 30 pies de altura (vea la figura). Su hijo, que mide 3 pies, le sigue a la misma rapidez pero 10 pies detrás de él. Por momentos, la sombra que queda detrás del niño es la producida por el hombre, y en otros, es la del niño.

- (a) Suponiendo que el hombre está a 90 pies de la farola, demuestre que su sombra se proyecta tras del niño.
- (b) Suponiendo que el hombre está a 60 pies de la farola, demuestre que la sombra del niño se extiende más allá de la del hombre.
- (c) Determine la distancia  $d$  desde el hombre hasta la farola en la que los bordes de ambas sombras están exactamente a la misma distancia de la farola.
- (d) Determine qué tan rápido se mueve el borde de la sombra en función de  $x$ , la distancia entre el hombre y la farola.

Analice la continuidad de esta función de velocidad de la sombra.

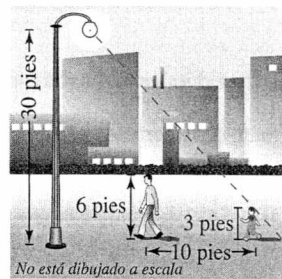


Figura para 9

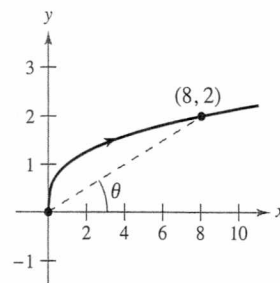


Figura para 10

**10. Movimiento de una partícula** Una partícula se mueve sobre la gráfica de  $y = \sqrt[3]{x}$  (vea la figura). Cuando  $x = 8$ , la componente  $y$  de su posición aumenta a razón de 1 centímetro por segundo.

- (a) ¿A qué velocidad se modifica la componente  $x$  en este momento?
- (b) ¿A qué velocidad se modifica la distancia desde el origen en este momento?
- (c) ¿A qué velocidad cambia el ángulo de inclinación  $\theta$  en este momento?

**11. Proyectoil en movimiento** Un astronauta que está en la Luna lanza una roca. El peso de la roca es

$$s = -\frac{27}{10}t^2 + 27t + 6$$

donde  $s$  se mide en pies y  $t$  en segundos.

- (a) Encuentre las expresiones para la velocidad y aceleración de la roca.
- (b) Encuentre el tiempo en que la roca está en su punto más alto calculando el tiempo en el que la velocidad es igual a 0. ¿Cuál es la altura de la roca en este momento?
- (c) ¿Cómo se compara la aceleración de la roca con la aceleración de la gravedad de la Tierra?

**12. Demostración** Sea  $E$  una función que satisface  $E(0) = E'(0) = 1$  Demuestre que si  $E(a + b) = E(a)E(b)$  para todo  $a$  y  $b$ , entonces  $E$  es derivable y  $E'(x) = E(x)$  para todo  $x$ . Encuentre un ejemplo de una función que satisfaga  $E(a + b) = E(a)E(b)$

**13. Demostración** Sea  $L$  una función derivable para todo  $x$ . Demuestre que si  $L(a + b) = L(a) + L(b)$  para todo  $a$  y  $b$ , entonces  $L'(x) = L'(0)$  para todo  $x$ . ¿A qué se parece la gráfica de  $L$ ?

**14. Radianes y grados** El límite fundamental

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

supone que  $x$  se mide en radianes. ¿Qué sucede si  $x$  se midió en grados en vez de radianes?

- (a) Configure su calculadora en modo *degree* y complete la tabla.

$z$ (en grados)	0.1	0.01	0.0001
$\frac{\sin z}{z}$			

- (b) Utilice la tabla para estimar

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z}$$

para  $z$  en grados. ¿Cuál es el valor exacto de este límite?

- (c) Utilice la definición de límite de la derivada para encontrar

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sen} z$$

para  $z$  en grados.

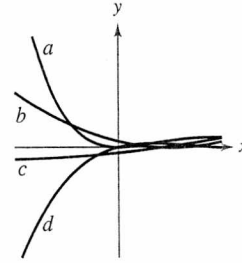
- (d) Defina las nuevas funciones
- $S(z) = \operatorname{sen}(cz)$
- y
- $C(z) = \operatorname{cos}(cz)$
- donde
- $c = \pi/180$
- . Encuentre
- $S(90)$
- y
- $C(180)$
- . Utilice la regla de la cadena para calcular

$$\frac{d}{dz} S(z).$$

- (e) Explique por qué el cálculo es más sencillo utilizando radianes en lugar de grados.

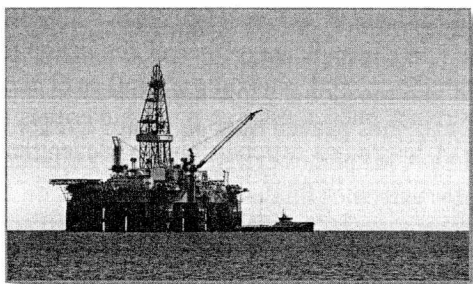
15. **La aceleración y jerk** Si  $a$  es la aceleración de objeto, el jerk  $j$  (variación de la aceleración) se define como  $j = a'(t)$ .

- (a) Utilice esta definición para elaborar una interpretación física de  $j$ .
- (b) Encuentre  $j$  para el vehículo que se menciona en el ejercicio 119 de la sección 2.3 e interprete el resultado.
- (c) En la figura se muestra la gráfica de las funciones de posición, velocidad, aceleración y variación de la aceleración de un vehículo. Identifique cada gráfica y explique su razonamiento.



## Aplicaciones de la derivada

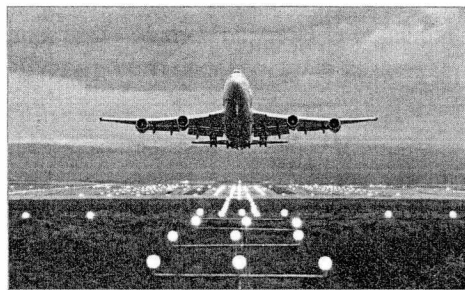
- 5.1 Extremos en un intervalo
- 5.2 El teorema de Rolle y el teorema del valor medio
- 5.3 Funciones crecientes y decrecientes y el criterio de la primera derivada
- 5.4 Concavidad, puntos de inflexión y el criterio de la segunda derivada
- 5.5 Análisis de gráficas de funciones
- 5.6 Problemas de optimización
- 5.7 Método de Newton
- 5.8 Diferenciales
- 5.9 Formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital



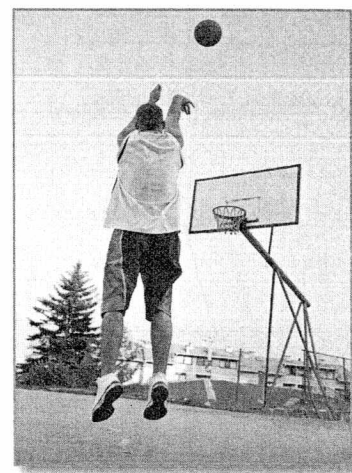
Plataforma petrolera



Estimación del error



Velocidad



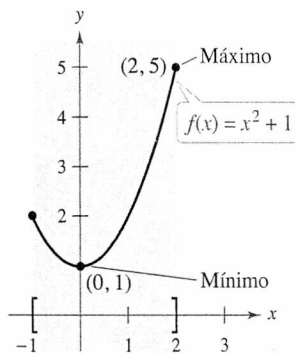
Traectoria de un proyectil

# 5.1 Extremos en un intervalo

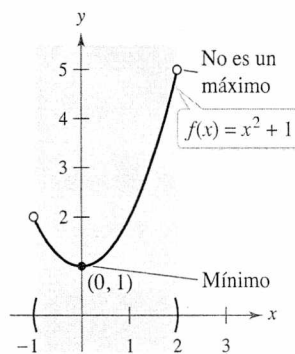
- Entender la definición de extremos de una función en un intervalo.
- Entender la definición de extremos relativos de una función en un intervalo abierto.
- Encontrar los extremos en un intervalo cerrado.

## Extremos de una función

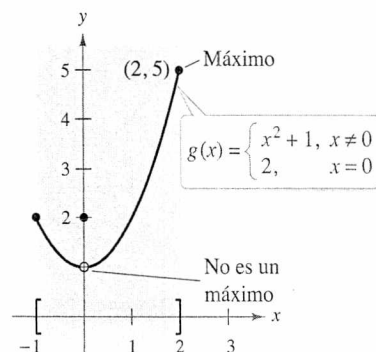
En el cálculo, se dedica mucho esfuerzo para determinar el comportamiento de una función  $f$  en un intervalo  $I$ . ¿ $f$  tiene un valor máximo en  $I$ ? ¿Tiene un valor mínimo? ¿Dónde es creciente la función? ¿Dónde es decreciente? En esta unidad verá cómo las derivadas se utilizan para responder estas preguntas. También por qué los planteamientos anteriores son importantes en las aplicaciones de la vida real.



(a)  $f$  es continua,  $[-1, 2]$  es cerrado.



(b)  $f$  es continua,  $(-1, 2)$  es abierto.



(c)  $g$  no es continua,  $[-1, 2]$  es cerrado.

Figura 5.1

### Definición de extremos

Sea  $f$  definida en un intervalo  $I$  que contiene a  $c$ .

1.  $f(c)$  es el **mínimo de  $f$  en  $I$**  si  $f(c) \leq f(x)$  para toda  $x$  en  $I$ .
2.  $f(c)$  es el **máximo de  $f$  en  $I$**  si  $f(c) \geq f(x)$  para toda  $x$  en  $I$ .

Los mínimos y máximos de una función en un intervalo son los **valores extremos**, o simplemente **extremos**, de la función en el intervalo. El mínimo y el máximo de una función en un intervalo también reciben el nombre de **mínimo absoluto y máximo absoluto**, o **mínimo global y máximo global** en el intervalo. En un intervalo dado, los puntos extremos pueden estar en puntos interiores o en sus puntos finales (vea la figura 5.1). A los puntos extremos que se encuentran en los puntos finales se les llama **puntos extremos finales**.

Una función no siempre tiene un mínimo o un máximo en un intervalo. Por ejemplo, en la figura 5.1(a) y (b), es posible ver que la función  $f(x) = x^2 + 1$  tiene tanto un mínimo como un máximo en el intervalo cerrado  $[-1, 2]$ , pero no tiene un máximo en el intervalo abierto  $(-1, 2)$ . Además, en la figura 5.1(c), se observa que la continuidad (o la falta de la misma) puede afectar la existencia de un extremo en un intervalo. Esto sugiere el siguiente teorema. (Aunque el teorema de los valores extremos es intuitivamente creíble, la demostración del mismo no se encuentra dentro del objetivo de este libro.)

### TEOREMA 5.1 El teorema del valor extremo

Si  $f$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces  $f$  tiene tanto un mínimo como un máximo en el intervalo.

### Exploración

**Determinación de los valores mínimo y máximo** El teorema del valor extremo (al igual que el teorema del valor medio) es un *teorema de existencia* porque indica la existencia de valores mínimo y máximo, pero no muestra cómo determinarlos. Use la función para valores extremos de una herramienta de graficación con el fin de encontrar los valores mínimo y máximo de cada una de las siguientes funciones. En cada caso, ¿los valores de  $x$  son exactos o aproximados? Explique.

- a.  $f(x) = x^2 - 4x + 5$  en el intervalo cerrado  $[-1, 3]$
- b.  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 2$  en el intervalo cerrado  $[-1, 3]$

Cresta  
(0, 0)  
-1

ftiene  
y un n  
Figur:



(a)  $f'(x) =$



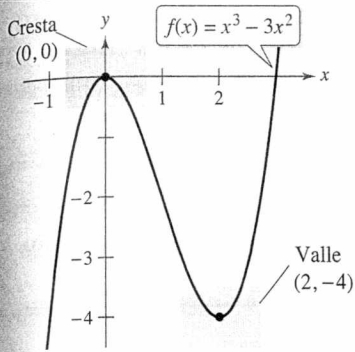
-2

(b)  $f'(x) =$

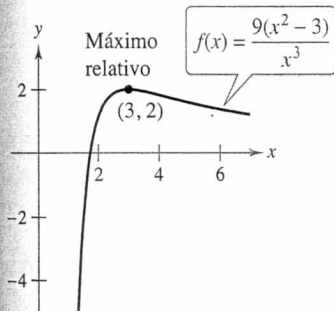


(c)  $f'(x) =$

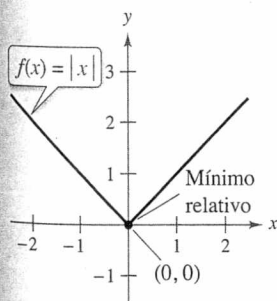
Figur:



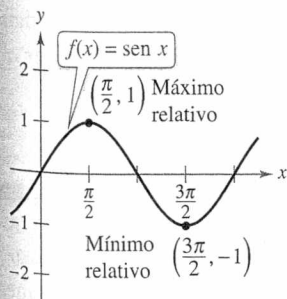
$f$  tiene un máximo relativo en  $(0, 0)$  y un mínimo relativo en  $(2, -4)$ .  
**Figura 5.2**



(a)  $f'(3) = 0$



(b)  $f'(0)$  no existe.



(c)  $f'(\frac{\pi}{2}) = 0; f'(\frac{3\pi}{2}) = 0$

**Figura 5.3**

### Extremos relativos y números críticos

En la figura 5.2 la gráfica de  $f(x) = x^3 - 3x^2$  tiene un **máximo relativo** en el punto  $(0, 0)$  y un **mínimo relativo** en el punto  $(2, -4)$ . De manera informal, para una función continua, puede pensar que un máximo relativo ocurre en una “cresta” de la gráfica, y que un mínimo relativo se representa en un “valle” en la gráfica. Tales cimas y valles pueden ocurrir de dos maneras. Si la cresta (o valle) es suave y redondeada, la gráfica tiene una tangente horizontal en el punto alto (o punto bajo). Si la cresta (o valle) es angosta y picuda, la gráfica representa una función que no es derivable en el punto más alto (o en el punto más bajo).

#### Definición de extremos relativos

1. Si hay un intervalo abierto que contiene a  $c$  en el cual  $f(c)$  es un máximo, entonces  $f(c)$  recibe el nombre de **máximo relativo** de  $f$ , o se podría afirmar que  $f$  tiene un **máximo relativo en  $(c, f(c))$ .**
2. Si hay un intervalo abierto que contiene a  $c$  en el cual  $f(c)$  es un mínimo, entonces  $f(c)$  recibe el nombre de **mínimo relativo** de  $f$ , o se podría afirmar que  $f$  tiene un **mínimo relativo en  $(c, f(c))$ .**

El plural de máximo relativo es máximos relativos, y el plural de mínimo relativo es mínimos relativos. Un máximo relativo o un mínimo relativo algunas veces son llamados **máximo local** y **mínimo local**, respectivamente.

El ejemplo 1 examina las derivadas de una función en extremos relativos *dados*. (En la sección 5.3 se estudia en detalle la *determinación* de los extremos relativos de una función)

#### EJEMPLO 1 Valor de la derivada en los extremos relativos

Encuentre el valor de la derivada en cada uno de los extremos relativos que se ilustran en la figura 5.3.

#### Solución

a. La derivada de  $f(x) = \frac{9(x^2 - 3)}{x^3}$

$$f'(x) = \frac{x^3(18x) - (9)(x^2 - 3)(3x^2)}{(x^3)^2}$$

$$= \frac{9(9 - x^2)}{x^4}$$

Derive utilizando la regla del cociente.

Simplifique.

En el punto  $(3, 2)$ , el valor de la derivada es  $f'(3) = 0$  (vea la figura 5.3(a)).

- b. En  $x = 0$ , la derivada de  $f(x) = |x|$  *no existe* debido a que difieren los siguientes límites unilaterales [vea la figura 5.3(b)].

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

Límite desde la izquierda

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

Límite desde la derecha

- c. La derivada de  $f(x) = \text{sen } x$

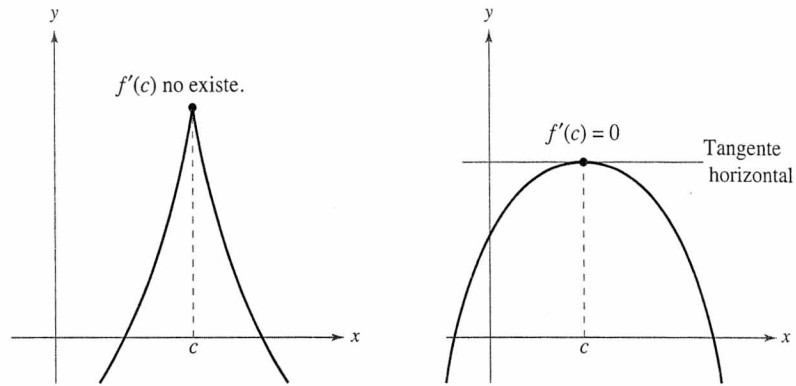
$$f'(x) = \cos x.$$

En el punto  $(\frac{\pi}{2}, 1)$ , el valor de la derivada es  $f'(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ . En el punto  $(\frac{3\pi}{2}, -1)$ , el valor de la derivada es  $f'(\frac{3\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$  [vea la figura 5.3(c)].

Observe que en el ejemplo 1 en los extremos relativos la derivada es cero o no existe. Los valores de  $x$  en estos puntos especiales reciben el nombre de **puntos críticos**. La figura 5.4 ilustra los dos tipos de números críticos. Advierta en la definición que el número crítico  $c$  debe estar en el dominio de  $f$ , pero  $c$  no tiene que estar en el dominio de  $f'$ .

**Definición de un número o punto crítico**

Sea  $f$  definida en  $c$ . Si  $f'(c) = 0$  o si  $f$  no es derivable en  $c$ , entonces  $c$  es un **punto crítico** de  $f$ .



$c$  es un punto crítico de  $f$ .

Figura 5.4

**TEOREMA 5.2 Los extremos relativos se presentan solo en puntos o números críticos**

Si tiene un mínimo relativo o un máximo relativo en  $x = c$ , entonces  $c$  es un punto crítico de  $f$ .

**Demostración**

**Caso 1:** Si  $f$  no es derivable en  $x = c$ , entonces, por definición,  $c$  es un punto crítico de  $f$  y el teorema es válido.

**Caso 2:** Si  $f$  es derivable en  $x = c$ , entonces  $f'(c)$  debe ser positiva, negativa o 0. Suponga que  $f'(c)$  es positiva. Entonces

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

lo cual implica que existe un intervalo  $(a, b)$  que contiene a  $c$  de modo tal que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0, \text{ para todo } x \neq c \text{ en } (a, b). \quad [\text{Vea el ejercicio 78(b), sección 3.2.}]$$

Como este cociente es positivo, los signos en el denominador y el numerador deben coincidir. Lo anterior produce las siguientes desigualdades para los valores de  $x$  en el intervalo  $(a, b)$ .

**Izquierda de  $c$ :**  $x < c$  y  $f(x) < f(c) \Rightarrow f(c)$  no es mínimo relativo.

**Derecha de  $c$ :**  $x > c$  y  $f(x) > f(c) \Rightarrow f(c)$  no es máximo relativo.

De tal modo, la suposición de que  $f'(c) > 0$  contradice la hipótesis de que  $f(c)$  es un extremo relativo. Suponiendo que  $f'(c) < 0$  produce una contradicción similar, solo queda una posibilidad, a saber,  $f'(c) = 0$ . En consecuencia, por definición,  $c$  es un punto crítico de  $f$  y el teorema resulta válido.

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.



**PIERRE DE FERMAT  
(1601-1665)**

Para Fermat, que estudió abogacía, las matemáticas eran más una afición que una profesión. Sin embargo, Fermat realizó muchas contribuciones a la geometría analítica, la teoría de números, el cálculo y la probabilidad. En cartas a sus amigos, escribió de muchas de las ideas fundamentales del cálculo, mucho antes de Newton o Leibniz. Por ejemplo, en ocasiones el teorema 5.2 se atribuye a Fermat. Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para leer más de esta biografía.

(-1,7)  
-1  
f'  
En el in  
un míni  
(2, 16).  
Figura

## Determinación de extremos en un intervalo cerrado

El teorema 5.2 señala que los extremos relativos de una función *solo* pueden ocurrir en los puntos críticos de la función. Sabiendo lo anterior, puede utilizar las siguientes estrategias para determinar los extremos en un intervalo cerrado.

### ESTRATEGIAS PARA LA DETERMINACION DE LOS EXTREMOS EN UN INTERVALO

Para determinar los extremos de una función continua  $f$  en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , se siguen estos pasos.

1. Se encuentran los puntos críticos de  $f$  en  $(a, b)$ .
2. Se evalúa  $f$  en cada punto crítico en  $(a, b)$ .
3. Se evalúa  $f$  en cada punto extremo de  $[a, b]$ .
4. El más pequeño de estos valores es el mínimo. El más grande es el máximo.

Los siguientes tres ejemplos muestran cómo aplicar estas estrategias. Asegúrese de ver que la determinación de los puntos críticos de la función solo es una parte del procedimiento. La evaluación de la función en los puntos críticos y los puntos extremos corresponden a la otra parte.

### EJEMPLO 2

#### Determinar los extremos en un intervalo cerrado

Determine los extremos de

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3$$

en el intervalo  $[-1, 2]$

**Solución** Comience derivando la función

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3$$

Escriba la función original.

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

Derive.

Para determinar los puntos críticos de  $f$ , en el intervalo  $(-1, 2)$ , necesita encontrar los valores de  $x$  para los cuales  $f'(x) = 0$  y todos los valores de  $x$  para los cuales  $f'(x)$  no existe.

$$12x^3 - 12x^2 = 0$$

Igual  $f'(x)$  a cero.

$$12x^2(x - 1) = 0$$

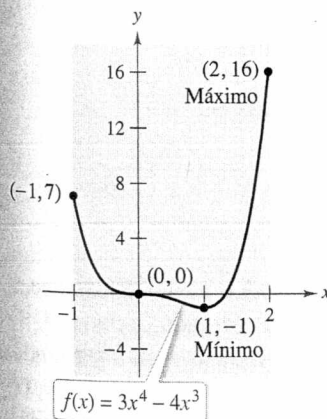
Factorice.

$$x = 0, 1$$

Números críticos

Debido a que  $f'$  se define para todo  $x$ , es posible concluir que estos números son los únicos puntos críticos de  $f$ . Al evaluar  $f$  en estos dos puntos críticos y en los puntos extremos de  $[-1, 2]$ , es posible determinar que el máximo es  $f(2) = 16$  y el mínimo corresponde a  $f(1) = -1$ , como se muestra en la tabla. La gráfica de  $f$  se muestra en la figura 5.5.

Punto extremo izquierdo	Punto crítico	Punto crítico	Punto extremo derecho
$f(-1) = 7$	$f(0) = 0$	$f(1) = -1$ Mínimo	$f(2) = 16$ Máximo



En el intervalo cerrado  $[-1, 2]$ ,  $f$  tiene un mínimo en  $(1, -1)$  y un máximo en  $(2, 16)$ .

Figura 5.5

En la figura 5.5 observe que el punto crítico  $x = 0$  no produce un mínimo relativo o un máximo relativo. Esto indica que el recíproco del teorema 5.2 no es válido. En otras palabras, *los números críticos de una función no necesariamente son extremos relativos.*

**EJEMPLO 3**

**Determinar los extremos en un intervalo cerrado**

Encuentre los extremos de  $f(x) = 2x - 3x^{2/3}$  en el intervalo  $[-1, 3]$ .

**Solución** Comience derivando la función.

$$f(x) = 2x - 3x^{2/3}$$

Escriba la función original.

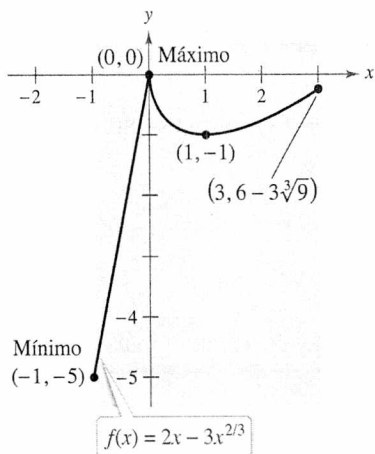
$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^{1/3}}$$

Derive.

$$= 2\left(\frac{x^{1/3} - 1}{x^{1/3}}\right)$$

Simplifique.

A partir de esta derivada, puede ver que la función tiene dos puntos críticos en el intervalo  $(-1, 3)$ . El número 1 es crítico porque  $f'(1) = 0$ , y el punto 0 es un punto crítico debido a que  $f'(0)$  no existe. Al evaluar  $f$  en estos dos números y en los puntos extremos del intervalo, se puede concluir que el mínimo es  $f(-1) = -5$  y el máximo,  $f(0) = 0$ , como se indica en la tabla. La gráfica de  $f$  se muestra en la figura 5.6.



En el intervalo cerrado  $[-1, 3]$ ,  $f$  tiene un mínimo en  $(-1, -5)$  y un máximo en  $(0, 0)$ .

Figura 5.6

Punto final izquierdo	Punto crítico	Punto crítico	Punto final derecho
$f(-1) = -5$ Mínimo	$f(0) = 0$ Máximo	$f(1) = -1$	$f(3) = 6 - 3\sqrt[3]{9} \approx -0.24$

**EJEMPLO 4**

**Determinar los extremos en un intervalo cerrado**

•••► Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre los extremos de

$$f(x) = 2 \sin x - \cos 2x$$

en el intervalo  $[0, 2\pi]$ .

**Solución** Comencemos por derivar la función.

$$f(x) = 2 \sin x - \cos 2x$$

Escriba la función original.

$$f'(x) = 2 \cos x + 2 \sin 2x$$

Igual.

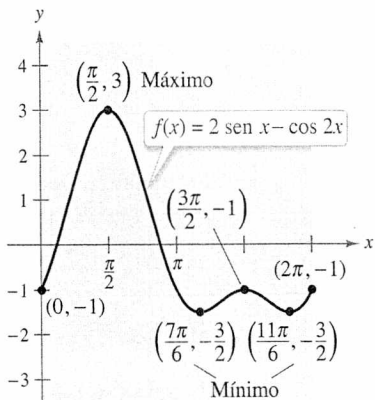
$$= 2 \cos x + 4 \cos x \sin x$$

$$\sin 2x = 2 \cos x \sin x$$

$$= 2(\cos x)(1 + 2 \sin x)$$

Factorice.

Como  $f$  es derivable para todo  $x$  real, podemos determinar todos los puntos críticos de  $f$ , determinando las raíces de su derivada igualado a cero. Considerando  $2(\cos x)(1 + 2 \sin x) = 0$  en el intervalo  $(0, 2\pi)$ , el factor  $\cos x$  es cero cuando  $x = \pi/2$  y cuando  $x = 3\pi/2$ . El factor  $(1 + 2 \sin x)$  es cero cuando  $x = 7\pi/6$  y cuando  $x = 11\pi/6$ . Al evaluar  $f$  en estos cuatro números críticos y en los puntos extremos del intervalo, se concluye que el máximo es  $f(\pi/2) = 3$  y que se presenta el mínimo en *dos* puntos,  $f(7\pi/6) = -3/2$  y  $f(11\pi/6) = -3/2$ , como se indica en la tabla. La gráfica se muestra en la figura 5.7.



En el intervalo cerrado  $[0, 2\pi]$ ,  $f$  tiene dos mínimos en  $(7\pi/6, -3/2)$  y  $(11\pi/6, -3/2)$  y un máximo en  $(\pi/2, 3)$ .

Figura 5.7

Punto final izquierdo	Punto crítico	Punto crítico	Punto crítico	Punto crítico	Punto final derecho
$f(0) = -1$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ Máximo	$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$ Mínimo	$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$	$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$ Mínimo	$f(2\pi) = -1$

Encon  
En los  
existe)

1.  $f(x)$

3.  $g(x)$

5.  $f(x)$

Aproxi  
los pun  
Determin  
tivo, m  
cada m

7.

5

4

3

2

1

+

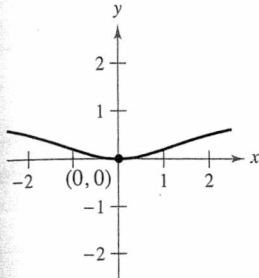
-1

# 5.1 Ejercicios

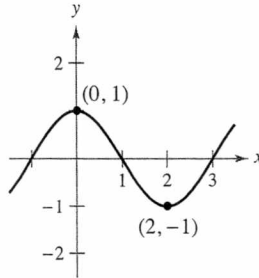
Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Encontrar el valor de la derivada en extremos relativos**  
 En los ejercicios 1-6, determine el valor de la derivada (si ésta existe) en cada extremo indicado.

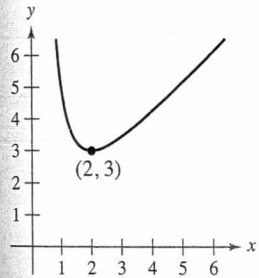
1.  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$



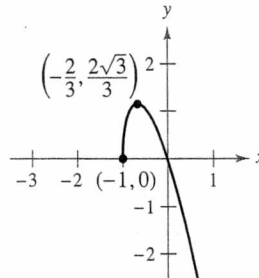
2.  $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$



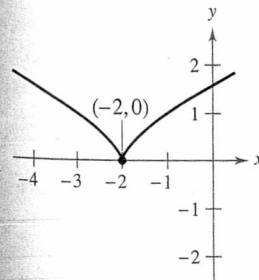
3.  $g(x) = x + \frac{4}{x^2}$



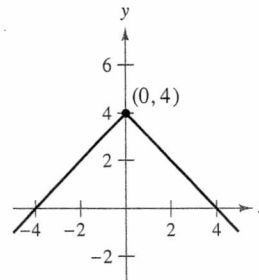
4.  $f(x) = -3x\sqrt{x+1}$



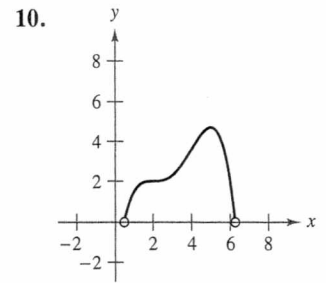
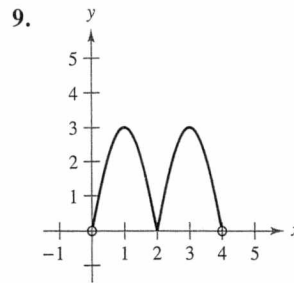
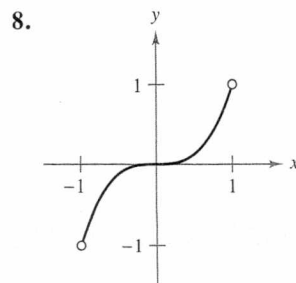
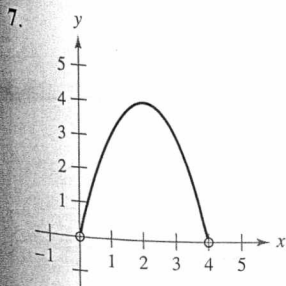
5.  $f(x) = (x+2)^{2/3}$



6.  $f(x) = 4 - |x|$



**Aproximar puntos críticos** En los ejercicios 7-10, aproxime los puntos críticos de la función que se muestra en la gráfica. Determine si la función tiene un máximo relativo, mínimo relativo, máximo absoluto, mínimo absoluto o ninguno de éstos en cada número crítico en el intervalo.



**Encontrar números críticos** En los ejercicios 11-16, determine cualesquiera de los puntos críticos de la función.

11.  $f(x) = x^3 - 3x^2$

12.  $g(x) = x^4 - 8x^2$

13.  $g(t) = t\sqrt{4-t}, t < 3$

14.  $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$

15.  $h(x) = \sin^2 x + \cos x$   
 $0 < x < 2\pi$

16.  $f(\theta) = 2 \sec \theta + \tan \theta$   
 $0 < \theta < 2\pi$

**Encontrar extremos en un intervalo cerrado** En los ejercicios 17-36, ubique los extremos absolutos de la función en el intervalo cerrado.

17.  $f(x) = 3 - x, [-1, 2]$

18.  $f(x) = \frac{3}{4}x + 2, [0, 4]$

19.  $g(x) = 2x^2 - 8x, [0, 6]$

20.  $h(x) = 5 - x^2, [-3, 1]$

21.  $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2, [-1, 2]$

22.  $f(x) = 2x^3 - 6x, [0, 3]$

23.  $y = 3x^{2/3} - 2x, [-1, 1]$

24.  $g(x) = \sqrt[3]{x}, [-8, 8]$

25.  $g(t) = \frac{t^2}{t^2 + 3}, [-1, 1]$

26.  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, [-2, 2]$

27.  $h(s) = \frac{1}{s-2}, [0, 1]$

28.  $h(t) = \frac{t}{t+3}, [-1, 6]$

29.  $y = 3 - |t-3|, [-1, 5]$

30.  $g(x) = |x+4|, [-7, 1]$

31.  $f(x) = \lfloor x \rfloor, [-2, 2]$

32.  $h(x) = \lfloor 2-x \rfloor, [-2, 2]$

33.  $f(x) = \sin x, \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$

34.  $g(x) = \sec x, \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

35.  $y = 3 \cos x, [0, 2\pi]$

36.  $y = \tan\left(\frac{\pi x}{8}\right), [0, 2]$

**Encontrar extremos en un intervalo** En los ejercicios 37-40, localice los extremos absolutos de la función (si existen) sobre cada intervalo.

37.  $f(x) = 2x - 3$

38.  $f(x) = 5 - x$

- (a)  $[0, 2]$  (b)  $[0, 2]$

- (a)  $[1, 4]$  (b)  $[1, 4]$

- (c)  $(0, 2)$  (d)  $(0, 2)$

- (c)  $(1, 4)$  (d)  $(1, 4)$

39.  $f(x) = x^2 - 2x$

40.  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

- (a)  $[-1, 2]$  (b)  $(1, 3]$

- (a)  $[-2, 2]$  (b)  $[-2, 0]$

- (c)  $(0, 2)$  (d)  $[1, 4]$

- (c)  $(-2, 2)$  (d)  $[1, 2]$

**A** Encontrar el extremo absoluto En los ejercicios 41-44, utilice una herramienta de graficación para trazar la gráfica de la función y determine los extremos absolutos de la misma en el intervalo indicado.

41.  $f(x) = \frac{3}{x-1}$ ,  $(1, 4]$       42.  $f(x) = \frac{2}{2-x}$ ,  $[0, 2)$

43.  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x + 1$ ,  $[-1, 3]$

44.  $f(x) = \sqrt{x} + \cos \frac{x}{2}$ ,  $[0, 2\pi]$

**A** Encontrar extremos usando la tecnología En los ejercicios 45 y 46, (a) use un sistema de álgebra por computadora para representar la función y aproximar cualquier extremo absoluto en el intervalo dado. (b) Utilice una herramienta de graficación para determinar cualquier punto crítico y use éstos para encontrar todos los extremos absolutos no ubicados en los puntos finales. Compare los resultados con los del inciso (a).

45.  $f(x) = 3.2x^5 + 5x^3 - 3.5x$ ,  $[0, 1]$

46.  $f(x) = \frac{4}{3}x\sqrt{3-x}$ ,  $[0, 3]$

**A** Encontrar valores máximos con el uso de la tecnología En los ejercicios 47 y 48, utilice un sistema de álgebra por computadora para encontrar el valor máximo de  $|f''(x)|$  en el intervalo cerrado. (Este valor se usa en la estimación del error por la regla del trapecio, como se explica en la sección 4.6.)

47.  $f(x) = \sqrt{1+x^3}$ ,  $[0, 2]$       48.  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ,  $[\frac{1}{2}, 3]$

**A** Encontrar valores máximos con el uso de la tecnología En los ejercicios 49 y 50, utilice un sistema de álgebra por computadora para determinar el valor máximo de  $|f^{(4)}(x)|$  en el intervalo cerrado. (Este valor se emplea en la estimación del error con la regla de Simpson.)

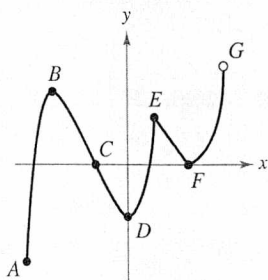
49.  $f(x) = (x+1)^{2/3}$ ,  $[0, 2]$

50.  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ,  $[-1, 1]$

51. Redacción Escriba un párrafo breve explicando por qué una función definida en un intervalo abierto puede no tener un máximo o un mínimo. Ilustre la explicación con un dibujo de la gráfica de tal función.



**¿CÓMO LO VE?** Determine si cada uno de los puntos etiquetados es un máximo o un mínimo absoluto, un máximo o un mínimo relativo o ninguno.

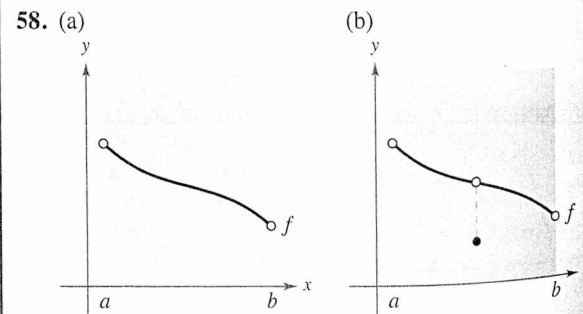
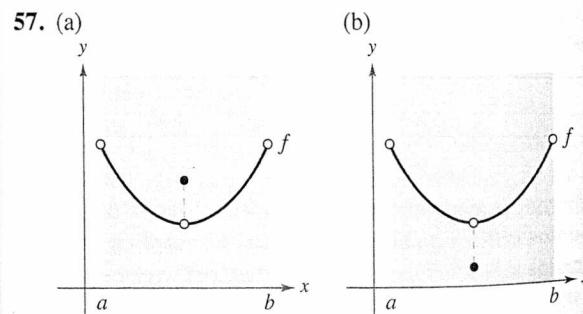
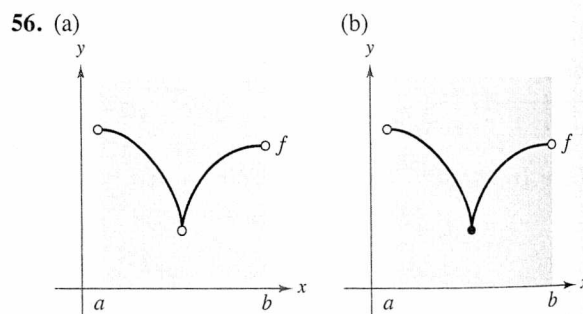
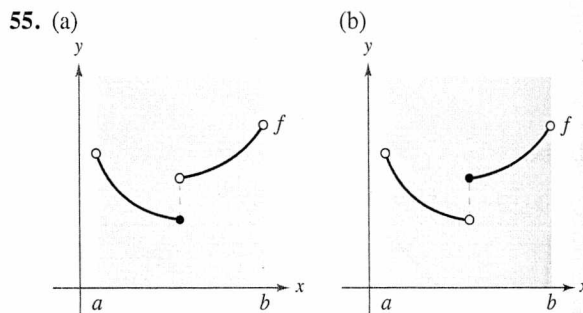


**DESARROLLO DE CONCEPTOS**

**Crear la gráfica de una función** En los ejercicios 53 y 54, trace la gráfica de un función en el intervalo  $[-2, 5]$  que tenga las siguientes características.

- 53. Máximo absoluto en  $x = -2$   
Mínimo absoluto en  $x = 1$   
Máximo relativo en  $x = 3$ .
- 54. Mínimo relativo en  $x = -1$ ,  
Número crítico en  $x = 0$  (pero ningún extremo) en  $x = 0$   
Máximo absoluto en  $x = 2$ ,  
Mínimo absoluto en  $x = 5$ .

**Usar gráficas** En los ejercicios 55-58, determine a partir de la gráfica si  $f$  tiene un mínimo en el intervalo abierto  $(a, b)$ .



59. Pot  
bate  
  
 $p =$   
  
donc  
en o  
(me  
en u  
pon,  
terv:  
sust  
Exp  
  
60. As  
par:  
te,  
que

$x =$

don  
por  
del

■ PARA  
acerca d  
sign of  $\epsilon$   
Magazin

61. Pa

$S =$

don  
car:  
Enc  
sup

■ PAR/  
ción ace  
consulte  
Paresisr  
Suite 21

59. **Potencia** La fórmula para la salida de potencia  $P$  de una batería es

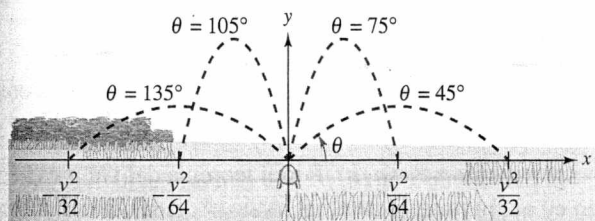
$$P = VI - RI^2$$

donde  $V$  es la fuerza electromotriz en volts,  $R$  es la resistencia en ohms e  $I$  es la corriente en amperes. Determine la corriente (medida en amperes) que corresponde a un valor máximo de  $P$  en una batería para la cual  $V = 12$  volts y  $R = 0.5$  ohms. Suponga que un fusible de 15 amperes enlaza la salida en el intervalo  $0 \leq I \leq 15$ . ¿Podría aumentarse la salida de potencia sustituyendo el fusible de 15 amperes por uno de 20 amperes? Explique.

60. **Aspersor giratorio para césped** Un aspersor giratorio para césped se construye de manera tal que  $d\theta/dt$  es constante, donde  $\theta$  varía entre  $45^\circ$  y  $135^\circ$  (vea la figura). La distancia que el agua recorre horizontalmente es

$$x = \frac{v^2 \sin 2\theta}{32}, \quad 45^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$$

donde  $v$  es la velocidad del agua. Encuentre  $dx/dt$  y explique por qué este aspersor no riega de manera uniforme. ¿Qué parte del césped recibe la mayor cantidad de agua?



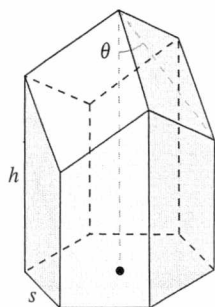
Aspersor de agua:  $45^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$

**PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para mayor información acerca de "Calculus of lawn sprinklers," consulte el artículo "Design of an Oscillating Sprinkler", de Bart Braden, en *Mathematics Magazine*. Para ver este artículo, visite *MathArticles.com*.

61. **Panal** El área de la superficie de una celda de un panal es

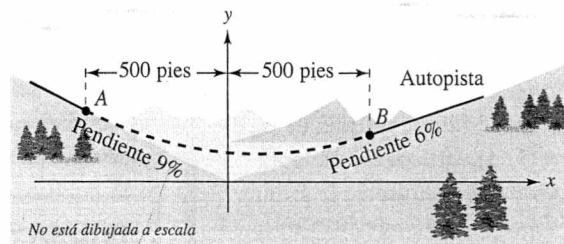
$$S = 6hs + \frac{3s^2}{2} \left( \frac{\sqrt{3} - \cos \theta}{\sin \theta} \right)$$

donde  $h$  y  $s$  son constantes positivas y  $\theta$  es el ángulo al cual las caras superiores alcanzan la altura de la celda (ver la figura). Encuentre el ángulo  $\theta$  ( $\pi/6 \leq \theta \leq \pi/2$ ) que minimiza el área superficial  $S$ .



**PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para mayor información acerca de la estructura geométrica de una celda de un panal, consulte el artículo "The Design of Honeycombs", de Anthony L. Paressini, en UMAP Módulo 502, publicado por COMAP, Inc., Suite 210, 57 Bedford Street, Lexington, MA.

62. **Diseño de una autopista** Para construir una autopista, es necesario rellenar una parte de un valle donde los declives (pendientes) son de 9 y 6% (vea la figura). La pendiente superior de la región rellenada tendrá la forma de un arco parabólico que es tangente a las dos pendientes en los puntos  $A$  y  $B$ . La distancia horizontal desde el punto  $A$  hasta el eje  $y$  y desde el punto  $B$  hasta el eje  $y$  es de 500 pies en ambos casos.



- Determine las coordenadas de  $A$  y  $B$ .
- Determine una función cuadrática  $y = ax^2 + bx + c$  para  $-500 \leq x \leq 500$  que describa la parte superior de la región rellenada.
- Construya una tabla en la que se indiquen las profundidades del relleno  $x = -500, -400, -300, -200, -100, 0, 100, 200, 300, 400$  y  $500$ .
- ¿Cuál será el punto más bajo de una autopista terminada? ¿Estará directamente sobre el punto donde se juntan los dos declives?

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 63-66, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

- El máximo de una función que es continua en un intervalo cerrado puede ocurrir en dos valores diferentes en el intervalo.
- Si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces debe tener un mínimo en el intervalo.
- Si  $x = c$  es un punto crítico de la función  $f$ , entonces también es un número crítico de la función  $g(x) = f(x) + k$ , donde  $k$  es una constante.
- Si  $x = c$  es un punto crítico de la función  $f$ , entonces también es un número crítico de la función  $g(x) = f(x - k)$ , donde  $k$  es una constante.
- Funciones** Sea la función  $f$  derivable en un intervalo  $I$  que contiene  $c$ . Si  $f$  tiene un valor máximo en  $x = c$ , demuestre que  $-f$  tiene un valor mínimo en  $x = c$ .
- Números críticos** Considere la función cúbica  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , donde  $a \neq 0$ . Demuestre que  $f$  puede tener uno, dos o ningún punto crítico y dé un ejemplo de cada caso.

**DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM**

69. Determine todos los números reales  $a > 0$  para los que existe una función  $f(x)$  continua y no negativa definida sobre  $[0, a]$ , con la propiedad de que la región  $R = \{(x, y); 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq f(x)\}$  tiene perímetro  $k$  y área  $k^2$  para algún número real  $k$ .

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

# 5.2 El teorema de Rolle y el teorema del valor medio

## Exploración

**Valores extremos en un intervalo cerrado** Dibuje un plano de coordenadas rectangular en una hoja de papel. Marque los puntos (1, 3) y (5, 3). Utilizando un lápiz o una pluma, dibuje la gráfica de una función derivable  $f$  que empieza en (1, 3) y termina en (5, 3). ¿Existe al menos un punto sobre la gráfica para el cual la derivada sea cero? ¿Sería posible dibujar la gráfica de manera que no hubiera un punto para el cual la derivada es cero? Explique su razonamiento.

## TEOREMA DE ROLLE

Michel Rolle, matemático francés, fue el primero en publicar en 1691 el teorema que lleva su nombre. Sin embargo, antes de ese tiempo Rolle fue uno de los más severos críticos del cálculo, señalando que éste proporcionaba resultados erróneos y se basaba en razonamientos infundados. Posteriormente Rolle se dio cuenta de la utilidad del cálculo.

- Comprender el uso del teorema de Rolle.
- Comprender el uso del teorema del valor medio.

## Teorema de Rolle

El teorema del valor extremo (sección 5.1) establece que una función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  debe tener tanto un mínimo como un máximo en el intervalo. Ambos valores, sin embargo, pueden ocurrir en los puntos extremos. El **teorema de Rolle**, nombrado así en honor del matemático francés Michel Rolle (1652-1719), proporciona las condiciones que garantizan la existencia de un valor extremo en el interior de un intervalo cerrado.

### TEOREMA 5.3 Teorema de Rolle

Sea  $f$  continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y derivable en el intervalo abierto  $(a, b)$ . Si  $f(a) = f(b)$ , entonces existe al menos un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

**Demostración** Sea  $f(a) = d = f(b)$ .

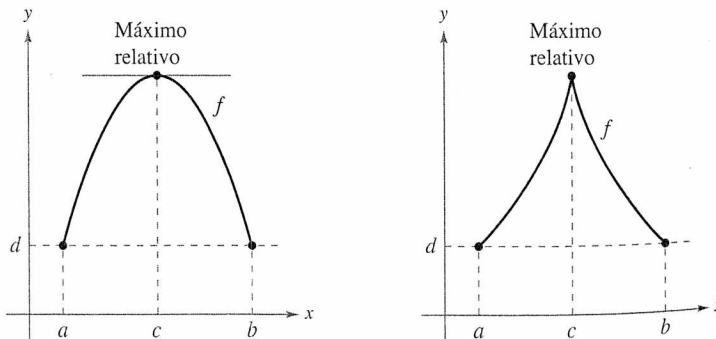
**Caso 1:** Si  $f(x) = d$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ ,  $f$  es constante en el intervalo y, por el teorema 4.2,  $f'(x) = 0$  para todo  $x$  en  $(a, b)$ .

**Caso 2:** Suponga que  $f(x) > d$  para algún  $x$  en  $(a, b)$ . Por el teorema del valor extremo, se sabe que  $f$  tiene un máximo en algún punto  $c$  en el intervalo. Además, como  $f(c) > d$ , este máximo no puede estar en los puntos terminales. De tal modo,  $f$  tiene un máximo en el intervalo abierto  $(a, b)$ . Esto implica que  $f(c)$  es un máximo relativo y por el teorema 5.2,  $c$  es un número crítico de  $f$ . Por último, como  $f$  es derivable en  $c$ , es posible concluir que  $f'(c) = 0$ .

**Caso 3:** Si  $f(x) < d$  para algún  $x$  en  $(a, b)$ , se puede utilizar un argumento similar al del caso 2, pero implicando el mínimo en vez del máximo.

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

De acuerdo con el teorema de Rolle, puede ver que si una función  $f$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , y si  $f(a) = f(b)$ , debe existir al menos un valor  $x$  entre  $a$  y  $b$  en el cual la gráfica de  $f$  tiene una tangente horizontal [vea la figura 5.8(a)]. Si se elimina el requerimiento de derivabilidad del teorema de Rolle,  $f$  seguirá teniendo un número crítico en  $(a, b)$ , pero quizá no produzca una tangente horizontal. Un caso de este tipo se presenta en la figura 5.8(b).



(a)  $f$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ .

(b)  $f$  es continua en  $[a, b]$ .

Figura 5.8



El valor entre las Figura :



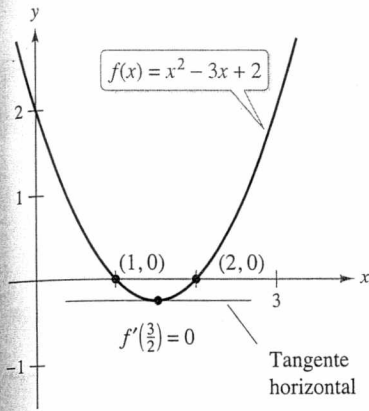
Figura :



Figura :

**EJEMPLO 1**

**Ilustrar el teorema de Rolle**



El valor de  $x$  para el cual  $f'(x) = 0$  está entre las dos intersecciones con el eje  $x$ .  
**Figura 5.9**

Encuentre las dos intersecciones en  $x$  de

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

y demuestre que  $f'(x) = 0$  en algún punto entre las dos intersecciones en  $x$ .

**Solución** Advierta que  $f$  es derivable en toda la recta real. Igualando  $f(x)$  a 0, se obtiene

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Igualé  $f(x)$  a 0.

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

Factorice.

$$x = 1, 2.$$

Valores de  $x$  para los cuales  $f'(x) = 0$

De tal modo,  $f(1) = f(2) = 0$ , y de acuerdo con el teorema de Rolle se sabe que *existe* al menos una  $c$  en el intervalo  $(1, 2)$  tal que  $f'(c) = 0$ . Para *determinar* dicha  $c$ , derive  $f$  para obtener

$$f'(x) = 2x - 3$$

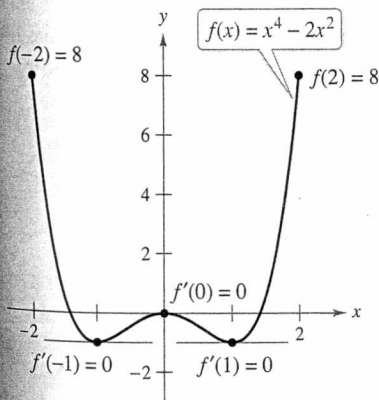
Derive.

y así puede determinar que  $f'(x) = 0$  cuando  $x = \frac{3}{2}$ . Observe que el valor de  $x$  se encuentra en el intervalo abierto  $(1, 2)$ , como se indica en la figura 5.9.

El teorema de Rolle establece que si  $f$  satisface las condiciones del teorema, debe haber *al menos* un punto entre  $a$  y  $b$  en el cual la derivada es 0. Es posible que exista más de un punto de estas características, como se muestra en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 2**

**Ilustrar el teorema de Rolle**



$f'(x) = 0$  para más de un valor de  $x$  en el intervalo  $(-2, 2)$ .  
**Figura 5.10**

Sea  $f(x) = x^4 - 2x^2$ . Determine todos los valores de  $c$  en el intervalo  $(-2, 2)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

**Solución** Para empezar, observe que la función satisface las condiciones del teorema de Rolle. Esto es  $f$  es continua en el intervalo  $[-2, 2]$  y derivable en el intervalo  $(-2, 2)$ . Además, debido a que  $f(-2) = f(2) = 8$ , puede concluir que existe al menos una  $c$  en  $(-2, 2)$  tal que  $f'(c) = 0$ . Ya que

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

Derive.

Igualando a 0 la derivada, obtiene

$$4x^3 - 4x = 0$$

Igualé  $f'(x)$  a cero.

$$4x(x - 1)(x + 1) = 0$$

Factorice.

$$x = 0, 1, -1.$$

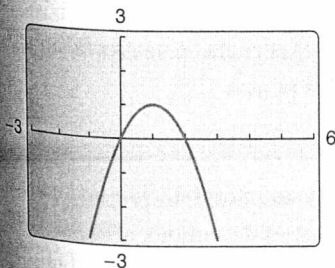
Valores de  $x$  para los cuales  $f'(x) = 0$

De tal modo, en el intervalo  $(-2, 2)$ , la derivada es cero en valores diferentes de  $x$ , como se indica en la figura 5.10.

► **CONFUSIÓN TECNOLÓGICA** Se puede utilizar una herramienta de graficación para indicar si los puntos sobre las gráficas de los ejemplos 1 y 2 son mínimos o máximos relativos de las funciones. Sin embargo, al usar una herramienta de graficación, debe tener presente que es posible obtener imágenes o gráficas equivocadas. Por ejemplo, use una herramienta de graficación para representar

$$f(x) = 1 - (x - 1)^2 - \frac{1}{1000(x - 1)^{1/7} + 1}$$

En la mayoría de las ventanas de visualización parece que la función tiene un máximo de 1 cuando  $x = 1$  (vea la figura 5.11). No obstante, al evaluar la función en  $x = 1$ , observará que  $f(1) = 0$ . Para determinar el comportamiento de esta función cerca de  $x = 1$ , es necesario examinar la gráfica de manera analítica para obtener la imagen completa.



**Figura 5.11**

### El teorema del valor medio

El teorema de Rolle puede utilizarse para probar otro teorema: el **teorema del valor medio**

••••• **COMENTARIO** En el teorema del valor medio, “medio” se refiere a la media (o promedio) de la tasa de cambio de  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ .

**TEOREMA 5.4 El teorema del valor medio**

Si  $f$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y derivable en el intervalo abierto  $(a, b)$ , entonces existe un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que

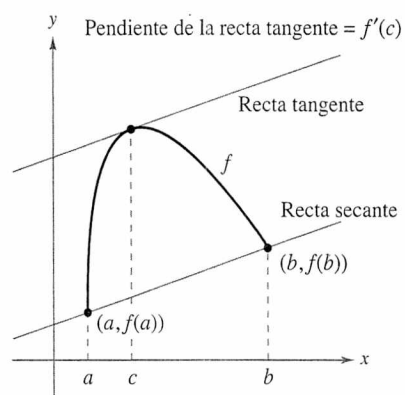
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$


Figura 5.12

**Demostración** Consulte la figura 5.12. La ecuación de la recta secante que contiene los puntos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$  es

$$y = \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (x - a) + f(a).$$

Sea  $g(x)$  la diferencia entre  $f(x)$  y  $y$ . Entonces

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - y \\ &= f(x) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (x - a) - f(a). \end{aligned}$$

Evaluando  $g$  en  $a$  y  $b$ , se observa que

$$g(a) = 0 = g(b).$$

Como  $f$  es continua sobre  $[a, b]$  se sigue que  $g$  también es continua sobre  $[a, b]$ . Además, en virtud de que  $f$  es derivable,  $g$  también lo es, resulta posible aplicar el teorema de Rolle a la función  $g$ . Así, existe un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$ , lo que implica que

$$\begin{aligned} g'(c) &= 0 \\ f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= 0. \end{aligned}$$

De tal modo, existe un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

Aunque es posible utilizar el teorema del valor medio de manera directa en la solución de problemas, se usa más a menudo para demostrar otros teoremas. De hecho, algunas personas consideran que éste es el teorema más importante en el cálculo que se relaciona estrechamente con el teorema fundamental del cálculo. Por ahora, es posible obtener una idea de la versatilidad de este teorema considerando los resultados planteados en los ejercicios 77-85 de esta sección.

El teorema del valor medio tiene implicaciones para ambas interpretaciones básicas de la derivada. Geométricamente, el teorema garantiza la existencia de una recta tangente que es paralela a la recta secante que pasa por los puntos

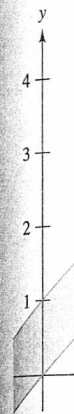
$$(a, f(a)) \quad \text{y} \quad (b, f(b)),$$

como se muestra en la figura 5.12. El ejemplo 3 ilustra esta interpretación geométrica del teorema del valor medio. En términos de las razones de cambio, el teorema del valor medio implica que debe haber un punto en el intervalo abierto  $(a, b)$  en el cual la razón de cambio instantánea es igual a la razón de cambio promedio en el intervalo  $[a, b]$ . Esto se ilustra en el ejemplo 4.



**JOSEPH-LOUIS LAGRANGE**  
(1736-1813)

El teorema del valor medio fue demostrado por primera vez por el famoso matemático Joseph-Louis Lagrange. Nacido en Italia, Lagrange formó parte de la corte de Federico El Grande en Berlín durante 20 años. Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para leer más de esta biografía.



La recta a la rec (4, 4).  
Figura



En algú instantá promec  
Figura

**EJEMPLO 3**

**Determinar una recta tangente**

Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Dada  $f(x) = 5 - (4/x)$ , determine todos los valores de  $c$  en el intervalo abierto  $(1, 4)$  tales que

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$$

**Solución** La pendiente de la recta secante que pasa por  $(1, f(1))$  y  $(4, f(4))$  es

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4 - 1}{4 - 1} = 1. \quad \text{Pendiente de recta secante}$$

Observe que la función satisface las condiciones del teorema del valor medio. Esto es,  $f$  es continua en el intervalo  $[1, 4]$  y derivable en el intervalo  $(1, 4)$ . Entonces, existe al menos un número  $c$  en  $(1, 4)$  tal que  $f'(c) = 1$ . Resolviendo la ecuación  $f'(x) = 1$ , se obtiene

$$\frac{4}{x^2} = 1 \quad \text{Haga } f'(x) \text{ igual a } 1.$$

lo cual implica que

$$x = \pm 2.$$

De tal modo, en el intervalo  $(1, 4)$ , puede concluir que  $c = 2$ , como se indica en la figura 5.13.

**EJEMPLO 4**

**Determinar la razón de cambio instantánea**

Dos patrullas estacionadas equipadas con radar se encuentran a 5 millas de distancia sobre una autopista, como se muestra en la figura 5.14. Cuando pasa un camión al lado de la primera patrulla, la velocidad de éste se registra en un valor de 55 millas por hora. Cuatro minutos después, cuando el camión pasa al lado de la segunda patrulla, el registro de velocidad corresponde a 50 millas por hora. Demuestre que el camión ha excedido el límite de velocidad (de 55 millas por hora) en algún momento dentro del intervalo de los 4 minutos dados.

**Solución** Sea  $t = 0$  el tiempo (en horas) cuando el camión pasa al lado de la primera patrulla. El tiempo en el que el camión pasa al lado de la segunda patrulla es

$$t = \frac{4}{60} = \frac{1}{15} \text{ hora.}$$

Si  $s(t)$  representa la distancia (en millas) recorrida por el camión, tiene que  $s(0) = 0$  y  $s(\frac{1}{15}) = 5$ . Por tanto, la velocidad promedio del camión sobre el trecho de cinco millas de autopista es

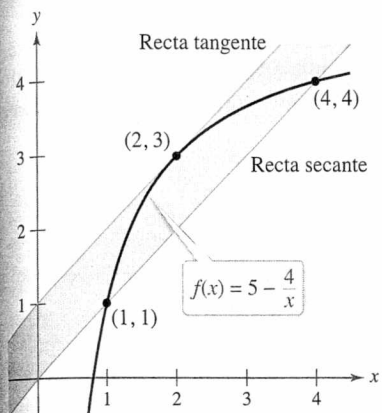
$$\text{Velocidad promedio} = \frac{s(1/15) - s(0)}{(1/15) - 0} = \frac{5}{1/15} = 75 \text{ millas por hora.}$$

Suponiendo que la función de posición es derivable, es posible aplicar el teorema del valor medio para concluir que el camión debe haber estado viajando a razón de 75 millas por hora en algún momento durante los 4 minutos.

Una forma alternativa útil del teorema del valor medio es como sigue: si  $f$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , entonces existe un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que

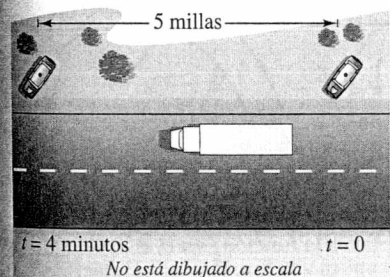
$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(c). \quad \text{Forma alternativa del teorema del valor medio}$$

Al realizar los ejercicios de esta sección recuerde que las funciones polinomiales, las racionales y las trigonométricas son derivables en todos los puntos en sus dominios.



La recta tangente en  $(2, 3)$  es paralela a la recta secante que pasa por  $(1, 1)$  y  $(4, 4)$ .

Figura 5.13



En algún tiempo  $t$ , la velocidad instantánea es igual a la velocidad promedio durante los 4 minutos.

Figura 5.14

# 5.2 Ejercicios

Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Redacción** En los ejercicios 1-4, explique por qué el teorema de Rolle no se aplica a la función aun cuando existan  $a$  y  $b$  tales que  $f(a) = f(b)$ .

- 1.  $f(x) = \left| \frac{1}{x} \right|$ ,  $[-1, 1]$
- 2.  $f(x) = \cot \frac{x}{2}$ ,  $[\pi, 3\pi]$
- 3.  $f(x) = 1 - |x - 1|$ ,  $[0, 2]$
- 4.  $f(x) = \sqrt{(2 - x^2)^3}$ ,  $[-1, 1]$

**Intersecciones y derivadas** En los ejercicios 5-8, encuentre dos intersecciones con el eje  $x$  de la función  $f$  y demuestre que  $f'(x) = 0$  en algún punto entre las dos intersecciones.

- 5.  $f(x) = x^2 - x - 2$
- 6.  $f(x) = x^2 + 6x$
- 7.  $f(x) = x\sqrt{x+4}$
- 8.  $f(x) = -3x\sqrt{x+1}$

**Usar el teorema de Rolle** En los ejercicios 9-22, determine si es posible aplicar el teorema de Rolle a  $f$  en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Si se puede aplicar el teorema de Rolle, determine todos los valores de  $c$  en el intervalo abierto  $(a, b)$  tales que  $f'(c) = 0$ . Si no se puede aplicar, explique por qué no.

- 9.  $f(x) = -x^2 + 3x$ ,  $[0, 3]$
- 10.  $f(x) = x^2 - 8x + 5$ ,  $[2, 6]$
- 11.  $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ ,  $[1, 3]$
- 12.  $f(x) = (x - 4)(x + 2)^2$ ,  $[-2, 4]$
- 13.  $f(x) = x^{2/3} - 1$ ,  $[-8, 8]$
- 14.  $f(x) = 3 - |x - 3|$ ,  $[0, 6]$
- 15.  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}$ ,  $[-1, 3]$
- 16.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ ,  $[-1, 1]$
- 17.  $f(x) = \sin x$ ,  $[0, 2\pi]$
- 18.  $f(x) = \cos x$ ,  $[0, 2\pi]$
- 19.  $f(x) = \sin 3x$ ,  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$
- 20.  $f(x) = \cos 2x$ ,  $[-\pi, \pi]$
- 21.  $f(x) = \tan x$ ,  $[0, \pi]$
- 22.  $f(x) = \sec x$ ,  $[\pi, 2\pi]$

**Gr** Usar el teorema de Rolle En los ejercicios 23-26, utilice una herramienta de graficación para representar la función en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Determine si el teorema de Rolle puede aplicarse a  $f$  en el intervalo y si es así, encuentre todos los valores de  $c$  en el intervalo abierto  $(a, b)$  tales que  $f'(c) = 0$ .

- 23.  $f(x) = |x| - 1$ ,  $[-1, 1]$
- 24.  $f(x) = x - x^{1/3}$ ,  $[0, 1]$
- 25.  $f(x) = x - \tan \pi x$ ,  $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$
- 26.  $f(x) = \frac{x}{2} - \sin \frac{\pi x}{6}$ ,  $[-1, 0]$

- 27. **Movimiento vertical** La altura de una pelota  $t$  segundos después de que se lanzó hacia arriba a partir de una altura de 6 pies y con una velocidad inicial de 48 pies por segundo es  $f(t) = -16t^2 + 48t + 6$ .
  - (a) Compruebe que  $f(1) = f(2)$ .
  - (b) De acuerdo con el teorema de Rolle, ¿cuál debe ser la velocidad en algún tiempo en el intervalo  $(1, 2)$ ? Determine ese tiempo.

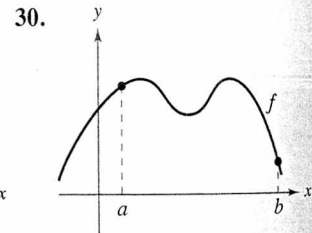
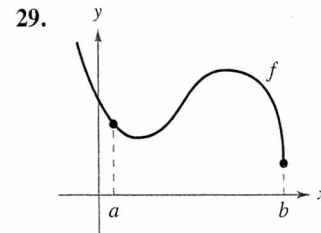
- 28. **Costos de nuevos pedidos** El costo de pedido y transporte  $C$  para componentes utilizados en un proceso de manufactura se aproxima mediante

$$C(x) = 10\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x+3}\right)$$

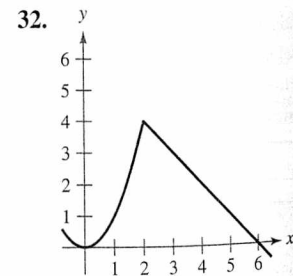
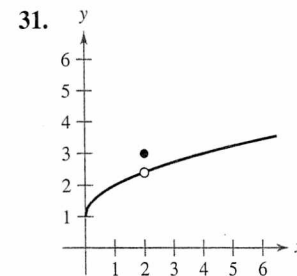
donde  $C$  se mide en miles de dólares y  $x$  es el tamaño del pedido en cientos.

- (a) Compruebe que  $C(3) = C(6)$ .
- (b) De acuerdo con el teorema de Rolle, la rapidez de cambio del costo debe ser 0 para algún tamaño de pedido en el intervalo  $(3, 6)$ . Determine ese tamaño de pedido.

**Teorema del valor medio** En los ejercicios 29 y 30, copie la gráfica y dibuje la recta secante a la misma a través de los puntos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$ . A continuación, dibuje cualquier recta tangente a la gráfica para cada valor de  $c$  garantizada por el teorema del valor medio. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite [MathGraphs.com](http://MathGraphs.com).



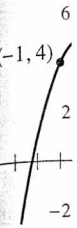
**Redacción** En los ejercicios 31-34, explique por qué el teorema de valor medio no se aplica a la función  $f$  en el intervalo  $[0, 6]$ .



- 31.  $f(x) = \frac{1}{x-3}$
- 32.  $f(x) = |x-3|$

- 33. **Teorema del valor medio** Considere la gráfica de la función  $f(x) = -x^2 + 5$  (vea la gráfica de la página siguiente).

- (a) Determine la ecuación de la recta secante que une los puntos  $(-1, 4)$  y  $(2, 1)$ .
- (b) Utilice el teorema del valor medio para determinar un punto  $c$  en el intervalo  $(-1, 2)$  tal que la recta tangente en  $c$  sea paralela a la recta secante.
- (c) Encuentre la ecuación de la recta tangente que pasa por  $c$ .
- Gr** (d) A continuación, utilice una herramienta de graficación para representar  $f$ , la recta secante y la recta tangente.



Figure

- 36. **Teoría**
  - (a) E
  - (b) U
  - (c) I
  - (d) A

Usar el t determine en el inter aplicarse,  $(a, b)$  tal c

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Si no puen

- 37.  $f(x) =$
- 39.  $f(x) =$
- 40.  $f(x) =$
- 41.  $f(x) =$
- 43.  $f(x) =$
- 44.  $f(x) =$
- 45.  $f(x) =$
- 46.  $f(x) =$

Usar el t utilice un: función  $f$  secante q: los termin cualquier la recta se

- 47.  $f(x) =$
- 48.  $f(x) =$
- 49.  $f(x) =$
- 50.  $f(x) =$

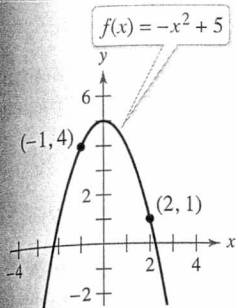


Figura para 35

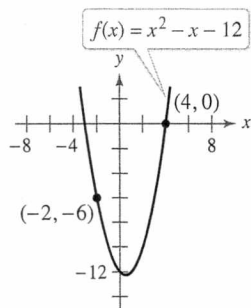


Figura para 36

36. **Teorema del valor medio** Considere la gráfica de la función  $f(x) = x^2 - x - 12$  (vea la figura).

- (a) Encuentre la ecuación de la recta secante que une los puntos  $(-2, -6)$  y  $(4, 0)$ .
- (b) Utilice el teorema del valor medio para determinar un punto  $c$  en el intervalo  $(-2, 4)$  tal que la recta tangente en  $c$  sea paralela a la recta secante.
- (c) Determine la ecuación de la recta tangente que pasa por  $c$ .

(d) A continuación, utilice una herramienta de graficación para representar  $f$ , la recta secante y la recta tangente.

**Usar el teorema del valor medio** En los ejercicios 37-46, determine si el teorema del valor medio puede aplicarse a  $f$  en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Si el teorema del valor medio puede aplicarse, encuentre todos los valores de  $c$  en el intervalo abierto  $(a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Si no puede aplicarse, explique por qué no.

- 37.  $f(x) = x^2, [-2, 1]$
- 38.  $f(x) = 2x^3, [0, 6]$
- 39.  $f(x) = x^3 + 2x, [-1, 1]$
- 40.  $f(x) = x^4 - 8x, [0, 2]$
- 41.  $f(x) = x^{2/3}, [0, 1]$
- 42.  $f(x) = \frac{x+1}{x}, [-1, 2]$
- 43.  $f(x) = |2x + 1|, [-1, 3]$
- 44.  $f(x) = \sqrt{2-x}, [-7, 2]$
- 45.  $f(x) = \sin x, [0, \pi]$
- 46.  $f(x) = \cos x + \tan x, [0, \pi]$

**Usar el teorema del valor medio** En los ejercicios 47-50, utilice una herramienta de graficación para (a) representar la función  $f$  en el intervalo, (b) encontrar y representar la recta secante que pasa por los puntos sobre la gráfica de  $f$  en los puntos terminales del intervalo dado y (c) encontrar y representar cualquier recta tangente a la gráfica de  $f$  que sean paralelas a la recta secante.

- 47.  $f(x) = \frac{x}{x+1}, \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$
- 48.  $f(x) = x - 2 \sin x, [-\pi, \pi]$
- 49.  $f(x) = \sqrt{x}, [1, 9]$
- 50.  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2, [0, 6]$

Andrew Barker/Shutterstock.com

51. **Movimiento vertical** La altura de un objeto 3 segundos después de que se deja caer desde una altura de 300 metros es

$$s(t) = -4.9t^2 + 300.$$

- (a) Encuentre la velocidad promedio del objeto durante los primeros 3 segundos.
- (b) Utilice el teorema del valor medio para verificar que en algún momento durante los primeros 3 segundos de la caída la velocidad instantánea es igual a la velocidad promedio. Determine ese momento.

52. **Ventas** Una compañía introduce un nuevo producto para el cual el número de unidades vendidas  $S$  es

$$S(t) = 200 \left( 5 - \frac{9}{2+t} \right)$$

donde  $t$  es el tiempo en meses.

- (a) Encuentre el valor promedio de cambio de  $S(t)$  durante el primer año.
- (b) ¿Durante qué mes del primer año  $S'(t)$  es igual al valor promedio de cambio?

**DESARROLLO DE CONCEPTOS**

53. **Hable acerca del teorema de Rolle** Sea  $f$  continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Si existe  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ , ¿se concluye que  $f(a) = f(b)$ ? Explique

54. **Teorema de Rolle** Sea  $f$  continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y derivable en el intervalo abierto  $(a, b)$ . Además, suponga que  $f(a) = f(b)$  y que  $c$  es un número real en el intervalo tal que  $f'(c) = 0$ . Encuentre un intervalo para la función sobre la cual pueda aplicarse el teorema de Rolle y determine el punto crítico correspondiente de  $g$  ( $k$  es una constante).

- (a)  $g(x) = f(x) + k$
- (b)  $g(x) = f(x - k)$
- (c)  $g(x) = f(kx)$

55. **Teorema de Rolle** La función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1 - x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Es derivable sobre  $(0, 1)$  y satisface  $f(0) = f(1)$ . Sin embargo, su derivada nunca es cero sobre  $(0, 1)$ . ¿Contradice lo anterior al teorema de Rolle? Explique.

56. **Teorema del valor medio** ¿Es posible encontrar una función  $f$  tal que  $f(-2) = -2, f(2) = 6$  y  $f'(x) < 1$  para toda  $x$ . ¿Por qué sí o por qué no?

• • 57. **Velocidad**

- Un avión despega a las 2:00 p.m. en un vuelo de 2500 millas. El avión llega a su destino a las 7:30 p.m. Explique por qué hay al menos dos momentos durante el vuelo en los que la velocidad del avión es de 400 millas por hora.



58. **Temperatura** Cuando se saca un objeto del horno y se pone a temperatura ambiente constante de 90°F la temperatura de su núcleo es de 1500°F. Cinco horas después la temperatura del núcleo corresponde a 390°F. Explique por qué debe existir un momento (o instante) en el intervalo en el que la temperatura disminuye a una razón de 222°F por hora.
59. **Velocidad** Dos ciclistas empiezan una carrera a las 8:00 a.m. Ambos terminan la carrera 2 horas y 15 minutos después. Demuestre que en algún momento de la carrera los ciclistas viajan a la misma velocidad.
60. **Aceleración** A las 9:13 a.m., un automóvil deportivo viaja a 35 millas por hora. Dos minutos después se desplaza a 85 millas por hora. Demuestre que en algún momento durante este intervalo, la aceleración del automóvil es exactamente igual a 1500 millas por hora al cuadrado.

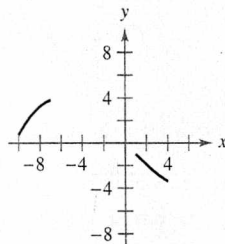
**61. Usar una función** Considere la función

$$f(x) = 3 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

- (a) Utilice una herramienta de graficación para representar  $f$  y  $f'$ .
- (b) ¿Es  $f$  una función continua? ¿Es  $f'$  una función continua?
- (c) ¿Se aplica el teorema de Rolle al intervalo  $[-1, 1]$ ? ¿Se aplica en el intervalo  $[1, 2]$ ? Explique.
- (d) Evalúe, si es posible,  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x)$ .



**62. ¿CÓMO LO VE?** La figura muestra dos partes de la gráfica de una función derivable continua  $f$  sobre  $[-10, 4]$ . La derivada  $f'$  también es continua. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite [MathGraphs.com](http://MathGraphs.com).



- (a) Explique por qué  $f$  debe tener al menos un cero en  $[-10, 4]$ .
- (b) Explique por qué  $f'$  debe tener también al menos un cero en el intervalo  $[-10, 4]$ . ¿Cómo se llaman estos ceros?
- (c) Realice un posible dibujo de la función con un cero con  $f'$  en el intervalo  $[-10, 4]$ .

**Piénselo** En los ejercicios 63 y 64, dibuje la gráfica de una función arbitraria  $f$  que satisface la condición dada pero que no cumple las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo  $[-5, 5]$ .

63.  $f$  es continua en  $[-5, 5]$ .
64.  $f$  no es continua en  $[-5, 5]$ .

**Determinar una solución** En los ejercicios 65-68, use el teorema del valor intermedio y el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación tiene exactamente una solución real.

65.  $x^5 + x^3 + x + 1 = 0$       66.  $2x^5 + 7x - 1 = 0$

67.  $3x + 1 - \sin x = 0$       68.  $2x - 2 - \cos x = 0$

**Ecuaciones diferenciales** En los ejercicios 69-72, encuentre una función  $f$  que tiene la derivada  $f'(x)$  y cuya gráfica pasa por el punto dado. Explique su razonamiento.

69.  $f'(x) = 0$ ,  $(2, 5)$       70.  $f'(x) = 4$ ,  $(0, 1)$
71.  $f'(x) = 2x$ ,  $(1, 0)$       72.  $f'(x) = 6x - 1$ ,  $(2, 7)$

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 73-76, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que lo demuestre.

73. El teorema del valor medio puede aplicarse a

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

en el intervalo  $[-1, 1]$ .

74. Si la gráfica de una función tiene tres intersecciones con el eje  $x$ , entonces debe tener al menos dos puntos en los cuales su recta tangente es horizontal.
75. Si la gráfica de una función polinomial tiene tres intersecciones con el eje  $x$ , entonces debe tener al menos dos puntos en los cuales su recta tangente es horizontal.
76. Si  $f'(x) = 0$  para todo  $x$  en el dominio de  $f$ , entonces  $f$  es una función constante.
77. **Demostración** Demuestre que si  $a > 0$  y  $n$  es cualquier entero positivo, entonces la función polinomial  $p(x) = x^{2n+1} + ax + b$  no puede tener dos raíces reales.

78. **Demostración** Demuestre que si  $f'(x) = 0$  para todo  $x$  en el intervalo  $(a, b)$  entonces  $f$  es constante sobre  $(a, b)$ .

79. **Demostración** Sea  $p(x) = Ax^2 + Bx + C$ . Demuestre que para cualquier intervalo  $[a, b]$ , el valor  $c$  garantizado por el teorema del valor medio es el punto medio del intervalo.

**80. Usar el teorema de Rolle**

- (a) Sea  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = -x^3 + x^2 + 3x + 2$ . Entonces  $f(-1) = g(-1)$  y  $f(2) = g(2)$ . Demuestre que hay al menos un valor  $c$  en el intervalo  $(-1, 2)$  donde la recta tangente a  $f$  en  $(c, f(c))$  es paralela a la recta tangente a  $g$  en  $(c, g(c))$ . Identificar  $c$ .
- (b) Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables sobre  $[a, b]$  donde  $f(a) = g(a)$  y  $f(b) = g(b)$ . Demuestre que hay al menos un valor  $c$  en el intervalo  $(a, b)$  donde la recta tangente a  $f$  en  $(c, f(c))$  es paralela a la recta tangente a  $g$  en  $(c, g(c))$ .

81. **Demostración** Demuestre que si  $f$  es derivable sobre  $(-\infty, \infty)$  y  $f'(x) < 1$  para todo número real, entonces  $f$  tiene al menos un punto fijo. Un punto fijo para una función  $f$  es un número real  $c$  tal que  $f(c) = c$ .

82. **Punto fijo** Use el resultado del ejercicio 81 para demostrar que  $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$  tiene al menos un punto fijo.

83. **Demostración** Demuestre que  $|\cos a - \cos b| \leq |a - b|$  para toda  $a$  y  $b$ .

84. **Demostración** Demuestre que  $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$  para toda  $a$  y  $b$ .

85. **Usar el teorema del valor medio** Sea  $0 < a < b$ . Utilice el teorema del valor medio para demostrar que

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}}.$$

## 5.3 Funciones crecientes y decrecientes y el criterio de la primera derivada

- Determinar los intervalos sobre los cuales una función es creciente o decreciente
- Aplicar el criterio de la primera derivada para determinar los extremos relativos de una función

### Funciones crecientes y decrecientes

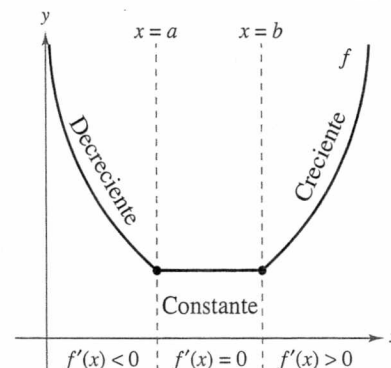
En esta sección aprenderá cómo se pueden utilizar las derivadas para *clasificar* extremos relativos ya sea como mínimos o como máximos relativos. En primer término, es importante definir las funciones crecientes y decrecientes.

#### Definición de funciones crecientes y decrecientes

Una función  $f$  es **creciente** en un intervalo si para cualesquiera dos números  $x_1$  y  $x_2$  en el intervalo,  $x_1 < x_2$  implica  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Una función  $f$  es **decreciente** en un intervalo si para cualesquiera dos números  $x_1$  y  $x_2$  en el intervalo,  $x_1 < x_2$  implica  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Una función es creciente si, cuando  $x$  se mueve hacia la derecha, su gráfica asciende, y es decreciente si su gráfica desciende. Por ejemplo, la función en la figura 5.15 es decreciente en el intervalo  $(-\infty, a)$ , es constante en el intervalo  $(a, b)$  y creciente en el intervalo  $(b, \infty)$ . Como se demuestra en el teorema 5.5, una derivada positiva implica que la función es creciente, una derivada negativa implica que la función es decreciente, y una derivada cero sobre todo el intervalo implica que la función es constante en ese intervalo.



La derivada se relaciona con la pendiente de una función.

Figura 5.15

#### TEOREMA 5.5 Criterio para las funciones crecientes y decrecientes

Sea  $f$  una función que es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y derivable en el intervalo abierto  $(a, b)$ .

1. Si  $f'(x) > 0$  para todo  $x$  en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es creciente en  $[a, b]$
2. Si  $f'(x) < 0$  para todo  $x$  en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es decreciente en  $[a, b]$
3. Si  $f'(x) = 0$  para todo  $x$  en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es constante en  $[a, b]$

**Demostración** Para obtener el primer caso, suponga que  $f'(x) > 0$  para todo  $x$  en el intervalo  $(a, b)$  y sean  $x_1 < x_2$  cualesquiera dos puntos en el intervalo. Mediante el teorema del valor medio, se sabe que existe un número  $c$  tal que  $x_1 < c < x_2$ , y

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Como  $f'(c) > 0$  y  $x_2 - x_1 > 0$ , se sabe que  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , lo cual implica que  $f(x_1) < f(x_2)$ . De tal modo,  $f$  es creciente en el intervalo. El segundo caso tiene una demostración similar (vea el ejercicio 97), y el tercer caso se dio en el ejercicio 78 en la sección 5.2

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

•••••

• **COMENTARIO** Las conclusiones en los primeros dos casos del teorema 5.5 son válidas incluso si  $f'(x) = 0$  en un número finito de valores de  $x$  en  $(a, b)$ .

**EJEMPLO 1**

**Intervalos sobre los cuales  $f$  es creciente y decreciente**

Determine los intervalos abiertos sobre los cuales  $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$  es creciente o decreciente.

**Solución** Observe que  $f$  es derivable en toda la recta de los números reales. Para determinar los puntos críticos de  $f$ , iguale a cero  $f'(x)$ .

$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$       Escriba la función original.

$f'(x) = 3x^2 - 3x$       Derive.

Para determinar los puntos críticos de  $f$ , iguale  $f'(x)$  a cero.

$3x^2 - 3x = 0$       Iguale  $f'(x)$  a cero.

$3(x)(x - 1) = 0$       Factorice.

$x = 0, 1$       Puntos críticos

Como no hay puntos para los cuales  $f'$  no existe, puede concluir que  $x = 0$  y  $x = 1$  son los únicos puntos críticos. La tabla siguiente resume la prueba de los tres intervalos determinados por estos dos puntos críticos.

Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor de la prueba	$x = -1$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$
Signo de $f'(x)$	$f'(-1) = 6 > 0$	$f'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = 6 > 0$
Conclusión	Creciente	Decreciente	Creciente

Por el teorema 5.5,  $f$  es creciente sobre los intervalos  $(-\infty, 0)$  y  $(1, \infty)$  y decreciente en el intervalo  $(0, 1)$ , como se indica en la figura 5.16.

El ejemplo 1 le muestra cómo determinar intervalos sobre los cuales una función es creciente o decreciente. La guía siguiente resume los pasos que se siguen en el ejemplo.

**ESTRATEGIAS PARA DETERMINAR LOS INTERVALOS EN LOS QUE UNA FUNCIÓN ES CRECIENTE O DECRECIENTE**

Sea  $f$  continua en el intervalo  $(a, b)$ . Para encontrar los intervalos abiertos sobre los cuales  $f$  es creciente o decreciente, hay que seguir los siguientes pasos.

1. Localizar los puntos críticos de  $f$  en  $(a, b)$ , y utilizarlos para determinar intervalos de prueba.
2. Determinar el signo de  $f'(x)$  en un valor de prueba en cada uno de los intervalos.
3. Recurrir al teorema 5.5 para determinar si  $f$  es creciente o decreciente para cada intervalo.

Estas estrategias también son válidas si el intervalo  $(a, b)$  se sustituye por un intervalo de la forma  $(-\infty, b)$ ,  $(a, \infty)$  o  $(-\infty, \infty)$ .

Una función es **estrictamente monótona** en un intervalo si es creciente o decreciente sobre todo el intervalo. Por ejemplo, la función  $f(x) = x^3$  es estrictamente monótona en toda la recta de los números reales porque es creciente siempre sobre ella, como se indica en la figura 5.17(a). La función que se muestra en la figura 5.17(b) no es estrictamente monótona en toda la recta de los números reales porque es constante en el intervalo  $[0, 1]$ .

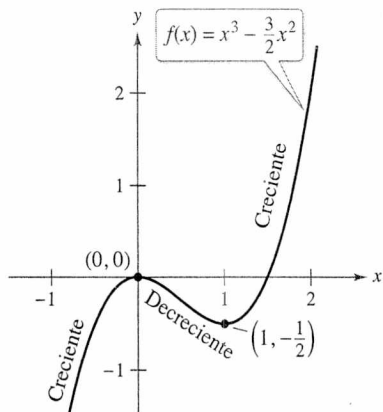
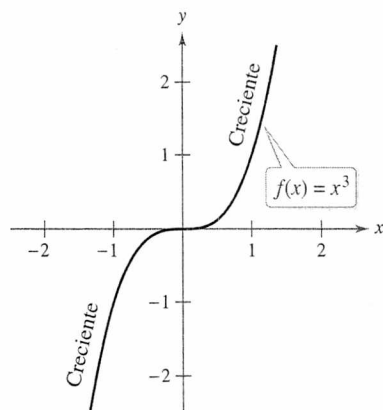
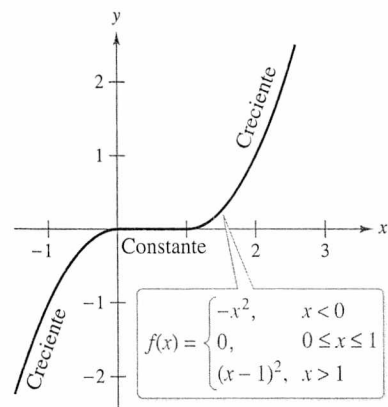


Figura 5.16



(a) Función estrictamente monótona



(b) No estrictamente monótona

Figura 5.17

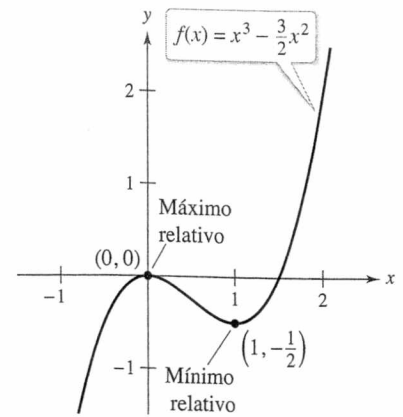
## Criterio de la primera derivada

Una vez que ha determinado los intervalos de crecimiento o decrecimiento, es fácil localizar los extremos relativos de la función. Por ejemplo, en la figura 5.18 (del ejemplo 1), la función

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

tiene un máximo relativo en el punto  $(0, 0)$  porque  $f$  es creciente inmediatamente a la izquierda de  $x = 0$  y decreciente inmediatamente a la derecha de  $x = 0$ . De manera similar,  $f$  tiene un mínimo relativo en el punto  $(1, -\frac{1}{2})$  debido a que  $f$  decrece de inmediato a la izquierda de  $x = 1$  y crece de inmediato a la derecha de  $x = 1$ .

El siguiente teorema, precisa más esta observación.

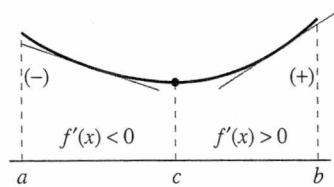


Extremos relativos de  $f$   
**Figura 5.18**

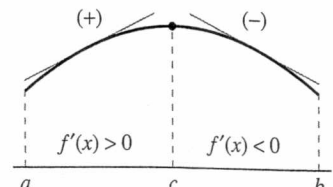
### TEOREMA 5.6 Criterio de la primera derivada

Sea  $c$  un punto crítico de una función  $f$  que es continua en un intervalo abierto  $I$  que contiene a  $c$ . Si  $f$  es derivable en el intervalo, excepto posiblemente en  $c$ , entonces  $f(c)$  puede clasificarse como sigue.

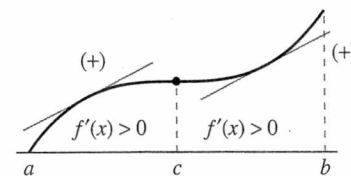
1. Si  $f'(x)$  cambia de negativa a positiva en  $c$ , entonces  $f$  tiene un *mínimo relativo* en  $(c, f(c))$ .
2. Si  $f'(x)$  cambia de positiva a negativa en  $c$ , entonces  $f$  tiene un *máximo relativo* en  $(c, f(c))$ .
3. Si  $f'(x)$  es positiva en ambos lados de  $c$  o negativa en ambos lados de  $c$ , entonces  $f(c)$  no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo.



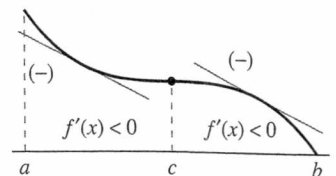
Mínimo relativo



Máximo relativo



Ni mínimo relativo ni máximo relativo



**Demostración** Suponga que  $f'(x)$  cambia de negativa a positiva en  $c$ . Entonces ahí existen  $a$  y  $b$  en  $I$  tales que

$$f'(x) < 0 \text{ para todo } x \text{ en } (a, c) \text{ y } f'(x) > 0 \text{ para todo } x \text{ en } (c, b).$$

Por el teorema 5.5,  $f$  es decreciente sobre  $[a, c]$  y creciente en  $[c, b]$ . De tal modo,  $f(c)$  es un mínimo de  $f$  en el intervalo abierto  $(a, b)$  y, en consecuencia, un mínimo relativo de  $f$ . Esto demuestra el primer caso del teorema. El segundo caso puede demostrarse de una manera similar (vea el ejercicio 98)

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

**EJEMPLO 2** Aplicar el criterio de la primera derivada

Determine los extremos relativos de la función  $f(x) = \frac{1}{2}x - \text{sen } x$  en el intervalo  $(0, 2\pi)$ .

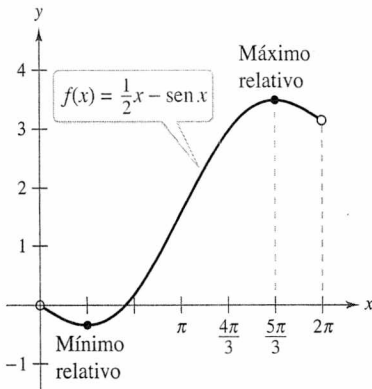
**Solución** Observe que  $f$  es continua en el intervalo  $(0, 2\pi)$ . La derivada de  $f$  es  $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x$ . Para determinar los puntos críticos de  $f$  en este intervalo, haga que  $f'(x)$  sea igual a 0.

$$\frac{1}{2} - \cos x = 0 \quad \text{Igualé } f'(x) \text{ a cero.}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \quad \text{Puntos críticos}$$

Debido a que  $f'$  existe en todos los puntos, se puede concluir que  $x = \pi/3$  y  $x = 5\pi/3$  son los únicos puntos críticos. La tabla resume las pruebas de los tres intervalos determinados por estos dos números críticos. Mediante la aplicación de la primera derivada, usted puede concluir que  $f$  tiene un mínimo relativo en el punto donde  $x = \pi/3$  y un máximo relativo en el punto donde  $x = 5\pi/3$ , como se muestra en la figura 5.19.



Ocurre un mínimo relativo donde  $f$  cambia de decreciente a creciente, y un máximo relativo donde  $f$  cambia de creciente a decreciente.

Figura 5.19

Intervalo	$0 < x < \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$
Valor de prueba	$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \pi$	$x = \frac{7\pi}{4}$
Signo de $f'(x)$	$f'(\frac{\pi}{4}) < 0$	$f'(\pi) > 0$	$f'(\frac{7\pi}{4}) < 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente

**EJEMPLO 3** Aplicar el criterio de la primera derivada

Encuentre los extremos relativos de  $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$ .

**Solución** Comience observando que  $f$  es continua en toda la recta real. La derivada de  $f$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 4)^{-1/3}(2x) \quad \text{Regla de la potencia general}$$

$$= \frac{4x}{3(x^2 - 4)^{1/3}} \quad \text{Simplifique.}$$

es 0 cuando  $x = 0$  y no existe cuando  $x = \pm 2$ . De tal modo, los puntos críticos son  $x = 0$  y  $x = -2$ . La tabla resume los valores de prueba de cuatro intervalos determinados para estos tres números críticos. Aplicando el criterio de la primera derivada, se puede concluir que  $f$  tiene un mínimo relativo en el punto  $(-2, 0)$ , un máximo relativo en el punto  $(0, \sqrt[3]{16})$ , y otro mínimo relativo en el punto  $(2, 0)$ , como se ilustra en la figura 5.20.

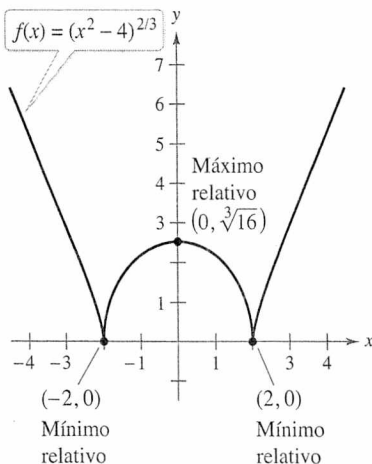


Figura 5.20

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -3$	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
Signo de $f'(x)$	$f'(-3) < 0$	$f'(-1) > 0$	$f'(1) < 0$	$f'(3) > 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

Observe que en los ejemplos 1 y 2 las funciones dadas son derivables en toda la recta real. Para tales funciones, los únicos puntos críticos son aquellos para los cuales  $f'(x) = 0$ . El ejemplo 3 se relaciona con una función que tiene dos tipos de puntos críticos: aquellos para los cuales  $f'(x) = 0$  y aquellos para los cuales  $f$  no es derivable.

Al usar el criterio de la primera derivada, asegúrese de considerar el dominio de la función. Así, en el siguiente ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

No está definida cuando  $x = 0$ . Este valor de  $x$  debe utilizarse con los puntos críticos para determinar los intervalos de prueba.

**EJEMPLO 4**

**Aplicar el criterio de la primera derivada**

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Determine los extremos relativos de  $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$ .

**Solución** Observe que  $f$  no está definida cuando  $x = 0$ .

$$f(x) = x^2 + x^{-2}$$

Reescriba la función original.

$$f'(x) = 2x - 2x^{-3}$$

Derive.

$$= 2x - \frac{2}{x^3}$$

Reescriba con exponente positivo.

$$= \frac{2(x^4 - 1)}{x^3}$$

Simplifique.

$$= \frac{2(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)}{x^3}$$

Factorice.

De tal modo,  $f'(x)$  es cero en  $x = \pm 1$ . Además, como  $x = 0$  no está en el dominio de  $f$ , es necesario que utilice este valor de  $x$  junto con los puntos críticos para determinar los intervalos de prueba.

$$x = \pm 1$$

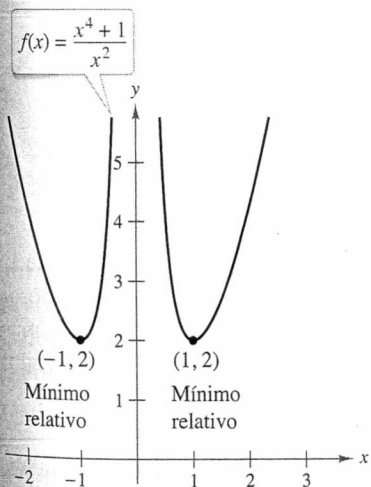
Puntos críticos,  $f'(\pm 1) = 0$

$$x = 0$$

El cero no está en el dominio de  $f$ .

La tabla resume los valores de prueba de los cuatro intervalos determinados por estos tres valores de  $x$ . Aplicando el criterio de la primera derivada, puede concluir que  $f$  tiene un mínimo relativo en el punto  $(-1, 2)$  y otro en el punto  $(1, 2)$ , como se muestra en la figura 5.21.

Intervalo	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -2$	$x = -\frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$
Signo de $f'(x)$	$f'(-2) < 0$	$f'(-\frac{1}{2}) > 0$	$f'(\frac{1}{2}) < 0$	$f'(2) > 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente



Los valores de  $x$  que no están en el dominio de  $f$ , así como los puntos críticos, determinan los intervalos de prueba de  $f'$ .

Figura 5.21

**TECNOLOGÍA** El paso más difícil al aplicar el criterio de la primera derivada es determinar los valores para los cuales la derivada es igual a 0. Por ejemplo, los valores de  $x$  para los cuales la derivada de

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$$

es igual a cero son  $x = 0$  y  $x = \pm \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ . Si se tiene acceso a tecnología que puede efectuar derivación simbólica y resolver ecuaciones, utilícela para aplicar el criterio de la primera derivada a esta función.



Cuando un proyectil es impulsado desde el nivel del suelo y la resistencia del aire se desprecia, el objeto viajará más lejos con un ángulo inicial de  $45^\circ$ . Sin embargo, cuando el proyectil es impulsado desde un punto por encima del nivel del suelo, el ángulo que produce una distancia horizontal máxima no es  $45^\circ$  (vea el ejemplo 5).

### EJEMPLO 5 Trayectoria de un proyectil

Ignorando la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil que se lanza a un ángulo  $\theta$  es

$$y = \frac{g \sec^2 \theta}{2v_0^2} x^2 + (\tan \theta)x + h, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

donde  $y$  es la altura,  $x$  es la distancia horizontal,  $g$  es la aceleración debida a la gravedad,  $v_0$  es la velocidad inicial y  $h$  es la altura inicial. Sea  $g = -32$  pies por segundo,  $v_0 = 24$  pies por segundo y  $h = 9$  pies por segundo. ¿Qué valor de  $\theta$  producirá una máxima distancia horizontal?

**Solución** Para encontrar la distancia que el proyectil recorre, sea  $y = 0$ ,  $g = -32$ ,  $v_0 = 24$  y  $h = 9$ . Entonces sustituya estos valores en la ecuación dada como se muestra.

$$\begin{aligned} \frac{g \sec^2 \theta}{2v_0^2} x^2 + (\tan \theta)x + h &= y \\ \frac{-32 \sec^2 \theta}{2(24^2)} x^2 + (\tan \theta)x + 9 &= 0 \\ -\frac{\sec^2 \theta}{36} x^2 + (\tan \theta)x + 9 &= 0 \end{aligned}$$

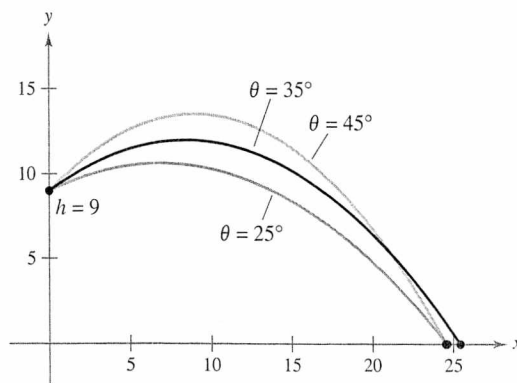
A continuación, utilice la fórmula cuadrática para resolver la ecuación con  $a = -\sec^2 \theta/36$ ,  $b = \tan \theta$  y  $c = 9$ .

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-\tan \theta \pm \sqrt{(\tan \theta)^2 - 4(-\sec^2 \theta/36)(9)}}{2(-\sec^2 \theta/36)} \\ x &= \frac{-\tan \theta \pm \sqrt{\tan^2 \theta + \sec^2 \theta}}{-\sec^2 \theta/18} \\ x &= 18 \cos \theta (\sin \theta + \sqrt{\sin^2 \theta + 1}), \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

En este punto, se necesita determinar el valor de  $\theta$  que produce un valor máximo de  $x$ . La aplicación del criterio de la primera derivada en forma manual resultaría tediosa. Sin embargo, el uso de la tecnología para resolver la ecuación  $dx/d\theta = 0$ , elimina la mayoría de los cálculos engorrosos. El resultado es que el valor máximo de  $x$  ocurre cuando

$$\theta \approx 0.61548 \text{ radianes o } 35^\circ$$

Esta conclusión se refuerza dibujando la trayectoria del proyectil para diferentes valores de  $\theta$ , como se indica en la figura 5.22. Observe que en las tres trayectorias indicadas, la distancia recorrida es mayor para  $\theta = 35^\circ$ .



La trayectoria de un proyectil con ángulo inicial  $\theta$ .

Figura 5.22

Usar para cualquier el cu

1. 10 8 6 4 2

Usar estim creci inter

3. f(x)

4 3 2 1 -1

5. y'

7. f(x)

-4

Interjerci la fu

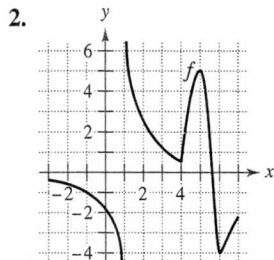
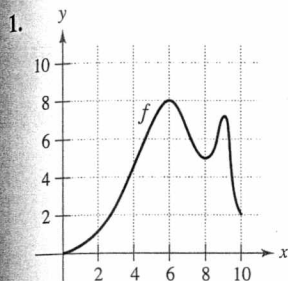
9. g

11. y

## 5.3 Ejercicios

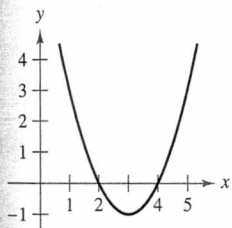
Consulte [CalcChat.com](http://CalcChat.com) para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Usar una gráfica** En los ejercicios 1 y 2, utilice la gráfica de  $f$  para determinar (a) el intervalo abierto más grande sobre el cual  $f$  es creciente y (b) el intervalo abierto más grande sobre el cual  $f$  es decreciente.

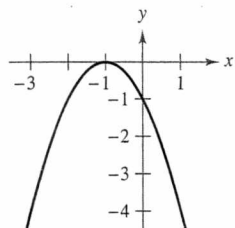


**Usar una gráfica** En los ejercicios 3-8, utilice la gráfica para estimar los intervalos abiertos sobre los cuales la función es creciente o decreciente. A continuación, determine los mismos intervalos analíticamente.

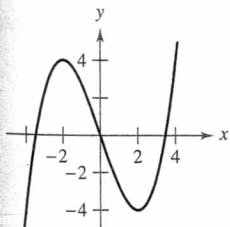
3.  $f(x) = x^2 - 6x + 8$



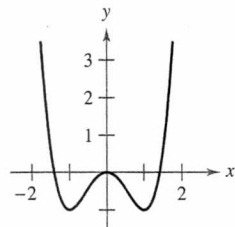
4.  $y = -(x + 1)^2$



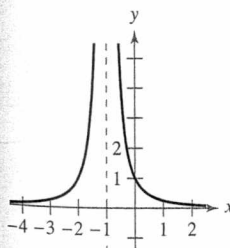
5.  $y = \frac{x^3}{4} - 3x$



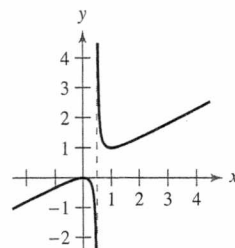
6.  $f(x) = x^4 - 2x^2$



7.  $f(x) = \frac{1}{(x + 1)^2}$



8.  $y = \frac{x^2}{2x - 1}$



**Intervalos en los que  $f$  es creciente o decreciente** En los ejercicios 9-16, identifique los intervalos abiertos sobre los cuales la función es creciente o decreciente.

9.  $g(x) = x^2 - 2x - 8$

10.  $h(x) = 12x - x^3$

11.  $y = x\sqrt{16 - x^2}$

12.  $y = x + \frac{9}{x}$

13.  $f(x) = \sin x - 1, \quad 0 < x < 2\pi$

14.  $h(x) = \cos \frac{x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi$

15.  $y = x - 2 \cos x, \quad 0 < x < 2\pi$

16.  $f(x) = \sin^2 x + \sin x, \quad 0 < x < 2\pi$

**Aplicar el criterio de la primera derivada** En los ejercicios 17-40, (a) encuentre los puntos críticos de  $f$  (si los hay), (b) determine el (los) intervalo(s) abierto(s) sobre los cuales la función es creciente o decreciente, (c) aplique el criterio de la primera derivada para identificar todos los extremos relativos y (d) utilice una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

17.  $f(x) = x^2 - 4x$

18.  $f(x) = x^2 + 6x + 10$

19.  $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$

20.  $f(x) = -3x^2 - 4x - 2$

21.  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

22.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$

23.  $f(x) = (x - 1)^2(x + 3)$

24.  $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)$

25.  $f(x) = \frac{x^5 - 5x}{5}$

26.  $f(x) = x^4 - 32x + 4$

27.  $f(x) = x^{1/3} + 1$

28.  $f(x) = x^{2/3} - 4$

29.  $f(x) = (x + 2)^{2/3}$

30.  $f(x) = (x - 3)^{1/3}$

31.  $f(x) = 5 - |x - 5|$

32.  $f(x) = |x + 3| - 1$

33.  $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$

34.  $f(x) = \frac{x}{x - 5}$

35.  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$

36.  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$

37.  $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 0 \\ -2x, & x > 0 \end{cases}$

38.  $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq -1 \\ x^2 - 2, & x > -1 \end{cases}$

39.  $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \leq 1 \\ 5 - x^2, & x > 1 \end{cases}$

40.  $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 1, & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x, & x > 0 \end{cases}$

**Aplicar el criterio de la primera derivada** En los ejercicios 41-48, considere la función en el intervalo  $(0, 2\pi)$ . Para cada función, (a) encuentre el (los) intervalo(s) abierto(s) sobre los cuales la función es creciente o decreciente, (b) aplique el criterio de la primera derivada para identificar todos los extremos relativos y (c) utilice una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

41.  $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x$

42.  $f(x) = \sin x \cos x + 5$

43.  $f(x) = \sin x + \cos x$

44.  $f(x) = x + 2 \sin x$

45.  $f(x) = \cos^2(2x)$

46.  $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$

47.  $f(x) = \sin^2 x + \sin x$

48.  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$

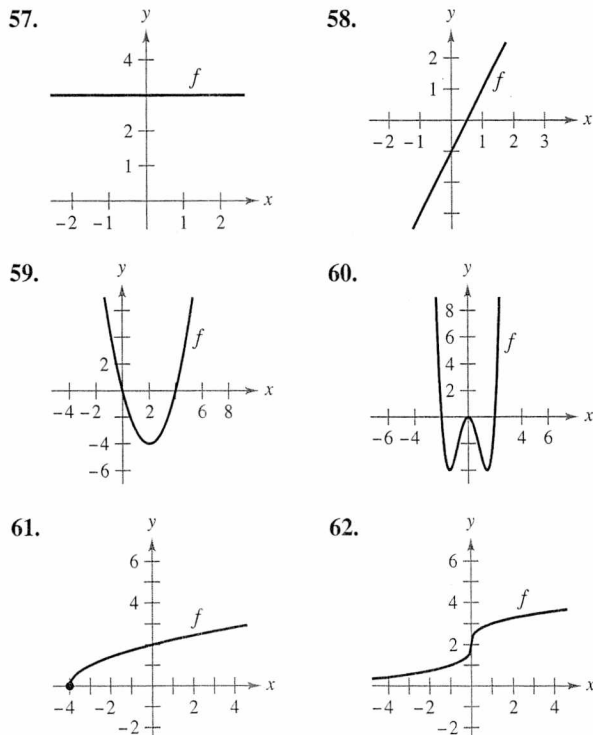
**AD** Determinar y analizar derivadas utilizando tecnología En los ejercicios 49-54, (a) utilice un sistema de álgebra por computadora para derivar la función, (b) dibuje las gráficas de  $f$  y de  $f'$  en el mismo conjunto de ejes de coordenadas en el intervalo indicado, (c) encuentre los puntos críticos de  $f$  en el intervalo abierto, (d) determine el (los) intervalo(s) sobre el cual  $f'$  es positiva y el (los) intervalo(s) sobre el cual es negativa. Compare el comportamiento de  $f$  y el signo de  $f'$ .

- 49.  $f(x) = 2x\sqrt{9 - x^2}$ ,  $[-3, 3]$
- 50.  $f(x) = 10(5 - \sqrt{x^2 - 3x + 16})$ ,  $[0, 5]$
- 51.  $f(t) = t^2 \sin t$ ,  $[0, 2\pi]$
- 52.  $f(x) = \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$ ,  $[0, 4\pi]$
- 53.  $f(x) = -3 \sin \frac{x}{3}$ ,  $[0, 6\pi]$
- 54.  $f(x) = 2 \sin 3x + 4 \cos 3x$ ,  $[0, \pi]$

**Comparar funciones** En los ejercicios 55 y 56, utilice simetría, extremos y ceros para trazar la gráfica de  $f$ . ¿En qué se diferencian las funciones  $f$  y  $g$ ?

- 55.  $f(x) = \frac{x^5 - 4x^3 + 3x}{x^2 - 1}$   
 $g(x) = x(x^2 - 3)$
- 56.  $f(t) = \cos^2 t - \sin^2 t$   
 $g(t) = 1 - 2 \sin^2 t$

**Para pensar** En los ejercicios 59-64, en la figura se muestra la gráfica de  $f$ . Dibuje una gráfica de la derivada de  $f$ .



**DESARROLLO DE CONCEPTOS**

**Transformaciones de funciones** En los ejercicios 63-68, suponga que  $f$  es derivable para todo  $x$ . Los signos de  $f'$  son como sigue.

- $f'(x) > 0$  sobre  $(-\infty, -4)$
- $f'(x) < 0$  sobre  $(-4, 6)$
- $f'(x) > 0$  sobre  $(6, \infty)$

Encuentre la desigualdad apropiada para el valor de  $c$  indicando.

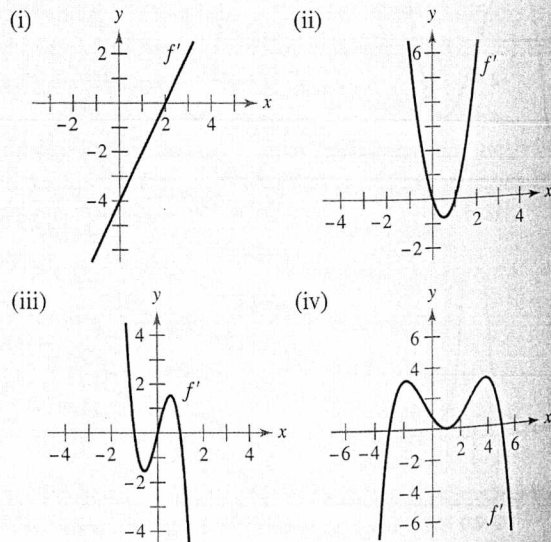
Función	Signo de $g'(c)$
63. $g(x) = f(x) + 5$	$g'(0)$ <input type="checkbox"/> 0
64. $g(x) = 3f(x) - 3$	$g'(-5)$ <input type="checkbox"/> 0
65. $g(x) = -f(x)$	$g'(-6)$ <input type="checkbox"/> 0
66. $g(x) = -f(x)$	$g'(0)$ <input type="checkbox"/> 0
67. $g(x) = f(x - 10)$	$g'(0)$ <input type="checkbox"/> 0
68. $g(x) = f(x - 10)$	$g'(8)$ <input type="checkbox"/> 0

69. **Dibujar una gráfica** Dibuje la gráfica de la función arbitraria de  $f$  tal que

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & x < 4 \\ \text{indefinida}, & x = 4 \\ < 0, & x > 4 \end{cases}$$



**¿CÓMO LO VE?** Utilice la gráfica de  $f'$  para (a) identificar los números críticos de  $f$ , (b) identificar el (los) intervalo(s) abierto(s) sobre el que  $f$  está aumentando o disminuyendo, y (c) determinar si  $f$  tiene un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno en cada punto crítico.



71. Ana tiene...

72. Ana tiene...

Piense el intervalo nos valore los...

73. f es c...

$x$   
 $f'(x)$

$x$   
 $f'(x)$

74. f es c...

$x$   
 $f'(x)$

$x$   
 $f'(x)$

75. Roc se co lo de cojin (a)

(b)

$\theta$   
 $s'(t)$

76. Mo final (en 1999) 2000 2001 (Fuente) (a)

(b)

(c)

71. **Análisis un número crítico** Una función derivable de  $f$  tiene un punto crítico en  $x = 5$ . Identifique los extremos relativos de  $f$  en el punto crítico si  $f'(4) = -2.5$  y  $f'(6) = 3$ .
72. **Análisis un número crítico** Una función derivable de  $f$  tiene un punto crítico en  $x = 2$ . Identifique los extremos relativos de  $f$  en el punto crítico si  $f'(1) = 2$  y  $f'(3) = 6$ .

**Piénselo** En los ejercicios 73 y 74, la función  $f$  es derivable en el intervalo indicado. La tabla muestra el valor de  $f'(x)$  para algunos valores seleccionados de  $x$ . (a) Dibuje la gráfica de  $f$ , (b) aproxime los puntos críticos y (c) identifique los extremos relativos.

73.  $f$  es derivable sobre  $[-1, 1]$ .

$x$	-1	-0.75	-0.50	-0.25	0
$f'(x)$	-10	-3.2	-0.5	0.8	5.6

$x$	0.25	0.50	0.75	1
$f'(x)$	3.6	-0.2	-6.7	-20.1

74.  $f$  es derivable sobre  $[0, \pi]$ .

$x$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$f'(x)$	3.14	-0.23	-2.45	-3.11	0.69

$x$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$\pi$
$f'(x)$	3.00	1.37	-1.14	-2.84

75. **Rodamiento de un cojinete de bola** Un cojinete de bola se coloca sobre un plano inclinado y empieza a rodar. El ángulo de elevación del plano es  $\theta$ . La distancia (en metros) que el cojinete de bola rueda en  $t$  segundos es  $s(t) = 4.9(\sin \theta)t^2$ .
- (a) Determine la velocidad del cojinete de bola después de  $t$  segundos.
- (b) Complete la tabla y utilícela para determinar el valor de  $\theta$  que produce la máxima velocidad de un instante particular.

$\theta$	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$\pi$
$s'(t)$							

76. **Modelar datos** A continuación se muestran los activos al final del año para el Medicare Hospital Insurance Trust Fund (en miles de millones de dólares) en los años 1999 a 2010

1999: 141.4; 2000: 177.5; 2001: 208.7; 2002: 234.8  
 2003: 256.0; 2004: 269.3; 2005: 285.8; 2006: 305.4  
 2007: 326.0; 2008: 321.3; 2009: 304.2; 2010: 271.9

(Fuente: U.S. Center for Medicare and Medicaid Services).

- (a) Utilice las capacidades de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma  $M = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$  para los datos. (Sea  $t = 9$  que representa 1999.)
- (b) Utilice una herramienta de graficación para dibujar los datos y representar el modelo.
- (c) Encuentre en forma analítica el mínimo del modelo y compare el resultado de los datos reales.

77. **Análisis numérico, gráfico y analítico** La concentración  $C$  de un compuesto químico en el flujo sanguíneo  $t$  horas después de la inyección en el tejido muscular es

$$C(t) = \frac{3t}{27 + t^3}, \quad t \geq 0.$$

- (a) Complete la tabla y utilícela para aproximar el tiempo en el que la concentración es más grande.

$t$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$C(t)$							

- (b) Utilice una herramienta de graficación para representar la función de concentración y use la gráfica para aproximar el tiempo en el que la concentración es más grande.
- (c) Utilice cálculo para determinar analíticamente el tiempo en que la concentración es más grande.
78. **Análisis numérico, gráfico y analítico** Considere las funciones  $f(x) = x$  y  $g(x) = \sin x$  en el intervalo  $(0, \pi)$ .
- (a) Complete la tabla y haga una conjetura acerca de cuál es la función más grande en el intervalo  $(0, \pi)$ .

$x$	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$						
$g(x)$						

- (b) Utilice una herramienta de graficación para representar las funciones y use las gráficas para hacer una conjetura acerca de cuál es la función más grande en el intervalo  $(0, \pi)$ .
- (c) Demuestre que  $f(x) > g(x)$  en el intervalo  $(0, \pi)$ . [Sugerencia: Demuestre que  $h'(x) > 0$ , donde  $h = f - g$ .]

79. **Contracción de la tráquea** La tos obliga a que la tráquea (conducto de aire) se contraiga, lo cual afecta la velocidad  $v$  del aire que pasa a través de este conducto. La velocidad del aire al toser es

$$v = k(R - r)r^2, \quad 0 \leq r < R$$

donde  $k$  es una constante,  $R$  es el radio normal de la tráquea y  $r$  es el radio cuando se tose ¿Qué radio producirá la máxima velocidad del aire?

80. **Resistencia eléctrica** La resistencia  $R$  de cierto tipo de resistor es

$$R = \sqrt{0.001T^4 - 4T + 100}$$

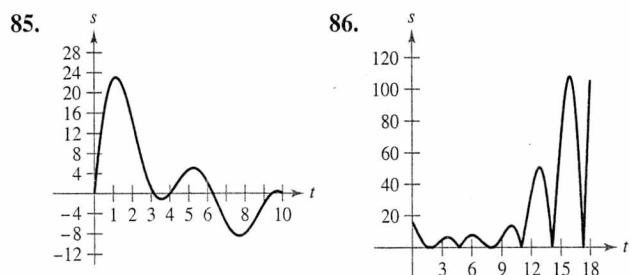
donde  $R$  se mide en ohms y la temperatura  $T$  se mide en grados Celsius.

- (a) Utilice un sistema algebraico por computadora para determinar  $dR/dT$  y el punto crítico de la función. Determine la resistencia mínima para este tipo de resistor.
- (b) Utilice una herramienta de graficación para representar la función  $R$  y use la gráfica para aproximar la resistencia mínima de este tipo de resistor.

**Movimiento a lo largo de una recta** En los ejercicios 81-84, la función  $s(t)$  describe el movimiento de una partícula que se mueve a lo largo de una recta. Para cada función, (a) encuentre la función de la velocidad de la partícula en cualquier instante  $t \geq 0$ , (b) identifique el (los) intervalo(s) de tiempo cuando la partícula se está moviendo en la dirección positiva, (c) identifique el (los) intervalo(s) de tiempo cuando la partícula se mueve en la dirección negativa y (d) identifique el instante en el que la partícula cambia su dirección.

- 81.  $s(t) = 6t - t^2$
- 82.  $s(t) = t^2 - 7t + 10$
- 83.  $s(t) = t^3 - 5t^2 + 4t$
- 84.  $s(t) = t^3 - 20t^2 + 128t - 280$

**Movimiento a lo largo de una recta** En los ejercicios 85 y 86, la gráfica muestra la posición de una partícula que se mueve a lo largo de una recta. Describa cómo cambia la posición de la partícula con respecto al tiempo.



**Creación de funciones polinomiales** En los ejercicios 87-90, encuentre una función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

que tiene únicamente los extremos especificados. (a) Determine el grado mínimo de la función y proporcione los criterios que utilizó para determinar el grado. (b) Recurriendo al hecho de que las coordenadas de los extremos son puntos solución de la función y al de que las coordenadas  $x$  son puntos críticos, determine un sistema de ecuaciones lineales cuya solución produce los coeficientes de la función requerida. (c) Utilice una herramienta de graficación para resolver el sistema de ecuaciones y determinar la función. (d) Utilice una herramienta de graficación para confirmar su resultado.

- 87. Mínimo relativo: (0, 0); máximo relativo: (2, 2)
- 88. Mínimo relativo: (0, 0); máximo relativo: (4, 1000)
- 89. Mínimo relativo: (0, 0), (4, 0); máximo relativo: (2, 4)
- 90. Mínimo relativo: (1, 2); máximo relativo: (-1, 4), (3, 4)

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 91-96, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

- 91. La suma de dos funciones crecientes es creciente.
- 92. El producto de dos funciones crecientes es creciente.
- 93. Todo polinomio de grado  $n$  tiene  $(n - 1)$  puntos críticos.
- 94. Un polinomio de grado  $n$  tiene a lo más  $(n - 1)$  puntos críticos.
- 95. Existe un máximo o mínimo relativo en cada punto crítico.
- 96. Los máximos relativos de la función  $f$  son  $f(1) = 4$  y  $f(3) = 10$ . Por lo tanto,  $f$  tiene por lo menos un mínimo para algunos  $x$  en el intervalo  $(1, 3)$ .

- 97. **Demostración** Demuestre el segundo caso del teorema 5.5.
- 98. **Demostración** Demuestre el segundo caso del teorema 5.6.
- 99. **Demostración** Utilice las definiciones de funciones crecientes y decrecientes para demostrar que  $f(x) = x^3$  es creciente en  $(-\infty, \infty)$ .
- 100. **Demostración** Utilice las definiciones de las funciones creciente y decreciente para demostrar que  $f(x) = \frac{1}{x}$  es decreciente sobre  $[-0, \infty]$ .

**DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM**

101. Encuentre el valor mínimo de  $|\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$  para números reales  $x$ .

Estos problemas fueron preparados por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Reservados todos los derechos.

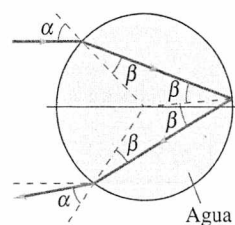
**PROYECTO DE TRABAJO**

**Arco iris**

El arco iris se forma cuando la luz incide sobre gotas de lluvia, sufriendo reflexión y refracción, como se indica en la figura. (Esta figura presenta una sección transversal de una gota de lluvia esférica.) La ley de la refracción establece que

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = k$$

donde  $k \approx 1.33$  (para el agua). El ángulo de deflexión está dado por  $D = \pi + 2\alpha - 4\beta$ .



- (a) Utilice una herramienta de graficación para representar  $D = \pi + 2\alpha - 4 \sin^{-1}\left(\frac{\sin \alpha}{k}\right)$ ,  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .
- (b) Demuestre que el ángulo mínimo de deflexión ocurre cuando  $\cos \alpha = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{3}}$ .

Para el agua, ¿cuál es el ángulo mínimo de deflexión,  $D_{\min}$ ? (El ángulo  $\pi - D_{\min}$  recibe el nombre de *ángulo de arco iris*.) ¿Qué valor de  $\alpha$  produce este ángulo mínimo? (Un rayo de luz solar que incide sobre una gota de lluvia a este ángulo,  $\alpha$ , se conoce como *rayo de arco iris*.)

**PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para más información acerca de las matemáticas de los arco iris, consulte el artículo "Somewhere Within the Rainbow", de Steve Janke, en *The UMAP Journal*.

Cóncav: hacia ab



La co pendi Figu

# 5.4 Concavidad, puntos de inflexión y el criterio de la segunda derivada

- Determinar intervalos sobre los cuales una función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.
- Encontrar cualquier punto de inflexión de la gráfica de una función.
- Aplicar el criterio de la segunda derivada para determinar extremos relativos de una función.

## Concavidad

Ya ha visto que localizar los intervalos en los que una función  $f$  es creciente o decreciente ayuda a describir su gráfica. En esta sección verá cómo el localizar los intervalos en los que  $f'$  es creciente o decreciente puede utilizarse para determinar dónde la gráfica de  $f$  se curva hacia arriba o se curva hacia abajo.

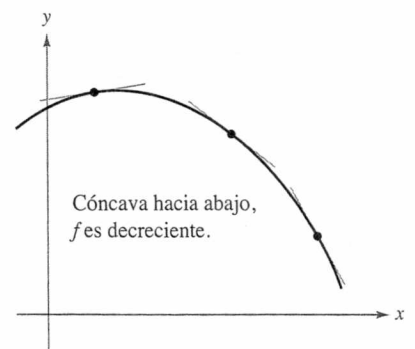
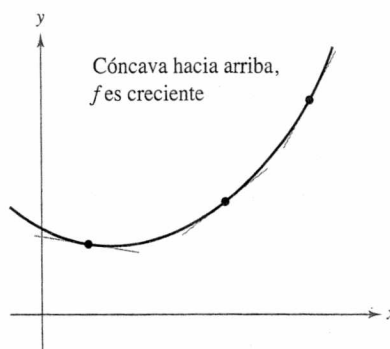
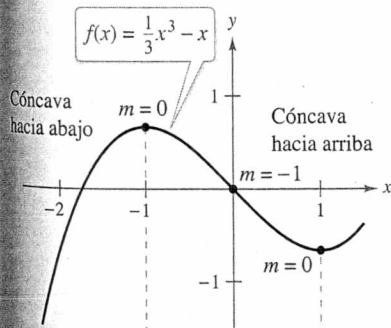
### Definición de concavidad

Sea  $f$  derivable en un intervalo abierto  $I$ . La gráfica de  $f$  es **cóncava hacia arriba** sobre  $I$  si  $f'$  es creciente en el intervalo y **cóncava hacia abajo** en  $I$  si  $f'$  es decreciente en el intervalo.

La siguiente interpretación gráfica de concavidad es útil. (Vea el apéndice A para una demostración de estos resultados.)

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

1. Sea  $f$  derivable en un intervalo abierto  $I$ . Si la gráfica de  $f$  es cóncava hacia arriba en  $I$ , entonces la gráfica de  $f$  se encuentra *arriba* de todas sus rectas tangentes en  $I$ . [Vea la figura 5.23(a).]
2. Sea  $f$  derivable en un intervalo abierto  $I$ . Si la gráfica de  $f$  es cóncava hacia abajo en  $I$ , entonces la gráfica de  $f$  se encuentra *debajo* de todas sus rectas tangentes en  $I$ . [Vea la figura 5.23(b).]



(a) La gráfica de  $f$  se encuentra sobre sus rectas tangentes.

(b) La gráfica de  $f$  se encuentra debajo de sus rectas tangentes.

Figura 5.23

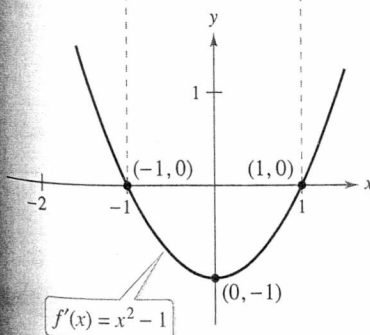
Para determinar los intervalos abiertos en los cuales la gráfica de un función  $f$  es cóncava hacia arriba o hacia abajo, necesita determinar los intervalos sobre los cuales  $f'$  es creciente o decreciente. Por ejemplo, la gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$$

es cóncava hacia abajo en el intervalo abierto  $(-\infty, 0)$  debido a que

$$f'(x) = x^2 - 1$$

es decreciente ahí. (Vea la figura 5.24.) De manera similar, la gráfica de  $f$  es cóncava hacia arriba en el intervalo  $(0, \infty)$  debido a que  $f'$  es creciente sobre  $(0, \infty)$ .



$f'$  es decreciente       $f'$  es creciente

La concavidad de  $f$  se relaciona con la pendiente de la derivada.

Figura 5.24

El teorema siguiente muestra cómo utilizar la *segunda* derivada de una función  $f$  para determinar los intervalos sobre los cuales la gráfica de  $f$  es cóncava hacia arriba o hacia abajo. Una demostración de este teorema se deduce directamente del teorema 5.5 y de la definición de concavidad.

**COMENTARIO** Un tercer caso del teorema 5.7 podría ser que si  $f''(x) = 0$  para todo  $x$  en  $I$ , entonces  $f$  es lineal. Observe, sin embargo, que la concavidad no se define para una recta. En otras palabras, una recta no es ni cóncava hacia arriba ni cóncava hacia abajo.

**TEOREMA 5.7 Criterio de concavidad**

Sea  $f$  una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto  $I$ .

1. Si  $f''(x) > 0$  para todo  $x$  en  $I$ , entonces la gráfica de  $f$  es cóncava hacia arriba en  $I$ .
2. Si  $f''(x) < 0$  para todo  $x$  en  $I$ , entonces la gráfica de  $f$  es cóncava hacia abajo en  $I$ .

En el apéndice A se presenta una demostración de este teorema.

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

Para aplicar el teorema 5.7, localice los valores de  $x$  para los cuales  $f''(x) = 0$  o  $f''$  no existe. Segundo, use los valores de  $x$  para determinar los intervalos de prueba. Por último se prueba el signo de  $f''(x)$  en cada uno de los intervalos de prueba.

**EJEMPLO 1 Determinar la concavidad**

Determine los intervalos abiertos sobre los cuales la gráfica de

$$f(x) = \frac{6}{x^2 + 3}$$

es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

**Solución** Comience observando que  $f$  es continua en toda la recta real. A continuación, encuentre la segunda derivada de  $f$ .

$$f(x) = 6(x^2 + 3)^{-1}$$

Reescriba la función original.

$$f'(x) = (-6)(x^2 + 3)^{-2}(2x)$$

Derive.

$$= \frac{-12x}{(x^2 + 3)^2}$$

Primera derivada

$$f''(x) = \frac{(x^2 + 3)^2(-12) - (-12x)(2)(x^2 + 3)(2x)}{(x^2 + 3)^4}$$

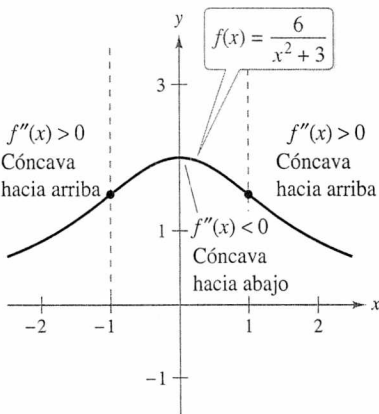
Derive.

$$= \frac{36(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}$$

Segunda derivada

Como  $f''(x) = 0$  cuando  $x = \pm 1$  se define toda la recta real, usted debe probar  $f''$  en los intervalos  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$  y  $(1, \infty)$ . Los resultados se muestran en la tabla y en la figura 5.25.

Intervalo	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$
Signo de $f''(x)$	$f''(-2) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(2) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba



A partir del signo de  $f''$ , se puede determinar la concavidad de la gráfica de  $f$ .

Figura 5.25

La función dada en el ejemplo 1 es continua en toda la recta real. Si hay valores de  $x$  en los cuales la función no es continua, dichos valores deben usarse, junto con los puntos en los cuales  $f''(x) = 0$  o  $f''(x)$  no existe, para formar los intervalos de prueba.

Cóncava hacia

Figura

Cóncava hacia

Cóncava hacia

La concavidad en la gráfica

**EJEMPLO 2**

**Determinar la concavidad**

Determine los intervalos abiertos sobre los cuales la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

**Solución** Al derivar dos veces, obtiene lo siguiente.

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

Escriba la función original.

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 4)(2x) - (x^2 + 1)(2x)}{(x^2 - 4)^2}$$

Derive.

$$= \frac{-10x}{(x^2 - 4)^2}$$

Primera derivada

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 4)^2(-10) - (-10x)(2)(x^2 - 4)(2x)}{(x^2 - 4)^4}$$

Derive.

$$= \frac{10(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$$

Segunda derivada

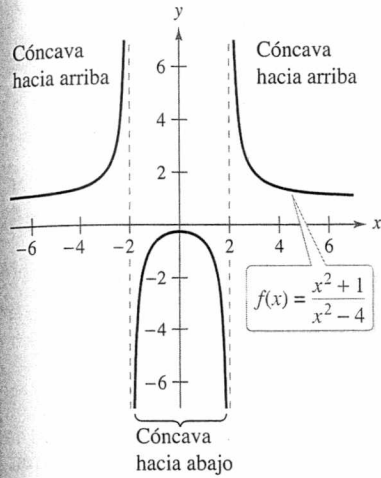
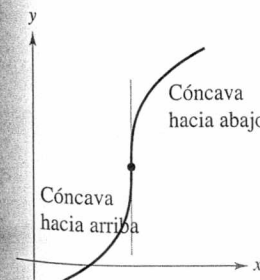
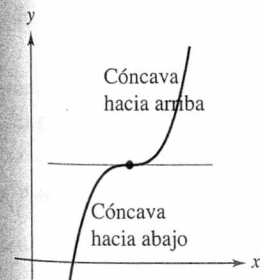


Figura 5.26

No hay puntos en los cuales  $f''(x) = 0$ , pero en  $x = \pm 2$  la función  $f$  no es continua, por lo que se prueba la concavidad en los intervalos  $(-\infty, -2)$ ,  $(-2, 2)$  y  $(2, \infty)$ , como se ilustra en la tabla. La gráfica de  $f$  se muestra en la figura 5.26.

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor de la prueba	$x = -3$	$x = 0$	$x = 3$
Signo de $f''(x)$	$f''(-3) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(3) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba



La concavidad de  $f$  cambia en un punto de inflexión. Observe que la gráfica cruza su recta tangente en un punto de inflexión.

Figura 5.27

**Puntos de inflexión**

La gráfica de la figura 5.25 tiene dos puntos en los que cambia de concavidad. Si la recta tangente a la gráfica existe en un punto de este tipo, ese punto es un **punto de inflexión**. En la figura 5.27 se muestran tres tipos de puntos de inflexión.

**Definición de punto de inflexión**

Sea  $f$  una función que es continua en un intervalo abierto, y sea  $c$  un punto en ese intervalo. Si la gráfica de  $f$  tiene una recta tangente en este punto  $(c, f(c))$ , entonces ese punto es un **punto de inflexión** de la gráfica de  $f$  si la concavidad de  $f$  cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo (o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba) en ese punto.

**COMENTARIO** La definición de punto de *inflexión* dada en este libro requiere que la recta tangente exista en el punto de inflexión. Algunos libros no requieren esto. Por ejemplo, no se considera que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ x^2 + 2x, & x \geq 0 \end{cases}$$

tenga un punto de inflexión en el origen, aun cuando la concavidad de la gráfica cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

Para localizar los *posibles* puntos de inflexión, se pueden determinar los valores de  $x$  para los cuales  $f''(x) = 0$  o  $f''(x)$  no existe. Esto es similar al procedimiento para localizar los extremos relativos de  $f$ .

**TEOREMA 5.8 Punto de inflexión**

Si  $(c, f(c))$  es un punto de inflexión de la gráfica de  $f$ , entonces  $f''(c) = 0$  o  $f''$  no existe en  $x = c$ .

**EJEMPLO 3 Determinar los puntos de inflexión**

Determine los puntos de inflexión y analice la concavidad de la gráfica de

$$f(x) = x^4 - 4x^3.$$

**Solución** Al derivar dos veces, obtiene lo siguiente

$$f(x) = x^4 - 4x^3$$

Escriba la función original.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$

Encuentre la primera derivada.

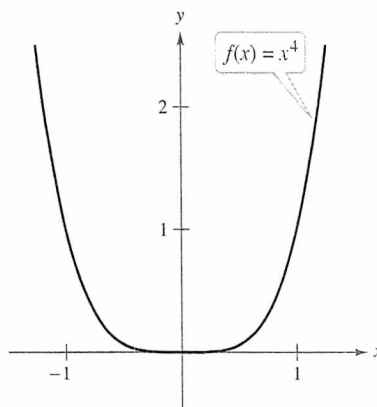
$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

Encuentre la segunda derivada.

Haciendo  $f''(x) = 0$  usted puede determinar que los puntos de inflexión posibles ocurren en  $x = 0$  y  $x = 2$ . Al probar los intervalos determinados por estos valores de  $x$ , puede concluir que ambos producen puntos de inflexión. Un resumen de esta prueba se presenta en la tabla y la gráfica de  $f$  se ilustra en la figura 5.28.

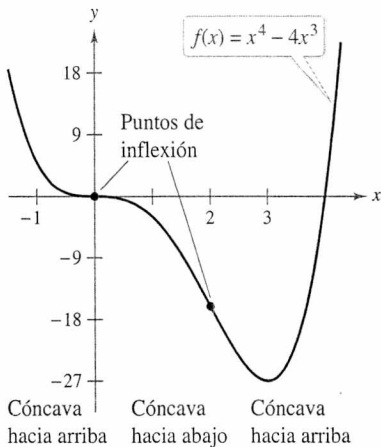
Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
Signo de $f''(x)$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(3) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

El recíproco del teorema 5.8 por lo general no es cierto. Es decir, es posible que la segunda derivada sea 0 en un punto que *no* es punto de inflexión. Por ejemplo, en la figura 5.29 se muestra la gráfica de  $f(x) = x^4$ . La segunda derivada es 0 cuando  $x = 0$ , pero el punto  $(0, 0)$  no es un punto de inflexión porque la gráfica de  $f$  es cóncava hacia arriba en ambos intervalos  $-\infty < x < 0$  y  $0 < x < \infty$ .



$f''(x) = 0$ , pero  $(0, 0)$  no es un punto de inflexión.

Figura 5.29



Pueden ocurrir puntos de inflexión donde  $f''(x) = 0$  o  $f''$  no existe.

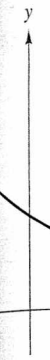
Figura 5.28

**Exploración**

Considere la función cúbica general de la forma

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Se sabe que el valor de  $d$  tiene relación con la localización de la gráfica, pero no con el valor de la primera derivada en los valores dados de  $x$ . Gráficamente, esto es cierto debido a que los cambios en el valor de  $d$  desplazan a la gráfica hacia arriba o hacia abajo, pero no cambian su forma básica. Utilice una herramienta de graficación para representar varias funciones cúbicas con diferentes valores de  $c$ . Después, proporcione una explicación gráfica de por qué los cambios en  $c$  no afectan los valores de la segunda derivada.



Si  $f'(c)$  es un n



Si  $f'(c)$  es un r  
Figura

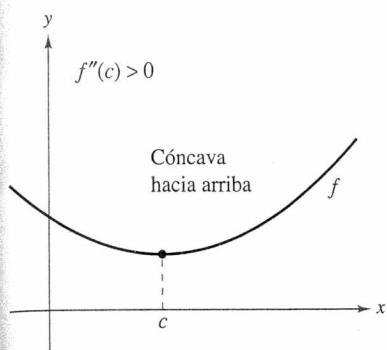
$f(x) =$

-2

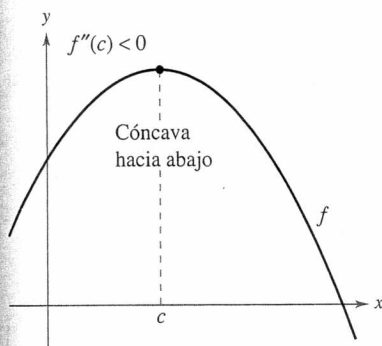
$(-1, \text{Mín} \text{ relat})$   
 $(0, 0)$  un máx  
Figura

### Criterio de la segunda derivada

Además de un método para analizar la concavidad es posible utilizar la segunda derivada para efectuar una prueba simple correspondiente a los máximos y mínimos relativos. Ésta se basa en el hecho de que si la gráfica de una función  $f$  es cóncava hacia arriba en un intervalo abierto que contiene a  $c$  y  $f'(c) = 0$ ,  $f(c)$  debe ser un mínimo relativo de  $f$ . De manera similar, si la gráfica de una función es cóncava hacia abajo en un intervalo abierto que contiene a  $c$  y  $f'(c) = 0$ ,  $f(c)$  debe ser un máximo relativo de  $f$  (ver la figura 5.30).



Si  $f'(c) = 0$  y  $f''(c) > 0$ , entonces  $f(c)$  es un mínimo relativo



Si  $f'(c) = 0$  y  $f''(c) < 0$ , entonces  $f(c)$  es un máximo relativo

Figura 5.30

#### TEOREMA 5.9 Criterio de la segunda derivada

Sea  $f$  una función tal que  $f'(c) = 0$  y la segunda derivada de  $f$  existe en un intervalo abierto que contiene a  $c$ .

1. Si  $f''(c) > 0$ , entonces  $f$  tiene un mínimo relativo en  $(c, f(c))$ .
2. Si  $f''(c) < 0$ , entonces  $f$  tiene un máximo relativo en  $(c, f(c))$ .

Si  $f''(c) = 0$ , entonces el criterio falla. Esto es,  $f$  quizá tenga un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de los dos. En tales casos, puede utilizar el criterio de la primera derivada.

**Demostración** Si  $f''(c) = 0$  y  $f''(c) > 0$ , existe un intervalo abierto  $I$  que contiene a  $c$  para el cual

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \frac{f'(x)}{x - c} > 0$$

para todo  $x \neq c$  en  $I$ . Si  $x < c$ , entonces  $x - c < 0$  y  $f'(x) < 0$ . Además, si  $x > c$  entonces  $x - c > 0$  y  $f'(x) > 0$ . De tal modo,  $f'(x)$  cambia de negativa a positiva en  $c$ , y el criterio de la primera derivada implica que  $f(c)$  es un mínimo relativo. Se le deja al lector la demostración del segundo caso.

#### EJEMPLO 4 Emplear el criterio de la segunda derivada

•••► Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre los extremos relativos de

$$f(x) = -3x^5 + 5x^3.$$

**Solución** Comience con la determinación de los puntos críticos de  $f$ .

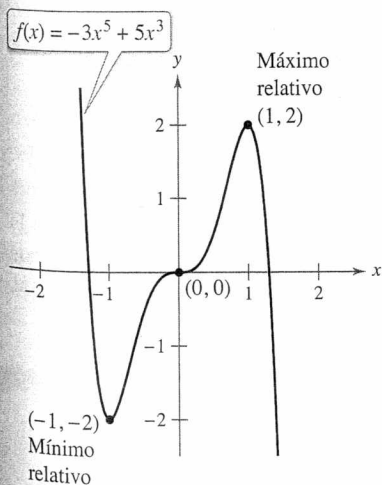
$$f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = 15x^2(1 - x^2)$$

De esta derivada, puede ver que  $x = -1, 0$  y  $1$  son los únicos números críticos de  $f$ . Al encontrar la segunda derivada

$$f''(x) = -60x^3 + 30x = 30x(1 - 2x^2)$$

puede aplicar el criterio de la segunda derivada como se indica a continuación

Punto	$(-1, -2)$	$(0, 0)$	$(1, 2)$
Signo de $f''(x)$	$f''(-1) > 0$	$f''(0) = 0$	$f''(1) < 0$
Conclusión	Mínimo relativo	Falla de la prueba	Máximo relativo



$(0, 0)$  no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo.

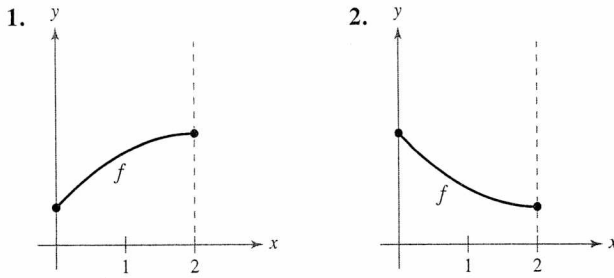
Figura 5.31

Como el criterio de la segunda derivada no decide en  $(0, 0)$ , puede utilizar el criterio de la primera derivada y observar que  $f$  aumenta hacia la izquierda y hacia la derecha de  $x = 0$ . De tal modo,  $(0, 0)$  no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo (aun cuando la gráfica tiene una recta tangente horizontal este punto). La gráfica de  $f$  se muestra en la figura 5.31.

# 5.4 Ejercicios

Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Usar una gráfica** En los ejercicios 1 y 2, se muestra la gráfica de  $f$ . Establezca los signos de  $f'$  y  $f''$  en el intervalo  $(0, 2)$ .



**Determinar la concavidad** En los ejercicios 3-14, determine los intervalos abiertos sobre los cuales la gráfica es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

- |   |   |
|---|---|
| 3. $y = x^2 - x - 2$  | 4. $g(x) = 3x^2 - x^3$                      |
| 5. $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x - 1$                                  | 6. $h(x) = x^5 - 5x + 2$                    |
| 7. $f(x) = \frac{24}{x^2 + 12}$                                   | 8. $f(x) = \frac{2x^2}{3x^2 + 1}$           |
| 9. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$                               | 10. $y = \frac{-3x^5 + 40x^3 + 135x}{270}$  |
| 11. $g(x) = \frac{x^2 + 4}{4 - x^2}$                              | 12. $h(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 1}$         |
| 13. $y = 2x - \tan x, \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ | 14. $y = x + \frac{2}{\sin x}, (-\pi, \pi)$ |

**Buscar puntos de inflexión** En los ejercicios 15-30, encuentre los puntos de inflexión y analice la concavidad de la gráfica de la función.

- |  |   |
|--|---|
| 15. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$                              | 16. $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 5$                |
| 17. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^3$                         | 18. $f(x) = 4 - x - 3x^4$                   |
| 19. $f(x) = x(x - 4)^3$                                    | 20. $f(x) = (x - 2)^3(x - 1)$               |
| 21. $f(x) = x\sqrt{x + 3}$                                 | 22. $f(x) = x\sqrt{9 - x}$                  |
| 23. $f(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$                             | 24. $f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{x}}$         |
| 25. $f(x) = \sin \frac{x}{2}, [0, 4\pi]$                   | 26. $f(x) = 2 \csc \frac{3x}{2}, (0, 2\pi)$ |
| 27. $f(x) = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right), (0, 4\pi)$ |   |
| 28. $f(x) = \sin x + \cos x, [0, 2\pi]$                    |   |
| 29. $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x, [0, 2\pi]$                 |   |
| 30. $f(x) = x + 2 \cos x, [0, 2\pi]$                       |   |

**Usar la segunda derivada** En los ejercicios 31-42, encuentre todos los extremos relativos. Utilice el criterio de la segunda derivada donde sea aplicable.

- |                             |                                |
|-----------------------------|--------------------------------|
| 31. $f(x) = 6x - x^2$       | 32. $f(x) = x^2 + 3x - 8$      |
| 33. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ | 34. $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 15x$ |

- |  |                                 |
|--|---------------------------------|
| 35. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$                | 36. $f(x) = -x^4 + 4x^3 + 8x^2$ |
| 37. $f(x) = x^{2/3} - 3$                   | 38. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$     |
| 39. $f(x) = x + \frac{4}{x}$               | 40. $f(x) = \frac{x}{x - 1}$    |
| 41. $f(x) = \cos x - x, [0, 4\pi]$         |                                 |
| 42. $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x, [0, 2\pi]$ |                                 |

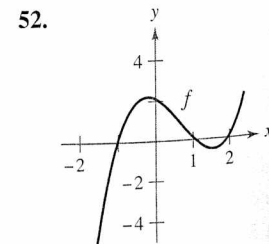
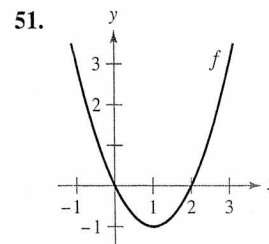
**UN** **Encontrar los extremos y los puntos de inflexión usando tecnología** En los ejercicios 43-46, utilice un sistema de álgebra computacional para analizar la función en el intervalo que se indica. (a) Encuentre la primera y segunda derivadas de la función. (b) Determine cualesquiera extremos relativos y puntos de inflexión. (c) Represente gráficamente  $f'$ ,  $f''$  y  $f'''$  en el mismo conjunto de ejes de coordenadas y establezca la relación entre el comportamiento de  $f$  los signos  $f'$  y de  $f''$ .

- |   |
|---|
| 43. $f(x) = 0.2x^2(x - 3)^3, [-1, 4]$                                     |
| 44. $f(x) = x^2\sqrt{6 - x^2}, [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$                     |
| 45. $f(x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x, [0, \pi]$ |
| 46. $f(x) = \sqrt{2x} \sin x, [0, 2\pi]$                                  |

## DESARROLLO DE CONCEPTOS

- Dibujar una gráfica** Considere una función  $f$  tal que  $f'$  es creciente. Dibuje las gráficas de  $f$  para (a)  $f' < 0$  y (b)  $f' > 0$ .
- Dibujar una gráfica** Considere una función  $f$  tal que  $f'$  es decreciente. Dibuje las gráficas de  $f$  para (a)  $f' < 0$  y (b)  $f' > 0$ .
- Dibujar una gráfica** Dibuje la gráfica de una función  $f$  tal que *no* tenga un punto de inflexión en  $(c, f(c))$  aun cuando  $f''(c) = 0$ .
- Piénselo**  $S$  representa las ventas semanales de un producto. ¿Qué se puede decir de  $S'$  y  $S''$  en relación con cada uno de los siguientes enunciados?
  - La rapidez de cambio de las ventas está creciendo.
  - Las ventas están aumentando a una rapidez más lenta.
  - La rapidez de cambio de ventas es constante.
  - Las ventas están estables.
  - Las ventas están declinando, pero a una rapidez menor.
  - Las ventas se han desplomado y han empezado a crecer.

**Dibujar una gráfica** En los ejercicios 51 y 52 se muestra la gráfica de  $f$ . Grafique  $f'$ ,  $f''$  y  $f'''$  en el mismo conjunto de ejes de coordenadas. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, vaya a [MathGraphs.com](http://MathGraphs.com).



Piénsese  
ción  $f$   
53.  $f$   
 $f'$   
 $f''$   
 $f'''$   
57. P  
g  
p

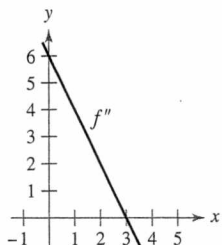
58.

59. C  
 $f$   
(a)  
(b)  
60. P  
(a)  
(b)

**Piénselo** En los ejercicios 53-56, dibuje la gráfica de una función  $f$  que tenga las características indicadas.

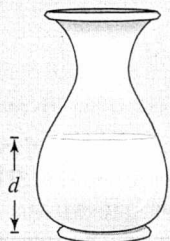
- |  |  |
|--|--|
| 53. $f(2) = f(4) = 0$<br>$f'(x) < 0$ para $x < 3$<br>$f'(3)$ no existe<br>$f'(x) > 0$ para $x > 3$<br>$f''(x) < 0, x \neq 3$ | 54. $f(0) = f(2) = 0$<br>$f'(x) > 0$ para $x < 1$<br>$f'(1) = 0$<br>$f'(x) < 0$ para $x > 1$<br>$f''(x) < 0$ |
| 55. $f(2) = f(4) = 0$<br>$f'(x) > 0$ para $x < 3$<br>$f'(3)$ no existe<br>$f'(x) < 0$ para $x > 3$<br>$f''(x) > 0, x \neq 3$ | 56. $f(0) = f(2) = 0$<br>$f'(x) < 0$ para $x < 1$<br>$f'(1) = 0$<br>$f'(x) > 0$ para $x > 1$<br>$f''(x) > 0$ |

57. Piénselo La figura muestra la gráfica de  $f''$ . Dibuje una gráfica de  $f$ . (La respuesta no es única.) Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, vaya a *MathGraphs.com*.



58.

**¿CÓMO LO VE?** Se vierte agua en el florero que se muestra en la figura a una velocidad constante.



- Represente gráficamente la profundidad  $d$  del agua en el florero como una función del tiempo.
- ¿La función tiene algún extremo? Explique.
- Interprete los puntos de inflexión de la gráfica de  $d$ .

59. **Conjetura** Considere la función

$$f(x) = (x - 2)^n.$$

- (a) Use una herramienta de graficación para representar  $f$  respecto a  $n = 1, 2, 3$  y  $4$ . Utilice las gráficas para realizar una conjetura acerca de la relación entre  $n$  y cualesquiera de los puntos de inflexión de la gráfica de  $f$ .

(b) Verifique su conjetura del inciso (a).

60. **Punto de inflexión** Considere la función  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ .

- Represente gráficamente la función e identifique el punto de inflexión.
- ¿Existe  $f''(x)$  en el punto de inflexión? Explique.

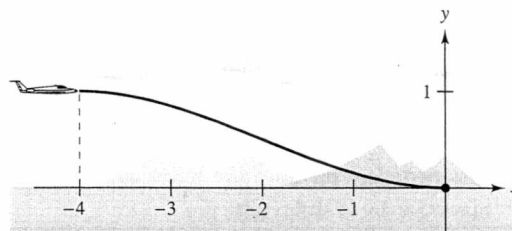
**Encontrar una función cúbica** En los ejercicios 61 y 62, determine  $a, b, c$  y  $d$  tales que la función cúbica

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

satisfaga las condiciones dadas.

- Máximo relativo: (3, 3)  
Mínimo relativo: (5, 1)  
Punto de inflexión: (4, 2)
- Máximo relativo: (2, 4)  
Mínimo relativo: (4, 2)  
Punto de inflexión: (3, 3)

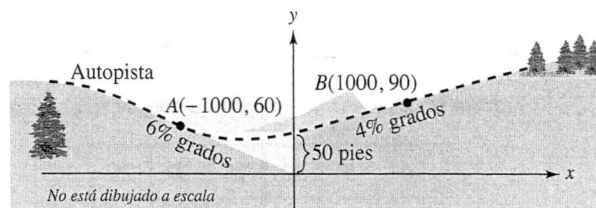
63. **Trayectoria de planeo de un avión** Un pequeño avión empieza su descenso desde una altura de 1 milla, a 4 millas al oeste de la pista de aterrizaje (vea la figura).



- Encuentre la función cúbica  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  en el intervalo  $[-4, 0]$  que describe una trayectoria de planeo uniforme para el aterrizaje.
- La función del inciso (a) modela la trayectoria de planeo del avión. ¿Cuándo descendería el avión a la velocidad más rápida?

**PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para más información acerca de este tipo de modelado, vea el artículo "How Not to Land at Lake Tahoe", de Richard Barshinger, en *The American Mathematical Monthly*. Para consultar este artículo, visite *MathArticles.com*.

64. **Diseño de autopistas** Una sección de la autopista que conecta dos laderas con inclinación de 6% y 4% se va a construir entre dos puntos que están separados por una distancia horizontal de 2000 pies (vea la figura). En el punto en que se juntan las dos laderas, hay una diferencia de altura de 50 pies.



- (a) Diseñe una sección de la autopista que conecte las laderas modeladas por la función

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad -1000 \leq x \leq 1000.$$

En los puntos A y B la pendiente del modelo debe igualar la inclinación de la ladera.

- Utilice una herramienta de graficación para representar el modelo.
- Use una herramienta de graficación para representar la derivada del modelo.
- Determine la parte más inclinada de la sección de transición de la autopista.

**65. Costo promedio** Un fabricante ha determinado que el costo total  $C$  de operación de una fábrica es

$$C = 0.5x^2 + 15x + 5000$$

donde  $x$  es el número de unidades producidas. ¿En qué nivel de producción se minimizará el costo promedio por unidad? (El costo promedio por unidad es  $C/x$ .)

**66. Peso específico** Un modelo para el peso específico del agua  $S$  es

$$S = \frac{5.755}{10^8} T^3 - \frac{8.521}{10^6} T^2 + \frac{6.540}{10^5} T + 0.99987, 0 < T < 25$$

donde  $T$  es la temperatura del agua en grados Celsius.

- (a) Utilice la segunda derivada para determinar la concavidad de  $S$ .
- (b) Utilice un sistema algebraico por computadora para determinar las coordenadas del valor máximo de la función.
- (c) Dibuje una gráfica de la función sobre el dominio especificado. (Utilice un ajuste en el cual  $0.996 \leq S \leq 1.001$ .)
- (d) Calcule el peso específico del agua cuando  $T = 20^\circ$ .

**67. Crecimiento de ventas** Las ventas anuales de  $S$  de un nuevo producto están dadas por

$$S = \frac{5000t^2}{8 + t^2}, 0 \leq t \leq 3$$

donde  $t$  es el tiempo en años.

- (a) Complete la tabla. A continuación, úsela para estimar cuándo se incrementan las ventas anuales con una rapidez más alta.

$t$	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$S$						

- (b) Utilice una herramienta de graficación para representar la función  $S$ . A continuación, use la gráfica para estimar cuándo las ventas anuales están creciendo más rápidamente.
- (c) Encuentre el tiempo exacto en el que las ventas anuales crecen al ritmo más alto.

**68. Modelar datos** La tabla muestra la velocidad media  $S$  (palabras por minuto) a la que tecldea un estudiante de mecanografía después de  $t$  semanas de asistir a clases.

$t$	5	10	15	20	25	30
$S$	38	56	79	90	93	94

Un modelo para los datos es

$$S = \frac{100t^2}{65 + t^2}, t > 0.$$

- (a) Utilice una herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.
- (b) Utilice la segunda derivada para determinar la concavidad de  $S$ . Compare el resultado con la gráfica del inciso (a).
- (c) ¿Cuál es el signo de la primera derivada para  $t > 0$ ? Combinando esta información con la concavidad del modelo, ¿qué puede inferir sobre la velocidad cuando  $t$  crece?

**Aproximaciones lineal y cuadrática.** En los ejercicios 69-72, utilice una herramienta de graficación para representar la función. A continuación, represente las aproximaciones lineal y cuadrática.

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

en la misma ventana de observación. Compare los valores de  $f$ ,  $P_1$  y  $P_2$  y sus primeras derivadas en  $x = a$ . ¿Cómo cambia la aproximación cuando se aleja de  $x = a$ ?

<b>Función</b>	<b>Valor de <math>a</math></b>
----------------	--------------------------------

69. $f(x) = 2(\text{sen } x + \cos x)$	$a = \frac{\pi}{4}$
--	---------------------

70. $f(x) = 2(\text{sen } x + \cos x)$	$a = 0$
--	---------

71. $f(x) = \sqrt{1 - x}$	$a = 0$
---------------------------	---------

72. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - 1}$	$a = 2$
-------------------------------------	---------

**73. Determinar la concavidad** Use una herramienta de graficación para representar

$$y = x \text{ sen } \frac{1}{x}$$

Demuestre que la gráfica es cóncava hacia abajo hacia la derecha de

$$x = \frac{1}{\pi}$$

**74. Punto de inflexión y extremo** Demuestre que el punto de inflexión de

$$f(x) = x(x - 6)^2$$

se encuentra a medio camino entre los extremos relativos de  $f$ .

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 75-78, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo de por qué es falso.

75. La gráfica de todo polinomio cúbico tiene precisamente un punto inflexión.

76. La gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

es cóncava hacia abajo para  $x < 0$  y cóncava hacia arriba para  $x > 0$ , y por ello tiene un punto de inflexión en  $x = 0$ .

77. Si  $f'(c) > 0$ , entonces  $f$  es cóncava hacia arriba en  $x = c$ .

78. Si  $f''(2) = 0$ , entonces la gráfica de  $f$  debe tener un punto de inflexión en  $x = 2$ .

**Demostración** En los ejercicios 79 y 80, considere que  $f$  y  $g$  representan funciones derivables tales que  $f'' \neq 0$  y  $g'' \neq 0$ .

79. Demuestre que si  $f$  y  $g$  son cóncavas hacia arriba en el intervalo  $(a, b)$  entonces  $f$  y  $g$  también son cóncavas hacia arriba sobre  $(a, b)$ .

80. Demuestre que si  $f$  y  $g$  son positivas, crecientes y cóncavas hacia arriba en el intervalo  $(a, b)$ , entonces  $fg$  también es cóncava hacia arriba sobre  $(a, b)$ .



-2

-10

Difere  
gráfic:  
Figur

## 5.5 Análisis de gráficas de funciones

### ■ Analizar y trazar la gráfica de una función.

#### Análisis de la gráfica de una función

Sería difícil exagerar la importancia de usar gráficas en matemáticas. La introducción de la geometría analítica por parte de Descartes contribuyó de manera significativa a los rápidos avances en el cálculo que se iniciaron durante la mitad del siglo XVII. En palabras de Lagrange: "Mientras el álgebra y la geometría recorrieron caminos independientes, su avance fue lento y sus aplicaciones limitadas. Sin embargo, cuando estas dos ciencias se juntaron, extrajeron una de la otra una fresca vitalidad y a partir de ahí marcharon a gran velocidad hacia la perfección."

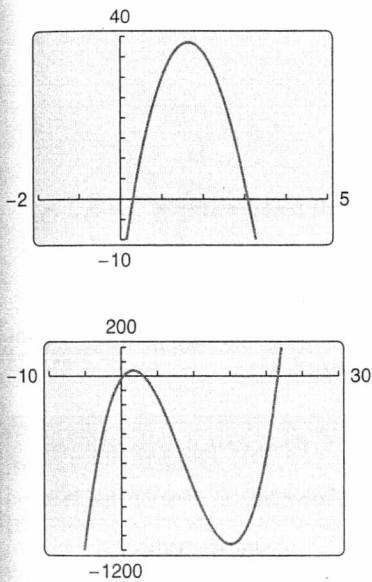
Hasta ahora, se han estudiado varios conceptos que son útiles al analizar la gráfica de una función.

- Intersecciones con los ejes  $x$  y  $y$  (Sección 2.2)
- Simetría (Sección 2.2)
- Continuidad (Sección 3.4)
- Asíntotas verticales (Sección 3.5)

Al dibujar la gráfica de una función, ya sea en forma manual o por medio de una herramienta gráfica, recuerde que normalmente no es posible mostrar toda la gráfica *entera*. La decisión en cuanto a qué parte de la gráfica usted decide mostrar es muchas veces crucial. Por ejemplo, ¿cuál de las ventanas de observación en la figura 5.32 representa mejor la gráfica de

$$f(x) = x^3 - 25x^2 + 74x - 20?$$

Al ver ambas imágenes, está claro que la segunda ventana de observación proporciona una representación más completa de la gráfica. Sin embargo, ¿una tercera ventana de observación revelaría otras partes interesantes de la gráfica? Para responder a esta pregunta, es necesario que utilice el cálculo para interpretar la primera y segunda derivadas. A continuación se presentan unas estrategias para determinar una buena ventana de observación de la gráfica de una función.



Diferentes ventanas de observación para la gráfica de  $f(x) = x^3 - 25x^2 + 74x - 20$ .  
Figura 5.32

#### ESTRATEGIA PARA ANALIZAR LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

1. Determinar el dominio y el rango de la función.
2. Determinar las intersecciones, asíntotas y la simetría de la gráfica.
3. Localizar los valores de  $x$  para los cuales  $f'$  y  $f''$ , son cero o no existen. Utilizar los resultados para determinar los extremos relativos y puntos de inflexión.

COMENTARIOS En estas estrategias, advierta la importancia del *álgebra* (así como del cálculo) para resolver las ecuaciones

$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0 \quad \text{y} \quad f''(x) = 0.$$

**EJEMPLO 1** Dibujar la gráfica de una función racional

Analice y dibuje la gráfica de

$$f(x) = \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4}$$

**Solución**

**Primera derivada:**  $f'(x) = \frac{20x}{(x^2 - 4)^2}$

**Segunda derivada:**  $f''(x) = \frac{-20(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$

**Intersecciones en x:**  $(-3, 0), (3, 0)$

**Intersección en y:**  $(0, \frac{9}{2})$

**Asíntotas verticales:**  $x = -2, x = 2$

**Asíntota horizontal:**  $y = 2$

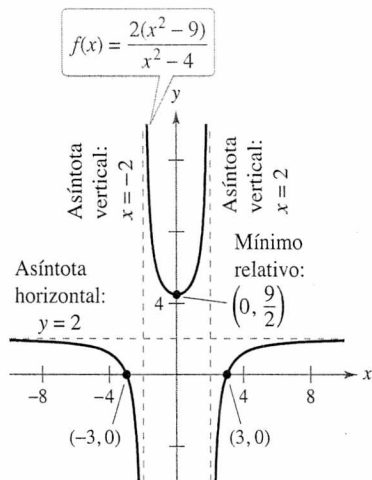
**Punto crítico:**  $x = 0$

**Posibles puntos de inflexión:** Ninguno

**Dominio:** Todos los números reales excepto  $x = \pm 2$

**Simetría:** Respecto al eje y

**Intervalos de prueba:**  $(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 2), (2, \infty)$



Empleando el cálculo, puede tener la certeza de que se han determinado todas las características de la gráfica de  $f$ .

**Figura 5.33**

**PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para más información del uso de tecnología para representar funciones racionales, consultar el artículo "Graphs of Rational Functions for Computer Assisted Calculus", de Stan Bird y Terry Walters, en *The College Mathematic Journal*. Para consultar este artículo, visite [MathArticles.com](http://MathArticles.com).

La tabla muestra cómo se usan los intervalos de prueba para determinar varias características de la gráfica. La gráfica de  $f$  se muestra en la figura 5.33.

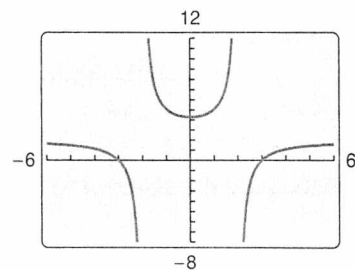
	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Característica de la gráfica
$-\infty < x < -2$		-	-	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = -2$	Indefinida	Indefinida	Indefinida	Asíntota vertical
$-2 < x < 0$		-	+	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 0$	$\frac{9}{2}$	0	+	Mínimo relativo
$0 < x < 2$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 2$	Indefinida	Indefinida	Indefinida	Asíntota vertical
$2 < x < \infty$		+	-	Creciente, cóncava hacia abajo

Asegúrese de entender todas las indicaciones de la creación de una tabla, tal como se muestra en el ejemplo 1. Debido al uso del cálculo, debe *estar seguro* de que la gráfica no tiene extremos o puntos de inflexión aparte de los que se muestran en la figura 5.33.

**CONFUSIÓN TECNOLÓGICA** Sin utilizar el tipo de análisis que se describe en el ejemplo 1, es fácil obtener una visión incompleta de las características básicas de la gráfica. Por ejemplo, la figura 5.34 muestra una imagen de la gráfica de

$$g(x) = \frac{2(x^2 - 9)(x - 20)}{(x^2 - 4)(x - 21)}$$

De acuerdo con esta imagen, parece que la gráfica de  $g$  es casi la misma que la gráfica de  $f$  mostrada en la figura 5.34. Sin embargo, las gráficas de estas dos funciones difieren bastante. Trate de agrandar la ventana de observación para ver las diferencias.



Al no utilizar el cálculo, es posible que pase por alto las características importantes de la gráfica de  $g$ .

**Figura 5.34**

Figura

Una Figura

**EJEMPLO 2**

**Dibujar la gráfica de una función racional**

Analice y dibuje la gráfica de  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ .

**Solución**

**Primera derivada:**  $f'(x) = \frac{x(x - 4)}{(x - 2)^2}$

**Segunda derivada:**  $f''(x) = \frac{8}{(x - 2)^3}$

**Intersecciones en x:** Ninguno

**Intersección en y:** (0, -2)

**Asíntota vertical:**  $x = 2$

**Asíntotas horizontales:** Ninguna

**Comportamiento final o asintótico:**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

**Puntos críticos:**  $x = 0, x = 4$

**Posibles puntos de inflexión:** Ninguno

**Domínio:** Todos los números reales excepto  $x = 2$

**Intervalos de prueba:**  $(-\infty, 0), (0, 2), (2, 4), (4, \infty)$

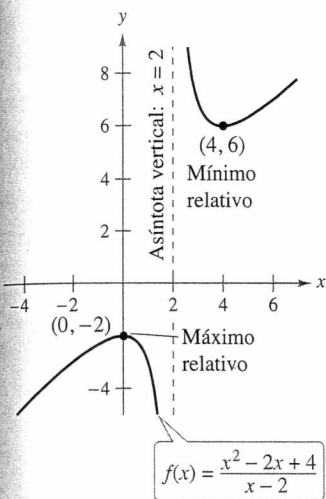
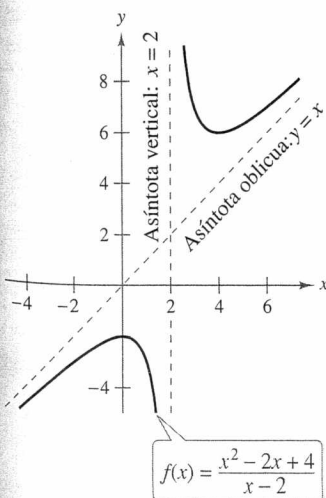


Figura 5.35

El análisis de la gráfica de  $f$  se muestra en la tabla y la gráfica se ilustra en la figura 5.35.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Características de la gráfica
$-\infty < x < 0$		+	-	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 0$	-2	0	-	Máximo relativo
$0 < x < 2$		-	-	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = 2$	Indefinida	Indefinida	Indefinida	Asíntota vertical
$2 < x < 4$		-	+	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 4$	6	0	+	Mínimo relativo
$4 < x < \infty$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba



Una asíntota oblicua.

Figura 5.36

Aunque la gráfica de la función en el ejemplo 2 no tiene asíntota horizontal, tiene una asíntota oblicua. La gráfica de una función racional (que no tiene factores comunes y cuyo denominador es de grado 1 o mayor) tiene una **asíntota oblicua** si el grado del numerador excede el grado del denominador exactamente en 1. Para determinar la asíntota oblicua, use la división larga para describir la función racional como la suma de un polinomio de primer grado y otra función racional.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = x + \frac{4}{x - 2}$$

Escriba la ecuación original.

Reescriba utilizando la división larga.

En la figura 5.36, observe que la gráfica de  $f$  se acerca a la asíntota oblicua  $y = x$  cuando  $x$  tiende a  $-\infty$  o  $\infty$ .

**EJEMPLO 3**

**Dibujar la gráfica de una función radical**

Analice y dibuje la gráfica de  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$ .

**Solución**

$f'(x) = \frac{2}{(x^2 + 2)^{3/2}}$  Encuentre la primera derivada.

$f''(x) = -\frac{6x}{(x^2 + 2)^{5/2}}$  Encuentre la segunda derivada.

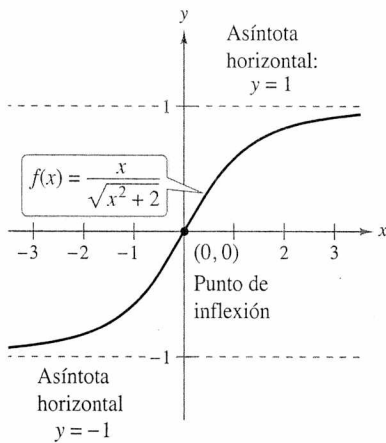


Figura 5.37

La gráfica solo tiene una sola intersección, (0, 0). No tiene asíntotas verticales, pero cuenta con dos asíntotas horizontales:  $y = 1$  (a la derecha) y  $y = -1$  (a la izquierda). La función no tiene puntos críticos y solo un posible punto de inflexión ( $x = 0$ ). El dominio de la función son todos los números reales, y la gráfica es simétrica con respecto al origen. El análisis de la gráfica de  $f$  se muestra en la tabla, y la gráfica se presenta en la figura 5.37.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Características de la gráfica
$-\infty < x < 0$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 0$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	Punto de inflexión
$0 < x < \infty$		+	-	Creciente, cóncava hacia abajo

**EJEMPLO 4**

**Dibujar la gráfica de una función radical**

Analice y dibuje la gráfica de  $f(x) = 2x^{5/3} - 5x^{4/3}$ .

**Solución**

$f'(x) = \frac{10}{3}x^{1/3}(x^{1/3} - 2)$  Encuentre la primera derivada.

$f''(x) = \frac{20(x^{1/3} - 1)}{9x^{2/3}}$  Encuentre la segunda derivada.

La función tiene dos intersecciones: (0, 0) y  $(\frac{125}{8}, 0)$ . No hay asíntotas horizontales o verticales. La función tiene dos números críticos ( $x = 0$  y  $x = 8$ ) y dos posibles puntos de inflexión ( $x = 0$  y  $x = 1$ ). El dominio son todos los números reales. El análisis de la gráfica de  $f$  se presenta en la tabla, y la gráfica se ilustra en la figura 5.38.

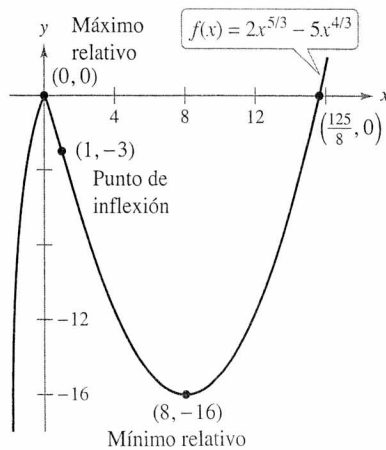


Figura 5.38

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Características de la gráfica
$-\infty < x < 0$		+	-	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 0$	0	0	Indefinida	Máximo relativo
$0 < x < 1$		-	-	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = 1$	-3	-	0	Punto de inflexión
$1 < x < 8$		-	+	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 8$	-16	0	+	Mínimo relativo
$8 < x < \infty$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba

-1  
-  
-1  
-1  
-2  
-2  
-3  
(a)  
5  
-5  
-10  
-15  
-20  
-25  
(b)  
Una  
par  
c  
relat  
Fig

**EJEMPLO 5**

**Dibujar la gráfica de una función polinomial**

•••► Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Analice y dibuje la gráfica de

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x.$$

**Solución** Comience factorizando para obtener

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x \\ &= x(x - 4)^3. \end{aligned}$$

Luego, utilizando la forma factorizada de  $f(x)$ , se puede efectuar el siguiente análisis.

**Primera derivada:**  $f'(x) = 4(x - 1)(x - 4)^2$

**Segunda derivada:**  $f''(x) = 12(x - 4)(x - 2)$

**Intersecciones en x:**  $(0, 0), (4, 0)$

**Intersección en y:**  $(0, 0)$

**Asíntotas verticales:** Ninguno

**Asíntotas horizontales:** Ninguno

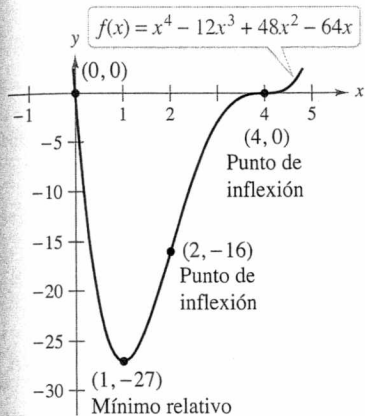
**Comportamiento final o asintótico:**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

**Puntos críticos:**  $x = 1, x = 4$

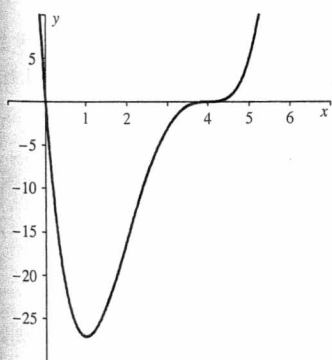
**Posibles puntos de inflexión:**  $x = 2, x = 4$

**Dominio:** Todos los números reales

**Intervalos de prueba:**  $(-\infty, 1), (1, 2), (2, 4), (4, \infty)$



(a)



Generada con Maple

(b)

Una función polinomial de grado par debe tener al menos un extremo relativo.

**Figura 5.39**

El análisis de la gráfica de  $f$  se muestra en la tabla, y la gráfica se presenta en la figura 5.39(a). El uso de un sistema de álgebra por computadora como *Maple* [(vea la figura 5.39(b))] puede resultar de utilidad para verificar el análisis.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Características de la gráfica
$-\infty < x < 1$		-	+	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 1$	-27	0	+	Mínimo relativo
$1 < x < 2$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 2$	-16	+	0	Punto de inflexión
$2 < x < 4$		+	-	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 4$	0	0	0	Punto de inflexión
$4 < x < \infty$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba

La función polinomial de cuarto grado en el ejemplo 5 tiene un mínimo relativo y ningún máximo relativo. En general, una función polinomial de grado  $n$  puede tener *al más*  $n - 1$  extremos relativos, y *cuando mucho*  $n - 2$  puntos de inflexión. Además, las funciones polinomiales de grado par deben tener *al menos* un extremo relativo.

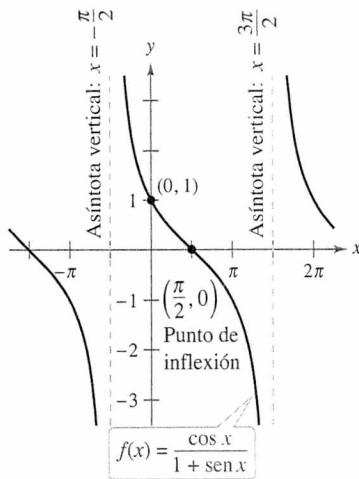
El “comportamiento final” o asintótico de la gráfica de una función polinomial es determinado mediante su coeficiente principal y su grado. Por ejemplo, debido a que el polinomio en el ejercicio 5 tiene un coeficiente principal positivo, la gráfica crece hacia la derecha. Además, dado que el grado es par, la gráfica también crece a la izquierda.

**EJEMPLO 6**

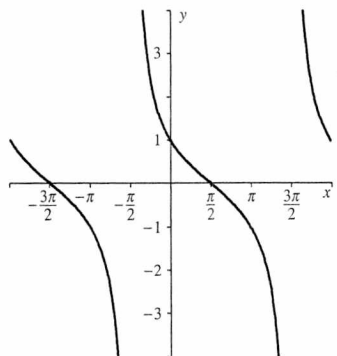
**Dibujar la gráfica de una función trigonométrica**

Analice y dibuje la gráfica de  $f(x) = (\cos x)/(1 + \sin x)$ .

**Solución** Debido a que la función tiene un periodo de  $2\pi$ , se puede restringir el análisis de la gráfica a cualquier intervalo de longitud  $2\pi$ . Por conveniencia, utilice  $(-\pi/2, 3\pi/2)$ .



(a)



(b)  
**Figura 5.40**

**Primera derivada:**  $f'(x) = -\frac{1}{1 + \sin x}$

**Segunda derivada:**  $f''(x) = \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}$

**Periodo:**  $2\pi$

**Intersección x:**  $(\frac{\pi}{2}, 0)$

**Intersección y:**  $(0, 1)$

**Asíntotas verticales:**  $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$

Vea el comentario a continuación.

**Asíntotas horizontales:** Ninguna

**Números críticos:** Ninguno

**Posibles puntos de inflexión:**  $x = \frac{\pi}{2}$

**Dominio:** Todos los números reales excepto  $x = \frac{3 + 4n}{2}\pi$

**Intervalos de prueba:**  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

El análisis de la gráfica de  $f$  en el intervalo  $(-\pi/2, 3\pi/2)$  se muestra en la tabla, y la gráfica se muestra en la figura 5.40(a). Compare esto con la gráfica generada por el sistema algebraico por computadora *Maple* en la figura 5.40(b).

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Características de la gráfica
$x = -\frac{\pi}{2}$	Indefinida	Indefinida	Indefinida	Asíntota vertical
$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$		-	+	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = \frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	Punto de inflexión
$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$		-	-	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = \frac{3\pi}{2}$	Indefinida	Indefinida	Indefinida	Asíntota vertical

**COMENTARIO** Sustituyendo  $-\pi/2$  o  $3\pi/2$  en la función, obtiene la forma  $0/0$ . Ésta recibe el nombre de forma indeterminada. Para determinar si la función tiene asíntotas verticales en estos dos valores, reescriba  $f$  como

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{(\cos x)(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \frac{(\cos x)(1 - \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

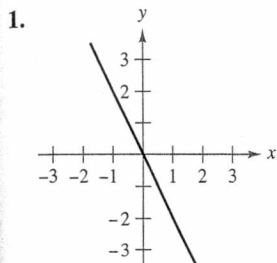
En esta forma, es claro que la gráfica de  $f$  tiene asíntotas verticales cuando  $x = -\pi/2$  y  $3\pi/2$ .

# 5.5 Ejercicios

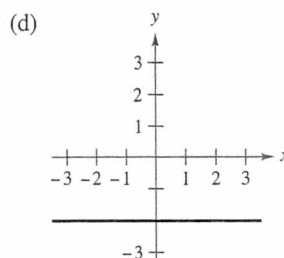
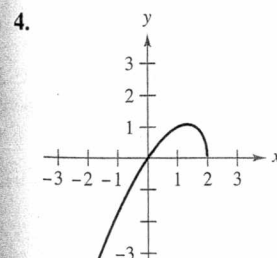
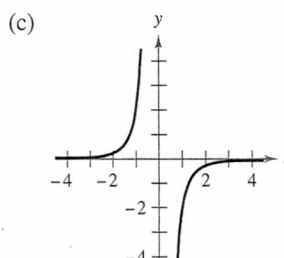
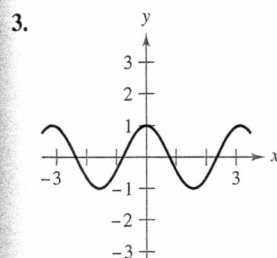
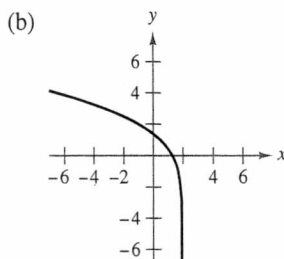
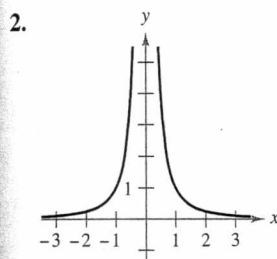
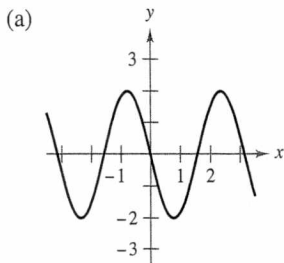
Consulte [CalcChat.com](http://CalcChat.com) para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Relacionar** En los ejercicios 1-4, relacione la gráfica de  $f$  en la columna izquierda con la de su derivada en la columna derecha.

Gráfica de  $f$



Gráfica de  $f'$



**Analizar la gráfica de una función** En los ejercicios 5-24, analice y dibuje una gráfica de la función. Indique todas las intersecciones, extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. Utilice una herramienta de graficación para verificar los resultados.

5.  $y = \frac{1}{x-2} - 3$

6.  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

7.  $y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$

8.  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$

9.  $y = \frac{3x}{x^2 - 1}$

10.  $f(x) = \frac{x-3}{x}$

11.  $f(x) = x + \frac{32}{x^2}$

12.  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9}$

13.  $y = \frac{x^2 - 6x + 12}{x - 4}$

14.  $y = \frac{-x^2 - 4x - 7}{x + 3}$

15.  $y = x\sqrt{4-x}$

16.  $g(x) = x\sqrt{9-x^2}$

17.  $y = 3x^{2/3} - 2x$

18.  $y = (x+1)^2 - 3(x+1)^{2/3}$

19.  $y = 2 - x - x^3$

20.  $y = -\frac{1}{3}(x^3 - 3x + 2)$

21.  $y = 3x^4 + 4x^3$

22.  $y = -2x^4 + 3x^2$

23.  $y = x^5 - 5x$

24.  $y = (x-1)^5$

**Analizar la gráfica de una función usando tecnología** En los ejercicios 25-34, utilice un sistema algebraico por computadora para analizar y representar gráficamente la función. Identifique todos los extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas.

25.  $f(x) = \frac{20x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x}$

26.  $f(x) = x + \frac{4}{x^2 + 1}$

27.  $f(x) = \frac{-2x}{\sqrt{x^2 + 7}}$

28.  $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 15}}$

29.  $f(x) = 2x - 4 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

30.  $f(x) = -x + 2 \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

31.  $y = \cos x - \frac{1}{4} \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

32.  $y = 2x - \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

33.  $y = 2(\operatorname{csc} x + \sec x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

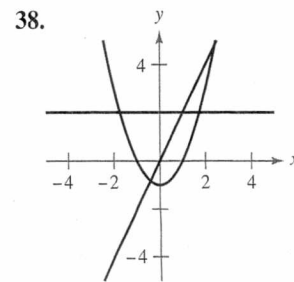
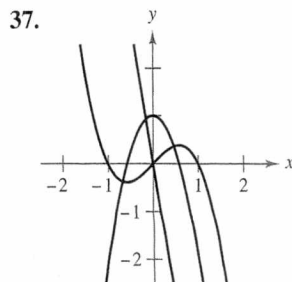
34.  $g(x) = x \cot x, \quad -2\pi < x < 2\pi$

## DESARROLLO DE CONCEPTOS

35. **Usar una derivada** Sea  $f'(t) < 0$  para todo  $t$  en el intervalo  $(2, 8)$ . Explique por qué  $f(3) > f(5)$ .

36. **Usar una derivada** Sea  $f(0) = 3$  y  $2 \leq f'(x) \leq 4$  para todo  $x$  en el intervalo  $[-5, 5]$ . Determine los valores más grandes y más pequeños posibles de  $f(2)$ .

**Identificar una gráfica** En los ejercicios 37 y 38, las gráficas de  $f, f', f''$  se muestran sobre el mismo conjunto de ejes de coordenados. ¿Cuál es cuál? Explique su razonamiento. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite [MathGraphs.com](http://MathGraphs.com).



**DESARROLLO DE CONCEPTOS (continuación)**

**Asíntotas verticales y horizontales** En los ejercicios 39-42, utilice una herramienta de graficación para representar la función. Use la gráfica para determinar, si es posible, que la gráfica de la función cruza su asíntota horizontal. ¿Es posible que la gráfica de una función cruce su asíntota vertical? ¿Por qué sí o por qué no?

39.  $f(x) = \frac{4(x-1)^2}{x^2 - 4x + 5}$       40.  $g(x) = \frac{3x^4 - 5x + 3}{x^4 + 1}$

41.  $h(x) = \frac{\sin 2x}{x}$       42.  $f(x) = \frac{\cos 3x}{4x}$

**Examinar una función** En los ejercicios 43 y 44, utilice una herramienta de graficación para representar la función. Explique por qué no hay asíntota vertical cuando una inspección superficial de la función quizá indique que debería haber una.

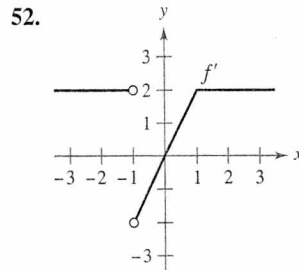
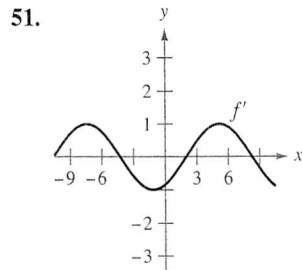
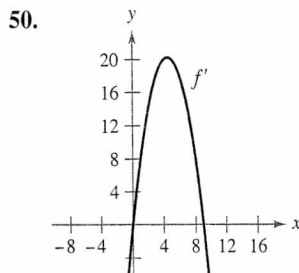
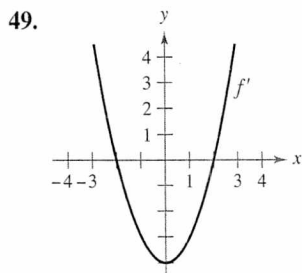
43.  $h(x) = \frac{6 - 2x}{3 - x}$       44.  $g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

**Asíntota inclinada** En los ejercicios 45-48, utilice una herramienta de graficación para representar la función y determinar la asíntota oblicua de la gráfica. Realice acercamientos repetidos y describa cómo parece cambiar la gráfica que se exhibe. ¿Por qué ocurre lo anterior?

45.  $f(x) = \frac{-x^2 - 3x - 1}{x - 2}$       46.  $g(x) = \frac{2x^2 - 8x - 15}{x - 5}$

47.  $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$       48.  $h(x) = \frac{-x^3 + x^2 + 4}{x^2}$

**Razonamiento gráfico** En los ejercicios 49-52, utilice la gráfica de  $f'$  para trazar la gráfica de  $f$  y la gráfica de  $f''$ . Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite [MathGraphs.com](http://MathGraphs.com).



**53. Razonamiento gráfico** Considere la función

$$f(x) = \frac{\cos^2 \pi x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad 0 < x < 4.$$

- (a) Utilice un sistema algebraico por computadora para representar la función y emplear la gráfica para aproximar en forma visual los puntos críticos.
- (b) Use un sistema algebraico por computadora para determinar  $f'$  y aproximar los puntos críticos. ¿Los resultados son los mismos que los de la aproximación visual del inciso (a)? Explique.

**54. Razonamiento gráfico** Considere la función

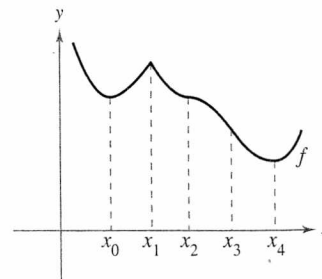
$$f(x) = \tan(\sin \pi x).$$

- (a) Utilice una herramienta de graficación para representar la función.
- (b) Identifique toda simetría de la gráfica.
- (c) ¿Es periódica la función? Si es así, ¿cuál es el periodo?
- (d) Identifique todos los extremos en  $(-1, 1)$ .
- (e) Utilice una herramienta de graficación para determinar la concavidad de la gráfica en  $(0, 1)$ .

**Piénselo** En los ejercicios 55-58, genere una función cuya gráfica tenga las características indicadas. (Hay más de una respuesta correcta.)

- 55. Asíntota vertical:  $x = 3$   
Asíntota horizontal:  $y = 0$
- 56. Asíntota vertical:  $x = -5$   
Asíntota horizontal: Ninguna
- 57. Asíntota vertical:  $x = 3$   
Asíntota inclinada:  $y = 3x + 2$
- 58. Asíntota vertical:  $x = 2$   
Asíntota inclinada:  $y = -x$

**59. Razonamiento gráfico** Identifique los números reales  $x_0, x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  en la figura de tal manera que cada una de las siguientes situaciones sea verdadera.



- (a)  $f'(x) = 0$
- (b)  $f''(x) = 0$
- (c)  $f'(x)$  no existe.
- (d)  $f$  tiene un máximo relativo
- (e)  $f$  tiene un punto de inflexión.

(Proporcionado por Bill Fox, Moberly Area Community College, Moberly, MO)

61. Inv  
grá  
Ver

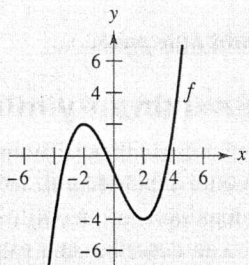
(c)  
(f)  
(c)  
(c)

(a)  
(b)  
(c)  
(d)

(e)  
(f)  
(g)  
(h)

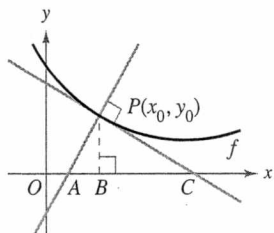


**¿CÓMO LO VE?** La gráfica de  $f$  se muestra en la figura.



- (a) ¿Para qué valores de  $x$  es  $f'(x)$  cero, positivo y negativo? ¿Qué significan estos valores?
- (b) ¿Para qué valores de  $x$  es  $f''$  cero, positivo negativo? ¿Qué significan estos valores?
- (c) ¿Sobre qué intervalo la función de  $f'$  es creciente?
- (d) ¿Para qué valor de  $x$  es  $f'(x)$  mínima? Para este valor de  $x$ , ¿cuál es la rapidez de cambio de  $f$  comparada con las rapideces de cambio de  $f$  para otros valores de  $x$ ? Explique.

**61. Investigación** Sea  $P(x_0, y_0)$  un punto arbitrario sobre la gráfica de  $f$  tal que  $f'(x_0) \neq 0$ , como se indica en la figura. Verifique cada afirmación.



- (a) La intersección con el eje  $x$  de la recta tangente es  $(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, 0)$ .
- (b) La intersección con el eje  $y$  de la recta tangente es  $(0, f(x_0) - x_0 f'(x_0))$ .
- (c) La intersección con el eje  $x$  de la recta normal es  $(x_0 + f(x_0)f'(x_0), 0)$ .
- (d) La intersección con el eje  $y$  de la recta normal es  $(0, y_0 + \frac{x_0}{f'(x_0)})$ .
- (e)  $|BC| = \frac{|f(x_0)|}{|f'(x_0)|}$
- (f)  $|PC| = \frac{|f(x_0)\sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}|}{|f'(x_0)|}$
- (g)  $|AB| = |f(x_0)f'(x_0)|$
- (h)  $|AP| = |f(x_0)|\sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}$

**62. Investigación** Considere la función

$$f(x) = \frac{2x^n}{x^4 + 1}$$

para valores enteros no negativos de  $n$ .

- (a) Analice la relación entre el valor de  $n$  y la simetría de la gráfica.
- (b) ¿Para qué valores de  $n$  el eje  $x$  será la asíntota horizontal?
- (c) ¿Para qué valor de  $n$  será  $y = 2$  la asíntota horizontal?
- (d) ¿Cuál es la asíntota de la gráfica cuando  $n = 5$ ?

(e) Represente  $f$  con una herramienta de graficación para cada valor de  $n$  indicado en la tabla. Emplee la gráfica para determinar el número  $M$  de extremos y el número  $N$  de puntos de inflexión de la gráfica.

$n$	0	1	2	3	4	5
$M$						
$N$						

**63. Razonamiento gráfico** Considere la función

$$f(x) = \frac{ax}{(x - b)^2}$$

Determine el efecto sobre la gráfica de  $f$  si  $a$  y  $b$  cambian. Considere casos en los que  $a$  y  $b$  son ambos positivos o ambos negativos, y casos en los que  $a$  y  $b$  tienen signos opuestos.

**64. Razonamiento gráfico** Considere la función

$$f(x) = \frac{1}{2}(ax)^2 - ax, \quad a \neq 0.$$

- (a) Determine los cambios (si los hay) en las intersecciones, los extremos y la concavidad de la gráfica  $f$  cuando varía  $a$ .
- (b) En la misma ventana de observación, utilice una herramienta de graficación para representar la función para cuatro valores diferentes de  $a$ .

**Asíntotas oblicuas** En los ejercicios 65 y 66, la gráfica de la función tiene dos asíntotas oblicuas. Identifique cada asíntota oblicua. A continuación, represente gráficamente la función y sus asíntotas.

65.  $y = \sqrt{4 + 16x^2}$

66.  $y = \sqrt{x^2 + 6x}$

**DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM**

67. Considere que  $f(x)$  está definida para  $a \leq x \leq b$ . Suponiendo propiedades apropiadas de continuidad y derivabilidad, demuestre para  $a < x < b$  que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{1}{2}f''(\epsilon),$$

donde  $\epsilon$  es algún número entre  $a$  y  $b$ .

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

## 5.6 Problemas de optimización

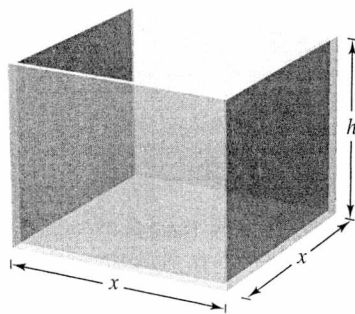
### ■ Resolver problemas de máximos y mínimos aplicados.

### Problemas de aplicación de máximos y mínimos

Una de las aplicaciones más comunes de cálculo implica la determinación de los valores mínimo y máximo. Recuerde cuántas veces ha oído hablar de utilidad (beneficio) máxima(o), mínimo costo, tiempo mínimo, voltaje máximo, forma óptima, tamaño mínimo, máxima resistencia y máxima distancia. Antes de describir una estrategia general de solución para tales problemas, considere el ejemplo siguiente.

#### EJEMPLO 1

#### Determinar el volumen máximo



Caja abierta con base cuadrada:  
 $S = x^2 + 4xh = 108$ .

Figura 5.41

Un fabricante quiere diseñar una caja abierta que tenga una base cuadrada y un área superficial de 108 pulgadas cuadradas, como se muestra en la figura 5.41. ¿Qué dimensiones producirá una caja con un volumen máximo?

**Solución** Debido a que la caja tiene una base cuadrada, su volumen es

$$V = x^2h. \quad \text{Ecuación primaria}$$

Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación primaria** porque proporciona una fórmula para la cantidad que se va a optimizar. El área superficial de la caja es

$$S = (\text{área de la base}) + (\text{área de los cuatro lados})$$

$$S = x^2 + 4xh = 108. \quad \text{Ecuación secundaria}$$

Como  $V$  se va a maximizar, escriba  $V$  como una función de una sola variable. Para hacerlo, puede resolver la ecuación  $x^2 + 4xh = 108$  para  $h$  en términos de  $x$  y obtener  $h = (108 - x^2)/(4x)$ . Sustituyendo en la ecuación primaria, se obtiene

$$V = x^2h \quad \text{Función de dos variables}$$

$$= x^2 \left( \frac{108 - x^2}{4x} \right) \quad \text{Sustituya para } h.$$

$$= 27x - \frac{x^3}{4}. \quad \text{Función de una variable}$$

Antes de determinar qué valor de  $x$  producirá un valor máximo de  $V$ , necesita determinar el *dominio factible*. Esto es, ¿qué valores de  $x$  tienen sentido en este problema? Se sabe que  $V \geq 0$ . También sabe que  $x$  debe ser no negativa y que el área de la base ( $A = x^2$ ) es a lo sumo 108. De tal modo, el dominio factible es

$$0 \leq x \leq \sqrt{108}. \quad \text{Dominio factible}$$

Para maximizar  $V$ , determine los puntos críticos de la función de volumen en el intervalo  $(0, \sqrt{108})$ .

$$\frac{dV}{dx} = 27 - \frac{3x^2}{4} \quad \text{Derive respecto a } x.$$

$$27 - \frac{3x^2}{4} = 0 \quad \text{Igualé la derivada a cero.}$$

$$3x^2 = 108 \quad \text{Simplifique.}$$

$$x = \pm 6 \quad \text{Puntos críticos}$$

Así, los puntos críticos son  $x = \pm 6$ . No necesita considerar  $x = -6$  porque está fuera del dominio. La evaluación  $V$  en el punto crítico  $x = 6$  y en los puntos terminales del dominio produce  $V(0) = 0$ ,  $V(6) = 108$  y  $V(\sqrt{108}) = 0$ . Por tanto,  $V$  es máximo cuando  $x = 6$  y las dimensiones de la caja son 6 pulgadas por 6 pulgadas por 3 pulgadas.

#### ▷ TECNOLOGÍA Puede

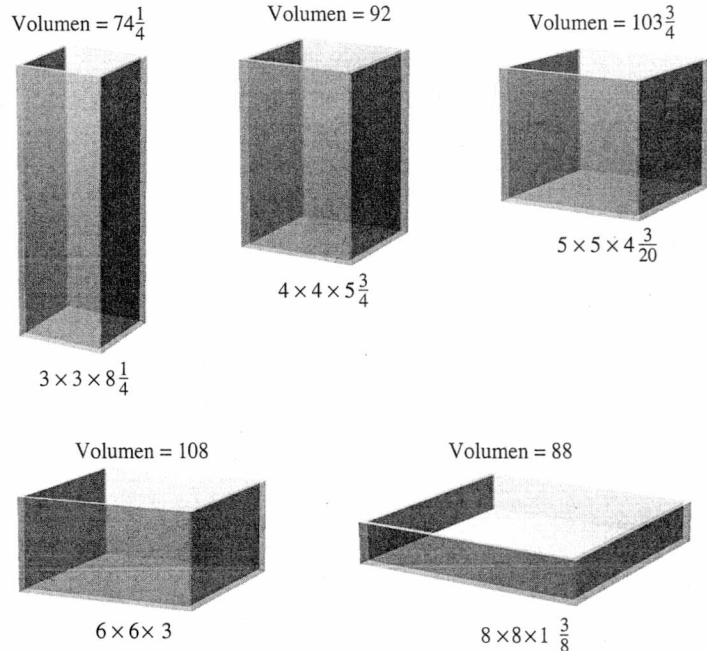
- verificar la respuesta utilizando una herramienta de graficación para representar la función
- volumen

$$V = 27x - \frac{x^3}{4}.$$

- Use una herramienta de observación en la que  $0 \leq x \leq \sqrt{108} \approx 10.4$  y  $0 \leq y \leq 120$ , y la función *maximum* o *trace* para determinar el valor máximo de  $V$ .

En el ejemplo 1, observe que hay un número infinito de cajas abiertas con 108 pulgadas cuadradas de área superficial. Para empezar a resolver el problema, debe preguntarse qué forma básica parecería producir un volumen máximo. ¿La caja debe de ser alta, muy baja o casi cúbica?

Incluso puede tratar de calcular unos cuantos volúmenes, como se muestra en la figura 5.42, para ver si se obtiene una mejor idea de lo que deben ser las dimensiones óptimas. Recuerde que no se puede resolver un problema hasta que no haya identificado con total claridad.



¿Qué caja tiene el volumen mayor?

Figura 5.42

El ejemplo 1 ilustra las siguientes estrategias para resolver problemas aplicados de mínimos y máximos.

### ESTRATEGIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS APLICADOS DE MÍNIMOS Y MÁXIMOS

1. Identifique todas las cantidades *dadas* y las que *se van a determinar*. Si es posible, elabore un dibujo.
2. Escriba una **ecuación primaria** para la cantidad que se va a maximizar o minimizar. (Una revisión de varias fórmulas útiles a partir de la geometría se presenta al final del libro.)
3. Reduzca la ecuación primaria a una sola variable *independiente*. Esto quizá implique el uso de **ecuaciones secundarias** que relacionan las variables independientes de la ecuación primaria.
4. Determine el dominio factible de la ecuación primaria. Esto es, determinar los valores para los cuales el problema planteado tiene sentido.
5. Determine el valor máximo o mínimo deseado mediante las técnicas de cálculo estudiadas en las secciones 5.1 a 5.4.

..... **COMENTARIO** Al efectuar el paso 5, recuerde que para determinar el máximo o mínimo de una función continua  $f$  en un intervalo cerrado, debe comparar los valores de  $f$  en sus puntos críticos con los valores de  $f$  en los puntos terminales del intervalo.

**EJEMPLO 2**

**Determinar la distancia mínima**

•••► Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

¿Qué puntos sobre la gráfica de  $y = 4 - x^2$  son más cercanos al punto  $(0, 2)$ ?

**Solución** La figura 5.43 muestra que hay dos puntos a una distancia mínima del punto  $(0, 2)$ . La distancia entre el punto  $(0, 2)$  y un punto  $(x, y)$  sobre la gráfica de  $y = 4 - x^2$  está dada por

$$d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 2)^2} \quad \text{Ecuación primaria}$$

Usando la ecuación secundaria  $y = 4 - x^2$ , puede reescribir la ecuación primaria como

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{x^2 + (4 - x^2 - 2)^2} \\ &= \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}. \end{aligned}$$

Como  $d$  es más pequeña cuando la expresión dentro del radical es aún menor, solo necesita determinar los puntos críticos de  $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ . Observe que el dominio de  $f$  es toda la recta de números reales. Por tanto, no hay puntos terminales del dominio por considerar. Además, la derivada de  $f$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 6x \\ &= 2x(2x^2 - 3) \end{aligned}$$

es cero cuando

$$x = 0, \sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Probar estos números críticos con el criterio de la primera derivada verifica que  $x = 0$  produce un máximo relativo, mientras que  $x = \sqrt{3/2}$  y  $x = -\sqrt{3/2}$  producen una distancia mínima. Por tanto, los puntos más cercanos son  $(\sqrt{3/2}, 5/2)$  y  $(-\sqrt{3/2}, 5/2)$ .

**EJEMPLO 3**

**Determinar el área mínima**

Una página rectangular debe contener 24 pulgadas cuadradas de impresión. Los márgenes en la parte superior y de la parte inferior de la página van a ser de  $1\frac{1}{2}$  pulgadas, y los márgenes de la izquierda y la derecha corresponderán a 1 pulgada (vea la figura 5.44). ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la página para que se use la menor cantidad de papel?

**Solución** Sea  $A$  el área que se va a minimizar.

$$A = (x + 3)(y + 2) \quad \text{Ecuación primaria}$$

El área impresa dentro del margen está dada por

$$24 = xy. \quad \text{Ecuación secundaria}$$

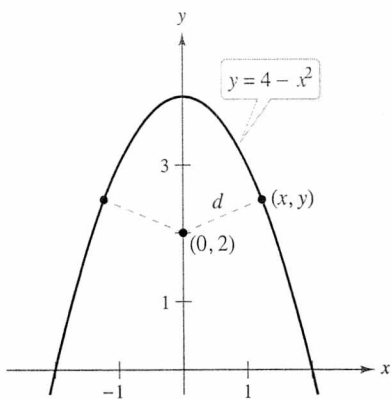
Despejando de esta ecuación para  $y$  produce  $y = 24/x$ . La sustitución en la ecuación primaria da lugar a

$$A = (x + 3)\left(\frac{24}{x} + 2\right) = 30 + 2x + \frac{72}{x} \quad \text{Función de una variable}$$

Debido a que  $x$  debe ser positiva, solo interesan valores de  $A$  para  $x > 0$ . Para encontrar los puntos críticos, derive respecto a  $x$ ,

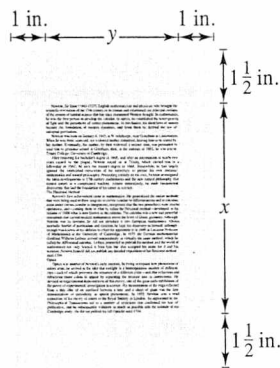
$$\frac{dA}{dx} = 2 - \frac{72}{x^2}$$

y observe que la derivada es cero cuando  $x^2 = 36$  o  $x = \pm 6$ . Por tanto, los puntos críticos son  $x = \pm 6$ . No es necesario considerar  $x = -6$  porque este punto está fuera del dominio. El criterio de la primera derivada confirma que  $A$  es un mínimo cuando  $x = 6$ . Por lo que,  $y = \frac{24}{6} = 4$  y las dimensiones de la página deben ser  $x + 3 = 9$  pulgadas por  $y + 2 = 6$  pulgadas.



La cantidad a minimizar es la distancia:  $d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 2)^2}$ .

Figura 5.43



Las cantidad que se va a minimizar es el área:  $A = (x + 3)(y + 2)$ .

Figura 5.44

60  
Minim  
0 X=9  
45  
Puede co  
con una t  
Figura 5

## EJEMPLO 4

## Hallar la longitud mínima

Dos postes, uno de 12 pies de altura y el otro de 28 pies, están a 30 pies de distancia. Se sostienen por dos cables, conectados a una sola estaca, desde el nivel del suelo hasta la parte superior de cada poste. ¿Dónde debe colocarse la estaca para que se use la menor cantidad de cable?

**Solución** Sea  $W$  la longitud del cable que se va a minimizar. Utilizando la figura 5.45, puede escribir

$$W = y + z. \quad \text{Ecuación primaria}$$

En este problema, más que resolver para  $y$  en términos de  $z$  (o viceversa), debe despejar tanto para  $y$  como para  $z$  en términos de una tercera variable  $x$ , como se indica en la figura 5.45. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, obtiene

$$\begin{aligned} x^2 + 12^2 &= y^2 \\ (30 - x)^2 + 28^2 &= z^2 \end{aligned} \text{ va}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 + 144} \\ z &= \sqrt{x^2 - 60x + 1684}. \end{aligned}$$

Por tanto,  $W$  está dada por

$$\begin{aligned} W &= y + z \\ &= \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1684}, \quad 0 \leq x \leq 30. \end{aligned}$$

Derivar  $W$  respecto a  $x$  produce

$$\frac{dW}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1684}}.$$

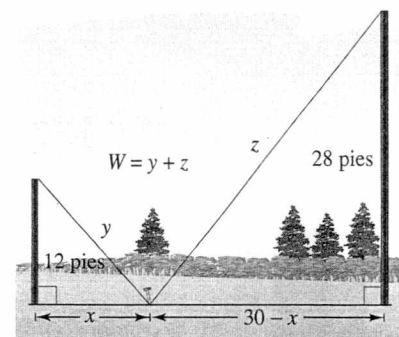
Haciendo  $dw/dx = 0$ , obtendrá

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1684}} &= 0 \\ x\sqrt{x^2 - 60x + 1684} &= (30 - x)\sqrt{x^2 + 144} \\ x^2(x^2 - 60x + 1684) &= (30 - x)^2(x^2 + 144) \\ x^4 - 60x^3 + 1684x^2 &= x^4 - 60x^3 + 1044x^2 - 8640x + 129,600 \\ 640x^2 + 8640x - 129,600 &= 0 \\ 320(x - 9)(2x + 45) &= 0 \\ x &= 9, -22.5. \end{aligned}$$

Como  $x = -22.5$  no está en el dominio y

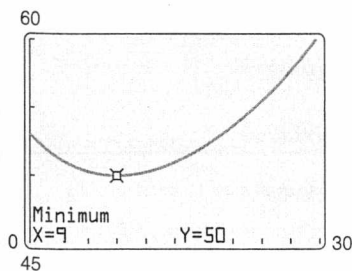
$$W(0) \approx 53.04, \quad W(9) = 50 \quad \text{y} \quad W(30) \approx 60.31$$

Puede concluir que el alambre debe colocarse a 9 pies del poste de 12 pies. ■



La cantidad que se va a minimizar es la longitud. De acuerdo con el diagrama, se puede ver que  $x$  varía entre 0 y 30.

Figura 5.45



Puede confirmar el valor mínimo de  $W$  con una herramienta de graficación.

Figura 5.46

► **TECNOLOGÍA** Del ejemplo 4, puede ver que los problemas de optimización aplicada implican una gran cantidad de álgebra. Si tiene acceso a una herramienta de graficación, confirme que  $x = 9$  produce un valor mínimo de  $W$  al trazar la gráfica

$$W = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1684}$$

como se muestra en la figura 5.46.

En cada uno de los primeros cuatro ejemplos, el valor extremo ocurre en un punto crítico. Aunque esto sucede a menudo, recuerde que un valor extremo también puede presentarse en un punto terminal de un intervalo, como se muestra en el ejemplo 5.

**EJEMPLO 5 Un máximo en un punto terminal**

Se van a usar 4 pies de alambre para formar un cuadrado y un círculo. ¿Qué cantidad del alambre debe usarse para el cuadrado y qué cantidad para el círculo a fin de abarcar la máxima área total?

**Solución** El área total (ver la figura 5.47) está dada por

$$A = (\text{área del cuadrado}) + (\text{área del círculo})$$

$$A = x^2 + \pi r^2. \quad \text{Ecuación primaria}$$

Como la longitud total de alambre es 4 pies, obtiene

$$4 = (\text{perímetro del cuadrado}) + (\text{circunferencia del círculo})$$

$$4 = 4x + 2\pi r$$

Por tanto,  $r = 2(1 - x)/\pi$ , y sustituyendo en la ecuación primaria, obtiene

$$\begin{aligned} A &= x^2 + \pi \left[ \frac{2(1 - x)}{\pi} \right]^2 \\ &= x^2 + \frac{4(1 - x)^2}{\pi} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} [(\pi + 4)x^2 - 8x + 4].$$

El dominio factible es  $0 \leq x \leq 1$  restringido por el perímetro cuadrado. Como

$$\frac{dA}{dx} = \frac{2(\pi + 4)x - 8}{\pi}$$

el único punto crítico en  $(0, 1)$  es  $x = 4/(\pi + 4) \approx 0.56$ . Así, utilizando

$$A(0) \approx 1.273, \quad A(0.56) \approx 0.56 \quad \text{y} \quad A(1) = 1$$

puede concluir que el área máxima ocurre cuando  $x = 0$ . Es decir, se usa *todo* el alambre para el círculo.

Antes de ir a la sección de ejercicios, se revisan las ecuaciones primarias formuladas en los primeros cinco ejemplos. Como indican las aplicaciones, estos cinco ejemplos son bastante simples, no obstante las ecuaciones primarias resultantes son bastante complicadas.

$$V = 27x - \frac{x^3}{4} \quad \text{Ejemplo 1}$$

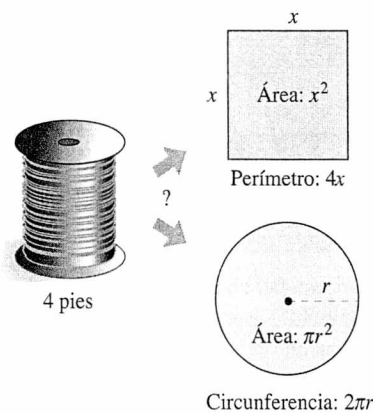
$$d = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} \quad \text{Ejemplo 2}$$

$$A = 30 + 2x + \frac{72}{x} \quad \text{Ejemplo 3}$$

$$W = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1684} \quad \text{Ejemplo 4}$$

$$A = \frac{1}{\pi} [(\pi + 4)x^2 - 8x + 4] \quad \text{Ejemplo 5}$$

Debe esperar que las aplicaciones de la vida real incluyan ecuaciones *al menos tan complicadas* como estas cinco. Recuerde que una de las metas principales de este curso es aprender a utilizar el cálculo con el fin de analizar ecuaciones que en un principio parecen ser sumamente complejas.



La cantidad que se va a maximizar es el área:  $A = x^2 + \pi r^2$ .

Figura 5.47

**Exploración**

¿Cuál sería la respuesta si en el ejemplo 5 se preguntaran las dimensiones necesarias para encerrar el área total *mínima*?

## 5.6 Ejercicios

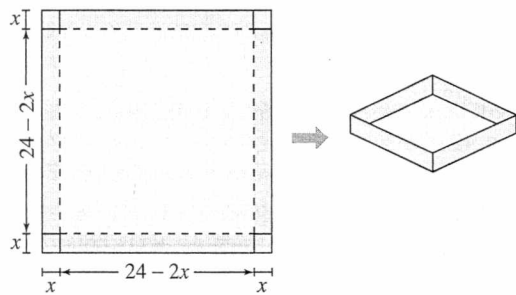
Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

1. **Análisis numérico, gráfico y analítico** Encuentre dos números positivos cuya suma es 110 y cuyo producto es un máximo posible.

(a) Complete analíticamente seis renglones de una tabla tal como la siguiente. (Se muestran los primeros dos renglones.)

Primer número, $x$	Segundo número	Producto, $P$
10	$110 - 10$	$10(110 - 10) = 1000$
20	$110 - 20$	$20(110 - 20) = 1800$

- (b) Utilice una herramienta de graficación para generar renglones adicionales en la tabla. Use la tabla para estimar la solución, (*Sugerencia:* Utilice la función *table* de la herramienta de graficación.)
- (c) Escriba el producto  $P$  como una función de  $x$ .
- (d) Utilice una herramienta de graficación para representar la función del inciso (c) y estime la solución a partir de la gráfica.
- (e) Use el cálculo para determinar el punto crítico de la función en el inciso (c). Encuentre después los dos números.
2. **Análisis numérico, gráfico y analítico** Una caja abierta de volumen máximo se va a construir a partir de una pieza cuadrada de material, de 24 pulgadas de lado, cortando cuadrados iguales a partir de las esquinas y doblando los bordes (vea la figura.)



- (a) Complete analíticamente seis renglones de una tabla tal como la siguiente. (Se muestran los primeros renglones.) Use la tabla para estimar el volumen máximo.

Altura, $x$	Largo y ancho	Volumen, $V$
1	$24 - 2(1)$	$1[24 - 2(1)]^2 = 484$
2	$24 - 2(2)$	$2[24 - 2(2)]^2 = 800$

- (b) Escriba el volumen  $V$  como una función de  $x$ .
- (c) Use cálculo para determinar el punto crítico de la función en el inciso (b) y encontrar el valor máximo.
- (d) Utilice una herramienta de graficación para representar la función del inciso (b) y verificar el volumen máximo a partir de la gráfica.

**Encontrar números** En los ejercicios 3-8, encuentre dos números positivos que satisfagan los requerimientos dados.

- La suma es  $S$  y el producto es un máximo.
- El producto es 185 y la suma es un mínimo.
- El producto es 147 y la suma del primero más tres veces el segundo número es mínimo.
- El segundo número es el recíproco del primero y la suma es un mínimo.
- La suma del primer número y el doble del segundo es 108 y el producto es un máximo.
- La suma del primer número al cuadrado y el segundo es 54 y el producto es un máximo.

**Área máxima** En los ejercicios 9 y 10, encuentre el largo y ancho de un rectángulo que tiene el perímetro dado y un área máxima.

9. Perímetro: 80 metros    10. Perímetro:  $P$  unidades

**Perímetro mínimo** En los ejercicios 11 y 12, encuentre el largo y ancho de un rectángulo que tiene el área dada y un perímetro mínimo.

11. Área: 32 pies cuadrados    12. Área:  $A$  centímetros cuadrados

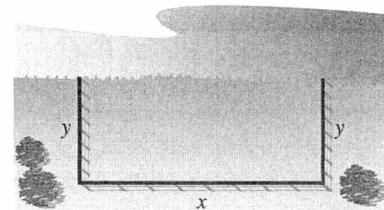
**Distancia mínima** En los ejercicios 13-16, determine el punto sobre la gráfica de la función que está más cerca al punto dado.

13.  $f(x) = x^2$ ,  $(2, \frac{1}{2})$     14.  $f(x) = (x - 1)^2$ ,  $(-5, 3)$   
 15.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $(4, 0)$     16.  $f(x) = \sqrt{x - 8}$ ,  $(12, 0)$

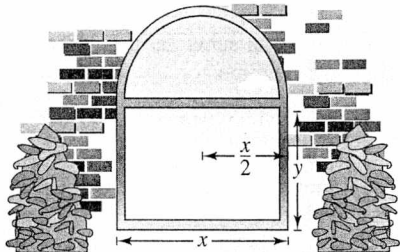
17. **Área mínima** Una página rectangular contendrá 30 pulgadas cuadradas de área impresa. Los márgenes de cada lado son de 1 pulgada. Encuentre las dimensiones de la página de forma tal que se use la menor cantidad de papel.

18. **Área mínima** Una página rectangular contendrá 36 pulgadas cuadradas de área impresa. Los márgenes de cada lado serán de  $\frac{1}{2}$  pulgadas. Encuentre las dimensiones de la página de forma tal que se use la menor cantidad de papel.

19. **Longitud mínima** Un granjero planea cercar un pastizal rectangular adyacente a un río (vea la figura). El pastizal debe contener  $245,000 \text{ m}^2$  para proporcionar suficiente pastura para el rebaño. ¿Qué dimensiones requeriría la cantidad mínima de cercado si no es necesario vallar a lo largo del río?



20. **Volumen máximo** Determine las dimensiones de un sólido rectangular (con base cuadrada) de volumen máximo si su área rectangular es de superficie de  $337.5 \text{ cm}^2$ .
21. **Área máxima** Una ventana Normanda se construye juntando un semicírculo a la parte superior de una ventana rectangular ordinaria (vea la figura). Encuentre las dimensiones de una ventana Normanda de área máxima si el perímetro total es de 16 pies.



22. **Área máxima** Un rectángulo está cortado por los ejes  $x$  y  $y$  y la gráfica de  $y = (6 - x)/2$  (ver la figura). ¿Qué longitud y ancho debe tener el rectángulo de manera que su área sea un máximo?

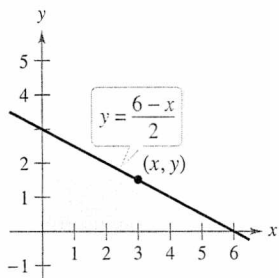


Figura para 22

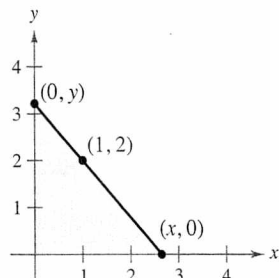


Figura para 23

23. **Longitud mínima y área mínima** Un triángulo rectángulo se forma en el primer cuadrante mediante los ejes  $x$  y  $y$  y una recta que pasa por el punto  $(1, 2)$  (vea la figura).
- Escriba la longitud  $L$  de la hipotenusa como una función de  $x$ .
  - Utilice una herramienta de graficación para aproximar  $x$  de manera tal que la longitud de la hipotenusa sea un mínimo.
  - Determine los vértices del triángulo de tal forma que su área sea mínima.
24. **Área máxima** Determine el área del triángulo isósceles más grande que pueda inscribirse en un círculo de radio 6 (vea la figura).
- Resuelva escribiendo el área como una función de  $h$ .
  - Resuelva escribiendo el área en función de  $\alpha$ .
  - Identifique el tipo de triángulo de área máxima.

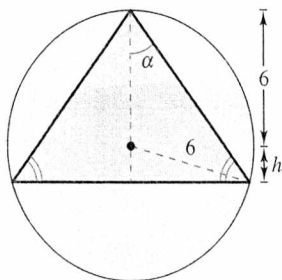


Figura para 24

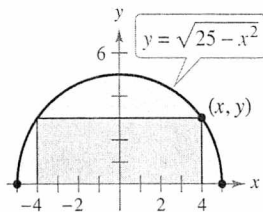


Figura para 25

25. **Área máxima** Un rectángulo está delimitado por el eje  $x$  y el semicírculo  $y = \sqrt{25 - x^2}$  (vea la figura). ¿Qué largo y ancho debe tener el rectángulo de manera que su área sea un máximo?
26. **Área máxima** Encuentre las dimensiones del rectángulo más grande que puede inscribirse en un semicírculo de radio  $r$  (vea el ejercicio 25).

27. **Análisis numérico, gráfico y analítico** Una sala de ejercicios tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo en cada extremo. Por la parte externa una pista de carreras de 200 metros delimita la sala.
- Dibuje una figura para representar el problema.  $x$  y  $y$  representen el largo y el ancho del rectángulo.
  - De manera analítica complete seis renglones de una tabla tal como la siguiente. (Se muestran los dos primeros renglones.) Utilice la tabla para estimar el área máxima de la región rectangular.

Largo, $x$	Ancho, $y$	Área, $xy$
10	$\frac{2}{\pi}(100 - 10)$	$(10)\frac{2}{\pi}(100 - 10) \approx 573$
20	$\frac{2}{\pi}(100 - 20)$	$(20)\frac{2}{\pi}(100 - 20) \approx 1019$

- Escriba el área  $A$  como una función de  $x$ .
- Utilice el cálculo para encontrar el punto crítico de la función del inciso (c) y determinar el valor máximo.
- Utilice una herramienta de graficación para representar la función en el inciso (c) y verificar el área máxima a partir de la gráfica.

28. **Análisis numérico, gráfico y analítico** Se va a diseñar un cilindro circular recto que pueda contener 22 pulgadas cúbicas de refresco (aproximadamente 12 onzas de fluido).
- En forma analítica complete seis renglones de una tabla como la siguiente. (Se muestran los dos primeros renglones.)

Radio, $r$	Altura	Área de la superficie, $S$
0.2	$\frac{22}{\pi(0.2)^2}$	$2\pi(0.2)\left[0.2 + \frac{22}{\pi(0.2)^2}\right] \approx 220.3$
0.4	$\frac{22}{\pi(0.4)^2}$	$2\pi(0.4)\left[0.4 + \frac{22}{\pi(0.4)^2}\right] \approx 111.0$

- Use una herramienta de graficación para generar renglones adicionales de la tabla. Utilice ésta para estimar el área superficial mínima. (Sugerencia: Use la característica *table* de la herramienta de graficación.)
- Escriba el área superficial  $S$  como una función de  $r$ .
- Utilice una herramienta de graficación para representar la función del inciso (c) y estimar el área superficial mínima a partir de la gráfica.
- Utilice cálculo para encontrar el punto crítico de la función en el inciso (c) y encontrar las dimensiones que producirán el área superficial mínima.

29. **Volumen máximo** Un paquete rectangular que se va a enviar por un servicio postal puede tener una longitud y un perímetro de un máximo de 108 pulgadas (vea la figura). Determine las dimensiones del paquete de volumen máximo que puede enviarse. (Suponga que la sección transversal es cuadrada.)

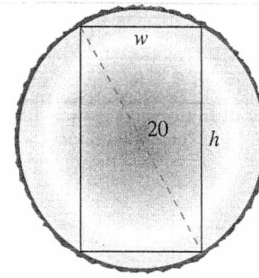
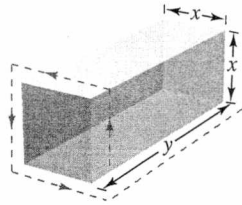


Figura para 37

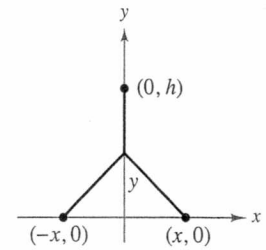


Figura para 38

30. **Volumen máximo** Vuelva a hacer el ejercicio 29 ahora para un paquete cilíndrico. (La sección transversal es circular.)

**DESARROLLO DE CONCEPTOS**

31. **Superficie y volumen** Una botella se champú tiene la forma de un cilindro circular recto. Como el área superficial de la botella no cambia cuando ésta se comprime, ¿es cierto que el volumen permanece invariable? Explique.

32. **Área y perímetro** El perímetro de un rectángulo es de 20 pies. De todas las dimensiones posibles, el área máxima es de 25 pies cuadrados cuando su largo y ancho son ambos de 5 pies. ¿Hay dimensiones que producirán un área mínima? Explique.

33. **Área superficial mínima** Un sólido se forma juntando dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto. El volumen total del sólido es de 14 cm<sup>3</sup>. Encuentre el radio del cilindro que produce el área superficial mínima.

34. **Costo mínimo** Un tanque industrial de la forma que se describe en el ejercicio 39 debe tener un volumen de 4000 pies cúbicos. Si el costo de fabricación de los hemisferios es, por pie cuadrado, el doble que el lateral, determine las dimensiones que minimizarán el costo.

35. **Área mínima** La suma de los perímetros de un triángulo equilátero y un cuadrado es igual a 10. Encuentre las dimensiones del triángulo y el cuadrado que producen el área total mínima.

36. **Área máxima** Se usarán 20 pies de alambre para formar dos figuras. En cada uno de los siguientes casos, ¿qué cantidad de alambre debe utilizarse en cada figura de manera que el área total encerrada sea máxima?

- (a) Triángulo equilátero y cuadrado
- (b) Cuadrado y pentágono regular
- (c) Pentágono regular y hexágono regular
- (d) Hexágono regular y círculo

¿Qué puede concluir a partir de este patrón? {Sugerencia: El área de un polígono rectangular con  $n$  lados de longitud  $x$  es  $A = (n/4)[\cot(\pi/n)]x^2$ }

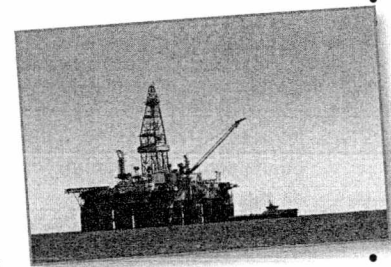
37. **Resistencia de una viga** Una viga de madera tiene una sección transversal rectangular de altura  $h$  y ancho  $w$  (vea la figura). La resistencia  $S$  de la viga es directamente proporcional al ancho y al cuadrado de la altura. ¿Cuáles son las dimensiones de la viga más fuerte que puede cortarse a partir de un leño redondo de 20 pulgadas de diámetro? (Sugerencia:  $S = kh^2w$ , donde  $k$  es la constante de proporcionalidad.)

Andriy Markov/Shutterstock.com

38. **Longitud mínima** Dos fábricas se localizan en las coordenadas  $(-x, 0)$  y  $(x, 0)$  con su suministro eléctrico ubicado en  $(0, h)$  (vea la figura). Determine  $y$  de manera tal que la longitud total de la línea de transmisión eléctrica desde el suministro eléctrico hasta las fábricas sea mínima.

••• 39. **Costo mínimo** •••••

Un pozo petrolero marino se encuentra a 2 kilómetros de la costa. La refinería está a 4 kilómetros por la costa. La instalación de la tubería en el océano es dos veces más cara que sobre tierra. ¿Qué trayectoria debe seguir la tubería para minimizar el costo?



40. **Iluminación** Una fuente luminosa se localiza sobre el centro de una mesa circular de 4 pies de diámetro (vea la figura). Encuentre la altura  $h$  de la fuente luminosa de modo tal que la iluminación  $I$  en el perímetro de la mesa máxima

$$I = \frac{k \text{ sen } \alpha}{s^2}$$

donde  $s$  es la altura oblicua,  $\alpha$  es el ángulo al cual la luz incide sobre la mesa y  $k$  es una constante.

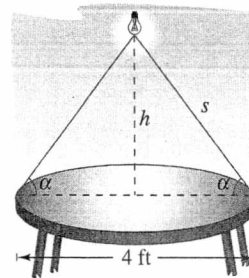


Figura para 40

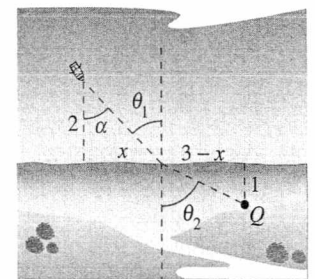


Figura para 41

41. **Tiempo mínimo** Un hombre se encuentra en un bote a 2 millas del punto más cercano a la costa. Se dirige al punto  $Q$ , localizado a 3 millas por la costa y a 1 milla tierra adentro (vea la figura). El hombre puede remar a 2 millas por hora y caminar a 4 millas por hora. ¿Hacia qué punto sobre la costa debe remar para llegar al punto  $Q$  en el menor tiempo?

42. **Tiempo mínimo** Las condiciones son las mismas que en el ejercicio 41 salvo que el hombre puede remar a  $v_1$  millas por hora y caminar a  $v_2$  millas por hora. Si  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son las magnitudes de los ángulos, muestre que el hombre llegará al punto  $Q$  en el menor tiempo cuando

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen } \theta_2}{v_2}$$

43. **Distancia mínima** Dibuje las gráficas de  $f(x) = 2 - 2 \text{ sen } x$  en el intervalo  $[0, \pi/2]$ .

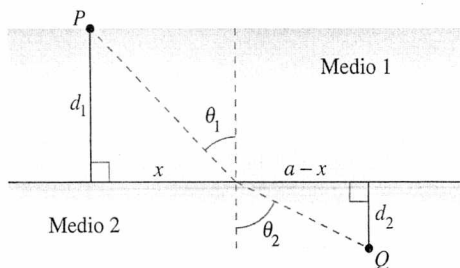
- Determine la distancia desde el origen a la intersección con el eje  $y$  y la distancia desde el origen a la intersección con el eje  $x$ .
- Escriba la  $d$  desde el origen a un punto sobre la gráfica de  $f$  como una función de  $x$ . Utilice una herramienta de graficación para representar  $d$  y encontrar la distancia mínima.
- Utilice cálculo y la función *zero* o *root* de una herramienta de graficación para encontrar el valor de  $x$  que minimiza la función  $d$  en el intervalo  $[0, \pi/2]$ . ¿Cuál es la distancia mínima?

(Proporcionado por Tim Chapell, Penn Valley Community College, Kansas City, MO)

44. **Tiempo mínimo** Cuando ondas luminosas, que viajan en un medio transparente, inciden sobre la superficie de un segundo medio transparente, cambian de dirección. Este cambio de dirección recibe el nombre de *refracción* y se define mediante la **ley de Snell de la refracción**,

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen } \theta_2}{v_2}$$

donde  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son las magnitudes de los ángulos que se muestran en la figura y  $v_1$  y  $v_2$  son las velocidades de la luz en los dos medios. Demuestre que este problema es equivalente al del ejercicio 42, y que las ondas luminosas que viajan de  $P$  a  $Q$  siguen la trayectoria de tiempo mínimo.



45. **Volumen máximo** Un sector con ángulo central  $\theta$  se corta de un círculo de 12 pulgadas de radio (ver la figura), y los bordes del sector se juntan para formar un cono. Determine la magnitud de  $\theta$  tal que el volumen del cono sea un máximo.

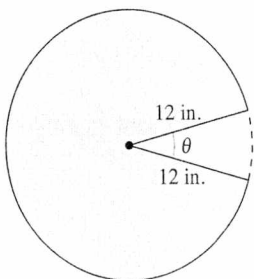


Figura para 56

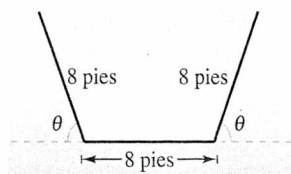


Figura para 57

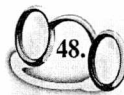
46. **Análisis numérico, gráfico y analítico.** Las secciones transversales de un canal de irrigación son trapecios isósceles de los cuales tres lados miden 8 pies de largo (vea la figura). Determine el ángulo de elevación  $\theta$  de los lados de manera tal que el área de la sección transversal sea un máximo, completando lo siguiente.

- Complete analíticamente seis renglones de una tabla como la siguiente. (Se muestran los dos primeros renglones.)

Base 1	Base 2	Altitud	Área
8	$8 + 16 \cos 10^\circ$	$8 \text{ sen } 10^\circ$	$\approx 22.1$
8	$8 + 16 \cos 20^\circ$	$8 \text{ sen } 20^\circ$	$\approx 42.5$

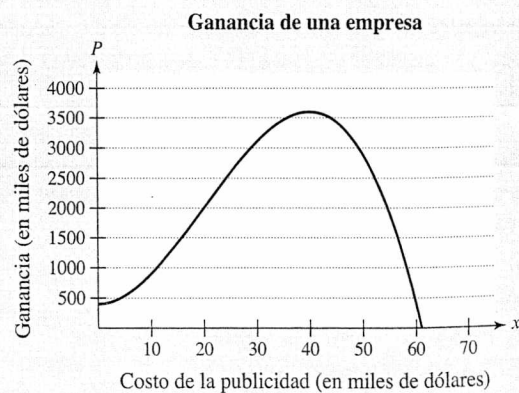
- Utilice una herramienta de graficación para generar renglones adicionales de la tabla y estimar el área de sección transversal máxima. (Sugerencia: Utilice la función de tabla de la herramienta de graficación.)
- Escriba el área de sección transversal  $A$  como una función de  $\theta$ .
- Utilice cálculo para determinar el punto crítico de la función del inciso (c) y encontrar el ángulo que producirá la máxima área de la sección transversal.
- Utilice una herramienta de graficación para representar la función del inciso (c) y verificar el área máxima de la sección transversal.

47. **Utilidad máxima (beneficio máximo)** Suponga que la cantidad de dinero depositada en un banco es proporcional al cuadrado de la tasa de interés que paga el banco por este dinero. Además el banco puede reinvertir esta suma a 12%. Determine la tasa de interés que el banco debe pagar para maximizar la utilidad (el beneficio). (Utilice la fórmula de interés simple.)



48.

**¿CÓMO LO VE?** La gráfica muestra la ganancia (en miles de dólares) de una empresa en términos de su costo de publicidad (en miles de dólares).



- Estime el intervalo en el que la utilidad está aumentando.
- Estime el intervalo en el que la utilidad está disminuyendo.
- Estime la cantidad de dinero que la empresa debe gastar en publicidad para obtener una utilidad máxima.
- El punto de rendimiento decreciente es el punto en el que la tasa de crecimiento de la función de utilidad comienza a declinar. Estime el punto de rendimiento decreciente.

Distro...  
siste...  
las f...  
(4, 1...  
y =...  
es d...  
líne...  
49.

49.

50.



Fig

51.

52.

**Distancia mínima** En los ejercicios 49-51, considere un centro de distribución de combustible localizado en el origen del sistema rectangular de coordenadas (unidades en millas; vea las figuras). El centro suministra tres fábricas con coordenadas (4, 1), (5, 6) y (10, 3). Los camiones de reparto siguen la línea  $y = mx$  y líneas de alimentación a las tres fábricas. El objetivo es determinar  $m$  de forma que la suma de las longitudes de las líneas sea mínima.

49. Minimice la suma de los cuadrados de las longitudes de las líneas de alimentación dada por

$$S_1 = (4m - 1)^2 + (5m - 6)^2 + (10m - 3)^2.$$

49. Halle la ecuación de la ruta recta de los camiones mediante este método y después determine la suma de las longitudes de las líneas de alimentación.

50. Minimice la suma de los valores absolutos de las longitudes de las líneas de alimentación dada por

$$S_2 = |4m - 1| + |5m - 6| + |10m - 3|.$$

Encuentre la ecuación para la ruta recta de los camiones mediante este método y a continuación determine la suma de las longitudes de las líneas de alimentación. (Sugerencia: Utilice una herramienta de graficación para representar la función  $S_2$  y aproximar el punto crítico requerido.)

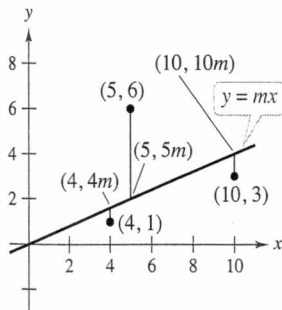


Figura para 49

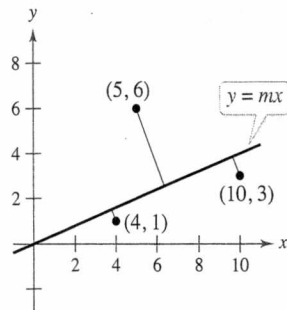


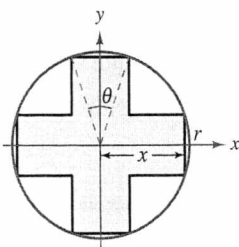
Figura para 50

51. Minimice la suma de las distancias perpendiculares desde la línea troncal a las fábricas dadas por

$$S_3 = \frac{|4m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{|5m - 6|}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{|10m - 3|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Halle la ecuación de la recta mediante este método y a continuación determine la suma de las longitudes de las líneas de alimentación. (Sugerencia: Utilice una herramienta de graficación para representar la función  $S_3$  y aproximar el número crítico requerido.)

52. **Área máxima** Considere una cruz simétrica inscrita en un círculo de radio  $r$  (vea la figura).



- Escriba el área  $A$  de la cruz como una función de  $x$  y determine el valor de  $x$  que maximiza el área.
- Escriba el área  $A$  de la cruz como una función de  $\theta$  que maximiza el área.
- Demuestre que los puntos críticos de los incisos (a) y (b) proceden de la misma área máxima. ¿Cuál es esta área?

**DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM**

53. Determine el valor máximo de  $f(x) = x^3 - 3x$  en un conjunto de números reales  $x$  que satisfacen  $x^4 + 36 \leq 13x^2$ . Explicar el razonamiento.

54. Encuentre el valor máximo de

$$\frac{(x + 1/x)^6 - (x^6 + 1/x^6) - 2}{(x + 1/x)^3 + (x^3 + 1/x^3)} \text{ para } x > 0.$$

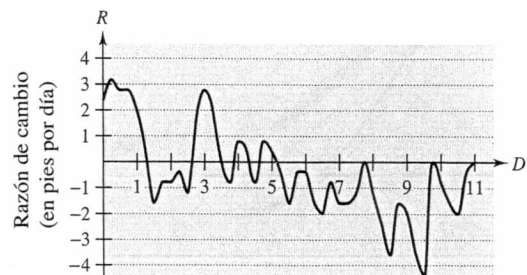
Estos problemas fueron preparados por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

**PROYECTO DE TRABAJO**

**Río Connecticut**

Cada vez que el río de Connecticut llega a un nivel de 105 metros sobre el nivel del mar, dos operadores de la estación de control de inundaciones en Northampton, Massachusetts, inician una vigilancia horaria del río. Cada 2 horas, verifican la altura del mismo utilizando una escala marcada en décimas de un pie, y registran los datos en una bitácora. En la primavera de 1996, la vigilancia de la crecida se efectuó del 4 de abril, cuando el río alcanza 105 pies y se elevaba a 0.2 pies por hora, hasta el 25 de abril, cuando el nivel regresó a los 105 pies. Entre estas fechas, los registros muestran que el río creció y bajó varias veces, en un punto cercano a la marca de 115 pies. Si el río hubiera alcanzado 115 pies, la ciudad habría tenido que cerrar la autopista Mount Tom Road (Ruta 5, al sur de Northampton).

La gráfica siguiente muestra la razón de cambio del nivel del río durante una parte de la vigilancia de la crecida. Utilice la gráfica para responder cada pregunta



Día (0 ↔ 12:01 a.m. Abril 14)

- ¿En qué fecha el río creció con mayor rapidez? ¿Cómo lo puede saber?
- ¿En qué fecha el río tuvo un descenso más rápido? ¿Cómo lo puede saber?
- Hubo dos fechas seguidas en las que el río creció, después bajó, después creció de nuevo en el transcurso del día. ¿Qué días ocurrió lo anterior y cómo lo puede determinar?
- Un minuto después de la medianoche, el 14 de abril, el nivel del río era 111.0 pies. Estime la altura 24 horas después y 48 horas más tarde. Explique cómo se efectuaron las estimaciones.
- El río alcanzó su valor más alto en 114.4 pies. ¿En qué fecha ocurrió lo anterior?

(Propuesto por Mary Murphy, Smith College, Northampton, MA)

# 5.7 Método de Newton

■ Aproximar un cero de una función utilizando el método de Newton.

## Método de Newton

En esta sección estudiará una técnica para aproximar los ceros (raíces) reales de una función. La técnica recibe el nombre de **método de Newton**, y utiliza rectas tangentes para aproximar la gráfica de la función cerca de sus intersecciones con el eje  $x$ .

Para ver cómo funciona el método de Newton, considere una función  $f$  que es continua en el intervalo  $[a, b]$  y derivable en el intervalo  $(a, b)$ . Si  $f(a)$  y  $f(b)$  difieren en signo, entonces, por el teorema del valor intermedio,  $f$  debe tener al menos un cero en el intervalo  $(a, b)$ . Para estimar este cero, elija

$$x = x_1 \quad \text{Primera estimación}$$

como se muestra en la figura 5.48(a). El método de Newton se basa en la suposición de que la gráfica de  $f$  y la recta tangente en  $(x_1, f(x_1))$  cruzan ambas por el eje  $x$  en *casi* el mismo punto. Debido a que es muy fácil calcular la intersección con el eje  $x$  de esta recta tangente, es posible utilizarla como una segunda estimación (y, usualmente, mejor) del cero de  $f$ . La recta tangente pasa por el punto con una pendiente de  $f'(x_1)$ . En forma punto-pendiente, la ecuación de la recta tangente es  $(x_1, f(x_1))$  con una pendiente de  $f'(x_1)$ . En la forma de punto-pendiente, la ecuación de la recta tangente es

$$\begin{aligned} y - f(x_1) &= f'(x_1)(x - x_1) \\ y &= f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1). \end{aligned}$$

Haciendo  $y = 0$  y despejando  $x$ , obtiene

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

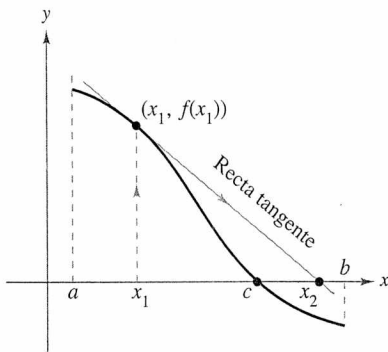
Por tanto, a partir de la estimación inicial  $x_1$ , se obtiene una nueva estimación

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \quad \text{Segunda estimación [vea la figura 5.48(b)].}$$

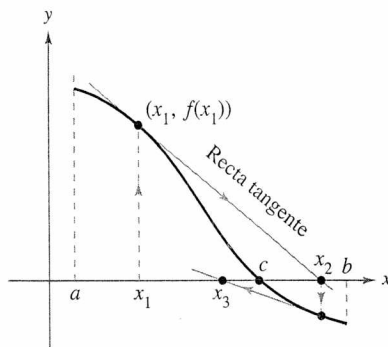
Usted puede mejorar  $x_2$  y calcular aún una tercera estimación

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \quad \text{Tercera estimación}$$

La aplicación repetida de este proceso se denomina método de Newton.



(a)



(b)

La intersección con el eje  $x$  de la recta tangente aproxima el cero de  $f$ .

Figura 5.48

### MÉTODO DE NEWTON

Isaac Newton fue el primero que describió el método para aproximar los ceros reales de una función en su texto *Method of Fluxions*. Aunque el libro lo escribió en 1671, no se publicó hasta 1736. Entre tanto, en 1690, Joseph Raphson (1648-1715) publicó un artículo que describía un método para aproximar los ceros reales de una función que era muy similar a la de Newton. Por esta razón, el método a veces recibe el nombre de método de Newton-Raphson.

### Método de Newton para aproximar los ceros de una función

Sea  $f(c) = 0$ , donde  $f$  es derivable en un intervalo abierto que contiene a  $c$ . Entonces, para aproximar  $c$ , se siguen los siguientes pasos.

1. Haga una estimación inicial  $x_1$  que es cercana a  $c$ . (Una gráfica es útil.)
2. Determine una nueva aproximación.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

3. Si  $|x_n - x_{n+1}|$  está dentro de la precisión deseada, deje que  $x_{n+1}$  sirva como la aproximación final. En otro caso, regrese al paso dos y calcule una nueva aproximación.

Cada aplicación sucesiva de este procedimiento recibe el nombre de **iteración**.

y  
-1

La p  
de N  
Figu

f(x)

Desp  
de N  
la ex  
Figu

**EJEMPLO 1**

**Aplicar el método de Newton**

**COMENTARIO** Para muchas funciones, con unas pocas iteraciones del método de Newton, se conseguirán errores de aproximación muy pequeños, como muestra el ejemplo 1.

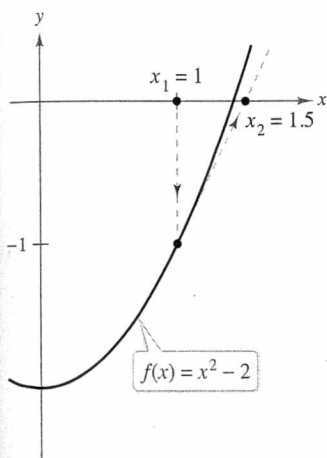
Calcule tres iteraciones del método de Newton para aproximar un cero de  $f(x) = x^2 - 2$ . Utilice  $x_1 = 1$  como la estimación inicial.

**Solución** Como  $f(x) = x^2 - 2$ , tiene que  $f'(x) = 2x$ , y el proceso iterativo está dado por la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

Los cálculos para tres iteraciones se muestran en la tabla.

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	1.000000	-1.000000	2.000000	-0.500000	1.500000
2	1.500000	0.250000	3.000000	0.083333	1.416667
3	1.416667	0.006945	2.833334	0.002451	1.414216
4	1.414216				



La primera iteración del método de Newton.

Figura 5.49

**EJEMPLO 2**

**Aplicar el método de Newton**

Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Utilice el método de Newton para aproximar los ceros de

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1.$$

Continúe las iteraciones hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran por menos de 0.0001.

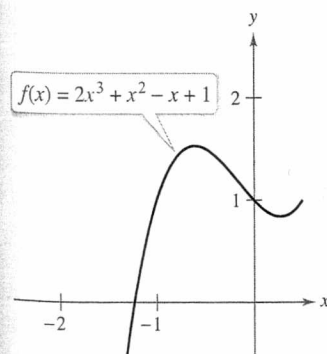
**Solución** Comience dibujando una gráfica de  $f$ , como se muestra en la figura 5.50. A partir de la gráfica, puede observar que la función tiene solo un cero, el cual ocurre cerca de  $x = -1.2$ . A continuación, derive  $f$  y deduzca la fórmula iterativa.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2x_n^3 + x_n^2 - x_n + 1}{6x_n^2 + 2x_n - 1}$$

Los cálculos se muestran en la tabla.

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	-1.20000	0.18400	5.24000	0.03511	-1.23511
2	-1.23511	-0.00771	5.68276	-0.00136	-1.23375
3	-1.23375	0.00001	5.66533	0.00000	-1.23375
4	-1.23375				

Como dos aproximaciones sucesivas difieren por menos del valor requerido de 0.0001, se puede estimar el cero de  $f$  como  $-1.23375$ .



Después de tres iteraciones del método de Newton, el cero de  $f$  se aproxima hasta la exactitud deseada.

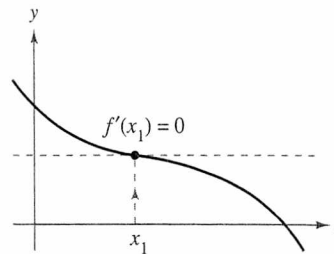
Figura 5.50

**PARA INFORMACIÓN ADICIONAL**

Para más información sobre cuando el método de Newton falla, consulte el artículo "No Fooling! Newton's Method Can Be Fooled", de Peter Horton, en *Mathematics Magazine*. Para consultar este artículo, consulte *MathArticles.com*.

Cuando, como en los ejemplos 1 y 2, las aproximaciones se acercan a un límite, se dice que la sucesión  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  **converge**. Además si el límite es  $c$ , puede demostrarse que  $c$  debe ser un cero de  $f$ .

El método de Newton no siempre produce una sucesión convergente. La figura 5.51 ilustra una situación así. Debido a que el método de Newton implica la división entre  $f'(x_n)$ , es claro que fallará si la derivada es cero para cualquier  $x_n$  en la sucesión. Cuando existe este problema, es fácil superarlo eligiendo un valor diferente para  $x_1$ . Otra forma en la que el método de Newton puede fallar se muestra en el siguiente ejemplo.



El método de Newton no converge si  $f'(x_n) = 0$ .  
**Figura 5.51**

**EJEMPLO 3** Ejemplo en el que el método de Newton falla

La función  $f(x) = x^{1/3}$  no es derivable en  $x = 0$ . Demuestre que el método de Newton no converge al utilizar  $x_1 = 0.1$ .

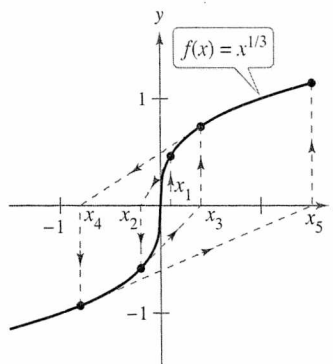
**Solución** Como  $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ , la fórmula iterativa es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{1/3}}{\frac{1}{3}x_n^{-2/3}} = x_n - 3x_n = -2x_n.$$

Los cálculos se presentan en la tabla. Esta tabla y la figura 5.52 indican que  $x_n$  continúa creciendo en magnitud a medida que  $n \rightarrow \infty$ , y por ello el límite de la sucesión no existe.

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	0.10000	0.46416	1.54720	0.30000	-0.20000
2	-0.20000	-0.58480	0.97467	-0.60000	0.40000
3	0.40000	0.73681	0.61401	1.20000	-0.80000
4	-0.80000	-0.92832	0.3680	-2.40000	1.60000

..... ▷  
**COMENTARIO** En el ejemplo 3, la estimación inicial  $x_1 = 0.1$  no produce una sucesión convergente. Intente demostrar que el método de Newton también falla para cualquier otra elección de  $x_1$  (distinta del cero real).



El método de Newton no converge para todo valor de  $x$  distinto del cero real de  $f$ .  
**Figura 5.52**

NIE  
 Au  
 de  
 en  
 abs  
 Co  
 pa  
 un

Es posible demostrar que una condición suficiente para producir la convergencia del método de Newton a un cero de  $f$  es que

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1 \quad \text{Condición para convergencia}$$

en un intervalo abierto que contenga al cero. En el caso del ejemplo 1, esta demostración produce

$$f(x) = x^2 - 2, \quad f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2,$$

y

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| = \left| \frac{(x^2 - 2)(2)}{4x^2} \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \right|. \quad \text{Ejemplo 1}$$

En el intervalo (1, 3), esta cantidad es menor que 1 y, en consecuencia, se garantiza la convergencia del método de Newton. Por otro lado, en el ejemplo 3, tiene

$$f(x) = x^{1/3}, \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$$

y

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| = \left| \frac{x^{1/3}(-2/9)(x^{-5/3})}{(1/9)(x^{-4/3})} \right| = 2 \quad \text{Ejemplo 3}$$

que no es menor que 1 para ningún valor de  $x$ , por lo que el método de Newton no convergerá.

Ha aprendido varias técnicas para encontrar los ceros de las funciones. Los ceros de algunas funciones, como

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

pueden determinarse mediante técnicas algebraicas simples, como la factorización. Los ceros de las otras funciones, como

$$f(x) = x^3 - x + 1$$

no pueden determinarse mediante métodos algebraicos *elementales*. Esta función particular solo tiene un cero real, y utilizando técnicas algebraicas más avanzadas puede determinar que el cero es

$$x = -\sqrt[3]{\frac{3 - \sqrt{23/3}}{6}} - \sqrt[3]{\frac{3 + \sqrt{23/3}}{6}}.$$

Como la solución *exacta* se escribe en términos de raíces cuadradas y raíces cúbicas, ésta se denomina **solución por radicales**.

La determinación de las soluciones radicales de una ecuación polinomial es uno de los problemas fundamentales del álgebra. El primero de este tipo de resultados es la fórmula cuadrática, que data por lo menos de los tiempos babilónicos. La fórmula general para los ceros de una función cúbica se desarrolló mucho después. En el siglo XVI, un matemático italiano, Jerome Cardan, publicó un método para encontrar soluciones radicales a ecuaciones cúbicas y de cuarto grado. Después, durante 300 años, el problema de encontrar una fórmula general para el quinto grado permaneció sin resolver. Por último, en el siglo XIX, el problema fue resuelto de manera independiente por dos jóvenes matemáticos. Niels Henrik Abel, matemático noruego, y Evariste Galois, un matemático francés, demostraron que no es posible resolver una ecuación polinomial *general* de quinto (o de mayor) grado por medio de radicales. Desde luego, se pueden resolver ecuaciones particulares de quinto grado, como

$$x^5 - 1 = 0$$

pero Abel y Galois fueron capaces de demostrar que no existe una solución general por *radicales*.



**NIELS HENRIK ABEL (1802-1829)**



**EVARISTE GALOIS (1811-1832)**

Aunque las vidas tanto de Abel como de Galois fueron breves, su trabajo en el campo de análisis y el álgebra abstracta tuvieron un gran alcance. Consulte *LarsonCalculus.com* para leer una biografía de cada uno de estos matemáticos.

# 5.7 Ejercicios

Consulte [CalcChat.com](http://CalcChat.com) para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Usar el método de Newton** En los ejercicios 1-4, complete dos iteraciones del método de Newton para la función utilizando la estimación inicial indicada.

1.  $f(x) = x^2 - 5$ ,  $x_1 = 2.2$
2.  $f(x) = x^3 - 3$ ,  $x_1 = 1.4$
3.  $f(x) = \cos x$ ,  $x_1 = 1.6$
4.  $f(x) = \tan x$ ,  $x_1 = 0.1$

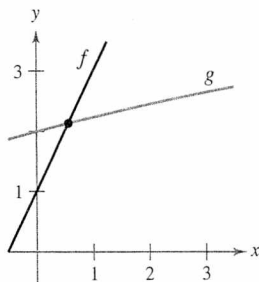
**Usar el método de Newton** En los ejercicios 5-14, aproxime el (los) cero(s) de la función. Utilice el método de Newton y continúe el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran menos de 0.001. A continuación, encuentre el (los) cero(s) utilizando una herramienta de graficación y compare los resultados.

5.  $f(x) = x^3 + 4$
6.  $f(x) = 2 - x^3$
7.  $f(x) = x^3 + x - 1$
8.  $f(x) = x^5 + x - 1$
9.  $f(x) = 5\sqrt{x-1} - 2x$
10.  $f(x) = x - 2\sqrt{x+1}$
11.  $f(x) = x^3 - 3.9x^2 + 4.79x - 1.881$
12.  $f(x) = x^4 + x^3 - 1$
13.  $f(x) = 1 - x + \sin x$
14.  $f(x) = x^3 - \cos x$

**Encontrar el (los) punto(s) de intersección** En los ejercicios 15-18, aplique el método de Newton para aproximar el (los) valor(es) de  $x$  del(los) punto(s) indicado(s) de intersección de las dos gráficas. Continúe el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran menos de 0.001. [Sugerencia: Sea  $h(x) = f(x) - g(x)$ .]

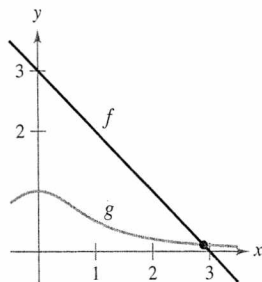
15.  $f(x) = 2x + 1$

$g(x) = \sqrt{x+4}$



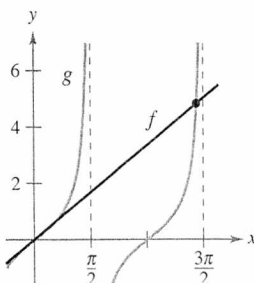
16.  $f(x) = 3 - x$

$g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$



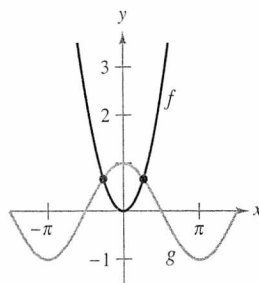
17.  $f(x) = x$

$g(x) = \tan x$



18.  $f(x) = x^2$

$g(x) = \cos x$



19. Regla de la mecánica La regla de la mecánica para aproximar  $\sqrt{a}$ ,  $a > 0$ , es

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

donde  $x_1$  es una aproximación de  $\sqrt{a}$ .

- (a) Utilice el método de Newton y la función  $f(x) = x^2 - a$  para derivar la regla de la mecánica.
- (b) Utilizar la regla de la mecánica para aproximar  $\sqrt{5}$  y  $\sqrt{7}$  hasta tres decimales.

20. Aproximar por radicales

- (a) Utilice el método de Newton y la función  $f(x) = x^n - a$  para obtener una regla general a la aproximación  $x = \sqrt[n]{a}$ .
- (b) Utilice la regla general que encontró en el inciso (a) para aproximar  $\sqrt[4]{6}$  y  $\sqrt[3]{15}$  hasta tres decimales.

**Falla del método de Newton** En los ejercicios 21 y 22, aplique el método de Newton utilizando la estimación inicial indicada y explique por qué falla el método.

21.  $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 1$ ,  $x_1 = 1$

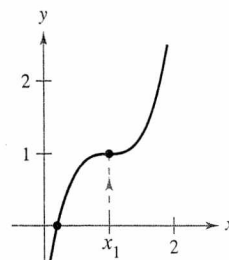


Figura para 21

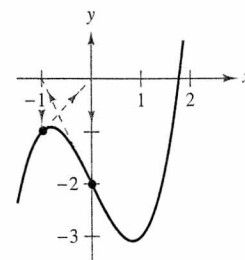


Figura para 22

22.  $y = x^3 - 2x - 2$ ,  $x_1 = 0$

**Punto fijo** En los ejercicios 23 y 24, aproxime el punto fijo de la función hasta dos lugares decimales. [Un punto fijo  $x_0$  de una función  $f$  es un valor de  $x$  tal que  $f(x_0) = x_0$ .]

23.  $f(x) = \cos x$
24.  $f(x) = \cot x$ ,  $0 < x < \pi$

25. Aproximaciones recíprocas Use el método de Newton para demostrar que la ecuación

$$x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$$

puede utilizarse para aproximar  $1/a$  si  $x_1$  es una estimación inicial del recíproco de  $a$ . Observe que este método de aproximación de recíprocos utiliza solo las operaciones de resta y multiplicación.

(Sugerencia: Considere

$$f(x) = \frac{1}{x} - a.)$$

26. Aproximaciones recíprocas Utilice el resultado del ejercicio anterior para aproximar (a)  $\frac{1}{3}$  y (b)  $\frac{1}{11}$  hasta tres decimales.

D  
27  
28.  
29.  
30.  
Usar  
cluyer  
esta u  
aprox  
31. E  
f  
32. N  
e  
n  
C  
¿

**DESARROLLO DE CONCEPTOS**

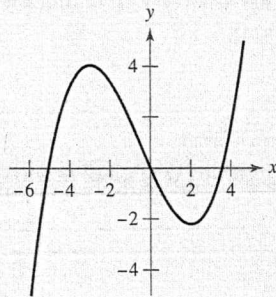
**27. Usar el método de Newton** Considere la función  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ .

- (a) Utilice una herramienta de graficación para representar  $f$ .
- (b) Utilice el método de Newton con  $x_1 = 1$  como estimación inicial.
- (c) Repita el inciso (b) utilizando  $x_1 = \frac{1}{4}$  como estimación inicial y observe que el resultado es diferente.
- (d) Para comprender por qué los resultados de los incisos (b) y (c) son diferentes, dibuje las rectas tangentes a la gráfica de  $f$  en los puntos  $(1, f(1))$  y  $(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4}))$ . Determine la intersección con el eje  $x$  de cada recta tangente y compare las intersecciones con la primera iteración del método de Newton utilizando las estimaciones iniciales respectivas.
- (e) Escriba un breve párrafo en el que resuma la forma en que funciona el método de Newton. Utilice los resultados de este ejercicio para describir por qué es importante seleccionar con cuidado la estimación inicial.

**28. Usar el método de Newton** Repita los pasos en el ejercicio 27 para la función  $f(x) = \sin x$  con estimaciones iniciales de  $x_1 = 1.8$  y  $x_1 = 3$ .

**29. Método de Newton** En sus propias palabras y utilizando un dibujo, describa el método de Newton para aproximar los ceros de una función.

**30. ¿CÓMO LO VE?** ¿Para qué valor(es) el método de Newton falla al converger para la función que se muestra en la gráfica? Explique su razonamiento.



**Usar el método de Newton** En los ejercicios 31-38, se incluyen algunos problemas típicos de las secciones previas de esta unidad. En cada caso, utilice el método de Newton para aproximar la solución.

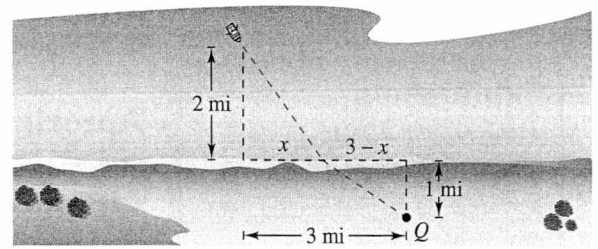
**31. Distancia mínima** Encuentre sobre la gráfica de  $f(x) = 4 - x^2$  el punto más cercano al punto  $(1, 0)$ .

**32. Medicina** La concentración  $C$  de un compuesto químico en el flujo sanguíneo  $t$  horas después de la inyección en el tejido muscular está dada por

$$C = \frac{3t^2 + t}{50 + t^3}$$

¿Cuándo es más grande la concentración?

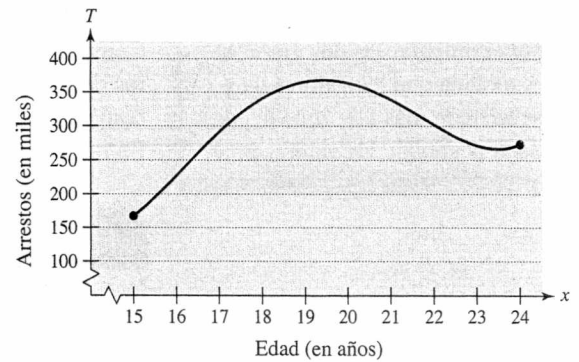
**33. Tiempo mínimo** Se encuentra en un bote a 2 millas del punto más cercano sobre la costa (vea la figura) y se dirige al punto  $Q$ , que se ubica a 3 millas por la costa y a 1 milla tierra adentro. Tiene la posibilidad de remar a 3 millas por hora y de caminar a 4 millas por hora. ¿Hacia qué punto sobre la costa debe remar para llegar a  $Q$  en el tiempo mínimo?



**34. Crimen** El número total de arrestos  $T$  (en miles) para hombres de 15 a 24 años en 2010 está aproximado por el modelo.

$$T = 0.2988x^4 - 22.625x^3 + 628.49x^2 - 7565.9x + 33,478$$

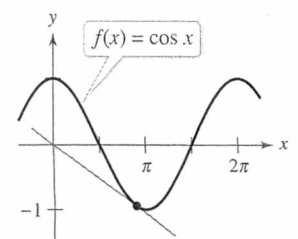
donde  $x$  es la edad en años (vea la figura). Aproxime las dos edades que completen un total de 225 arrestos. (Fuente: U.S. Department of Justice)



**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 35-38, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

- 35. Los ceros de  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  coinciden con los ceros de  $p(x)$ .
- 36. Si los coeficientes de una función polinomial son todos positivos, entonces el polinomio no tiene ceros positivos.
- 37. Si  $f(x)$  es un polinomio cúbico tal que  $f'(x)$  nunca es cero, entonces cualquier estimación inicial forzará a que el método de Newton converja al cero de  $f$ .
- 38. Las raíces de  $\sqrt{f(x)} = 0$  coinciden con las raíces de  $f(x) = 0$ .
- 39. **Rectas tangentes** La gráfica de  $f(x) = -\sin x$  tiene un número infinito de rectas tangentes que pasan por el origen. Utilice el método de Newton para aproximar la pendiente de la recta tangente que tenga la pendiente más grande hasta tres lugares decimales.

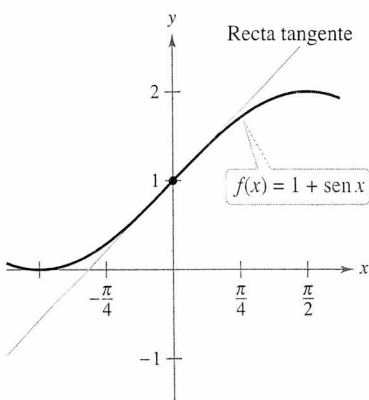
**40. Punto de tangencia** En la figura se muestra la gráfica de  $f(x) = -\cos x$  y una recta tangente de  $f$  que pasa por el origen. Encuentre las coordenadas del punto de tangencia con una aproximación de tres decimales.



# 5.8 Diferenciales

## Exploración

**Aproximación mediante la recta tangente** Use una herramienta de graficación para representar  $f(x) = x^2$ . En la misma ventana de observación, represente la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(1, 1)$ . Realice un doble acercamiento en el punto de tangencia. ¿La herramienta de graficación distingue las dos gráficas? Utilice la característica *trace* para comparar las dos gráficas. A medida que los valores de  $x$  se acercan más a 1, ¿qué puede decir acerca de los valores de  $y$ ?



La aproximación de la recta tangente de  $f$  en el punto  $(0, 1)$ .

Figura 5.53

- Entender el concepto de una aproximación por medio de una recta tangente.
- Comparar el valor de la diferencial,  $dy$ , con el cambio real en  $y$ ,  $\Delta y$ .
- Estimar un error propagado utilizando una diferencial.
- Encontrar la diferencial de una función utilizando fórmulas de derivación.

## Aproximaciones por recta tangente

El método de Newton (sección 5.7) es un ejemplo del uso de una recta tangente a una gráfica para aproximar la gráfica. En esta sección estudiará otras situaciones en las cuales la gráfica de la función puede aproximarse mediante una línea recta.

Para iniciar, considere una función  $f$  que es derivable en  $c$ . La ecuación de la recta tangente en el punto  $(c, f(c))$  está dada por

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

$$y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

y es llamada **aproximación por una recta tangente** (o **aproximación lineal**) de  $f$  en  $c$ . Como  $c$  es una constante,  $y$  es una función lineal de  $x$ . Además, restringiendo los valores de  $x$  de modo que sean suficientemente cercanos a  $c$ , puede utilizar los valores de  $y$  como aproximaciones (hasta cualquier precisión deseada) de los valores de la función  $f$ . En otras palabras, cuando  $x$  tiende a  $c$ , el límite de  $y$  es  $f(c)$ .

### EJEMPLO 1

### Usar la aproximación por una recta tangente

•••► Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Determine la aproximación por una recta tangente de  $f(x) = 1 + \text{sen } x$  en el punto  $(0, 1)$ . Después, utilice una tabla para comparar los valores  $y$  de la función lineal con los de  $f(x)$  en un intervalo abierto que contenga a  $x = 0$ .

**Solución** La derivada de  $f$  es

$$f'(x) = \cos x.$$

Primera derivada

Por tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(0, 1)$  es

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0)$$

$$y = 1 + (1)(x - 0)$$

$$y = 1 + x.$$

Aproximación por la recta tangente

La tabla compara los valores de  $y$  dados por esta aproximación lineal con los valores de  $f(x)$  cerca de  $x = 0$ . Observe que cuanto más cercano es  $x$  a 0, mejor es la aproximación. Esta conclusión se refuerza por medio de la gráfica que se muestra en la figura 5.53.

$x$	-0.5	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	0.5
$f(x) = 1 + \text{sen } x$	0.521	0.9002	0.9900002	1	1.0099998	1.0998	1.479
$y = 1 + x$	0.5	0.9	0.99	1	1.01	1.1	1.5

**COMENTARIO** Asegúrese de ver que esta aproximación lineal de  $f(x) = 1 + \text{sen } x$  depende del punto de tangencia. En un punto diferente sobre la gráfica de  $f$ , se obtendría una aproximación diferente de la recta tangente.



Cuan  $\Delta y =$  aprox **Figur**

y =



El ca: por la **Figur**

### Diferenciales

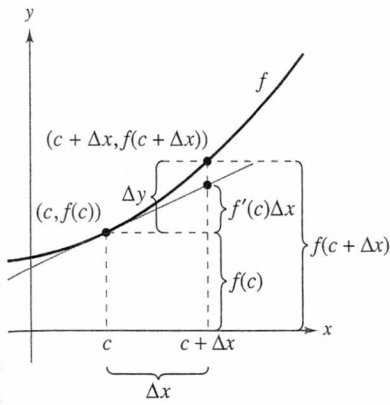
Cuando la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(c, f(c))$

$$y = f(c) + f'(c)(x - c) \quad \text{Recta tangente en } (c, f(c))$$

se usa como una aproximación de la gráfica de  $f$ , la cantidad  $x - c$  recibe el nombre de cambio en  $x$ , y se denota mediante  $\Delta x$ , como se muestra en la figura 5.54. Cuando  $\Delta x$  es pequeña, el cambio en  $y$  (denotado por  $\Delta y$ ) puede aproximarse como se muestra.

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(c + \Delta x) - f(c) && \text{Cambio real en } y \\ &\approx f'(c)\Delta x && \text{Cambio aproximado en } y \end{aligned}$$

Para una aproximación de este tipo la cantidad  $\Delta x$  tradicionalmente se denota mediante  $dx$ , recibe el nombre de la **diferencial de  $x$** . La expresión  $f'(x) dx$  se denota por  $dy$ , y se denomina **diferencial de  $y$** .



Cuando  $\Delta x$  es pequeña,  $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$  es aproximada por  $f'(c)\Delta x$ .

Figura 5.54

#### Definición de diferenciales

Sea  $y = f(x)$  que representa una función que es derivable en un intervalo abierto que contiene a  $x$ . La **diferencial de  $x$**  (denotada por  $dx$ ) es cualquier número real distinto de cero. La **diferencial de  $y$**  (denotada por  $dy$ ) es

$$dy = f'(x) dx.$$

En muchos tipos de aplicaciones, la diferencial de  $y$  puede utilizarse como una aproximación del cambio en  $y$ . Esto es

$$\Delta y \approx dy \quad \text{o} \quad \Delta y \approx f'(x) dx.$$

#### EJEMPLO 2 Comparar $\Delta y$ y $dy$

Sea  $y = x^2$ . Determine  $dy$  cuando  $x = 1$  y  $dx = 0.01$ . Compare este valor con  $\Delta y$  para  $x = 1$  y  $\Delta x = 0.01$ .

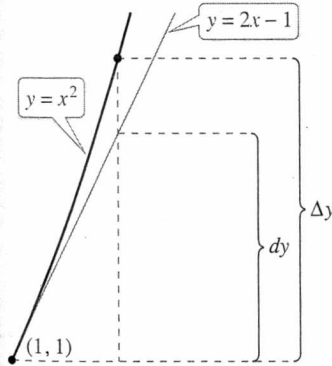
**Solución** Como  $y = f(x) = x^2$ , se tiene  $f'(x) = 2x$ , y la diferencial  $dy$  está dada por

$$dy = f'(x) dx = f'(1)(0.01) = 2(0.01) = 0.02. \quad \text{Diferencial de } y$$

Ahora, utilizando  $\Delta x = 0.01$ , el cambio en  $y$  es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(1.01) - f(1) = (1.01)^2 - 1^2 = 0.0201.$$

La figura 5.55 muestra la comparación geométrica de  $dy$  y  $\Delta y$ . Intente comparar otros valores de  $dy$  y  $\Delta y$ . Verá que los valores se aproximan cada vez más entre sí cuando  $dx$  (o  $\Delta x$ ), tiende a 0.



El cambio en  $y$ ,  $\Delta y$ , se aproxima por la diferencial de  $y$ ,  $dy$ .

Figura 5.55

En el ejemplo 2, la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = x^2$  en  $x = 1$  es

$$y = 2x - 1. \quad \text{Recta tangente a la gráfica de } f \text{ en } x = 1.$$

Para valores de  $x$  cercanos a 1, esta recta es cercana a la gráfica de  $f$ , como se muestra en la figura 5.53 y en la tabla.

$x$	0.5	0.9	0.99	1	1.01	1.1	1.5
$f(x) = x^2$	0.25	0.81	0.9801	1	1.0201	1.21	2.25
$y = 2x - 1$	0	0.8	0.98	1	1.02	1.2	2

## Propagación del error

Los físicos y los ingenieros tienden a hacer un uso libre de las aproximaciones de  $\Delta y$  mediante  $dy$ . Una forma en la que esto sucede en la práctica, es al estimar los errores propagados por los aparatos (dispositivos) de medición. Por ejemplo, si  $x$  denota el valor medido de una variable y  $x + \Delta x$  representa el valor exacto, entonces  $\Delta x$  es el *error en medición*. Por último, si el valor medido  $x$  se usa para calcular otro valor  $f(x)$ , la diferencia entre  $f(x + \Delta x)$  y  $f(x)$ , es el **error propagado**.

$$\underbrace{f(x + \Delta x)}_{\text{Valor exacto}} - \underbrace{f(x)}_{\text{Valor medido}} = \underbrace{\Delta y}_{\text{Error propagado}}$$

Error de medición

### EJEMPLO 3 Estimar el error



Se mide el radio de una bola de un cojinete y se encuentra que es igual a 0.7 pulgadas, como se muestra en la figura. Si la medición no tiene un error mayor que 0.01 pulgadas, estime el error propagado en el volumen  $V$  de la bola del cojinete.

**Solución** La fórmula para el volumen de una esfera es

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

donde  $r$  es el radio de la esfera. Por tanto, puede escribir

$$r = 0.7 \quad \text{Radio medido}$$

y

$$-0.01 \leq \Delta r \leq 0.01. \quad \text{Error posible}$$

Para aproximar el error propagado en el volumen, derive  $V$  para obtener  $dV/dr = 4\pi r^2$  y escriba

$$\Delta V \approx dV \quad \text{Aproxime } \Delta V \text{ con } dV.$$

$$= 4\pi r^2 dr$$

$$= 4\pi(0.7)^2(\pm 0.01) \quad \text{Sustituya } r \text{ y } dr.$$

$$\approx \pm 0.06158 \text{ pulgadas cúbicas}$$

De este modo, el volumen tiene un error propagado de casi 0.06 pulgadas cúbicas. ■

¿Podría decir si el error propagado en el ejemplo 3 es grande o pequeño? La respuesta se indica de mejor manera en términos *relativos* al comparar  $dV$  con  $V$ . El cociente

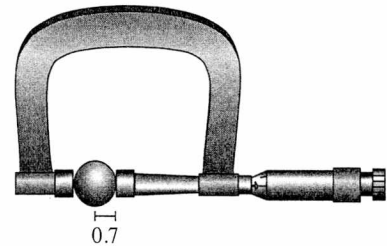
$$\frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} \quad \text{Cociente de } dV \text{ y } V$$

$$= \frac{3 dr}{r} \quad \text{Simplifique.}$$

$$\approx \frac{3}{0.7}(\pm 0.01) \quad \text{Sustituya } dr \text{ y } r.$$

$$\approx \pm 0.0429$$

recibe el nombre de **error relativo**. El correspondiente **error porcentual** es aproximadamente 4.29%.



El radio medido de un cojinete de bola es correcto dentro de 0.01 pulgadas.

## Cálculo de diferenciales

Cada una de las reglas de derivación que estudió en la unidad 4 pueden escribirse en **forma diferencial**. Por ejemplo, suponga que  $u$  y  $v$  son funciones derivables de  $x$ . A partir de la definición de diferenciales, tiene

$$du = u' dx$$

y

$$dv = v' dx.$$

De tal manera, se puede escribir la forma diferencial de la regla del producto como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} d[uv] &= \frac{d}{dx}[uv] dx && \text{Diferencial de } uv. \\ &= [uv' + vu'] dx && \text{Regla del producto} \\ &= uv' dx + vu' dx \\ &= u dv + v du \end{aligned}$$

### Fórmulas diferenciales

Sean  $u$  y  $v$  funciones diferenciales de  $x$ .

**Múltiplo constante:**  $d[cu] = c du$

**Suma o diferencia:**  $d[u \pm v] = du \pm dv$

**Producto:**  $d[uv] = u dv + v du$

**Cociente:**  $d\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{v du - u dv}{v^2}$

### EJEMPLO 4

### Determinar diferenciales

Función	Derivada	Diferencial
a. $y = x^2$	$\frac{dy}{dx} = 2x$	$dy = 2x dx$
b. $y = \sqrt{x}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$
c. $y = 2 \operatorname{sen} x$	$\frac{dy}{dx} = 2 \cos x$	$dy = 2 \cos x dx$
d. $y = x \cos x$	$\frac{dy}{dx} = -x \operatorname{sen} x + \cos x$	$dy = (-x \operatorname{sen} x + \cos x) dx$
e. $y = \frac{1}{x}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$	$dy = -\frac{dx}{x^2}$



**GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ**  
(1646-1716)

Tanto a Leibniz y Newton se les acredita como creadores del cálculo. Sin embargo, fue Leibniz quien trató de ampliar el cálculo formulando reglas y la notación formal. A menudo pasaba días eligiendo una notación adecuada para un nuevo concepto.

Ver [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para leer más de esta biografía.

La notación en el ejemplo 4 recibe el nombre de **notación de Leibniz** para derivadas y diferenciales, en honor del matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz. La belleza de esta notación se debe a que proporciona una forma fácil de recordar varias fórmulas de cálculo importantes al dar la apariencia de que las fórmulas se derivaron de manipulaciones algebraicas de diferenciales. Por ejemplo, en la notación de Leibniz, la *regla de la cadena*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

parecería ser verdadera debido a que las  $du$  se cancelan. Aunque este razonamiento es *incorrecto*, la notación ayuda a recordar la regla de la cadena.

**EJEMPLO 5 Diferencial de una función compuesta**

$$y = f(x) = \text{sen } 3x$$

$$f'(x) = 3 \cos 3x$$

$$dy = f'(x) dx = 3 \cos 3x dx$$

Función original  
 Aplicación de la regla de la cadena  
 Forma diferencial

**EJEMPLO 6 Diferencial de una función compuesta**

$$y = f(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$dy = f'(x) dx = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

Función original  
 Aplicación de la regla de la cadena  
 Forma diferencial

Las diferenciales pueden utilizarse para aproximar valores de funciones. Para realizar esto con respecto a la función dada por  $y = f(x)$ , utilice la fórmula.

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x) dx$$



**COMENTARIO** Esta fórmula es equivalente a la aproximación de la recta tangente dada anteriormente en esta sección.

la cual se deriva de la aproximación

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy.$$

La clave para usar esta fórmula es elegir un valor de  $x$  que facilite el cálculo, como se muestra en el ejemplo 7.

**EJEMPLO 7 Aproximar los valores de una función**

Utilice diferenciales para aproximar  $\sqrt{16.5}$ .

**Solución** Utilizando  $f(x) = \sqrt{x}$ , puede escribir

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) dx = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$$

Ahora bien, eligiendo  $x = 16$  y  $dx = 0.5$ , obtiene la siguiente aproximación

$$f(x + \Delta x) = \sqrt{16.5} \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}}(0.5) = 4 + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 4.0625$$

La aproximación por medio de la recta tangente a  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $x = 16$  es la recta  $g(x) = \frac{1}{8}x + 2$ . Para valores de  $x$  cercanos a 16, las gráficas de  $f$  y  $g$  son muy próximas entre sí, como se muestra en la figura 5.56. Por ejemplo,

$$f(16.5) = \sqrt{16.5} \approx 4.0620$$

y

$$g(16.5) = \frac{1}{8}(16.5) + 2 = 4.0625.$$

De hecho, si usa una herramienta de graficación para realizar un acercamiento al punto de tangencia (16, 4), verá que las dos gráficas parecen coincidir. Observe también que a medida que se aleja del punto de tangencia, la aproximación lineal es menos exacta.

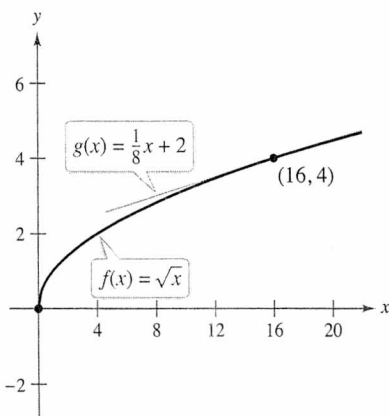


Figura 5.56

# 5.8 Ejercicios

Consulte [CalcChat.com](http://CalcChat.com) para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Usar la aproximación de una recta tangente** En los ejercicios 1-6, determine la ecuación de la recta tangente  $T$  a la gráfica de  $f$  en un punto dado. Utilice esta aproximación lineal para completar la tabla.

$x$	1.9	1.99	2	2.01	2.1
$f(x)$					
$T(x)$					

- $f(x) = x^2$ ,  $(2, 4)$
- $f(x) = \frac{6}{x^2}$ ,  $(2, \frac{3}{2})$
- $f(x) = x^5$ ,  $(2, 32)$
- $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $(2, \sqrt{2})$
- $f(x) = \sin x$ ,  $(2, \sin 2)$
- $f(x) = \csc x$ ,  $(2, \csc 2)$

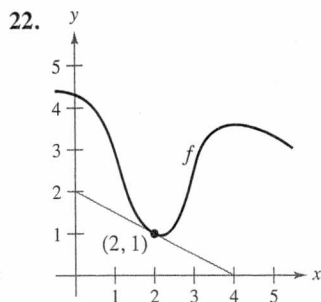
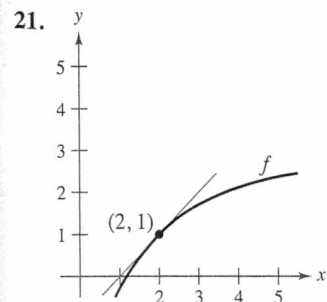
**Comparar  $\Delta y$  y  $dy$**  En los ejercicios 7-10, utilice la información para evaluar y comparar  $\Delta y$  y  $dy$ .

Función	Valores de $x$	Diferencial de $x$
7. $y = x^3$	$x = 1$	$\Delta x = dx = 0.1$
8. $y = 6 - 2x^2$	$x = -2$	$\Delta x = dx = 0.1$
9. $y = x^4 + 1$	$x = -1$	$\Delta x = dx = 0.01$
10. $y = 2 - x^4$	$x = 2$	$\Delta x = dx = 0.01$

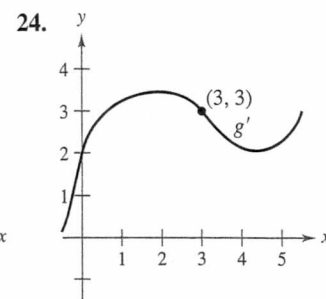
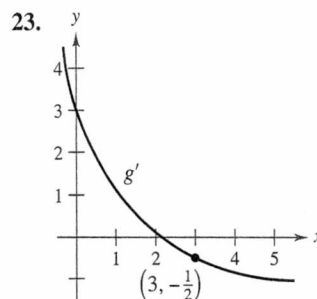
**Encontrar un diferencial** En los ejercicios 11-20, encuentre el diferencial  $dy$  de la función dada.

- $y = 3x^2 - 4$
- $y = 3x^{2/3}$
- $y = x \tan x$
- $y = \csc 2x$
- $y = \frac{x+1}{2x-1}$
- $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
- $y = \sqrt{9-x^2}$
- $y = x\sqrt{1-x^2}$
- $y = 3x - \sin^2 x$
- $y = \frac{\sec^2 x}{x^2 + 1}$

**Usar diferenciales** En los ejercicios 21 y 22, use diferenciales y la gráfica de  $f$  para aproximar (a)  $f(1.9)$  y (b)  $f(2.04)$ . Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite [Math-Graphs.com](http://Math-Graphs.com).



**Usar diferenciales** En los ejercicios 23 y 24, utilice diferenciales y la gráfica de  $g'$  para aproximar (a)  $g(2.93)$  y (b)  $g(3.1)$  dado que  $g(3) = 8$ .



- Área** Al medir la longitud del lado de un cuadrado, obtiene que es igual a 10 pulgadas, con un posible error de  $\frac{1}{32}$  de pulgada.
  - Use diferenciales para aproximar el posible error propagado en el cálculo del área del cuadrado.
  - Calcule el porcentaje de error en el cálculo de la superficie de un cuadrado.
- Área** Al medir el radio de un círculo, es de 16 pulgadas con un posible error de  $\frac{1}{4}$  de pulgada.
  - Use diferenciales para aproximar el posible error propagado en el cálculo del área del círculo.
  - Calcule el porcentaje de error en el cálculo del área del círculo.
- Área** Al medir la base y la altura de un triángulo, obtiene que éstas son iguales, respectivamente, a 36 y 50 cm. El posible error en cada medición es de 0.25 cm.
  - Utilice diferentes diferenciales para aproximar el posible error propagado en el cálculo del área del triángulo.
  - Calcule el porcentaje de error en el cálculo del área del triángulo.
- Circunferencia** Al medir una circunferencia, obtiene un valor de 64 centímetros, con un error posible de 0.9 centímetros.
  - Calcule el porcentaje de error en el cálculo del área del círculo.
  - Estime el máximo error porcentual permisible en la medición de la circunferencia si el error en el cálculo del área no excede de 3%.
- Volumen y área superficial** La medición del borde de un cubo indica un valor de 15 pulgadas, con un error posible de 0.03 pulgadas.
  - Utilice diferenciales para aproximar el máximo error de propagación posible en el cálculo del volumen del cubo.
  - Use diferenciales para aproximar el posible error propagado en el cálculo del área de superficie del cubo.
  - Los errores relativos en los incisos (a) y (b).

- 30. Volumen y área superficial** Al medir el radio de una esfera, encuentra el valor de 8 pulgadas, con un posible error de 0.02 pulgadas.
- Utilice diferenciales para aproximar el máximo error posible en el cálculo del volumen de la esfera.
  - Utilice diferenciales para aproximar el posible error propagado en el cálculo del área de superficie de la esfera.
  - Errores aproximados en los incisos (a) y (b).

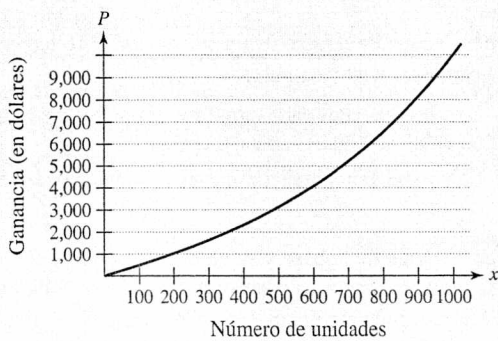
**31. Distancia de frenado** La distancia total  $T$  en la que se detiene un vehículo es

$$T = 2.5x + 0.5x^2$$

donde  $T$  está en pies y  $x$  es la velocidad en millas por hora. Aproxime el cambio y el porcentaje de cambio en la distancia total de frenado conforme la velocidad cambia de  $x = 25$  a  $x = 26$  millas por hora



**¿CÓMO LO VE?** La gráfica muestra la ganancia  $P$  (en dólares) de la venta de unidades de un artículo. Use la gráfica para determinar cuál es mayor, el cambio en el resultado cuando los cambios en el nivel de producción 400-401 unidades o el cambio en el resultado cuando los cambios en el nivel de producción 900-901 unidades. Explique su razonamiento



**33. Péndulo** El periodo de un péndulo está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

donde  $L$  es la longitud del péndulo en pies,  $g$  es la aceleración debida a la gravedad y  $T$  es el tiempo en segundos. El péndulo se ha sometido a un aumento de temperatura tal que la longitud ha aumentado en  $\frac{1}{2}\%$ .

- Encuentre el cambio porcentual aproximado en el periodo.
- Utilizando el resultado del inciso (a), encuentre el error aproximado en este reloj de péndulo de 1 día.

**34. Ley de Ohm** Una corriente de  $I$  amperes pasa por un resistor de  $R$  ohms. La ley de Ohm establece que el voltaje  $E$  aplicado al resistor es

$$E = IR.$$

Si el voltaje es constante, demuestre que la magnitud del error relativo en  $R$  provocado por el cambio en  $I$  es igual en magnitud al error relativo en  $I$ .

**35. Movimiento de proyectiles** El alcance  $R$  de un proyectil es

$$R = \frac{v_0^2}{32}(\text{sen } 2\theta)$$

donde  $v_0$  es la velocidad inicial en pies por segundo y  $\theta$  es el ángulo de elevación. Si  $v_0 = 2500$  pies por segundo y  $\theta$  cambia de  $10^\circ$  a  $11^\circ$ , utilice diferenciales para aproximar el cambio de alcance.

**36. Agrimensura** Un topógrafo que está a 50 pies de la base de un árbol mide el ángulo de elevación de la parte superior de este último y obtiene un valor de  $71.5^\circ$ . ¿Con qué precisión debe medirse el ángulo si el error porcentual en la estimación de la altura de este mismo será menor que 6%?

**Aproximar los valores de la función** En los ejercicios 37-40, utilice diferenciales para aproximar el valor de la expresión. Compare su respuesta con la de la calculadora.

37.  $\sqrt{99.4}$

38.  $\sqrt[3]{26}$

39.  $\sqrt[4]{624}$

40.  $(2.99)^3$

**Verificar la aproximación por una recta tangente** En los ejercicios 41 y 42, verifique la aproximación por medio de la recta tangente de la función en el punto indicado. A continuación, utilice una herramienta de graficación para representar la función y su aproximación en la misma ventana de observación.

Función	Aproximación	Punto
41. $f(x) = \sqrt{x+4}$	$y = 2 + \frac{x}{4}$	(0, 2)
42. $f(x) = \tan x$	$y = x$	(0, 0)

**DESARROLLO DE CONCEPTOS**

**43. Comparar  $\Delta y$  y  $dy$**  Describa la variación en precisión de  $dy$  como una aproximación para  $\Delta y$  cuando  $\Delta x$  está disminuyendo.

**44. Describir términos** Cuando se usan diferenciales, ¿qué se entiende por los términos *error propagado*, *error relativo* y *error porcentual*?

**Utilizar diferenciales** En los ejercicios 45 y 46, dé una breve explicación de por qué las siguientes aproximaciones son válidas

45.  $\sqrt{4.02} \approx 2 + \frac{1}{4}(0.02)$

46.  $\tan 0.05 \approx 0 + 1(0.05)$

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 47-50, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que lo demuestre.

47. Si  $y = x + c$ , entonces  $dy = dx$ .

48. Si  $y = ax + b$ , entonces  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ .

49. Si  $y$  es diferenciable, entonces  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta y - dy) = 0$ .

50. Si  $y = f(x)$ ,  $f$  es creciente y diferenciable, y  $\Delta x > 0$ , entonces  $\Delta y \geq dy$ .

## 5.9 Formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital

- Reconocer los límites que producen formas indeterminadas.
- Aplicar la regla de L'Hôpital para evaluar un límite.

### Formas indeterminadas

Recuerde que las formas  $0/0$  y  $\infty/\infty$  reciben el nombre de indeterminadas porque no garantizan que exista un límite, tampoco indican cuál es el límite, si es que existe. Cuando se ha encontrado en el texto con una de estas formas indeterminadas, se ha intentado reescribir la expresión mediante el uso de diversas técnicas algebraicas.

#### Forma indeterminada

Forma	Límite	Técnica algebraica
$\frac{0}{0}$	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} 2(x - 1) = -4$	Dividir el numerador y el denominador por $(x + 1)$ .
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - (1/x^2)}{2 + (1/x^2)} = \frac{3}{2}$	Dividir el numerador y el denominador por $x^2$ .

De vez en cuando se pueden extender estas técnicas algebraicas para encontrar límites de funciones trascendentes. Por ejemplo, el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$$

produce la forma indeterminada  $0/0$ . Factorizando y luego dividiendo produce

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + 1)(e^x - 1)}{e^x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 1) \\ &= 2. \end{aligned}$$

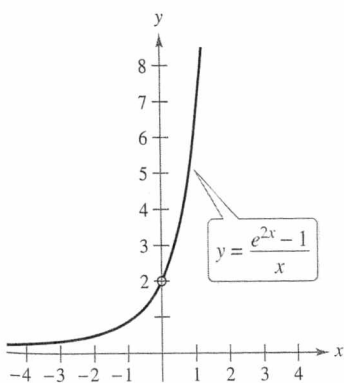
Sin embargo, no todas las formas indeterminadas pueden ser evaluadas por manipulación algebraica. Esto sucede a menudo cuando están implicadas funciones algebraicas y trascendentes. Por ejemplo, el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

produce la forma indeterminada  $0/0$ . Reescribiendo la expresión para obtener

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{x} \right)$$

simplemente produce otra forma indeterminada. Por supuesto, se podría utilizar la tecnología para estimar el límite, como se muestra en la tabla y en la figura 5.57. De la tabla y la gráfica, el límite parece ser 2. (Este límite será verificado en el ejemplo 1.)



El límite cuando  $x$  se acerca a 0 parece ser 2.

Figura 5.57

$x$	-1	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1	1
$\frac{e^{2x} - 1}{x}$	0.865	1.813	1.980	1.998	?	2.002	2.020	2.214	6.389



**GUILLAUME L'HÔPITAL**  
(1661-1704)

La regla de L'Hôpital lleva el nombre del matemático francés Guillaume François Antoine de L'Hôpital. Se le acredita la escritura del primer texto sobre cálculo diferencial (en 1696) en el que apareció públicamente la regla que se acredita a L'Hôpital. Recientemente se ha descubierto que la regla y su demostración se escribieron en una carta de John Bernoulli a L'Hôpital. "...Yo reconozco que le debo mucho a las mentes brillantes de los hermanos Bernoulli. ... He hecho uso gratuito de sus descubrimientos..." dijo L'Hôpital.

## Regla de L'Hôpital

Para encontrar el límite mostrado en la figura 5.55, se puede utilizar un teorema llamado la **regla de L'Hôpital**. Este teorema afirma que bajo ciertas condiciones, el límite del cociente  $f(x)/g(x)$  es determinado por el límite del cociente de las derivadas

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Para demostrar este teorema, se puede utilizar un resultado más general llamado **teorema ampliado del valor medio**.

### TEOREMA 5.10 Teorema ampliado del valor medio

Si  $f$  y  $g$  son derivables sobre un intervalo abierto y continuo  $[a, b]$ , tal que  $g'(x) \neq 0$  para cualquier  $x$  sobre  $[a, b]$ , entonces existe un punto  $(a, b)$  tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Una demostración de este teorema se presenta en el apéndice A. Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

Para ver por qué el teorema 5.10 se llama teorema ampliado del valor medio, considere el caso especial en el que  $g(x) = x$ . Para este caso, se obtiene el teorema del valor medio "estándar" como se presentó en la sección 5.2.

### TEOREMA 5.11 Regla de L'Hôpital

Sean  $f$  y  $g$  funciones que son diferenciables sobre un intervalo abierto  $(a, b)$  que contiene a  $c$ , excepto posiblemente en  $c$  mismo. Suponga que  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x$  sobre  $(a, b)$ , excepto posiblemente en  $c$  mismo. Si el límite de  $f(x)/g(x)$  cuando en  $x$  tiende a  $c$  produce la forma indeterminada  $0/0$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que exista el límite por la derecha (o sea infinito). Este resultado también se aplica cuando el límite de  $f(x)/g(x)$  cuando  $x$  tiende a  $c$  produce cualquiera de las formas indeterminadas  $\infty/\infty$ ,  $(-\infty)/\infty$ ,  $\infty/(-\infty)$  o  $(-\infty)/(-\infty)$ .

Una demostración de este teorema se presenta en el apéndice A. Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para ver el video de Bruce Edwards de esta demostración.

**PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para mejorar su comprensión de la necesidad de la restricción de que  $g'(x)$  sea distinta de cero para todo  $x$  en  $(a, b)$  excepto posiblemente en  $c$ , consulte el artículo "Counterexamples to L'Hôpital's Rule", por R. P. Boas, en *The American Mathematical Monthly*. Para ver este artículo, visite [MathArticles.com](http://MathArticles.com).

Hay quienes en ocasiones usan incorrectamente la regla de L'Hôpital aplicando la regla del cociente a  $f(x)/g(x)$ . Asegúrese de que la regla implica

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

no la derivada de  $f(x)/g(x)$ .

La regla de L'Hôpital también puede aplicarse a los límites unilaterales. Por ejemplo, si el límite de  $f(x)/g(x)$  cuando  $x$  tiende a  $c$  por la derecha produce la forma indeterminada  $0/0$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

suponiendo que el límite existe (o es infinito).

Ex  
Enf  
Util  
o un  
cada  
  
a. l  
x  
  
b. l  
x  
  
c. l  
x  
  
d. l  
x  
  
¿Qu  
enfo  
vent  
de e  
expl

**Exploración****Enfoques numérico y gráfico**

Utilice un enfoque numérico o uno gráfico para aproximar cada límite.

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{2x} - 1}{x}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{x}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{2x} - 1}{x}$

d.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x} - 1}{x}$

¿Qué patrón observa? ¿Un enfoque analítico tiene una ventaja para la determinación de estos límites? Si es así, explique su razonamiento.

**EJEMPLO 1****Forma indeterminada 0/0**

Evalúe  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ .

**Solución** Debido a que la sustitución directa da lugar a la forma indeterminada 0/0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \begin{cases} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 1) = 0 \\ \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{cases}$$

puede aplicar la regla de L'Hôpital, como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}[e^{2x} - 1]}{\frac{d}{dx}[x]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Aplique la regla de L'Hôpital.

Derive el numerador y el denominador.

Evalúe el límite.

En la solución del ejemplo 1, observe que en realidad no sabe que el primer límite es igual al segundo límite hasta que se haya demostrado que existe el segundo límite. En otras palabras, si no hubiera existido el segundo límite, entonces no se habría permitido la aplicación de la regla de L'Hôpital.

Otra forma de regla de L'Hôpital establece que si el límite de  $f(x)/g(x)$  cuando  $x$  tiende a  $\infty$  (o  $-\infty$ ) produce la forma indeterminada 0/0 o  $\infty/\infty$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que exista el límite por la derecha.

**EJEMPLO 2****Forma indeterminada  $\infty/\infty$** 

Evalúe  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ .

**Solución** Dado que la sustitución directa resulta en la forma indeterminada  $\infty/\infty$ , se puede aplicar la regla de L'Hôpital para obtener

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}[\ln x]}{\frac{d}{dx}[x]} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aplique la regla de L'Hôpital.

Derive el numerador y el denominador.

Evalúe el límite.

- ▷ **TECNOLOGÍA** Utilice una herramienta de graficación para representar gráficamente  $y_1 = \ln x$  y  $y_2 = x$  en la misma ventana de visualización. ¿Qué función crece más rápido a medida que se acerca a  $\infty$ ? ¿Cómo se relaciona esta observación con el ejemplo 2?

**PARA INFORMACIÓN ADICIONAL**  
 Para leer acerca de la conexión entre Leonhard Euler y Guillaume L'Hôpital, consulte el artículo "When Euler Met l'Hôpital", de William Dunham, en *Mathematics Magazine*. Para ver este artículo, visite *MathArticles.com*.

Ocasionalmente es necesario aplicar la regla de L'Hôpital más de una vez para eliminar una forma indeterminada, como se muestra en el ejemplo 3.

**EJEMPLO 3** Aplicar la regla de L'Hôpital más de una vez

Evalúe  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}}$ .

**Solución** Dado que la sustitución directa resulta en la forma indeterminada  $\infty/\infty$ , se puede aplicar la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{d}{dx}[x^2]}{\frac{d}{dx}[e^{-x}]} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}}$$

Este límite resulta en la forma indeterminada  $(-\infty)/(-\infty)$ , entonces se puede aplicar la regla de L'Hôpital de nuevo para obtener

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{d}{dx}[2x]}{\frac{d}{dx}[-e^{-x}]} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0.$$

Además de las formas  $0/0$  y  $\infty/\infty$ , hay otras formas indeterminadas, como  $0 \cdot \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$  e  $\infty - \infty$ . Por ejemplo, considere los siguientes cuatro límites que conducen a la forma indeterminada  $0 \cdot \infty$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x}\right)(x)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^x}\right)(x)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)(e^x)$
El límite es 1.	El límite es 2.	El límite es 0.	El límite es $\infty$ .

Debido a que cada límite es diferente, es claro que la forma  $0 \cdot \infty$  es indeterminada en el sentido de que no determina el valor (o incluso la existencia) del límite. Los ejemplos que quedan de esta sección muestran los métodos para la evaluación de estas formas. Básicamente, intente convertir cada una de estas formas a  $0/0$  o  $\infty/\infty$  para que se pueda aplicar la regla de L'Hôpital.

**EJEMPLO 4** Forma indeterminada  $0 \cdot \infty$

Evalúe  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}\sqrt{x}$ .

**Solución** Como la sustitución directa produce la forma indeterminada  $0 \cdot \infty$ , usted debe tratar de reescribir el límite para ajustarlo a la forma  $0/0$  o  $\infty/\infty$ . En este caso, puede reescribir el límite para ajustarlo a la segunda forma.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}\sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x}$$

Ahora, por la regla de L'Hôpital, se tiene

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/(2\sqrt{x})}{e^x}$	Derive el numerador y el denominador.
$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{x}e^x}$	Simplifique.
$= 0.$	Evalúe el límite.

Cuando se reescribe un límite en una de las formas  $0/0$  o  $\infty/\infty$  no parece funcionar, intente otra forma. Por ejemplo, en el ejemplo 4, puede escribir al límite como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x^{-1/2}}$$

que produce la forma indeterminada  $0/0$ . Como suele suceder, la aplicación de la regla de L'Hôpital a este límite produce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x^{-1/2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-e^{-x}}{-1/(2x^{3/2})}$$

que también produce la forma indeterminada  $0/0$ .

Las formas indeterminadas  $1^\infty$ ,  $\infty^0$  y  $0^0$ , surgen de los límites de las funciones que tienen bases y exponentes variables. Cuando se encontró antes con este tipo de función, utilizó la derivación logarítmica para encontrar la derivada. Puede utilizar un procedimiento similar al tomar límites, como se muestra en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 5 Forma indeterminada $1^\infty$

Evalúe  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ .

**Solución** Como la sustitución directa produce la forma indeterminada  $1^\infty$ , puede proceder de la siguiente manera. Para empezar, suponga que el límite existe y es igual a  $y$ .

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Tomando el logaritmo natural de cada lado se obtiene

$$\ln y = \ln \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]$$

Debido a que la función logarítmica natural es continua, puede escribir

$$\ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]$$

Forma indeterminada  $\infty \cdot 0$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln[1 + (1/x)]}{1/x} \right)$$

Forma indeterminada  $0/0$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(-1/x^2)\{1/[1 + (1/x)]\}}{-1/x^2} \right)$$

Regla de L'Hôpital

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + (1/x)}$$

$$= 1.$$

Ahora, ya que ha demostrado que

$$\ln y = 1$$

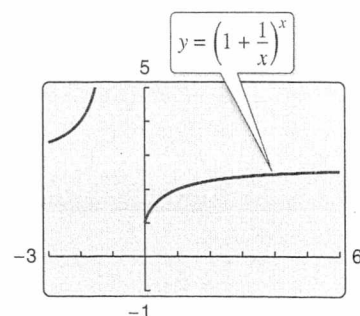
puede concluir que

$$y = e$$

y obtener

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Puede utilizar una herramienta de graficación para confirmar este resultado, como se muestra en la figura 5.58.



El límite de  $[1 + (1/x)]^x$  cuando  $x$  tiende a infinito es  $e$ .

Figura 5.58

La regla de L'Hôpital también se puede aplicar a límites unilaterales, como se demuestra en los ejemplos 6 y 7.

### EJEMPLO 6 Forma indeterminada $0^0$

••••► Consulte [LarsonCalculus.com](http://LarsonCalculus.com) para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Evalúe  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sen x)^x$ .

**Solución** Como la sustitución directa produce la forma indeterminada  $0^0$ , puede proceder como se indica a continuación. Para empezar, suponga que el límite existe y es igual a  $y$ .

$$\begin{aligned}
 y &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sen x)^x && \text{Forma indeterminada } 0^0 \\
 \ln y &= \ln \left[ \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sen x)^x \right] && \text{Tome el logaritmo natural de cada lado.} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(\sen x)^x] && \text{Continuidad} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(\sen x)] && \text{Forma indeterminada } 0 \cdot (-\infty) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sen x)}{1/x} && \text{Forma indeterminada } -\infty/\infty \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot x}{-1/x^2} && \text{Regla de L'Hôpital} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{\tan x} && \text{Forma indeterminada } 0/0 \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\sec^2 x} && \text{Regla de L'Hôpital} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

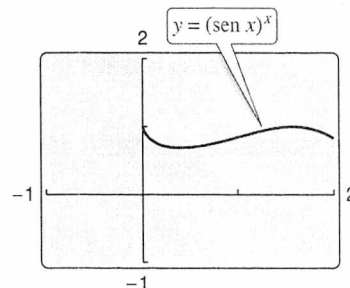
Ahora, como  $\ln y = 0$ , se puede concluir que  $y = e^0 = 1$  y se obtiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sen x)^x = 1.$$

► **TECNOLOGÍA** Al evaluar límites complicados como en el ejemplo 6, es útil verificar la racionalidad de la solución con una herramienta de graficación. Por ejemplo, los cálculos en la tabla siguiente y la gráfica en la figura (que se muestra enseguida) son consistentes con la conclusión de que  $(\sen x)^x$  tiende a 1 cuando  $x$  tiende a 0 por la derecha.

$x$	1.0	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$(\sen x)^x$	0.8415	0.7942	0.9550	0.9931	0.9991	0.9999

Use una herramienta de graficación para estimar los límites  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^x$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x)^x$ . Luego trate de verificar sus estimaciones analíticamente.



El límite de  $(\sen x)^x$  es 1 cuando  $x$  tiende a 0 por la derecha.

## EJEMPLO 7

Forma indeterminada  $\infty - \infty$ 

Evalúe  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$ .

**Solución** Como la sustitución directa produce la forma indeterminada  $\infty - \infty$ , podría tratar de reescribir la expresión para producir una forma a la que se puede aplicar la regla de L'Hôpital. En este caso, puede combinar las dos fracciones para obtener

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} \right].$$

Ahora, debido a que la sustitución directa produce la forma indeterminada  $0/0$ , puede aplicar la regla de L'Hôpital para obtener

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dx}[x-1-\ln x]}{\frac{d}{dx}[(x-1)\ln x]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{1-(1/x)}{(x-1)(1/x) + \ln x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x-1}{x-1+x \ln x} \right). \end{aligned}$$

Este límite también produce la forma indeterminada  $0/0$ , por tanto puede aplicar la regla de L'Hôpital de nuevo para obtener

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{1}{1+x(1/x) + \ln x} \right] = \frac{1}{2}.$$

Las formas  $0/0$ ,  $\infty/\infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $0^0$ ,  $1^\infty$  y  $\infty^0$  han sido identificadas como *indeterminadas*. Hay formas similares que se deben reconocer como "determinadas".

$\infty + \infty \rightarrow \infty$	El límite es infinito positivo.
$-\infty - \infty \rightarrow -\infty$	El límite es infinito negativo.
$0^\infty \rightarrow 0$	El límite es cero.
$0^{-\infty} \rightarrow \infty$	El límite es infinito positivo.

(Se le pedirá al lector que verifique dos de ellos en los ejercicios 108 y 109.)

Como comentario final, recuerde que la regla de L'Hôpital se puede aplicar solo a los cocientes que conducen a las formas indeterminadas  $0/0$  y  $\infty/\infty$ . Por ejemplo, la aplicación de la regla de L'Hôpital que se muestra a continuación es *incorrecta*.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1 \quad \text{Uso incorrecto de la regla de L'Hôpital}$$

La razón de que esta aplicación sea incorrecta es que, a pesar de que el límite del denominador es 0, el límite del numerador es 1, lo que significa que las hipótesis de la regla de L'Hôpital no han sido satisfechas.

## Exploración

En cada uno de los ejemplos presentados en esta sección, se utiliza la regla de L'Hôpital para encontrar un límite que existe. También se puede utilizar para concluir que un límite es infinito. Por ejemplo, trate de usar la regla de L'Hôpital para demostrar que  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x/x = \infty$ .

# 5.9 Ejercicios

Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Análisis numérico y gráfico** En los ejercicios 1-4, complete la tabla y utilice el resultado de calcular el límite. Use un programa de graficación para trazar la función para apoyar su resultado.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x}$

$x$	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x}$

$x$	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^5 e^{-x/100}$

$x$	1	10	10 <sup>2</sup>	10 <sup>3</sup>	10 <sup>4</sup>	10 <sup>5</sup>
$f(x)$						

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{\sqrt{3x^2 - 2x}}$

$x$	1	10	10 <sup>2</sup>	10 <sup>3</sup>	10 <sup>4</sup>	10 <sup>5</sup>
$f(x)$						

**Usar dos métodos** En los ejercicios 5-10, evalúe el límite (a) utilizando técnicas de las unidades 1 y 3, y (b) utilizando la regla de L'Hôpital.

5.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3(x-4)}{x^2 - 16}$

6.  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 13x + 20}{x + 4}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+10} - 4}{x - 6}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x}$

9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 5}$

10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 3}{5x^2 + 1}$

**Evaluar un límite** En los ejercicios 11-42, evalúe el límite, utilizando la regla de L'Hôpital si es necesario.

11.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$

12.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 2}$

13.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{25 - x^2} - 5}{x}$

14.  $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x - 5}$

15.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - (1+x)}{x^3}$

16.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x^3}{x^2 - 1}$

17.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{11} - 1}{x^4 - 1}$

18.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - 1}{x^b - 1}$ , donde  $a, b \neq 0$

19.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

20.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ , donde  $a, b \neq 0$

21.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{x}$

22.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x - (\pi/4)}{x - 1}$

23.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3x - 1}{4x^2 + 5}$

24.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 3}{x^3 - 6x + 2}$

25.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x + 7}{x - 6}$

26.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x + 2}$

27.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{x/2}}$

28.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{x^2}}$

29.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

30.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

31.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x}$

32.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x - \pi}$

33.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}$

34.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^4}{x^3}$

35.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^4}$

36.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x/2}}{x}$

37.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\tan 9x}$

38.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin \pi x}$

39.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\sin x}$

40.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan 2x}$

41.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x \ln(e^{4t-1}) dt}{x}$

42.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\int_1^x \cos \theta d\theta}{x - 1}$

**Evaluar un límite** En los ejercicios 43-60, (a) describa el tipo de forma indeterminada (si la hay) que se obtiene por sustitución directa. (b) Evalúe el límite, utilizando la regla de L'Hôpital si es necesario. (c) Use un programa de graficación para trazar la función y verificar el resultado en el inciso (b).

43.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln x$

44.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \cot x$

45.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \sin \frac{1}{x} \right)$

46.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan \frac{1}{x}$

47.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x}$

48.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{2/x}$

49.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$

50.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$

51.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x}$

52.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{1/x}$

53.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [3(x)^{x/2}]$

54.  $\lim_{x \rightarrow 4^+} [3(x-4)]^{x-4}$

55.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x)^{x-1}$

56.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \right]^x$

57.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{8}{x^2 - 4} - \frac{x}{x - 2} \right)$

58.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{1}{x^2 - 4} - \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 4} \right)$

59.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{3}{\ln x} - \frac{2}{x-1} \right)$

60.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{10}{x} - \frac{3}{x^2} \right)$

**DESARROLLO DE CONCEPTOS**

**61. Formas indeterminadas** Enumere seis formas indeterminadas diferentes.

**62. Regla de L'Hôpital** Escriba la regla de L'Hôpital.

**63. Encontrar funciones** Determine las funciones derivables  $f$  y  $g$  que satisfacen la condición especificada tal que

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 0.$$

Explique cómo obtuvo sus respuestas. (Nota: Hay muchas respuestas correctas.)

(a)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{g(x)} = 10$       (b)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

**64. Encontrar funciones** Determine las funciones derivables  $f$  y  $g$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 25.$$

Explique cómo obtuvo sus respuestas. (Nota: Hay muchas respuestas correctas.)

**65. Regla de L'Hôpital** Determine cuál de los siguientes límites pueden ser evaluados usando la regla de L'Hôpital. Explique su razonamiento. No evalúe el límite.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^3-x-6}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-4x}{2x-1}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}$

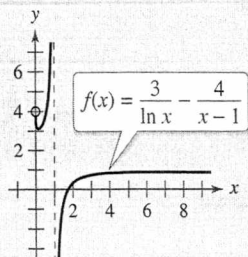
(d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{x^2}-e^9}{x-3}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \pi x}{\ln x}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x(\ln x-1)}{(x-1)\ln x}$



**66. ¿CÓMO LO VE?** Utilice la gráfica de  $f$  para encontrar el límite.



- (a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$     (b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$     (c)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

**67. Enfoque numérico** Complete la tabla para mostrar que  $x$  eventualmente "se impone sobre"  $(\ln x)^4$ .

$x$	10	$10^2$	$10^4$	$10^6$	$10^8$	$10^{10}$
$\frac{(\ln x)^4}{x}$						

**68. Enfoque numérico** Complete la tabla para mostrar que  $e^x$  eventualmente "se impone sobre"  $x^5$ .

$x$	1	5	10	20	30	40	50	100
$\frac{e^x}{x^5}$								

**Comparar funciones** En los ejercicios 69-74, utilice la regla de L'Hôpital para determinar las tasas comparativas de aumento de las funciones  $f(x) = x^m$ ,  $g(x) = e^{nx}$  y  $h(x) = (\ln x)^n$ , donde  $n > 0$ ,  $m > 0$  y  $x \rightarrow \infty$ .

69.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{5x}}$

70.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{2x}}$

71.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^3}{x}$

72.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{x^3}$

73.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^n}{x^m}$

74.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{e^{nx}}$

**Asíntotas y extremos relativos** En los ejercicios 75-78, encuentre cualquier asíntota y extremo relativo que pueden existir y utilice una herramienta de graficación para trazar la función. (Sugerencia: Algunos de los límites requeridos para determinar asíntotas se han encontrado en los ejercicios anteriores.)

75.  $y = x^{1/x}$ ,  $x > 0$

76.  $y = x^x$ ,  $x > 0$

77.  $y = 2xe^{-x}$

78.  $y = \frac{\ln x}{x}$

**Piénselo** En los ejercicios 79-82, la regla de L'Hôpital se utilizó incorrectamente. Describa el error.

79.  ~~$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2+4x+1}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x+4}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6}{2} = 3$~~

80.  ~~$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2e^x = 2$~~

~~$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-e^{-x}}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$~~

82.  ~~$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cos \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(1/x)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sin(1/x)(1/x^2)}{-1/x^2} = 0$~~

**Enfoque analítico** En los ejercicios 83 y 84, (a) explique por qué la regla de L'Hôpital no se puede utilizar para encontrar el límite, (b) encuentre el límite analíticamente, y (c) use una herramienta de graficación para trazar la función y aproximar el límite de la gráfica. Compare los resultados con los del inciso (b).

83.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

84.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\tan x}{\sec x}$

**Análisis gráfico** En los ejercicios 85 y 86, grafique  $f(x)/g(x)$  y  $f'(x)/g'(x)$  cerca de  $x = 0$ . ¿Qué observa acerca de estas relaciones cuando  $x \rightarrow 0$ ? ¿Cómo ilustra esto la regla de L'Hôpital?

- 85.  $f(x) = \sin 3x$ ,  $g(x) = \sin 4x$
- 86.  $f(x) = e^{3x} - 1$ ,  $g(x) = x$

**87. Velocidad en un medio resistivo** La velocidad de un objeto que cae a través de un medio resistivo, tal como aire o agua, está dada por

$$v = \frac{32}{k} \left( 1 - e^{-kt} + \frac{v_0 k e^{-kt}}{32} \right)$$

donde  $v_0$  es la velocidad inicial,  $t$  es el tiempo en segundos y  $k$  es la constante de resistencia del medio. Utilice la regla de L'Hôpital para encontrar la fórmula de la velocidad de un cuerpo que cae en el vacío mediante la fijación de  $v_0$  y  $t$  y dejando que  $k$  sea cero. (Suponga que la dirección hacia abajo es positiva.)

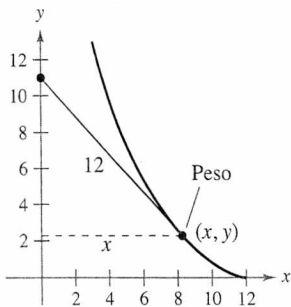
**88. Interés compuesto** La fórmula para la cantidad  $A$  en una cuenta de ahorros se compone  $n$  veces por año por  $t$  años a una tasa de interés  $r$  y un depósito inicial de  $P$  está dada por

$$A = P \left( 1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$

Utilice la regla de L'Hôpital para demostrar que el límite de fórmula cuando el número de composiciones por año tiende a infinito está dado por  $A = Pe^{rt}$

**89. Función gamma** La función gamma  $\Gamma(n)$  se define en términos de la integral de la función dada por  $f(x) = x^{n-1}e^{-x}$ ,  $n > 0$ . Demuestre que para cualquier valor fijo de  $n$  el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a infinito es cero.

**90. Tractriz** Una persona se mueve desde el origen a lo largo del eje positivo jalando un peso del extremo de una cuerda de 12 metros (vea la gráfica). Inicialmente, el peso se encuentra en el punto  $(12, 0)$



- (a) Demuestre que la pendiente de la recta tangente a la trayectoria del peso es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{144 - x^2}}{x}$$

- (b) Utilice el resultado del inciso (a) para encontrar la ecuación de la trayectoria del peso. Use un programa de graficación para trazar la trayectoria y compararla con la figura.
- (c) Encuentre cualquier asíntota vertical de la gráfica en el inciso (b).
- (d) Cuando la persona ha llegado al punto  $(0, 12)$ , ¿qué tan lejos se ha desplazado el peso?

**Teorema extendido del valor medio** En los ejercicios 91-94, aplique el teorema del valor medio extendido a las funciones  $f$  y  $g$  en el intervalo dado. Encuentre todos los valores  $c$  en el intervalo  $(a, b)$  tales que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Funciones	Intervalo
91. $f(x) = x^3$ , $g(x) = x^2 + 1$	$[0, 1]$
92. $f(x) = \frac{1}{x}$ , $g(x) = x^2 - 4$	$[1, 2]$
93. $f(x) = \sin x$ , $g(x) = \cos x$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
94. $f(x) = \ln x$ , $g(x) = x^3$	$[1, 4]$

**¿Verdadero o falso?** En los ejercicios 95-98, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

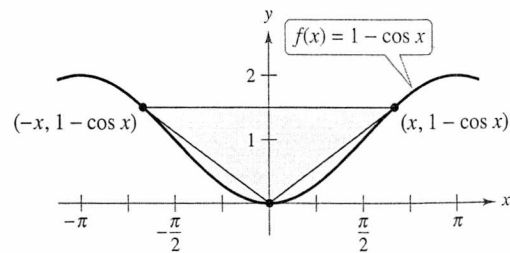
95.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x^2 + x + 1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{2x + 1}{1} \right] = 1$

96. Si  $y = \frac{e^x}{x^2}$ , entonces  $y' = \frac{e^x}{2x}$ .

97. Si  $p(x)$  es un polinomio; entonces,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$ .

98. Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , entonces,  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$ .

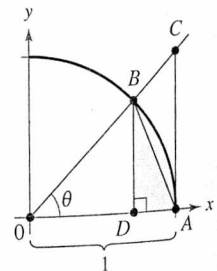
**99. Área** Encuentre el límite, cuando  $x$  tiende a 0, de la razón entre el área del triángulo con el área total sombreada en la figura.



**100. Obtención de un límite** En la sección 1.3, un argumento geométrico (consulte figura) se utilizó para demostrar que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

- (a) Escriba el área del  $\triangle ABD$  en términos de  $\theta$ .
- (b) Escriba el área de la región sombreada en términos de  $\theta$ .
- (c) Escriba la razón  $R$  del área del  $\triangle ABD$  con la de la región sombreada.
- (d) Encuentre  $\lim_{\theta \rightarrow 0} R$ .



**Función continua** En los ejercicios 101 y 102, encuentre el valor de  $c$  que hace la función continua en  $x = 0$

101.  $f(x) = \begin{cases} \frac{4x - 2 \operatorname{sen} 2x}{2x^3}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$

102.  $f(x) = \begin{cases} (e^x + x)^{1/x}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$

103. **Encontrar valores** Encuentre los valores de  $a$  y  $b$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos bx}{x^2} = 2.$$

**104. Evaluar un límite** Utilice una herramienta de graficación para graficar

$$f(x) = \frac{x^k - 1}{k}$$

para  $k = 1, 0.1$  y  $0.01$ . Después evalúe el límite

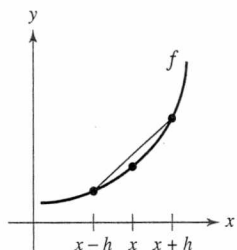
$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{x^k - 1}{k}.$$

105. **Encontrar una derivada**

(a) Sea  $f'(x)$  continua. Demuestre que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x).$$

(b) Explique el resultado del inciso (a) de forma gráfica.



106. **Encontrar una segunda derivada** Sea  $f''(x)$  continua. Demuestre que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

107. **Evaluar un límite** Considere el límite  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x \ln x)$ .

(a) Describa el tipo de forma indeterminada que se obtiene por sustitución directa.

(b) Evalúe el límite. Use una herramienta de graficación para verificar el resultado.

**PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para un enfoque geométrico para este ejercicio, consulte el artículo "A Geometric Proof of  $\lim_{d \rightarrow 0^+} (-d \ln d) = 0$ " por John H. Mathews, en *The College Mathematics Journal*. Para ver este artículo, visite [MathArticles.com](http://MathArticles.com).

108. **Demostración** Demuestre que si  $f(x) \geq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  y

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = 0.$$

109. **Demostración** Demuestre que si  $f(x) \geq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \infty$ .

110. **Demostración** Demuestre la siguiente generalización del teorema del valor medio. Si  $f$  es dos veces derivable en el intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces

$$f(b) - f(a) = f'(a)(b - a) - \int_a^b f''(t)(t - b) dt.$$

111. **Formas indeterminadas** Demuestre que la forma indeterminada  $0^0$ ,  $\infty^0$  y  $1^\infty$  no siempre tienen un valor de 1, evaluando cada límite.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln 2 / (1 + \ln x)}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\ln 2 / (1 + \ln x)}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^{(\ln 2) / x}$

112. **Historia del cálculo** En el texto de cálculo de L'Hôpital de 1696, ilustró su regla con el límite de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

cuando  $x$  se aproxima a  $a$ ,  $a > 0$ . Encuentre este límite.

113. **Obtener un límite** Considere la función

$$h(x) = \frac{x + \operatorname{sen} x}{x}.$$

(a) Use un programa de graficación para trazar la función. Luego, utilice las características *zoom* y *trace* para investigar  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$ .

(b) Encuentre  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$  analíticamente por escrito

$$h(x) = \frac{x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

(c) ¿Se puede utilizar la regla de L'Hôpital para encontrar  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$ ? Explique su razonamiento.

114. **Evaluar un límite** Sean  $f(x) = x + x \operatorname{sen} x$  y  $g(x) = x^2 - 4$ .

(a) Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

(b) Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ .

(c) Evalúe el límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

¿Qué observa?

(d) ¿Sus respuestas a los incisos (a) a (c) contradicen la regla de L'Hôpital? Explique su razonamiento.

**DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM**

115. Evalúe  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{x} \cdot \frac{a^x - 1}{a - 1} \right]^{1/x}$  donde  $a > 0$ ;  $a \neq 1$

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

## Ejercicios de repaso

Consulte [CalcChat.com](http://CalcChat.com) para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

**Encontrar extremos en un intervalo cerrado** En los ejercicios 1-8, encuentre el extremo absoluto de la función en un intervalo cerrado.

1.  $f(x) = x^2 + 5x$ ,  $[-4, 0]$
2.  $f(x) = x^3 + 6x^2$ ,  $[-6, 1]$
3.  $f(x) = \sqrt{x} - 2$ ,  $[0, 4]$
4.  $h(x) = 3\sqrt{x} - x$ ,  $[0, 9]$
5.  $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 9}$ ,  $[-4, 4]$
6.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ,  $[0, 2]$
7.  $g(x) = 2x + 5 \cos x$ ,  $[0, 2\pi]$
8.  $f(x) = \sin 2x$ ,  $[0, 2\pi]$

**Usar el teorema de Rolle** En los ejercicios 9-12, determine si el teorema de Rolle se puede aplicar a  $f$  en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Si el teorema de Rolle se puede aplicar, encuentre todos los valores de  $c$  en el intervalo abierto  $(a, b)$  tales que  $f'(c) = 0$ . Si el teorema de Rolle no se puede aplicar, explique por qué no.

9.  $f(x) = 2x^2 - 7$ ,  $[0, 4]$
10.  $f(x) = (x - 2)(x + 3)^2$ ,  $[-3, 2]$
11.  $f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$ ,  $[-2, 2]$
12.  $f(x) = \sin 2x$ ,  $[-\pi, \pi]$

**Usar el teorema del valor medio** En los ejercicios 13-18, determine si el teorema del valor medio puede o no ser aplicado a la función  $f$  en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Si se puede aplicar el teorema, encuentre todos los valores de  $c$  en el intervalo  $(a, b)$  tales que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Si el teorema no puede ser aplicado, explique por qué.

13.  $f(x) = x^{2/3}$ ,  $[1, 8]$
14.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $[1, 4]$
15.  $f(x) = |5 - x|$ ,  $[2, 6]$
16.  $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$ ,  $[-1, 1]$
17.  $f(x) = x - \cos x$ ,  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
18.  $f(x) = \sqrt{x} - 2x$ ,  $[0, 4]$

19. **Teorema del valor medio** ¿Puede aplicarse el teorema del valor medio a la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

en el intervalo  $[-2, 1]$ ? Explique.

20. **Usar el teorema del valor medio**

- (a) Para la función  $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ , determine el valor de  $c$  garantizado por el teorema del valor medio en el intervalo  $[x_1, x_2]$
- (b) Demuestre el resultado del ejercicio del inciso (a) para  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$  en el intervalo  $[0, 4]$

**Intervalos en los que  $f$  crece o decrece** En los ejercicios 21-26, determine los puntos críticos (si los hay) y los intervalos abiertos sobre los cuales la función es creciente o decreciente.

21.  $f(x) = x^2 + 3x - 12$
22.  $h(x) = (x + 2)^{1/3} + 8$
23.  $f(x) = (x - 1)^2(x - 3)$
24.  $g(x) = (x + 1)^3$
25.  $h(x) = \sqrt{x}(x - 3)$ ,  $x > 0$
26.  $f(x) = \sin x + \cos x$ ,  $[0, 2\pi]$

**Aplicar la primera derivada** En los ejercicios 27-34, (a) determine los números críticos de  $f$  (si los hay), (b) encuentre el (los) intervalo(s) abierto(s) sobre los que la función es creciente o decreciente, (c) aplique el criterio de la primera derivada para encontrar los extremos relativos, y (d) utilice una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

27.  $f(x) = x^2 - 6x + 5$
28.  $f(x) = 4x^3 - 5x$
29.  $h(t) = \frac{1}{4}t^4 - 8t$
30.  $g(x) = \frac{x^3 - 8x}{4}$
31.  $f(x) = \frac{x + 4}{x^2}$
32.  $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}$
33.  $f(x) = \cos x - \sin x$ ,  $(0, 2\pi)$
34.  $g(x) = \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2} - 1\right)$ ,  $[0, 4]$

**Determinar los puntos de inflexión** En los ejercicios 35-40, determine los puntos de inflexión y analice la concavidad de la gráfica de la función.

35.  $f(x) = x^3 - 9x^2$
36.  $f(x) = 6x^4 - x^2$
37.  $g(x) = x\sqrt{x + 5}$
38.  $f(x) = 3x - 5x^3$
39.  $f(x) = x + \cos x$ ,  $[0, 2\pi]$
40.  $f(x) = \tan \frac{x}{4}$ ,  $(0, 2\pi)$

**Usar la segunda derivada** En los ejercicios 41-46, utilice el criterio de la segunda derivada para encontrar todos los extremos relativos.

41.  $f(x) = (x + 9)^2$
42.  $f(x) = 2x^3 + 11x^2 - 8x - 12$
43.  $g(x) = 2x^2(1 - x^2)$
44.  $h(t) = t - 4\sqrt{t + 1}$

45.  $f(x) = 2x + \frac{18}{x}$

46.  $h(x) = x - 2 \cos x, [0, 4\pi]$

**Piénselo** En los ejercicios 47 y 48, dibuje la gráfica de una función  $f$  que tenga las características indicadas.

47.  $f(0) = f(6) = 0$

48.  $f(0) = 4, f(6) = 0$

$f'(3) = f'(5) = 0$

$f'(x) < 0$  para  $x < 2$  o  $x > 4$

$f'(x) > 0$  para  $x < 3$

$f'(2)$  no existe

$f'(x) > 0$  para  $3 < x < 5$

$f'(4) = 0$

$f'(x) < 0$  para  $x > 5$

$f'(x) > 0$  para  $2 < x < 4$

$f''(x) < 0$  para  $x < 3$  o  $x > 4$

$f''(x) < 0$  para  $x \neq 2$

$f''(x) > 0$  para  $3 < x < 4$

49. **Redacción** El titular de un periódico señala que "La tasa de crecimiento de déficit nacional está decreciendo". ¿Qué es lo que significa esto? ¿Qué implica este comentario en cuanto a la gráfica de déficit como una función del tiempo?

50. **Costo de inventario** El costo del inventario depende de los costos de pedidos y almacenamiento de acuerdo con el modelo de inventario.

$$C = \left(\frac{Q}{x}\right)s + \left(\frac{x}{2}\right)r.$$

Determine el tamaño de pedido que minimizará el costo, suponiendo que las ventas ocurren a una tasa constante,  $Q$  es el número de unidades vendidas por año,  $r$  es el costo de almacenamiento de una unidad durante 1 año,  $s$  es el costo de colocar un pedido y  $x$  es el número de unidades por pedido.

51. **Modelar datos** Los gastos por la defensa nacional  $D$  (en miles de millones de dólares) para años determinados de 1970 a 2005 se muestran en la tabla, donde  $t$  es el tiempo en años, con  $t = 0$  correspondiente a 1970. (Fuente: U.S. Office of Management and Budget)

$t$	0	5	10	15	20
$D$	81.7	86.5	134.0	252.7	299.3

$t$	25	30	35	40
$D$	272.1	294.4	495.3	693.6

(a) Utilice las funciones de regresión de una herramienta de graficación para ajustar un modelo de la forma

$$D = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$$

a los datos.

(b) Utilice una herramienta de graficación para dibujar los datos y representar el modelo.

(c) Para el año que se muestra en la tabla, ¿cuándo indica el modelo que el gasto para la defensa nacional es un máximo?

(d) Para los años que se indican en la tabla, ¿cuándo indica el modelo que el gasto para la defensa nacional está creciendo a mayor velocidad?

52. **Modelar datos** El gerente de un almacén registra las ventas anuales  $S$  (en miles de dólares) de un producto durante un periodo de 7 años, como se indica en la tabla, donde  $t$  es el tiempo en años, con  $t = 6$  correspondiendo a 2006.

$t$	6	7	8	9	10	11	12
$S$	5.4	6.9	11.5	15.5	19.0	22.0	23.6

(a) Utilice las capacidades de regresión de una herramienta de graficación para determinar un modelo de la forma

$$S = at^3 + bt^2 + ct + d$$

para los datos.

(b) Utilice una herramienta de graficación para dibujar los datos y representar el modelo.

(c) Utilice el cálculo para determinar el tiempo  $t$  en el que las ventas estuvieron creciendo a la mayor velocidad.

(d) ¿Piensa que el modelo sería exacto para predecir las ventas futuras? Explique.

**Determinar un límite** En los ejercicios 53-62, determine el límite.

53.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(8 + \frac{1}{x}\right)$

54.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 4x}{x + 1}$

55.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{3x^2 + 5}$

56.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{x^4 + 3}$

57.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x + 5}$

58.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{-2x}$

59.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 \cos x}{x}$

60.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 2}}$

61.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{x + \cos x}$

62.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2 \sin x}$

53. **Asíntotas horizontales** En los ejercicios 63-66, utilice una herramienta de graficación para identificar las asíntotas horizontales.

63.  $f(x) = \frac{3}{x} - 2$

64.  $g(x) = \frac{5x^2}{x^2 + 2}$

65.  $h(x) = \frac{2x + 3}{x - 4}$

66.  $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

**Analizar la gráfica de una función** En los ejercicios 67-76, analice y dibuje una función gráfica. Marque las intersecciones, extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. Use una herramienta de graficación para verificar sus resultados.

67.  $f(x) = 4x - x^2$

68.  $f(x) = 4x^3 - x^4$

69.  $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$

70.  $f(x) = (x^2 - 4)^2$

71.  $f(x) = x^{1/3}(x + 3)^{2/3}$

72.  $f(x) = (x - 3)(x + 2)^3$

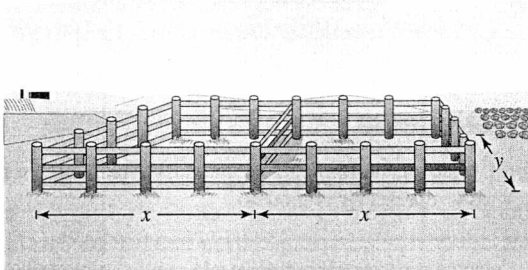
73.  $f(x) = \frac{5 - 3x}{x - 2}$

74.  $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$

75.  $f(x) = x^3 + x + \frac{4}{x}$

76.  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

77. **Área máxima** Un ranchero tiene 400 pies de cerca para encerrar dos corrales rectangulares adyacentes (vea la figura). ¿Qué dimensiones debe utilizar de manera que el área encerrada sea máxima?



78. **Área máxima** Encuentre las dimensiones del rectángulo de área máxima, con lados paralelos a los ejes de coordenadas, que puede inscribirse en la elipse dada por

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

79. **Longitud mínima** Un triángulo rectángulo en el primer cuadrante tiene los ejes de coordenadas como lados, y la hipotenusa pasa por el punto (1, 8). Encuentre los vértices del triángulo de modo tal que la longitud de la hipotenusa sea mínima.

80. **Longitud mínima** Hay que apuntalar la fachada de un edificio con una viga que debe pasar sobre una cerca paralela de 5 pies de altura y a 4 pies de distancia del edificio. Determine la longitud de la viga más corta que puede usarse.

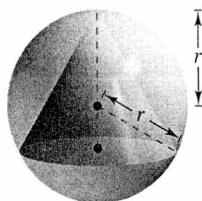
81. **Longitud máxima** Calcule la longitud de la tubería más larga que se puede transportar sin inclinarla por dos pasillos con 4 y 6 pies de ancho que forman esquina en ángulo recto.

82. **Longitud máxima** Un pasillo con 6 pies de ancho se junta con otro de 9 pies de ancho formando un ángulo recto. Encuentre la longitud del tubo más largo que puede transportarse sin inclinarse alrededor de esta esquina. [Sugerencia: Si  $L$  es la longitud de la tubería, demuestre que

$$L = 6 \csc \theta + 9 \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre el tubo y la pared del pasillo más estrecho.]

83. **Volumen máximo** Encuentre el mayor volumen de un cono circular recto que puede ser inscrito en una esfera de radio  $r$ .



84. **Volumen máximo** Encuentre el mayor volumen de un cilindro circular que se puede inscribir en una esfera de radio  $r$ .

**Usar el método de Newton** En los ejercicios 85-88, aproxime el (los) cero(s) de la función. Utilice el método de Newton y continúe el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de 0.001. A continuación, busque el (los) cero(s) utilizando una herramienta de graficación y compare los resultados.

85.  $f(x) = x^3 - 3x - 1$

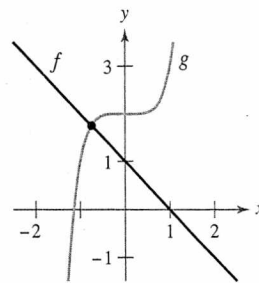
86.  $f(x) = x^3 + 2x + 1$

87.  $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 2$

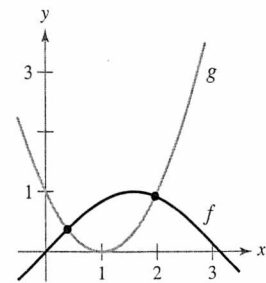
88.  $f(x) = 3\sqrt{x-1} - x$

**Encontrar los puntos de intersección** En los ejercicios 89 y 90, aplique el método de Newton para aproximar el (los) valor(es)  $x$  del punto indicado de intersección de las dos gráficas. Continúe el proceso hasta dos aproximaciones sucesivas diferidas en menos de 0.001. [Sugerencia: Sea  $h(x) = f(x) - g(x)$ .]

89.  $f(x) = 1 - x$   
 $g(x) = x^5 + 2$



90.  $f(x) = \sin x$   
 $g(x) = x^2 - 2x + 1$



**Comparar  $\Delta y$  y  $dy$**  En los ejercicios 91 y 92, utilice la información para evaluar y comparar  $\Delta y$  y  $dy$ .

Función	Valores $x$	Diferenciales de $x$
91. $y = 0.5x^2$	$x = 3$	$\Delta x = dx = 0.01$
92. $y = x^3 - 6x$	$x = 2$	$\Delta x = dx = 0.1$

**Encontrar la diferencial** En los ejercicios 93 y 94, encuentre la diferencial  $dy$  de la función dada.

93.  $y = x(1 - \cos x)$       94.  $y = \sqrt{36 - x^2}$

95. **Volumen y superficie** El radio de una esfera se mide como 9 centímetros, con un error posible de 0.025 centímetros.

- (a) Use diferenciales para aproximar el error propagado posible al calcular el volumen de la esfera.
- (b) Use diferenciales para aproximar el error propagado posible en el cálculo de la superficie de la esfera.
- (c) Calcule el porcentaje de error en los incisos (a) y (b).

96. **Función de demanda** Una compañía descubre que la demanda de uno de sus productos es

$$p = 75 - \frac{1}{4}x$$

donde  $p$  es el precio en dólares y  $x$  es el número de unidades. Si  $x$  cambia de 7 a 8, encuentre y compare los valores de  $\Delta p$  y  $dp$ .

# Solución de problemas

Consulte [CalcChat.com](http://CalcChat.com) para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

1. **Extremo relativo** Represente el polinomio de cuarto grado

$$p(x) = x^4 + ax^2 + 1$$

para diversos valores de la constante  $a$ .

- Determine el valor de  $a$  para el cual  $p$  tiene exactamente un mínimo relativo.
- Determine los valores de  $a$  para los cuales  $p$  tiene exactamente un máximo relativo.
- Determine los valores de  $a$  para los cuales  $p$  tiene exactamente dos mínimos relativos.
- Demuestre que la gráfica de  $p$  no puede tener exactamente dos extremos relativos.

2. **Extremo relativo**

- Represente el polinomio de cuarto grado  $p(x) = ax^4 - 6x^2$  para  $a = 3, -2, -1, 0, 1, 2$ . ¿Para qué valores de la constante  $a$  tiene  $p$  un mínimo o máximo relativo?
- Demuestre que  $p$  tiene un máximo relativo para todos los valores de la constante  $a$ .
- Determine analíticamente los valores de  $a$  para los cuales  $p$  tiene un mínimo relativo.
- Sea  $(x, y) = (x, p(x))$  un extremo relativo de  $p$ . Demuestre que  $(x, y)$  se encuentra en la gráfica de  $y = -3x^2$ . Verifique gráficamente este resultado representando  $y = -3x^2$  junto con las siete curvas del inciso (a).

3. **Mínimo relativa** Sea

$$f(x) = \frac{c}{x} + x^2.$$

Determine todos los valores de la constante  $c$  tales que  $f$  tiene un mínimo relativo, pero no un máximo relativo.

4. **Puntos de inflexión**

- Sea  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , un polinomio cuadrático. ¿Cuántos puntos de inflexión tiene la gráfica de  $f$ ?
- Sea  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ,  $a \neq 0$ , un polinomio cúbico. ¿Cuántos puntos de inflexión tiene la gráfica de  $f$ ?
- Suponga que la función  $y = f(x)$  satisface la ecuación

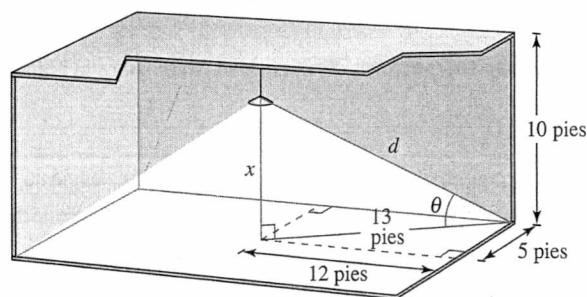
$$\frac{dy}{dx} = ky \left( 1 - \frac{y}{L} \right)$$

donde  $k$  y  $L$  son constantes positivas. Demuestre que la gráfica de  $f$  tiene un punto de inflexión en el punto donde  $y = L/2$ . (Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación diferencial logística**.)

5. **Teorema del valor medio extendido** Demuestre el siguiente **teorema de valor medio extendido**. Si  $f$  y  $f'$  son continuas en el intervalo cerrado  $[a, b]$ , y si  $f''$  existe en el intervalo abierto  $(a, b)$ , entonces existe un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{1}{2}f''(c)(b - a)^2.$$

6. **Iluminación** La cantidad de iluminación de una superficie es proporcional a la intensidad de la fuente luminosa, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde la fuente luminosa, y proporcional a  $\sin \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo al cual la luz incide sobre la superficie. Un cuarto rectangular mide 10 por 24 pies, con un techo de 10 pies (vea la figura). Determine la altura a la cual debe ubicarse la luz para permitir que las esquinas del piso reciban la mayor cantidad posible de luz.



7. **Distancia máxima** Considere un cuarto en la forma de un cubo, de 4 metros de lado. Un insecto en el punto  $P$  desea desplazarse hasta el punto  $Q$  en la esquina opuesta, como se indica en la figura. Emplee el cálculo para determinar la trayectoria más corta. ¿Puede resolver el problema sin el cálculo? Explique (Sugerencia: Considere las dos paredes como una pared.)

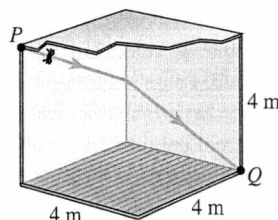


Figura para 7

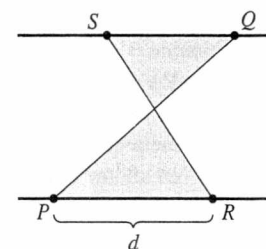


Figura para 8

8. **Áreas de triángulos** La recta que une  $P$  y  $Q$  cruza las dos rectas paralelas, como se muestra en la figura. El punto  $R$  está a  $d$  unidades de  $P$ . ¿A qué distancia de  $Q$  debe situarse el punto  $S$  de manera que la suma de las áreas de los dos triángulos sombreados sea un mínimo? ¿De qué modo la suma será un máximo?
9. **Teorema del valor medio** Determine los valores  $a$ ,  $b$  y  $c$  de manera que la función  $f$  satisfaga la hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo  $[0, 3]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ ax + b, & 0 < x \leq 1 \\ x^2 + 4x + c, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

10. **Teorema del valor medio** Determine los valores  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  de manera que la función  $f$  satisfaga la hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo  $[-1, 2]$

$$f(x) = \begin{cases} a, & x = -1 \\ 2, & -1 < x \leq 0 \\ bx^2 + c, & 0 < x \leq 1 \\ dx + 4, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

**11. Demostración** Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas sobre  $[a, b]$  y derivables sobre  $(a, b)$ . Demuestre que si  $f(a) = g(a)$  y  $g'(x) > f'(x)$  para toda  $x$  en  $(a, b)$  entonces  $g(b) > f(b)$ .

**12. Demostración**

(a) Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ .

(b) Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ .

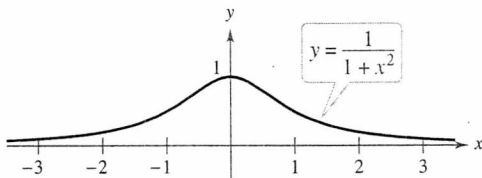
(c) Sea  $L$  un número real. Demuestre que si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ , entonces

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right) = L.$$

**13. Rectas tangentes** Encuentre el punto sobre la gráfica de

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

(vea la figura) donde la recta tangente tiene la pendiente más grande, y el punto donde la recta tangente tiene la pendiente menor.



**14. Distancia de frenado** El departamento de policía debe determinar el límite de velocidad sobre un puente de manera tal que la tasa de flujo de automóviles sea máxima por unidad de tiempo. Cuanto mayor es el límite de velocidad, tanto más separados deben estar los automóviles para mantener una distancia de frenado segura. Los datos experimentales respecto a la distancia de frenado  $d$  (en metros) para diversas velocidades  $v$  (en kilómetros por hora) se indican en la tabla.

$v$	20	40	60	80	100
$d$	5.1	13.7	27.2	44.2	66.4

(a) Convierta las velocidades  $v$  en la tabla a velocidades  $s$  en metros por segundo. Utilice las capacidades de regresión de la calculadora para determinar un modelo de la forma  $d(s) = as^2 + bs + c$  para los datos.

(b) Considere dos vehículos consecutivos de longitud promedio igual a 5.5 metros, que viajan a una velocidad segura sobre el puente. Sea  $T$  la diferencia entre los tiempos (en segundos) cuando los parachoques frontales de los vehículos pasan por un punto dado sobre el puente. Verifique que esta diferencia de tiempos está dada por

$$T = \frac{d(s)}{s} + \frac{5.5}{s}.$$

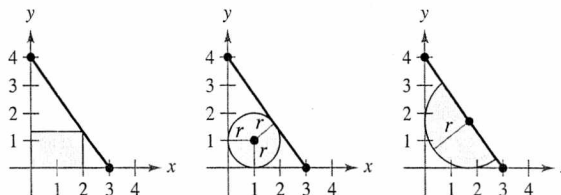
(c) Utilice una herramienta de graficación para representar la función  $T$  y estimar la velocidad  $s$  que minimiza el tiempo entre vehículos.

(d) Utilice cálculo para determinar la velocidad que minimiza  $T$ . ¿Cuál es el valor mínimo de  $T$ ? Convierta la velocidad requerida a kilómetros por hora.

(e) Determine la distancia óptima entre vehículos para el límite de velocidad máxima determinado en el inciso (d).

**15. Teorema de Darboux** Demuestre el teorema de Darboux: Sea  $f$  diferenciable en el intervalo cerrado  $[a, b]$  de tal manera que  $f'(a) = y_1$  y  $f'(b) = y_2$ . Si  $d$  se encuentra entre  $y_1$  y  $y_2$ , entonces existe  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $f'(c) = d$ .

**16. Área máxima** Las figuras muestran un rectángulo, un círculo y un semicírculo inscritos en un triángulo delimitado por los ejes de coordenadas y la porción del primer cuadrante de la recta con intersecciones  $(3, 0)$  y  $(4, 0)$ . Encuentre las dimensiones de cada figura inscrita de manera tal que su área sea máxima. Establezca qué tipo de cálculo fue útil para determinar las dimensiones requeridas. Explique su razonamiento.



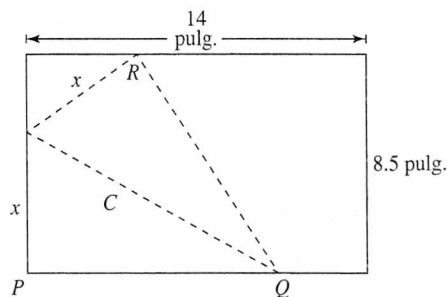
**17. Punto de inflexión** Demuestre que el polinomio cúbico  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  tiene exactamente un punto de inflexión  $(x_0, y_0)$  donde

$$x_0 = \frac{-b}{3a} \quad \text{y} \quad y_0 = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d.$$

Utilice esta fórmula para hallar el punto de inflexión de

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 2.$$

**18. Longitud mínima** Una hoja de papel de tamaño oficio (8.5 pulgadas por 14 pulgadas) se dobla de manera que la esquina  $P$  toca el borde opuesto de 14 pulgadas en  $R$  (vea la figura). (Nota:  $PQ = \sqrt{C^2 - x^2}$ .)



(a) Demuestre que  $C^2 = \frac{2x^3}{2x - 8.5}$ .

(b) ¿Cuál es el dominio de  $C$ ?

(c) Determine el valor de  $x$  que minimiza a  $C$ .

(d) Determine la longitud mínima  $C$ .

**19. Aproximación cuadrática** El polinomio

$$P(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2$$

es la aproximación cuadrática de la función  $f$  en  $(a, f(a))$  cuando  $P(a) = f(a)$ ,  $P'(a) = f'(a)$  y  $P''(a) = f''(a)$ .

(a) Encuentre la aproximación cuadrática de

$$f(x) = \frac{x}{x + 1}$$

en  $(0, 0)$ .

**19.** Utilice una herramienta de graficación para representar  $P(x)$  y  $f(x)$  en la misma ventana de observación.

## ÁLGEBRA

### Ceros y factores de un polinomio

Sea  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  un polinomio. Si  $p(a) = 0$ , entonces  $a$  es un *cero* del polinomio y una solución de la ecuación  $p(x) = 0$ . Además,  $(x - a)$  es un *factor* del polinomio.

### Teorema fundamental del álgebra

Un polinomio de grado  $n$  tiene  $n$  ceros (no necesariamente distintos). Aunque todos estos ceros pueden ser imaginarios, un polinomio real de grado impar tendrá por lo menos un cero real.

### Fórmula cuadrática

Si  $p(x) = ax^2 + bx + c$  y  $0 \leq b^2 - 4ac$ , entonces los ceros reales de  $p$  son  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

### Factores especiales

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$$

$$x^4 - a^4 = (x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$$

### Teorema del binomio

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x - y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \dots + nxy^{n-1} + y^n$$

$$(x - y)^n = x^n - nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 - \dots \pm nxy^{n-1} \mp y^n$$

### Teorema del cero racional

Si  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  tiene coeficientes enteros, entonces todo *cero racional* de  $p$  es de la forma  $x = r/s$ , donde  $r$  es un factor de  $a_0$  y  $s$  es un factor de  $a_n$ .

### Factorización por agrupamiento

$$acx^3 + adx^2 + bcx + bd = ax^2(cx + d) + b(cx + d) = (ax^2 + b)(cx + d)$$

### Operaciones aritméticas

$$ab + ac = a(b + c)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

$$a\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{a - b}{c - d} = \frac{b - a}{d - c}$$

$$\frac{ab + ac}{a} = b + c$$

### Exponentes y radicales

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\sqrt{a} = a^{1/2}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

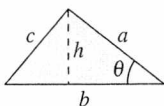
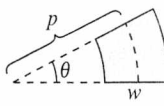
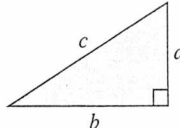
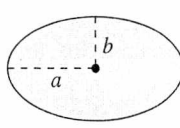
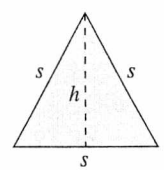
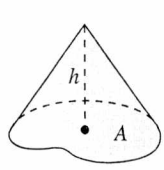
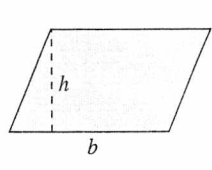
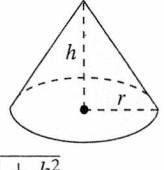
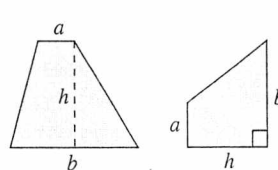
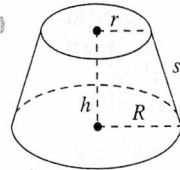
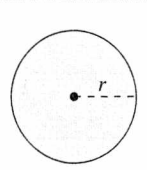
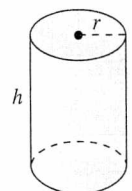
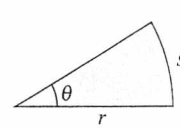
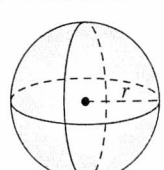
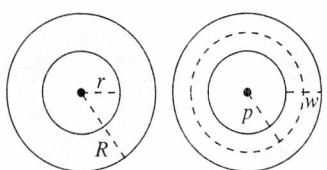
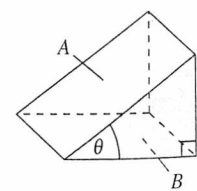
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

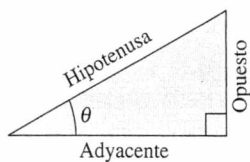
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

# FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

<p><b>Triángulo</b></p> <p><math>h = a \operatorname{sen} \theta</math></p> <p>Área = <math>\frac{1}{2}bh</math></p> <p>(Ley de los cosenos)</p> <p><math>c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta</math></p> 	<p><b>Sector de un anillo circular</b></p> <p>(<math>p</math> = radio promedio, <math>w</math> = ancho del anillo, <math>\theta</math> en radianes)</p> <p>Área = <math>\theta pw</math></p> 
<p><b>Triángulo rectángulo</b></p> <p>(Teorema de Pitágoras)</p> <p><math>c^2 = a^2 + b^2</math></p> 	<p><b>Elipse</b></p> <p>Área = <math>\pi ab</math></p> <p>Circunferencia <math>\approx 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}</math></p> 
<p><b>Triángulo equilátero</b></p> <p><math>h = \frac{\sqrt{3}s}{2}</math></p> <p>Área = <math>\frac{\sqrt{3}s^2}{4}</math></p> 	<p><b>Cono</b></p> <p>(<math>A</math> = área de la base)</p> <p>Volumen = <math>\frac{Ah}{3}</math></p> 
<p><b>Paralelogramo</b></p> <p>Área = <math>bh</math></p> 	<p><b>Cono circular recto</b></p> <p>Volumen = <math>\frac{\pi r^2 h}{3}</math></p> <p>Área de la superficie lateral = <math>\pi r \sqrt{r^2 + h^2}</math></p> 
<p><b>Trapezoide</b></p> <p>Área = <math>\frac{h}{2}(a + b)</math></p> 	<p><b>Tronco de un cono circular recto</b></p> <p>Volumen = <math>\frac{\pi(r^2 + rR + R^2)h}{3}</math></p> <p>Área de la superficie lateral = <math>\pi s(R + r)</math></p> 
<p><b>Círculo</b></p> <p>Área = <math>\pi r^2</math></p> <p>Circunferencia = <math>2\pi r</math></p> 	<p><b>Cilindro circular recto</b></p> <p>Volumen = <math>\pi r^2 h</math></p> <p>Área de la superficie lateral = <math>2\pi r h</math></p> 
<p><b>Sector circular</b></p> <p>(<math>\theta</math> en radianes)</p> <p>Área = <math>\frac{\theta r^2}{2}</math></p> <p><math>s = r\theta</math></p> 	<p><b>Esfera</b></p> <p>Volumen = <math>\frac{4}{3}\pi r^3</math></p> <p>Área de la superficie = <math>4\pi r^2</math></p> 
<p><b>Anillo circular</b></p> <p>(<math>p</math> = radio promedio, <math>w</math> = ancho del anillo)</p> <p>Área = <math>\pi(R^2 - r^2)</math> <math>= 2\pi pw</math></p> 	<p><b>Cuña</b></p> <p>(<math>A</math> = área de la cara superior, <math>B</math> = área de la base)</p> <p><math>A = B \sec \theta</math></p> 

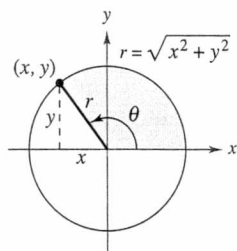
## Definiciones de las seis funciones trigonométricas

Definiciones para un triángulo rectángulo, donde  $0 < \theta < \pi/2$ .

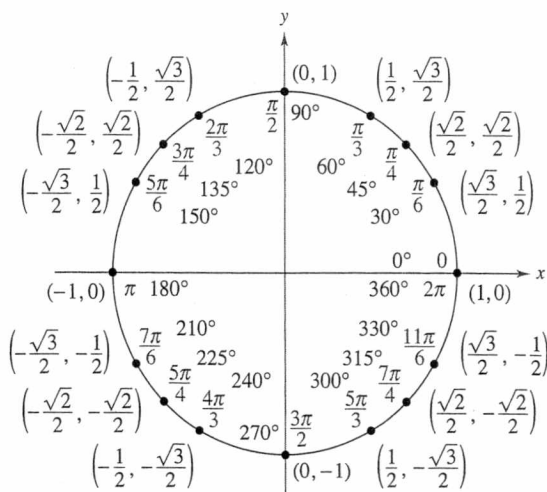


$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\text{op}}{\text{hip}} & \csc \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{op}} \\ \cos \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}} & \sec \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} \\ \tan \theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} & \cot \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}} \end{aligned}$$

Definiciones de las funciones circulares, donde  $\theta$  es cualquier ángulo.



$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{r} & \csc \theta &= \frac{r}{y} \\ \cos \theta &= \frac{x}{r} & \sec \theta &= \frac{r}{x} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} & \cot \theta &= \frac{x}{y} \end{aligned}$$



## Identidades recíprocas

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{1}{\csc x} & \sec x &= \frac{1}{\cos x} & \tan x &= \frac{1}{\cot x} \\ \csc x &= \frac{1}{\sin x} & \cos x &= \frac{1}{\sec x} & \cot x &= \frac{1}{\tan x} \end{aligned}$$

## Identidades para la tangente y la cotangente

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

## Identidades pitagóricas

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ 1 + \tan^2 x &= \sec^2 x & 1 + \cot^2 x &= \csc^2 x \end{aligned}$$

## Identidades para cofunciones

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sec x & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cot x \\ \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \csc x & \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \tan x \end{aligned}$$

## Fórmulas de reducción

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x & \cos(-x) &= \cos x \\ \csc(-x) &= -\csc x & \tan(-x) &= -\tan x \\ \sec(-x) &= \sec x & \cot(-x) &= -\cot x \end{aligned}$$

## Fórmulas para la suma y la diferencia

$$\begin{aligned} \sin(u \pm v) &= \sin u \cos v \pm \cos u \sin v \\ \cos(u \pm v) &= \cos u \cos v \mp \sin u \sin v \\ \tan(u \pm v) &= \frac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \tan v} \end{aligned}$$

## Fórmulas para ángulos dobles

$$\begin{aligned} \sin 2u &= 2 \sin u \cos u \\ \cos 2u &= \cos^2 u - \sin^2 u = 2 \cos^2 u - 1 = 1 - 2 \sin^2 u \\ \tan 2u &= \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u} \end{aligned}$$

## Fórmulas para la reducción de potencias

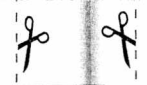
$$\begin{aligned} \sin^2 u &= \frac{1 - \cos 2u}{2} \\ \cos^2 u &= \frac{1 + \cos 2u}{2} \\ \tan^2 u &= \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u} \end{aligned}$$

## Fórmulas suma a producto

$$\begin{aligned} \sin u + \sin v &= 2 \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \cos\left(\frac{u-v}{2}\right) \\ \sin u - \sin v &= 2 \cos\left(\frac{u+v}{2}\right) \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \\ \cos u + \cos v &= 2 \cos\left(\frac{u+v}{2}\right) \cos\left(\frac{u-v}{2}\right) \\ \cos u - \cos v &= -2 \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \end{aligned}$$

## Fórmulas producto a suma

$$\begin{aligned} \sin u \sin v &= \frac{1}{2} [\cos(u-v) - \cos(u+v)] \\ \cos u \cos v &= \frac{1}{2} [\cos(u-v) + \cos(u+v)] \\ \sin u \cos v &= \frac{1}{2} [\sin(u+v) + \sin(u-v)] \\ \cos u \sin v &= \frac{1}{2} [\sin(u+v) - \sin(u-v)] \end{aligned}$$



**Reglas básicas de diferenciación**

- |   |  |   |
|---|--|---|
| 1. $\frac{d}{dx}[cu] = cu'$                                       | 2. $\frac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$                             | 3. $\frac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$                                       |
| 4. $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{vu' - uv'}{v^2}$ | 5. $\frac{d}{dx}[c] = 0$   | 6. $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$                                     |
| 7. $\frac{d}{dx}[x] = 1$  | 8. $\frac{d}{dx}[ u ] = \frac{u}{ u }(u'), \quad u \neq 0$         | 9. $\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{u'}{u}$                                 |
| 10. $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u u'$                                  | 11. $\frac{d}{dx}[\log_a u] = \frac{u'}{(\ln a)u}$                 | 12. $\frac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u u'$                                 |
| 13. $\frac{d}{dx}[\text{sen } u] = (\cos u)u'$                    | 14. $\frac{d}{dx}[\cos u] = -(\text{sen } u)u'$                    | 15. $\frac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)u'$                               |
| 16. $\frac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u)u'$                        | 17. $\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \tan u)u'$                     | 18. $\frac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u \cot u)u'$                         |
| 19. $\frac{d}{dx}[\arcsen u] = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$           | 20. $\frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$           | 21. $\frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{u'}{1+u^2}$                        |
| 22. $\frac{d}{dx}[\text{arccot } u] = \frac{-u'}{1+u^2}$          | 23. $\frac{d}{dx}[\text{arcsec } u] = \frac{u'}{ u \sqrt{u^2-1}}$  | 24. $\frac{d}{dx}[\text{arccsc } u] = \frac{-u'}{ u \sqrt{u^2-1}}$      |
| 25. $\frac{d}{dx}[\text{senh } u] = (\cosh u)u'$                  | 26. $\frac{d}{dx}[\cosh u] = (\text{senh } u)u'$                   | 27. $\frac{d}{dx}[\tanh u] = (\text{sech}^2 u)u'$                       |
| 28. $\frac{d}{dx}[\text{coth } u] = -(\text{csch}^2 u)u'$         | 29. $\frac{d}{dx}[\text{sech } u] = -(\text{sech } u \tanh u)u'$   | 30. $\frac{d}{dx}[\text{csch } u] = -(\text{csch } u \text{coth } u)u'$ |
| 31. $\frac{d}{dx}[\text{senh}^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$  | 32. $\frac{d}{dx}[\cosh^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$         | 33. $\frac{d}{dx}[\tanh^{-1} u] = \frac{u'}{1-u^2}$                     |
| 34. $\frac{d}{dx}[\text{coth}^{-1} u] = \frac{u'}{1-u^2}$         | 35. $\frac{d}{dx}[\text{sech}^{-1} u] = \frac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}}$ | 36. $\frac{d}{dx}[\text{csch}^{-1} u] = \frac{-u'}{ u \sqrt{1+u^2}}$    |

**Fórmulas básicas de integración**

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\int kf(u) du = k \int f(u) du$                                   | 2. $\int [f(u) \pm g(u)] du = \int f(u) du \pm \int g(u) du$                          |
| 3. $\int du = u + C$  | 4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$                           |
| 5. $\int \frac{du}{u} = \ln u  + C$                                   | 6. $\int e^u du = e^u + C$  |
| 7. $\int a^u du = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^u + C$                | 8. $\int \text{sen } u du = -\cos u + C$  |
| 9. $\int \cos u du = \text{sen } u + C$                               | 10. $\int \tan u du = -\ln \cos u  + C$   |
| 11. $\int \cot u du = \ln \text{sen } u  + C$                         | 12. $\int \sec u du = \ln \sec u + \tan u  + C$                                       |
| 13. $\int \csc u du = -\ln \csc u + \cot u  + C$                      | 14. $\int \sec^2 u du = \tan u + C$   |
| 15. $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$                                  | 16. $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$  |
| 17. $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$                             | 18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsen \frac{u}{a} + C$                      |
| 19. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$ | 20. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{arcsec} \frac{ u }{a} + C$ |

Formas que implican  $u^n$

$$1. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$2. \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$$

Formas que implican  $a + bu$

$$3. \int \frac{u}{a+bu} du = \frac{1}{b^2}(bu - a \ln|a+bu|) + C$$

$$4. \int \frac{u}{(a+bu)^2} du = \frac{1}{b^2} \left( \frac{a}{a+bu} + \ln|a+bu| \right) + C$$

$$5. \int \frac{u}{(a+bu)^n} du = \frac{1}{b^2} \left[ \frac{-1}{(n-2)(a+bu)^{n-2}} + \frac{a}{(n-1)(a+bu)^{n-1}} \right] + C, n \neq 1, 2$$

$$6. \int \frac{u^2}{a+bu} du = \frac{1}{b^3} \left[ -\frac{bu}{2}(2a-bu) + a^2 \ln|a+bu| \right] + C$$

$$7. \int \frac{u^2}{(a+bu)^2} du = \frac{1}{b^3} \left( bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a \ln|a+bu| \right) + C$$

$$8. \int \frac{u^2}{(a+bu)^3} du = \frac{1}{b^3} \left[ \frac{2a}{a+bu} - \frac{a^2}{2(a+bu)^2} + \ln|a+bu| \right] + C$$

$$9. \int \frac{u^2}{(a+bu)^n} du = \frac{1}{b^3} \left[ \frac{-1}{(n-3)(a+bu)^{n-3}} + \frac{2a}{(n-2)(a+bu)^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)(a+bu)^{n-1}} \right] + C, n \neq 1, 2, 3$$

$$10. \int \frac{1}{u(a+bu)} du = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a+bu} \right| + C$$

$$11. \int \frac{1}{u(a+bu)^2} du = \frac{1}{a} \left( \frac{1}{a+bu} + \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a+bu} \right| \right) + C$$

$$12. \int \frac{1}{u^2(a+bu)} du = -\frac{1}{a} \left( \frac{1}{u} + \frac{b}{a} \ln \left| \frac{u}{a+bu} \right| \right) + C$$

$$13. \int \frac{1}{u^2(a+bu)^2} du = -\frac{1}{a^2} \left[ \frac{a+2bu}{u(a+bu)} + \frac{2b}{a} \ln \left| \frac{u}{a+bu} \right| \right] + C$$

Formas que implican  $a + bu + cu^2, b^2 \neq 4ac$

$$14. \int \frac{1}{a+bu+cu^2} du = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan \frac{2cu+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C, & b^2 < 4ac \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \left| \frac{2cu+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cu+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| + C, & b^2 > 4ac \end{cases}$$

$$15. \int \frac{u}{a+bu+cu^2} du = \frac{1}{2c} \left( \ln|a+bu+cu^2| - b \int \frac{1}{a+bu+cu^2} du \right)$$

Formas que implican  $\sqrt{a+bu}$

$$16. \int u^n \sqrt{a+bu} du = \frac{2}{b(2n+3)} \left[ u^n (a+bu)^{3/2} - na \int u^{n-1} \sqrt{a+bu} du \right]$$

$$17. \int \frac{1}{u\sqrt{a+bu}} du = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bu} + \sqrt{a}} \right| + C, & a > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, & a < 0 \end{cases}$$

$$18. \int \frac{1}{u^n \sqrt{a+bu}} du = \frac{-1}{a(n-1)} \left[ \frac{\sqrt{a+bu}}{u^{n-1}} + \frac{(2n-3)b}{2} \int \frac{1}{u^{n-1} \sqrt{a+bu}} du \right], n \neq 1$$

$$19. \int \frac{\sqrt{a+bu}}{u} du = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{1}{u\sqrt{a+bu}} du$$

$$20. \int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^n} du = \frac{-1}{a(n-1)} \left[ \frac{(a+bu)^{3/2}}{u^{n-1}} + \frac{(2n-5)b}{2} \int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^{n-1}} du \right], n \neq 1$$

$$21. \int \frac{u}{\sqrt{a+bu}} du = \frac{-2(2a-bu)}{3b^2} \sqrt{a+bu} + C$$

$$22. \int \frac{u^n}{\sqrt{a+bu}} du = \frac{2}{(2n+1)b} \left( u^n \sqrt{a+bu} - na \int \frac{u^{n-1}}{\sqrt{a+bu}} du \right)$$

Formas que implican  $a^2 \pm u^2$ ,  $a > 0$

$$23. \int \frac{1}{a^2+u^2} du = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$$

$$24. \int \frac{1}{u^2-a^2} du = - \int \frac{1}{a^2-u^2} du = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

$$25. \int \frac{1}{(a^2 \pm u^2)^n} du = \frac{1}{2a^2(n-1)} \left[ \frac{u}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{1}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} du \right], n \neq 1$$

Formas que implican  $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ ,  $a > 0$

$$26. \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{1}{2} \left( u \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| \right) + C$$

$$27. \int u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{1}{8} \left[ u(2u^2 \pm a^2) \sqrt{u^2 \pm a^2} - a^4 \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| \right] + C$$

$$28. \int \frac{\sqrt{u^2+a^2}}{u} du = \sqrt{u^2+a^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2+a^2}}{u} \right| + C$$

$$29. \int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} du = \sqrt{u^2-a^2} - a \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C$$

$$30. \int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u^2} du = \frac{-\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$31. \int \frac{1}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} du = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$32. \int \frac{1}{u\sqrt{u^2+a^2}} du = \frac{-1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2+a^2}}{u} \right| + C$$

$$33. \int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}} du = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C$$

$$34. \int \frac{u^2}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} du = \frac{1}{2} \left( u \sqrt{u^2 \pm a^2} \mp a^2 \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| \right) + C$$

$$35. \int \frac{1}{u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} du = \mp \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2 u} + C$$

$$36. \int \frac{1}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} du = \frac{\pm u}{a^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$$

Formas que implican  $\sqrt{a^2 - u^2}$ ,  $a > 0$

$$37. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2} \left( u \sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \arcsen \frac{u}{a} \right) + C$$

$$38. \int u^2 \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{1}{8} \left[ u(2u^2 - a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + a^4 \arcsen \frac{u}{a} \right] + C$$

$$39. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$40. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2} du = \frac{-\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \arcsen \frac{u}{a} + C$$

$$41. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \arcsen \frac{u}{a} + C$$

$$42. \int \frac{1}{u\sqrt{a^2 - u^2}} du = \frac{-1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$43. \int \frac{u^2}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \frac{1}{2} \left( -u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \arcsen \frac{u}{a} \right) + C$$

$$44. \int \frac{1}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} du = \frac{-\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$$

$$45. \int \frac{1}{(a^2 - u^2)^{3/2}} du = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$$

### Formas que implican sen u o cos u

$$46. \int \sen u du = -\cos u + C$$

$$47. \int \cos u du = \sen u + C$$

$$48. \int \sen^2 u du = \frac{1}{2}(u - \sen u \cos u) + C$$

$$49. \int \cos^2 u du = \frac{1}{2}(u + \sen u \cos u) + C$$

$$50. \int \sen^n u du = -\frac{\sen^{n-1} u \cos u}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sen^{n-2} u du$$

$$51. \int \cos^n u du = \frac{\cos^{n-1} u \sen u}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u du$$

$$52. \int u \sen u du = \sen u - u \cos u + C$$

$$53. \int u \cos u du = \cos u + u \sen u + C$$

$$54. \int u^n \sen u du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u du$$

$$55. \int u^n \cos u du = u^n \sen u - n \int u^{n-1} \sen u du$$

$$56. \int \frac{1}{1 \pm \sen u} du = \tan u \mp \sec u + C$$

$$57. \int \frac{1}{1 \pm \cos u} du = -\cot u \pm \csc u + C$$

$$58. \int \frac{1}{\sen u \cos u} du = \ln|\tan u| + C$$

### Formas que implican tan u, cot u, sec u o csc u

$$59. \int \tan u du = -\ln|\cos u| + C$$

$$60. \int \cot u du = \ln|\sen u| + C$$

$$61. \int \sec u du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$62. \int \csc u du = \ln|\csc u - \cot u| + C \quad \text{o} \quad \int \csc u du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$$

$$63. \int \tan^2 u du = -u + \tan u + C$$

$$64. \int \cot^2 u du = -u - \cot u + C$$

$$65. \int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$66. \int \csc^2 u du = -\cot u + C$$

$$67. \int \tan^n u du = \frac{\tan^{n-1} u}{n-1} - \int \tan^{n-2} u du, n \neq 1$$

$$68. \int \cot^n u du = -\frac{\cot^{n-1} u}{n-1} - \int (\cot^{n-2} u) du, n \neq 1$$

$$69. \int \sec^n u du = \frac{\sec^{n-2} u \tan u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u du, n \neq 1$$

$$70. \int \csc^n u du = -\frac{\csc^{n-2} u \cot u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u du, n \neq 1$$

$$71. \int \frac{1}{1 \pm \tan u} du = \frac{1}{2}(u \pm \ln|\cos u \pm \operatorname{sen} u|) + C$$

$$72. \int \frac{1}{1 \pm \cot u} du = \frac{1}{2}(u \mp \ln|\operatorname{sen} u \pm \cos u|) + C$$

$$73. \int \frac{1}{1 \pm \sec u} du = u + \cot u \mp \operatorname{csc} u + C$$

$$74. \int \frac{1}{1 \pm \csc u} du = u - \tan u \pm \sec u + C$$

### Formas que implican funciones trigonométricas

$$75. \int \operatorname{arcsen} u du = u \operatorname{arcsen} u + \sqrt{1-u^2} + C$$

$$76. \int \operatorname{arccos} u du = u \operatorname{arccos} u - \sqrt{1-u^2} + C$$

$$77. \int \operatorname{arctan} u du = u \operatorname{arctan} u - \ln\sqrt{1+u^2} + C$$

$$78. \int \operatorname{arccot} u du = u \operatorname{arccot} u + \ln\sqrt{1+u^2} + C$$

$$79. \int \operatorname{arcsec} u du = u \operatorname{arcsec} u - \ln|u + \sqrt{u^2-1}| + C$$

$$80. \int \operatorname{arccsc} u du = u \operatorname{arccsc} u + \ln|u + \sqrt{u^2-1}| + C$$

### Formas que implican $e^u$

$$81. \int e^u du = e^u + C$$

$$82. \int ue^u du = (u-1)e^u + C$$

$$83. \int u^n e^u du = u^n e^u - n \int u^{n-1} e^u du$$

$$84. \int \frac{1}{1+e^u} du = u - \ln(1+e^u) + C$$

$$85. \int e^{au} \operatorname{sen} bu du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \operatorname{sen} bu - b \cos bu) + C$$

$$86. \int e^{au} \cos bu du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \cos bu + b \operatorname{sen} bu) + C$$

### Formas que implican $\ln u$

$$87. \int \ln u du = u(-1 + \ln u) + C$$

$$88. \int u \ln u du = \frac{u^2}{4}(-1 + 2 \ln u) + C$$

$$89. \int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[-1 + (n+1) \ln u] + C, n \neq -1$$

$$90. \int (\ln u)^2 du = u[2 - 2 \ln u + (\ln u)^2] + C$$

$$91. \int (\ln u)^n du = u(\ln u)^n - n \int (\ln u)^{n-1} du$$

### Formas que implican funciones hiperbólicas

$$92. \int \cosh u du = \operatorname{senh} u + C$$

$$93. \int \operatorname{senh} u du = \cosh u + C$$

$$94. \int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + C$$

$$95. \int \operatorname{csch}^2 u du = -\coth u + C$$

$$96. \int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$97. \int \operatorname{csch} u \coth u du = -\operatorname{csch} u + C$$

### Formas que implican funciones hiperbólicas inversas (en forma logarítmica)

$$98. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C$$

$$99. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C$$

$$100. \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{|u|} + C$$

¿Sabías qué? Los fractales son representaciones geométricas de la teoría del caos, cambiantes e impredecibles, que nos invitan a pensar en dimensiones y teorías maravillosas que solo el estudio analítico, cualitativo y cuantitativo del cálculo nos permitiría entender. Es por esta razón que en esta edición de *Matemáticas* los fractales son parte fundamental de la imagen que representa esta nueva colección.

**Matemáticas I. Cálculo diferencial** forma parte de una serie de libros elaborados para cubrir de manera específica los planes de estudio de los cursos de matemáticas a nivel superior: cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo vectorial, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales.

En esta nueva edición de **Cálculo diferencial** podrás estudiar:

- Números reales
- Funciones
- Límites y continuidad
- La derivada
- Aplicaciones de la derivada

Estos temas establecen una manera singular de abordar el cálculo mediante ejemplos, explicaciones, recursos didácticos, definiciones y demostraciones, las cuales se presentan de una manera clara, accesible y con un estilo directo y legible, lo que hacen de esta obra un clásico instantáneo.

Acompáñanos a conocer el **Cálculo diferencial** desde una perspectiva clara y eficaz.



Visite nuestro sitio en <http://latinoamerica.cengage.com>

ISBN-13: 978-607-526-649-7  
ISBN-10: 607-526-649-6

